ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΩΣ ΤΙΜΑΡΙΘΜΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΖΩΗΣ

υπο Κ. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

1. Ἡ διακύμανσις (Variance), ὡς γνωστόν, δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄλλας μερικὰς συνιστώσας, τῆς μορφῆς [1]

$$\sigma^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 \ldots\ldots + \sigma_T^2$$

ὅπου σ_α^2, σ_β^2,... εἶναι αἱ μερικαὶ διακυμάνσεις αἱ ὁποῖαι προέρχονται ἐκ τῶν ἐπιδράσεων γνωστῶν αἰτιῶν (παραγόντων) καὶ ἑπομένως δυναμένων νὰ ἐλεγχθῶσι, ἐνῷ σ_T^2 εἶναι ἡ διακύμανσις ἥτις ὀφείλεται εἰς ἄγνωστον ἢ ἀγνώστους αἰτίας (παράγοντας), ἃς δὲν δυνάμεθα καὶ νὰ ἐλέγξωμεν καὶ τὰς ὁποίας. τούτου ἕνεκεν, ἀποκαλοῦμεν σφάλμα ἤ, συμβατικῶς, ἀποδίδομεν εἰς τὸ τυχαῖον.

2. Ἡ μεταβλητὴ τώρα $\chi_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$ ἐμφαίνει ὅτι αὕτη συνίσταται ἐκ σταθεροῦ τινος τμήματος μ καὶ τῶν μεταβλητῶν α_i, β_j, καὶ ε_{ij}, ὑποτιθεμένων ἀνεξαρτήτων ἀλλήλων καὶ ἐχόντων ὡς μέσον τὸ μηδὲν καὶ ὡς διακυμάνσεις τὰς μνημονευθείσας ἀνωτέρω σ_α^2, σ_β^2, σ_T^2.

Ἐὰν οἱ παράγοντες Α καὶ Β, ὧν ἡ συμβολὴ ἐν τῇ μορφώσει τῆς x_{ij} ἐκδηλοῦται διὰ τῶν α_i καὶ β_j, ἠδύναντο νὰ τεθῶσιν ὑπὸ ἀπόλυτον ἔλεγχον, ἡ ἀντίστοιχος τούτων συμβολὴ θὰ ἦτο συνεχῶς σταθερά, τῆς μεταβολῆς τῆς χ_{ij} προερχομένης πλέον ἐκ μόνης τῆς μεταβολῆς τῆς ε_{ij}.

3. Σκοπὸς τῆς ἀναλύσεως τῆς Διακυμάνσεων εἶναι: ὁ προσδιορισμὸς τῆς σημασίας ἑκάστου ἐπιδρῶντος ἀπὸ τῆς τιμῆς τῆς μεταβλητῆς παράγοντος. Πρὸς τοῦτο, ἂν ἡ μεταβλητὴ ταχθῇ συμφώνως πρὸς δύο παράγοντας Α καὶ Β, τότε ἑκάστη τιμὴ αὐτῆς θὰ δίδεται ὑπὸ x_{ij}, εἰς ὀρθογώνιον κατάταξιν, ὅπου i θὰ παριστᾷ τὴν στήλην εἰς ἣν αὕτη ἀνήκει καὶ j τὴν γραμμήν, τῶν στηλῶν ἀντιστοιχουσῶν πρὸς τὸν παράγοντα Α καὶ τῶν γραμμῶν πρὸς τὸν παράγοντα Β.

4. Τούτου τεθέντος ὁ γενικὸς μέσος τῶν τιμῶν τῆς x_{ij} δίδεται ὑπό:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \sum_j x_{ij}}{N}$$ ὅπου N τὸ πλῆθος τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς.

---

(1) Διὰ τὴν μεταβλητὴν x ἡ διακύμανσις δίδεται ὑπὸ $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{N-1}$ ὅπου $\bar{x}$ ὁ μέσος καὶ N τὸ πλῆθος τῶν τιμῶν αὐτῆς.

καὶ ἡ διακύμανσις ὑπό:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i \sum_j \left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2}{N-1}$$

Ἡ ἀπόκλισις ὅμως ἑκάστης τιμῆς τῆς μεταβλητῆς ἀπὸ τοῦ μέσου αὐτῆς δύναται νὰ γραφῇ:

$$x_{ij} - \bar{x} = \left(\bar{x}_i - \bar{x}\right) + \left(\bar{x}_j - \bar{x}\right) + \left(x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x}\right)$$

καὶ ἑπομένως τετραγωνίζοντες κατὰ μέλη καὶ εἶτα ἀθροίζοντες διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν i καὶ j λαμβάνομεν:

$$\sum_i \sum_j \left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2 = \sum_i k\left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)^2 + \sum_j h\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2 + \sum_i \sum_j \left(x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x}\right)^2 \quad (1)$$

τῶν διπλῶν γινομένων μηδενιζομένων καὶ τοῦ h παριστῶντος τὸν ἀριθμὸν τῶν στηλῶν, τοῦ k τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμῶν.

5. Ὁ ἀριθμὸς τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς εἶναι N=hk καὶ ἑπομένως ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) εἶναι $(hk-1)\sigma^2$, ὅπου $(hk-1)$ ὁ ἀριθμὸς τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας. Δεχόμενοι νῦν ὅτι ὁ πληθυσμὸς (δηλ. τὸ ἄπειρον πλῆθος) ἐξ οὗ ἐλήφθησαν αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς εἶναι ὁμοιογενής, αἱ μαθηματικαὶ ἐλπίδες τῶν δύο πρώτων ἀθροισμάτων τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1) θὰ εἶναι $(h-1)\sigma^2$, $(k-1)\sigma^2$ καὶ ἑπομένως καὶ τοῦ τρίτου ἀθροίσματος: $(hk-k-h+1)\,\sigma^2=(h-1)\,(k-1)\sigma^2$.

6. Τὰ μερικὰ ἀθροίσματα διαιρούμενα διὰ τῶν ἀντιστοίχων αὐτοῖς βαθμῶν ἐλευθερίας παρέχουσιν ἀμερολήπτους ἐκτιμήσεις τῆς διακυμάνσεως τοῦ πληθυσμοῦ, στηριζομένας ἐπὶ τῶν β. ἐλευθερίας.

Ἐὰν δὲ ὁ πληθυσμὸς ὑποτεθῇ ὅτι ἀκολουθῇ τὸν Νόμον τοῦ Gauss—Laplace, τὰ τέσσαρα ἀθροίσματα τῆς (1) διαιρούμενα διὰ σ^2 κατανέμονται ὡς μεταβλητὸν χ^2 μὲ τοὺς ἀντίστοιχους β. ἐλευθερίας ὡς παραμέτρους (2).

7. Ἡ μεταβολὴ ἥτις ὀφείλεται εἰς τοὺς δύο παράγοντας A καὶ B τῆς κατατάξεως ἐκφράζεται ὑπὸ τῶν δύο πρώτων ἀθροισμάτων τὸν ἀνωτέρω μέλους τῆς (1), ἐνῷ ἡ μεταβολὴ ἥτις δὲν δύναται νὰ ἀποδοθῇ εἰς ὡρισμένον παράγοντα καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἐλεχθῇ καὶ ἥτις ὀφείλεται συνεπῶς εἰς ποικίλας αἰτίας, παρέχεται ὑπὸ τοῦ τρίτου ἀθροίσματος τῆς (1).

8. Τὸ περίγραμμα τῆς ἀναλύσεως τῆς διακυμάνσεως, βάσει κατατάξεως κατὰ δύο παράγοντας, μετὰ μιᾶς παρατηρήσεως, ἐν ἑκάστῃ θυρίδι τῆς ὀρθογωνίου κατατάξεως ἔχει ὡς ἑξῆς:

α) Ὑπόθεσις 1: Τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἐπιδράσεως τῶν h

(2) Κατὰ τὸ θεώρημα ὅτι: τὸ πηλίκον nS^2/σ^2 εἶναι χ^2 μεταβλητὸν μὲ $n-1$ β. ἐλευθερίας ἴδε: Mathematical Statistics Weatherburn σελ. 170.

στηλῶν εἶναι μηδέν· ὁ ἔλεγχος τῆς τοιαύτης ὑποθέσεως εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ἀποτελέσματος τῆς ἐπιδράσεως τῶν γραμμῶν.

β) Ὑπόθεσις 2: Τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἐπιδράσεως τῶν k γραμμῶν εἶνα μηδέν· ὁ ἔλεγχος τῆς τοιαύτης ὑποθέσεως εἶναι ἀνεξάρνητος τοῦ ἀποτελέσματος τῆς ἐπιδράσεως τῶν στηλῶν.

γ) Ἐκλογὴ ὁρίου σημαντηκότητος (Level of Significance) α, συνήθως $\alpha = 5\%$ ἢ 1%.

δ) Ἐφαρμογὴ τοῦ κριτηρίου F τοῦ Snedecor:

Διὰ τὴν ὑπόθεσιν 1 προσδιορίζεται τὸ πηλῖκον τοῦ μέσου τετραγώνου τῶν μέσων τῶν γραμμῶν διὰ τοῦ μέσου τετραγώνου τοῦ σφάλματος. Διὰ τὴν ὑπόθεσιν 2, ὁμοίως τὸ πηλῖκον τοῦ μέσου τετραγώνου τῶν μέσων τῶν στηλῶν διὰ τοῦ μέσου τετραγώνου τοῦ σφάλματος (3).

ε) Υἱοθετεῖται ἡ ὑπόθεσις ὅτι αἱ παρατηρήσεις (τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς) προέρχονται ἀπὸ πληθυσμοὺς τύπου Gauss—Laplace μὲ ὁμοιογενεῖς διακυμάνσεις καὶ ὅτι τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἐπιδράσεων τῶν γραμμῶν καὶ τῶν στηλῶν εἶναι προσθετικά.

στ) Ἡ κριτικὴ περιοχὴ διὰ τὴν ὑπόθεσιν 1 εἶναι:

$$F > F_{1-\alpha}\,[h-1,\ (k-1)\,(h-1)]$$

καὶ διὰ τὴν ὑπόθεσιν 2:

$$F > F_{1-\alpha}\,[k-1,\ (k-1)\,(h-1)]$$

ζ) Προσδιορίζεται τὸ πηλῖκον F καὶ υἱοθετεῖται ἢ ἀπορρίπτεται ἡ ὑπόθεσις.

9. Ἡ ἀνάλυσις τῆς διακυμάνσεως ἐνδείκνυται διὰ τὸν προσδιορισμόν, ἐὰν αἱ παρατηρούμεναι ἐποχικαὶ μεταβολαὶ εἰς δεδομένας σειρὰς ἐκφράζωσι ἀληθῆ ἐποχικὴν μεταβολὴν ἐν τῷ πατρικῷ πληθυσμῷ, καθ' ὅσον φαινομενικαὶ ἐποχικαὶ μεταβολαὶ θὰ ἠδύναντο νὰ ἐμφανίζωνται εἰς σειρὰν μηνιαίων παρατηρήσεων, καλυπτουσῶν περίοδόν τινα ἐτῶν. Ἄγνωστοι παράγοντες θὰ ἠδύναντο νὰ δημιουργήσωσι διαφορὰς μεταξὺ τῶν μέσων ὅλων τῶν Ἰανουαρίων, ὅλων τῶν Φεβρουαρίων κ.λ.π. καὶ ὅταν ἀκόμη δὲν θὰ ὑφίσταται ἀληθὴς ἐποχικὴ μεταβολή.

10. Ἐπειδὴ οἱ τιμάριθμοι, κατά τινα ἔννοιαν, ἀποτελοῦσιν ἀντιπροσωπευ-

(3) $F = e^{2z} = \dfrac{S_i^2}{S_s^2}$, $(i=1,2)$ αἱ διακυμάνσεις τῶν ὑποθέσεων 1 καὶ 2 εἶναι αἱ S_1^2, S_2^2 καὶ S_s^2 εἶναι ἡ διακύμανσις τοῦ σφάλματος. Αἱ τιμαὶ τοῦ F καὶ z δίδονται εἰς εἰδικοὺς πίνακας συναρτήσει τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας n_1 n_2.

τικὸν δεῖγμα τοῦ πληθυσμοῦ τῶν τιμῶν δύναται νὰ τεθῇ τὸ ἐρώτημα : Ἡ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἔτους ἐμφανιζομένη ἐποχικὴ μεταβολὴ εἶναι πραγματικὴ καὶ ἀποτελεῖ ἀληθῆ τοιαύτην ἢ ὄχι;

Τὴν ἀπάντησιν δύναται νὰ παράσχῃ μόνον ἡ ἀνάλυσις τῆς διακυμάνσεως.

Κατωτέρω παραθέτομεν τὸν πίνακα 1 τῆς ἐξελίξεως τοῦ Γενικοῦ τιμαρίθμου Κόστους Ζωῆς Ἀθηνῶν, τῆς Τραπέζης τῆς Ἑλλάδος, κατὰ μῆνα καὶ ἀπὸ τοῦ Ἰανουαρίου 1946 μέχρι καὶ Δεκεμβρίου 1951, μὲ βάσιν τὸ ἔτος 1938=1.

ΠΙΝΑΞ 1.

ἔτος	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1946	158.2	136,6	139,5	142,5	144,3	144,6	144,2	139,8	144,3	148,8	154,3	145,1
1947	156,2	158,2	161,0	162,4	167,5	168,3	168,7	172,1	175,5	185,1	204,0	216,2
1948	229,1	241,7	244,6	237,4	247,4	243,5	244,1	250,4	251,3	253,9	259,1	265,6
1949	280,0	283,4	290,5	285,0	285,4	295,7	277,9	278,6	285,6	277,2	282,2	283,3
1750	297,0	303,2	301,1	292,0	292,7	295,0	305,7	308,1	312,3	320,4	321,1	324,4
1951	329,6	336,7	350,6	342,6	353,0	343,8	338,7	339,4	339,5	352,2	353,1	355,9

Τὰ ἀνωτέρω ὅμως δεδομένα ἐκτὸς τῆς ἐποχικῆς μεταβολῆς ἐγκλείουσιν τὴν τάσιν καὶ τὴν κυκλικὴν καὶ ἄρρυθμον συνιστῶσαν κατὰ τὸν γνωστὸν τύπον Δ=Τ.Ε.Κ. Ἑπομένως πρὸ πάσης ἀναλύσεως τῆς διακυμάνσεως, ταῦτα δέον νὰ ἀπαλλαγῶσι τῆς ἐπιδράσεως τῆς τάσεως, ἂν καὶ τὰ δεδομένα δὲν καλύπτωσιν ὁλόκληρον δεκαετίαν, τουλάχιστον, ἥτις διὰ τὰς τοιαύτας διορθώσεις κρίνεται ἐκ τῶν ὧν οὐκ ἄνευ.

12. Ἡ ἐξίσωσις τῆς τάσεως εἶναι : $y=250{,}3+20{,}4X'$, μὲ ἀρχὴν τὴν 1 Ἰανουαρίου 1949 (X' παριστῶντος ἑξάμηνα), τῆς μηνιαίας αὐξήσεως οὔσης 3,4 καὶ τοῦ X' μεταβαλλομένου ἀπὸ -5 ἕως $+5$ (± 5, ± 3, ± 1). Ἡ ἐξίσωσις τῆς τάσεως ἀναγομένη εἰς τὴν 15 Ἰανουαρίου 1946 γίνεται $y=129{,}6+3{,}4x$ ($\chi=0,1,2,\ldots,71$ μῆνες). Αἱ θεωρητικαὶ μηνιαῖαι τιμαὶ τῆς τάσεως, ὑπολογισθεῖσαι διὰ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, ἐχρησιμοποιήθησαν πρὸς ἀπαλειφὴν τῆς τάσεως ἐκ τῶν ἀρχικῶν μηνιαίων δεδομένων, ἐφαρμοσθέντος τοῦ τύπου $\frac{\Delta}{T}=$Ε.Κ. Τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν δίδονται εἰς τὸν πίνακα 2, ὅπου ταῦτα ἐγκλείουσιν ἐκτὸς τῆς ἐποχικῆς μεταβολῆς καὶ τάς: κυκλικὴν καὶ ἄρρυθμον ἢ συμπτωματικὴν συνιστώσας.

ΠΙΝΑΞ 2.

ἔτος	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Γενικὸς Μέσος
1946	122,1	102,7	102,3	101,9	100,7	98,6	96,1	91,1	92,0	92,9	94,3	87,1	
1947	91,7	91,0	90,1	89,9	91,0	88,9	88,4	88,6	88,8	92,1	99,8	104,0	
1948	108,5	112,6	112,2	107,4	110,2	106,8	105,5	106,7	105,5	105,1	105,8	107,0	
1949	111,2	111,1	112,4	108,8	107,6	110.0	102,1	101,1	102,4	98.2	98,6	98,0	
1950	101,5	102,5	100,6	96,5	95,3	95,3	97,7	97,4	97,7	99,2	98,3	98,3	
1951	98,9	100,0	103,1	99,7	101,8	98,1	95,8	95,0	94,2	96,8	96,1	96,1	
Συντ. ἐποχ. μεταβ.	105,6	103,2	103,8	100,6	101,1	99,6	97,3	96,6	96,7	97,3	98,8	99,4	100

Ἐπειδὴ ὅμως τὰ δεδομένα τοῦ πίνακος 2, ἅτινα θὰ χρησιμοποιηθῶσιν πρὸς ἀνάλυσιν τῆς διακυμάνσεως, ἐμφανίζουσι μεγάλους ἀριθμοὺς ἐν ἑκάστῃ θυρίδι, πρὸς ἁπλούστευσιν τῆς ἐργασίας τῶν ὑπολογισμῶν ἀφαιροῦμεν ἐξ ἑκάστου τούτων τὸν ἀριθμὸν 100, δεδομένου ὅτι διὰ τούτου ἡ διακύμανσις παραμένει ἀναλλοίωτος. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν τὸν πίνακα 3.

ΠΙΝΑΞ 3.

ἔτος	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	T_j
1946	22,1	2,7	2,3	1,9	0,7	- 1,4	- 3,9	- 8,9	- 8,0	- 7,1	- 5,7	-12,9	-18,2
1947	- 8,3	- 9,0	- 9,9	-10,1	- 9,0	-11,1	-11,6	-11,4	-11,2	- 7,9	- 0,2	4,0	-95,7
1948	8,5	12,6	12,2	7,4	10,2	6,8	5,5	6,7	5,5	5,1	5,8	7,0	93,3
1949	11,2	11,1	12,4	8,8	7,6	10,0	2,1	1,1	2,4	- 1,8	- 1,4	- 2,0	61,5
1950	1,5	2,5	0,6	- 3,5	- 4,4	- 4,7	- 2,3	- 2,6	- 2,3	- 0,8	- 1,7	- 1,7	-19,4
1951	- 1,1	0	3,1	- 0,3	1,8	- 1,9	- 4,2	- 5,0	- 5,8	- 3,2	- 3,9	4,0	-16,5
Ti	33,9	19,9	20,7	4,2	6,9	- 2,3	-14,4	-20,1	-19,4	-15,7	- 7,1	- 1,6	5
χi	5,65	3,31	3,90	0,70	1,15	-0,38	-2,60	-3,35	-3,23	-2,61	-1,18	-0,26	

13. Ἀλλά· $\sum_i \sum_j \left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2 = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$ ὅπου $T = \Sigma T_i = \Sigma T_j = 5$, $N = 72$

$$\sum_i \sum_j x_{ij}^2 = (22,1)^2 + (-8,3)^2 + \ldots + (-1,7)^2 + (4,0)^2 = 3616,24, \frac{T^2}{N} = 0,347$$

$$\sum_i \sum_j \left(x^2_{ij} - x\right)^2 = 3616,24 - 0,347 = 3615,893.$$

$$\sum_i K\left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{\sum_i T_i^2}{k} - \frac{T^2}{N} = \frac{3331,44}{6} - 0,347 = 554,893$$

$$\sum_j h\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2 = \frac{\sum_j T_j^2}{h} - \frac{T^2}{N} = \frac{22625,48}{12} - 0,347 = 1885.109.$$

καὶ $\sum_i \sum_j \left(x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x}\right)^2 = 3615,893 - (554,893 + 1885.109) = 117,891.$

14. Κατόπιν τῶν ἄνω προβαίνομεν εἰς τὴν διατύπωσιν, ὡς κάτωθι, τῶν πορισμάτων τῆς ἀναλύσεως τῆς διακυμάνσεως.

ΠΙΝΑΞ 4.

Πηγὴ Μεταβολῆς (1)	Βαθμὸς ἐλευθερίας (2)	Ἄθροισμα τετραγώνων (3)	Μέσον τετράγωνον (3) : (2) = (4)	Συνιστῶσαι διακυμάνσεις (5)
Μεταξὺ τῶν ἐτῶν	5	554,893	110,978	$\sigma_o^2 + 12\sigma_\varepsilon^2$
Μεταξὺ τῶν μηνῶν	11	1885,109	171,373	$\sigma_o^2 + 6\sigma_\mu^2$
Σφάλμα	55	1175,891	21,379	σ_o^2
Σύνολον	71	3615,893	—	

Σχηματίζομεν νῦν τοὺς λόγους $F_1 = \frac{110,978}{21,379} = 5,19$, $F_2 = \frac{171,373}{21.379} =$ $= 8.01$.

Αἱ κριτικαὶ τιμαὶ εἰς 5% τῆς F_1 (5,55) εἶναι 4,4344 καὶ τῆς F_2 (11,55) εἶναι 2,4844.

Ἀμφότεροι οἱ εὑρεθέντες λόγος F_1 καὶ F_2 εἶναι κατὰ πολὺ μεγαλείτεροι τῶν εἰς τοὺς αὐτοὺς βαθμοὺς ἐλευθερίας ἀντιστοιχουσῶν κριτικῶν τιμῶν F. Κατὰ συνέπειαν αἱ εὑρεθεῖσαι διακυμάνσεις εἶναι στατιστικῶς σημαντικαί, τουτέστιν ἡ πιθανότης τῆς ἐμφανίσεως τούτων νὰ ὀφείλεται εἰς τὴν τύχην μόνον εἶναι ἐλαχίστη. Σημαντικωτέρα δὲ ἐξ ὅλων εἶναι ἡ ἔχουσα ὡς πηγὴν μεταβολῆς μεταξὺ τῶν μηνῶν. Τὸ πρόβλημα τοῦ ἐλέγχου τῆς ἐποχικότητος δύναται τότε νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ ἑπόμενον: «Δύναται ἡ διακύμανσις μεταξὺ τῶν μέσων τῶν μηνῶν νὰ ἀποδοθῇ εἰς τοὺς τυχαίους παράγοντας, τοὺς δημιουργοὺς τοῦ σφάλματος»; Ἐν ἄλλαις λέξεσιν οἱ μέσοι 105, 6—103,2—, κατ. (πίναξ. 2) εἶναι σημαντικῶς διάφοροι τοῦ 100;

15. 'Επειδή ή διακύμανσις μεταξύ τών μέσων τών μηνών υπερβαίνει κατά πολύ τήν τοιαύτην τοῦ σφάλματος, ή τεθεῖσα υπόθεσις απορρίπτεται καὶ συνάγεται ώς προφανής ή ύπαρξις ώρισμένης εποχικής μεταβολῆς· καὶ δὴ ἀπὸ τοῦ Μαΐου μέχρι καὶ τοῦ Αυγούστου εκάστου έτους διὰ τὴν θεωρηθεῖσαν θετῆ περίοδον.

Αἱ διακυμάνσεις μεταξύ τών μέσων τών ετών θὰ ἠδύνατο νὰ ὑποστηριχθῆ ὅτι πιθανῶς περιλαμβάνουσι καὶ τὰς κυκλικὰς καὶ τὰς ἀρρύθμους ἐπιδράσεις, ἂν μὴ αἱ τελευταῖαι δὲν περιελαμβάνοντο ἐν τῷ σφάλματι. 'Επειδή όμως ή διακύμανσις μεταξύ τών ετών είναι 5πλασία τῆς τοῦ σφάλματος, δύναται νὰ λεχθῆ ὅτι αὕτη περιλαμβάνει ὡρισμένους παράγοντας ἐπιδρῶντας ἐκ τοῦ κύκλου, διαφόρους τῶν τυχαίων οἵτινες περιλαμβάνονται ἐν τῇ διακυμάνσει τοῦ σφάλματος.

'Εν συμπεράσματι, βάσει τῶν στατιστικῶν κριτηρίων, ὁ ἀρχικὸς πληθυσμὸς τῶν τιμῶν ἐμφανίζει σαφῆ καὶ πραγματικὴν ἐποχικὴν μεταβολήν.

16. Τὸ χρησιμοποιηθὲν κριτήριον F τοῦ Snedecor, σκοπὸν ἔχει νὰ ἐλέγξη ἐὰν τὰ δείγματα προέρχωνται ἐκ τοῦ αὐτοῦ κανονικοῦ πληθυσμοῦ (Gauss—Laplace) ἢ Κανονικῶν τοιούτων, ἐχόντων ἴσην διακύμανσιν, μιᾶς τιμῆς τοῦ F μικροτέρας τῆς τοιαύτης τῶν πινάκων εἰς ὅριον σημαντικότητος 5% οὔσης στατιστικῶς ἀσημάντου, ἐνῷ ἀντιθέτως μεγαλειτέρας τῆς κριτικῆς τοιαύτης οὔσης στατιστικῶς σημαντικῆς, δηλ. διὰ τὴν μόρφωσιν αὐτῆς ὑφίσταται συγκεκριμένη αἰτία καὶ οὕτω ἀπορρίπτεται ἡ ὑπόθεσις τῆς ἴσης διακυμάνσεως.

'Εν κατακλεῖδι οἱ μέσοι τῶν ὁμωνύμων μηνῶν εἶναι σημαντικῶς διάφοροι ἀλλήλων, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὴν ὑφισταμένην ἐποχικὴν μεταβολὴν αὐτῶν.

17. Ἤδη θὰ ἀναλύσωμεν τὴν ὅλην διακύμανσιν εἰς τὰς μερικὰς συνιστώσας αὐτῆς. Πράγματι ἡ σ_o^2 θὰ τείνη πρὸς 21,379 ἐφ' ὅσον τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος θὰ αὐξάνη ἀπεριορίστως. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ ἔχωμεν καὶ $\sigma_o^2 + 6\sigma_\mu^2 \rightarrow 171{,}373$ καὶ $\sigma_o^2 + 12\sigma_\varepsilon^2 \rightarrow 110{,}978$.

'Επομένως αἱ μερικαὶ συνιστῶσαι τῆς διακυμάνσεως εἶναι :

$\sigma_\mu^2 = 24{,}999$	ἢ	46,6 %
$\sigma_\varepsilon^2 = 7{,}466$	ἢ	13,7 %
$\sigma_o^2 = 21{,}379$	ἢ	39,7 %
$\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_o^2 = 53{,}844$	ἢ	100 %

Δυνάμεθα κατόπιν τῶν ἄνω νὰ δεχθῶμεν ὅτι :

α) Ἡ ἐποχικὴ μεταβολὴ εἶναι τὰ 46,6% τῆς ὅλης διακυμάνσεως,

β) Ἡ κυκλικὴ μεταβολή, ὁμοίως, μόνον 13,7%.

γ) Ἡ ἐξ ἀγνώστων παραγόντων προκύπτουσα 39,7%.

Κατ' ἄλλην διατύπωσιν ἐν τῇ διαμορφώσει τῆς ὅλης διακυμάνσεως ἡ ἐποχικὴ μεταβολὴ συμβάλλει, περίπου κατὰ τὸ ἥμισυ, τῆς ἐκ τοῦ κύκλου μόλις ὑπερβαινούσης τὸ 10%.

18. Τέλος θὰ ἐξετάσωμεν ἐγγύτερον τὰς διαφορὰς τῶν μέσων τῶν διαφόρων μηνῶν πρὸς ἔλεγχον τῆς σημαντικότητος αὐτῶν, ἐφαρμόζοντες τὸ κριτήριον t τοῦ Student. Πρὸς τοῦτο θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν διακύμανσιν τοῦ σφάλματος μὲ $\nu = 55$ βαθμοὺς ἐλευθερίας. Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι $\sigma_o^2 = s^2 = 21{,}379$ ἢ $s = 4{,}6237$. Ἐὰν νῦν $\bar{x}_1$ καὶ $\bar{x}_2$ εἶναι μέσοι δύο διαφόρων μηνῶν, ἡ διακύμανσις τῆς διαφορᾶς αὐτῶν $[\bar{x}_1 - \bar{x}_2]$ θὰ δίδεται ὑπὸ $S^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{S^2}{3}$, διότι $n = 6$ ἔτη καὶ ἄρα $t = \frac{[\bar{x}_1 - \bar{x}_2]\sqrt{3}}{S}$. Ἐὰν τώρα κληθῇ m ἡ ἐλαχίστη διαφορὰ μεταξὺ 2 μέσων ἥτις εἶναι σημαντικὴ εἰς ὅριον 5%, τότε δέον νὰ ἔχωμεν $\frac{m\sqrt{3}}{S} = 2{,}005$ ἢ $m = 5{,}35$.

Κατ' ἀκολουθίαν ἡ διαφορὰ δύο τυχόντων μέσων ἥτις θὰ εἶναι μείζων τῶν 5,35 θὰ εἶναι στατιστικῶς σημαντικὴ ἤτοι θὰ προέρχεται ἐξ ὡρισμένης αἰτίας, βάσει τῆς μηδὲν ὑποθέσεως, ἐνῷ μικροτέρα τῶν 5,35 θὰ εἶναι ἀσήμαντος ὀφειλομένη εἰς τὰ τυχαῖα τῆς δειγματοληψίας σφάλματα.

Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν διὰ τὰς διαφορὰς τῶν μέσων τῶν ἐτῶν·

$\frac{S}{\sqrt{6}} = \frac{S\sqrt{6}}{6}$ καὶ ἑπομένως διὰ $\nu = 55$ β. ἐλευθερίας ἡ ἐλαχίστη διαφορὰ ε ἥτις εἶναι σημαντικὴ εἰς 5% θὰ δίδεται ὑπὸ $\frac{\varepsilon\, 6}{S\sqrt{6}} = 2{,}005$ ἢ $\varepsilon = 3{,}78$(*).

(*) Cramer: Mathematical Methods of statistics, σελ. 540.