ΠΕΡΙΟΔΙΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΥΠΟ

Κ. Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἐμπειρικαὶ συναρτήσεις περιοδικῆς κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον μορφῆς συχνάκις ἀπαντῶσιν εἰς τὴν δημογραφίαν καὶ τὴν οἰκονομετρικήν, ἐστὶν ὅτε μάλιστα περιόδου σαφῶς ἐκδηλουμένης καὶ σταθερᾶς. Τὰς τοιαύτας ἐμπειρικὰς συναρτήσεις θὰ καλῶμεν περιοδικὰς καὶ θὰ παριστῶμεν ταύτας συμβολικῶς διὰ $f(t)$, ἐὰν αὗται λαμβάνωσι τὴν αὐτὴν ἢ προσεγγιζόντως τὴν αὐτὴν τιμήν, διὰ τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς t καὶ $t+T$, οἱασδήποτε οὔσης τῆς τιμῆς t, δηλ. ἐὰν ἔχωμεν $f(t)=f(t+T)$.

Ἐκ τῆς συμβολικῆς ταύτης σχέσεως εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς T εἶναι μία περίοδος τῆς $f(t)$ καὶ πᾶς ἀριθμὸς νT, τοῦ ν ὄντος οἱουδήποτε ἀκεραίου θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ, εἶναι ἐπίσης περίοδος τῆς $f(t)$. Ἐν τῇ γενικωτάτῃ ὅθεν ἐννοίᾳ πᾶσα περιοδικὴ συνάρτησις κέκτηται ἀπειρίας περιόδων.

Ἵνα καταστήσωμεν σαφέστερα τὰ ἄνω προσθέτομεν ὅτι παρ' ἡμῖν ἡ ὑπεροχὴ τῶν γεννήσεων παρεχομένων ὡς ποσοστῶν ἐπὶ 1000 κατοίκων ἔχει μορφὴν περιοδικήν, τῆς περιόδου ταύτης οὔσης περίπου 9ετοῦς. Πράγματι τὸ μέγιστον τοῦ ὡς εἴρηται ποσοστοῦ ἀπαντᾷ κατὰ τὰ ἀκόλουθα ἔτη καὶ εἶναι προσεγγιζόντως σταθερόν, ἤτοι

ἔτος	ποσοστὸν τοῖς ο/οο κατοίκων
1867	10,10
1876	10,11
1885	10,91

Ἐν ἄλλαις λέξεσιν τὸ φαινόμενον τῆς ὑπεροχῆς τῶν γεννήσεων ἐπὶ τῶν θανάτων ἀναχθὲν εἰς ποσοστὸν ἐπὶ 1000 κατοίκων ἔχει μορφήν, ἐν τῇ διὰ τοῦ χρόνου ἐκδηλώσει αὐτοῦ, περιοδικὴν τῆς περιόδου οὔσης 9ετοῦς ἤτοι τοῦ φαινομένου λαμβάνοντος τὴν μεγίστην αὐτοῦ τιμήν, προσεγγιζόντως σταθεράν, ἀνὰ πᾶσαν ἐννεατίαν. Πιθανὸν νὰ ὑφίστανται καὶ δευτερεύουσαι περίοδοι, ὑποπολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς ἢ θεμελιώδους 9ετοῦς, ἅτινα νὰ μὴ φαίνωνται σαφῶς καὶ ἐκ πρώτης ὄψεως ἐκ τῶν ἀνὰ χεῖρας στατιστικῶν στοιχείων, ἄνευ ἐπίτηδες ἐπεξεργασίας τούτων. Ἐπὶ τοῦ τελευταίου τούτου ζητήματος θὰ ἐπανέλθωμεν ἐν καιρῷ κατωτέρω· ἤδη δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ὅτι ὅταν αἱ τιμαὶ τῶν θεωρουμένων ἐμπειρικῶν συναρτήσεων παρέχονται διὰ τῆς στατιστικῆς ὑποτυπώσεως καὶ δι' ὡρισμένας τῆς μεταβλητῆς t τιμάς, τοῦθ' ὅπερ πάντοτε συμβαίνει προκειμένου περὶ στατιστικῶν συναρτήσεων, είναι φυσικὸν νὰ γίνῃ δεκτὸν ἐξ ὑποθέσεως ὅτι αἱ τιμαὶ αὗται συνέχονται συνεκθέσει συνεχοῦς συναρτήσεως τοῦ t.

Συνήθως αἱ ἐκ παρατηρήσεως συναρτήσεις ὁρίζονται ἐμπειρικῶς διά τινα περίοδον T διάφορον τοῦ 2π. Γεννᾶται ἤδη τὸ ἐρώτημα εἶναι δυνατὴ ἡ ὑποκατάστασις τῆς ἐμπειρικῆς περιοδικῆς συναρτήσεως $y=f(t)$, ὑπὸ ἄλλης ἀναλυτικῆς, ἀπεικονιζούσης κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον πιστῶς τὰ ἐμπειρικὰ δεδομένα καὶ ἧς συνεπῶς ἡ γραφικὴ ἀναπαράστασις νὰ διέρχεται, ὅσῳ τὸ δυνατόν, ἐγγύτατα τῶν δεδομένων τοῦ ἐμπειρικοῦ διαγράμματος $y=f(t)$; 'Επειδὴ αἱ περιοδικαὶ συναρτήσεις μαθηματικῶς ἀναπαρίστανται ἢ μᾶλλον ἐκφράζονται ὑπὸ τριγωνομετρικῶν τοιούτων ἢ ὀρθώτερον ὑπὸ τριγωνομετρικῶν ἀθροισμάτων, θὰ πρέπει διὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἀναπαράστασιν τῶν ἐμπειρικῶν συναρτήσεων νὰ χρησιμοποιῶνται τοιαῦτα ἀθροίσματα. 'Επειδὴ δὲ ἡ ἀρχικὴ μεταβλητὴ t γίνεται $t+T$, ἡ νέα μεταβλητὴ x, δέον νὰ λάβῃ τὴν τιμὴν $x+2\pi$, λόγῳ τοῦ περιοδικοῦ τῆς συναρτήσεως, καὶ ἡ συνθήκη αὕτη πληροῦται ἂν τεθῇ $x=\frac{2\pi}{T}t$, ὅτε ἂν τὸ t γίνῃ $t+T$, τὸ x γίνεται $\frac{2\pi}{T}(t+T)$ ἢ $\frac{2\pi}{T}t+2\pi$ δηλ. $x+2\pi$.

Διὰ τῆς προσηκούσης ὅθεν ἀλλαγῆς τῆς μεταβλητῆς δύναται νὰ ἀχθῇ ἡ περίπτωσις τῆς στατιστικῆς ἢ ἐμπειρικῆς περιοδικῆς συναρτήσεως $y=f(t)$, περιόδου οἱασδήποτε, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς περιοδικῆς συναρτήσεως $y=\varphi(x)$, περιόδου 2π.

Τὸ πρόβλημα ὅθεν τῆς ὑποκαταστάσεως τῆς ἐμπειρικῆς περιοδικῆς συναρτήσεως ὑπὸ σειρᾶς τριγωνομετρικῶν ἀθροισμάτων συνίσταται εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς δεδομένης ἐμπειρικῆς συναρτήσεως $y=f(t)$ εἰς σειρὰν τῆς μορφῆς

$$y=\alpha_0+\alpha_1 \text{ συν } x+\alpha_2 \text{ συν } 2x+\ldots+\beta_1 \text{ ἡμ.}x+\beta_2 \text{ ἡμ. } 2x+\ldots \quad (1)$$

τῶν ἄνω ἀναγομένων πάντοτε εἰς περίοδον 2π.

Τὸ ἄθροισμα (1) ἐπειδὴ περιέχει ἡμίτονα καὶ συνημίτονα δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἄθροισμα ὁμοειδῶν γραμμῶν ὅτε τίθεται ὑπὸ τὴν ἀκόλουθον μορφήν, συνήθως.

$$y=\alpha_0+p_1 \text{ ἡμ. }(\varphi_1+x)+p_2 \text{ ἡμ. }(\varphi_2+2x)+\ldots \quad (2)$$

ἀλλὰ p_1 ἡμ. $(\varphi_1+x)=p_1$ ἡμ. φ_1 συν. $x+p_1$ συν. φ_1 ἡμ. x

p_2 ἡμ. $(\varphi_2+2x)=p_2$ ἡμ. φ_2 συν. $2x+p_2$ συν. φ_2 ἡμ. $2x$.

. . . .

ἂν νῦν τεθῇ
$$\left.\begin{array}{ll} p_1 \text{ ἡμ. } \varphi_1=\alpha_1, & p_1 \text{ συν. } \varphi_1=\beta_1 \\ p_2 \text{ ἡμ. } \varphi_2=\alpha_2, & p_2 \text{ συν. } \varphi_2=\beta_2 \end{array}\right\} \quad (3)$$

ἡ ἔκφρασις (2) γράφεται

$$y=\alpha_0+\alpha_1 \text{ συν. } x+\alpha_2 \text{ συν. } 2x+\ldots+\beta_1 \text{ ἡμ. } x+\beta_2 \text{ ἡμ. } 2x+\ldots$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3) λαμβάνομεν
P^2_1 (ἡμ.$^2\varphi_1$ + συν.$^2\varphi$)$=\alpha^2_1+\beta^2_1$ ἢ $p^2_1=\alpha^2_1+\beta^2_1$ ἢ $p_1=+\sqrt{\alpha^2_1+\beta^2_1}$
καὶ γενικῶς $p_i=\sqrt{\alpha^2_i+\beta^2_i}$, τοῦ $i=1, 2, \ldots$

καὶ ἐφ $\varphi_i=\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ ἢ τὸ τόξ. ἐφαπτ $\frac{\alpha_i}{\beta_i}=\varphi_i$, $i=1,2,3, \ldots$

Κατὰ συνεκδοχὴν ἐκ τῆς Μηχανικῆς οἱ ὅροι τῆς (2). p_2 ἡμ. $(\varphi_2+2x,)$ p_3 ἡμ. (φ_3+3x), ... καλοῦνται ἁ ρ μ ο ν ι κ α ὶ τάξεως 2,3, . . . τοῦ ὅρου p_1 ἡμ. (φ_1+x) καλουμένου θ ε μ ε λ ι ώ δ ο υ ς ἁ ρ μ ο ν ι κ ο ῦ τ ά ξ ε ω ς 1 ἢ π ρ ω τ ε ύ ο ν τ ο ς ὅ ρ ο υ.

Ἐπειδὴ νῦν τὸ συνημίτονον μεταβάλλεται μεταξὺ -1 καὶ $+1$, ἡ ἁρμονικὴ τάξεως i μεταβάλλεται μεταξὺ $-p$ καὶ $+p_i$. Ἡ μείζων ὅθεν τιμὴ μιᾶς ἁρμονικῆς εἶναι p_i κατ' ἀπόλυτον τιμὴν δηλ. τὸ ἡ μ ί π λ α τ ο ς τ α ύ τ η ς. Ὅταν φ_i+ix μεταβάλλεται κατὰ 2π, ix μεταβάλλεται κατὰ 2π, x ἑπομένως μεταβάλλεται κατὰ $\frac{2\pi}{i}$, ἥτις εἶναι περίοδος τῆς ἁρμονικῆς, τῆς τάξεως i. Ἑπομένως αἱ διαδοχικαὶ περίοδοι εἶναι $\frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \ldots, \frac{2\pi}{i}$, τῆς περιόδου τῆς θεμελιώδους ἁρμονικῆς οὔσης 2π. Κατὰ ταῦτα οἱαδήποτε περιοδικὴ συνάρτησις ἀναγομένη εἰς τὴν περίοδον 2π, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ἄθροισμα μιᾶς θεμελιώδους συναρτήσεως, περιόδου 2π, καὶ πλείστων ἄλλων ἁρμονικῶν περιόδων ἴσων πρὸς ὑποπολλαπλάσια τοῦ 2π.

Ἐν τῇ ἐκφράσει (1) γραφομένῃ ὑπὸ τὴν περιωρισμένην μορφὴν

$$y=\alpha_0+\alpha \text{ ἡμ. } (\varphi+\frac{2\pi}{T}t).$$

τὸ α εἶναι τὸ πλάτος τῆς περιόδου, φ ἡ γωνία ἀρχικῆς φάσεως, T ἡ περίοδος τῆς ἁρμονικῆς κινήσεως καὶ α_1 ἡ μέση τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἐν τῇ περιόδῳ T. Αἱ ἄνω ὀνομασίαι δύνανται, ὡς γνωστόν, νὰ ἐξηγηθῶσιν ὡς ἑξῆς: Ἐὰν ἐπί τινος εὐθείας προβάλλεται σημεῖόν τι κινούμενον ἰσοταχῶς ἐπὶ περιφερείας κύκλου, αἱ προβολαί του θὰ ἐκτελῶσιν ἐπὶ τῆς εὐθείας παλινδρομικὴν κίνησιν, τὴν καλουμένην ἁ ρ μ ο ν ι κ ή ν. Ἐὰν ὅθεν T εἶναι ὁ χρόνος μιᾶς ὁλοκλήρου περιφορᾶς καὶ φ τὸ τόξον ὅπερ τὸ κινητὸν ἔχει ἤδη διατρέξει κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου $(t=o)$, ἡ θέσις τούτου ἐπὶ τῆς περιφερείας θὰ δίδεται ὑπὸ $\delta=\varphi+\frac{2\pi}{T}t$, ἡ δὲ θέσις τῆς προβολῆς τῶν σημείων ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας ὑπὸ

$$x=\alpha \text{ συν. } (\frac{\pi}{2}-\delta)=\alpha \text{ ἡμ. } \delta=\alpha \text{ ἡμ. } (\varphi+\frac{2\pi}{\Gamma}t)$$

ὅπου α ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἐξ οὗ κλπ.

Προσαρμογὴ στατιστικῶν συναρτήσεων

1ον. Περίοδος γνωστή.

Περιοδική τις συνάρτησις ἐμπειρικὴ ἀναγομένη εἰς τὴν περίοδον 2π, ἐπειδὴ ὁρίζεται ὑπὸ τῆς παρατηρήσεως (ἐμπειρικῶς δηλ.) ὑπὸ ν τιμῶν

$x_1, y_1 \cdot x_2, y_2 \cdot x_3, y_3 \cdot \ldots \ldots x_\nu, y_\nu$

αἵτινες ἀνήκουσιν εἰς τὴν αὐτὴν περίοδον, ζητεῖται νὰ ἀναπαρασταθῇ προσεγγιζόντως ὑπὸ τριγωνομετρικοῦ ἀθροίσματος τάξεως μ δηλ.

$y = \alpha_0 + \alpha_1$ συν. $x + \alpha_2$ συν. $2x + \ldots + \alpha_\mu$ συν. $\mu x + \ldots + \beta_1$ ἡμ. $x + \ldots + \beta_\mu$ ἡμ. μx.

Συναρτήσει τῶν ν ζευγῶν τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν θὰ ἔχωμεν νὰ προσδιορίσωμεν $2\mu+1$ σταθεράς, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1\ \beta_2, \ldots$. Ὁ τοιοῦτος προσδιορισμὸς εἶναι δυνατὸς ἐὰν $2\mu+1 \leq \nu$. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐνδείκνυται πρὸς τοῦτο, ἤτοι ἐπὶ βάσει ταύτης δέον νὰ ἔχωμεν

$\sum [y - (\alpha_0 + \alpha_0$ συν. $x + \alpha_2$ συν. $2x + \ldots + \beta_1$ ἡμ. $x + \beta_2$ ἡμ $2x + \ldots)]^2$

ἐλάχιστον. Τοῦτο εὑρίσκεται ἂν αἱ μερικαὶ παράγωγοι ὡς πρὸς τὰς παραμέτρους ἐξισωθῶσι πρὸς τὸ μηδέν, ὅτε καὶ προκύπτουσι αἱ κάτωθι κανονικαὶ ἐξισώσεις

$\Sigma y_i = \nu\alpha_0 + \alpha_1\ \Sigma$ συν. $x + \alpha_2\ \Sigma$ συν. $2x + \ldots \beta_1\ \Sigma$ ἡμ. $x + \ldots$

Σy_i συν. $x = \alpha_0\ \Sigma$ συν. $x + \alpha_1\ \Sigma$ συν.$^2 x + \alpha_2\ \Sigma$ συν. x συν. $2x + \ldots$

$+ \beta_1\ \Sigma$ ἡμ. x συν. $x + \ldots$

. . . .

Σy_i ἡμ. $x = \alpha_0\ \Sigma$ ἡμ. $x + \alpha_1\ \Sigma$ ἡμ. x συν. $x + \ldots + \beta_1\ \Sigma$ ημ. $^2x + \ldots$

τοῦ x λαμβάνοντος τὴν τιμὴν $x = \frac{2\pi}{\nu}\, i$ ὅπου $i = 0, 1, 2, \ldots$ ὡς ἐκ τῆς ἀλλαγῆς τῆς μεταβλητῆς t. Τὸ ἄνω πλῆθος τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων περιορίζεται κατὰ πολύ, καθ' ὅσον

Σ συν. $x =$ συν. $0 +$ συν. $\frac{2\pi}{\nu} +$ συν. $\frac{2\pi}{\nu}\, 2 +$ συν. $\frac{2\pi}{\nu}\, 3 + \ldots +$ συν. $\frac{2\pi}{\nu}\, (\nu-1)$

ἥτις εἶναι ἄθροισμα συνημιτόνων βαινόντων κατὰ πρόοδον ἀριθμητικήν. Ἑπομένως ἂν ὁ λόγος τῆς ἐκ ν τόξων ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι $\vartheta = \frac{2\pi}{\nu}$, θὰ ἔχωμεν τότε, ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς γνωστῆς ταυτότητος.

ἡμ. $(\alpha + \vartheta/_2) -$ ἡμ. $(\alpha - \vartheta/_2) = 2$ συν. α ἡμ. $\vartheta/_2$.

ὅπου ἀντικαθιστῶντες διαδοχικῶς τὸ α διὰ τῶν $\alpha+\vartheta$, $\alpha+2\vartheta$,.. εὑρίσκομεν:

ἡμ. $(\alpha + \vartheta/_2) -$ ἡμ. $(\alpha - \vartheta/_2) = 2$ συν. α ἡμ. $\vartheta/_2$.

ἡμ. $(\alpha + {}^{3\vartheta}/_2) -$ ἡμ. $(\alpha + \vartheta/_2) = 2$ συν. $(\alpha+\vartheta)$ ἡμ. $\vartheta/_2$.

ἡμ. $(\alpha + {}^{5\vartheta}/_2) -$ ἡμ. $(\alpha + {}^{3\vartheta}/_2) = 2$ συν. $(\alpha+2\vartheta)$ ἡμ. $\vartheta/_2$.

. . . .

$$\text{ἡμ.}\left(\alpha+\frac{2\nu-1}{2}\theta\right)-\text{ἡμ.}\left(\alpha+\frac{2\nu-3}{2}\theta\right)=2\ \text{συν.}\,[\alpha+(\nu-1)\,\theta]\ \text{ἡμ.}\,\theta/_2.$$

καὶ ἀθροίζοντες κατὰ μέλη

$$2\ \text{ἡμ.}\,\theta/_2\,[\text{συν.}\,\alpha+\text{συν.}\,(\alpha+\theta)+\text{συν.}\,(\alpha+2\theta)+\ldots]=\text{ἡμ.}\left(\alpha+\frac{2\nu-1}{2\theta}\right.$$
$$-\text{ἡμ.}\,(\alpha-\theta/_2).$$

καὶ καλοῦντες S_1 τὸ ἄθροισμα τῶν συνημιτόνων.

$$2\ \text{ἡμ.}\,\theta/_2.\ S_1=\text{ἡμ.}\left[\alpha+\frac{2\nu-1}{2}\theta\right)-\text{ἡμ.}\,(\alpha-\theta/_2).$$

ἀλλὰ $\text{ἡμ.}\ p-\text{ἡμ.}\ q=2\ \text{συν.}\ \frac{p-q}{2}\text{ἡμ.}\frac{p-q}{2}$, ὅθεν

$\frac{p+q}{2}=\alpha+\frac{\nu-1}{2}\theta$ καὶ $\frac{p-q}{2}=\frac{\nu\theta}{2}$, ἑπομένως

$$S_1=\frac{2\ \text{συν.}\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2}\theta\right)\text{ἡμ.}\frac{\nu\theta}{2}}{2\ \text{ἡμ.}\ \theta/_2}$$

ἀλλὰ $\theta=\frac{2\pi}{\nu}$, ἑπομένως $\text{ἡμ.}\frac{\nu\theta}{2}=\text{ἡμ.}\ \pi=0$

κατ' ἀκολουθίαν $\Sigma\ \text{συν}\ \frac{2\pi}{\nu}i=0$.

Ὁμοίως ἐπειδὴ $\Sigma\ \text{ἡμ.}\ \frac{2\pi}{\nu}i=\text{ημ.}\ 0+\text{ἡμ.}\ \frac{2\pi}{\nu}+\text{ἡμ.}\frac{2\pi}{\nu}.2+\ldots=\Sigma\ \text{ἡμ.}\ x$

δηλ. τὸ ἄθροισμα ἡμιτόνων τόξων βαινόντων κατὰ πρόοδον ἀριθμητικὴν λόγου $\theta=\frac{2\pi}{\nu}$

Ἀναχωροῦντες τότε καὶ αὖθις ἐκ τῆς γνωστῆς ταυτότητος.

$$\text{συν}\ (\alpha-\theta/_2)-\text{συν.}\ (\alpha+\theta/_2)=2\ \text{ἡμ.}\ \theta/_2\ \text{ἡμ.}\ \alpha.$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες διαδοχικῶς α, διὰ τῶν $\alpha+\theta$, $\alpha+2\theta$, ... λαμβάνομεν

$$\text{συν.}\ (\alpha-\theta/_2)-\text{συν.}\ (\alpha+\theta/_2)=2\ \text{ἡμ.}\ \theta/_2\ \text{ἡμ.}\ \alpha$$
$$\text{συν.}\ (\alpha+\theta/_2)-\text{συν.}\ (\alpha+{}^{3\theta}/_2)=2\ \text{ἡμ.}\ \theta/_2\ \text{ἡμ.}\ (\alpha+\theta)$$
$$\text{συν.}\ (\alpha+{}^{3\theta}/_2)-\text{συν.}\ (\alpha+{}^{5\theta}/_2)=2\ \text{ἡμ.}\ \theta/_2\ \text{ἡμ.}\ (\alpha+2\theta)$$

. . . .

$$\text{συν.}\left(\alpha+\frac{2\nu-3}{2}\theta\right)-\text{συν.}\left(\alpha+\frac{2\nu-1}{2}\theta\right)=2\ \text{ἡμ.}\ \theta/_2\ \text{συν.}\ [\alpha+(\nu-1)\,\theta].$$

καὶ ἀθροίζοντες κατὰ μέλη

$$2\ \text{ἡμ.}\ \theta/_2\ [\text{ἡμ.}\ \alpha+\text{ἡμ.}\ (\alpha+\theta)+\ldots]=\text{συν.}\ (\alpha-\theta/_2)-\text{συν.}\left(\alpha+\frac{2\nu-1}{2}\theta\right)$$

ἀλλὰ $\text{συν.}\ q-\text{συν.}\ p=2\ \text{ἡμ.}\ \frac{p+q}{2}\text{ἡμ.}\ \frac{p-q}{2}$

πράγματι $\frac{p+q}{2}=\alpha+\frac{\nu-1}{2}$, καὶ $\frac{p-q}{2}=\frac{\nu\vartheta}{2}$

ἑπομένως 2 ἡμ. $^{\vartheta}|_2\ \Sigma$ ἡμ.$\frac{2\pi}{\nu}i=2$ ἡμ. $(\alpha+\frac{\nu-1}{2}\vartheta)$ ἡμ. $\frac{\nu\vartheta}{2}$

ἢ $$\Sigma\ \text{ἡμ.}\frac{2\pi}{\nu}i=\frac{\text{ἡμ.}\ (\alpha+\frac{\nu-1}{2}\vartheta)\ \text{ἡμ.}\frac{\nu\vartheta}{2}}{\text{ἡμ.}\ ^{\vartheta}|_2}$$

καὶ ἐπειδὴ $\vartheta=\frac{2\pi}{\nu}$, ἡμ.$\frac{\nu\vartheta}{2}=$ἡμ. $\pi=o$, ἄρα

$$\Sigma\ \text{ἡμ.}\frac{2\pi}{\nu}i=o$$

ὡσαύτως ἐπειδὴ

$$\Sigma\ \text{ἡμ.}^2\ x=\text{ἡμ.}^2\ o+\text{ἡμ.}^2\ \frac{2\pi}{\nu}+\text{ἡμ.}^2\ \frac{2\pi}{\nu}2+\ldots\ldots$$ δηλ. ἄθροισμα

ὁμοίων δυνάμεων ἡμιτόνων τόξων βαινόντων κατὰ πρόοδον ἀριθμητικήν, θὰ ἔχωμεν ὁρμώμενοι ἐκ τῆς γνωστῆς ταυτότητος.

$$\text{ἡμ.}\ \alpha={}^1|_2\ (1-\text{συν.}\ 2\alpha)$$

εἰς ἣν ἀντικαθιστῶντες διαδοχικῶς α, διὰ τοῦ $\alpha+\vartheta$, $\alpha+2\vartheta, \ldots\ldots$ θὰ λάβωμεν

ἡμ. $^2\alpha=1/2\ (1-\text{συν.}\ 2\alpha)$

ἡμ. $^2(\alpha+\Theta)=1/2\ [\,1-\text{συν.}\ 2\ (\alpha+\Theta)\,]$

ἡμ. $^2(\alpha+2\ \vartheta)=1/2\ [\,1-\text{συν.}\ 2\ (\alpha+2\ \vartheta)\,]$

. . . .

ἡμ. $^2[\alpha+(\nu-1)\ \vartheta]=1/2\ \{\,1-\text{συν.}\ 2\ |\alpha+(\nu-1)\ \vartheta|\,\}$

καὶ ἀθροίζοντες κατὰ μέλη

$$\Sigma\ \text{ἡμ.}^2\frac{2\pi}{\nu}\ i=\frac{1}{2}\ [\nu-(\text{συν.}\ 2\alpha+\text{συν.}2\ (\alpha+\theta)+\text{συν.}\ 2\ (\alpha+2\ \vartheta)+\ .\ )\,]$$

ἀλλὰ συν. $2\ \alpha+$συν. $2\ (\alpha+\theta)+\ .\ .=\frac{\text{συν.}\ (2\ \alpha+(\nu-1)\ \vartheta)\ \text{ἡμ.}\ \nu\ \vartheta}{\text{ἡμ.}\ \vartheta}$

ὅθεν $$\Sigma\ \text{ἡμ.}\frac{{}^2 2\pi}{\nu}\ i=\frac{\nu}{2}-\frac{\text{συν.}\ (2\ \alpha+(\nu-1)\ \vartheta)\ \text{ἡμ.}\ \nu\ \vartheta}{2\ \text{ἡμ.}\ \vartheta}$$

καὶ ἐπειδὴ $\vartheta=\frac{2\pi}{\nu}$, ἡμ. $\nu\ \vartheta=$ ἡμ. $2\ \pi=0$, καὶ ἑπομένως

$$\Sigma\ \text{ἡμ.}^2\ \frac{2\pi}{\nu}\ i=\frac{\nu}{2}$$

ὁμοίως εὑρίσκομεν, ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς γνωστῆς ταὐτότητος

$$\text{συν.}^2\alpha=\frac{1}{2}\ [\ 1+\text{συν.}\ 2\ \alpha\ ]$$ ὅτι

$$\Sigma\ \text{συν.}\ \frac{{}^2 2\pi}{\nu}\ i=\frac{\nu}{2}$$

Καὶ τέλος ἐπειδὴ

$$\Sigma\ \eta\mu.\ x\ \sigma\upsilon\nu.\ x = \eta\mu.\ 0\ \sigma\upsilon\nu.\ 0 + \eta\mu.\ \frac{2\pi}{\nu}\cdot\ \sigma\upsilon\nu.\ \frac{2\pi}{\nu} + \eta\mu.\frac{2\pi}{\nu}.\ 2\ \sigma\upsilon\nu.\ \frac{2\pi}{\nu}\ 2 + \ldots$$

θά ἔχωμεν χρώμενοι τῆς γνωστῆς ταὐτότητος.

$\eta\mu.\ \alpha\ \sigma\upsilon\nu.\ \alpha = \frac{1}{2}\ \eta\mu.\ 2\ \alpha$ καὶ ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη

$$\eta\mu.\ \alpha\ \sigma\upsilon\nu.\ \alpha = \frac{1}{2}\ \eta\mu.\ 2\ \alpha$$

$$\eta\mu.\ (\alpha+\vartheta)\ \sigma\upsilon\nu.\ (\alpha+\vartheta) = \frac{1}{2}\ \eta\mu.\ 2\ (\alpha+\vartheta)$$

. . . .

$$\eta\mu.\ [\alpha+(\nu-1)\ \vartheta]\ \sigma\upsilon\nu.\ [\alpha+(\nu-1)\ \vartheta] = \frac{1}{2}\ \eta\mu.\ 2\ [\alpha+(\nu-1)\ \vartheta]$$

καὶ ἀθροίζοντες κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma\ \eta\mu.\frac{2\pi}{\nu}\ i\ \sigma\upsilon\nu.\ \frac{2\pi}{\nu}\ i = \frac{1}{2}\ [\ \eta\mu.\ 2\ \alpha + \eta\mu.\ 2\ (\alpha+\vartheta) + \ .\ .\ .\ .\ .\ ]$$

ἀλλὰ ἡ παρένθεσις τοῦ β΄ μέλους ἰσοῦται πρός

$\frac{\eta\mu.\ [2\ \alpha+(\nu-1)\ \vartheta]\ \eta\mu.\ \nu\ \vartheta}{\eta\mu.\ \vartheta}$, ἑπομένως διά $\vartheta = \frac{2\pi}{\nu}$

ἐπειδὴ ἡμ. $2\pi = 0$, θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma\ \eta\mu.\ \frac{2\pi}{\nu}\ i\ \sigma\upsilon\nu.\ \frac{2\pi}{\nu}\ i = 0$$

Κατόπιν τῶν ἄνω σχέσεων αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις εἶναι πλέον

$\nu\ \alpha_0 = \Sigma\ y_i$, τοῦ $i = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$

$\frac{\alpha_i\ \nu}{2} = \Sigma\ y_i\ \sigma\upsilon\nu.\frac{2\pi}{\nu}\ i$, τοῦ i λαμβάνοντος ὁμοίως ὡς ἄνω τὰς αὐτὰς τιμάς

καὶ γενικῶς $\alpha_0 = \frac{1}{\nu}\ \Sigma\ y_i$

$$\alpha_\kappa = \frac{2}{\nu}\ \Sigma\ y_i\ \sigma\upsilon\nu.\ \kappa\ \frac{2\pi}{\nu}\ i$$

$$\beta_\kappa = \frac{2}{\nu}\ \Sigma\ y_i\ \ \eta\mu.\ \kappa\ \frac{2\pi}{\varepsilon}\ i$$

Τύποι τοῦ Bessel ἢ τῆς τριγωνομετρικῆς παρεμβολῆς

τοῦ κ λαμβάνοντος τὰς τιμὰς 1, 2, 3, ... ν.

Ἐὰν αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς βαίνωσι κατὰ πρόοδον ἀριθμητικὴν λόγου ϑ, δηλ. $x_{i+1} - x_i = \vartheta$, εἰσάγομεν νέαν μεταβλητὴν

$\xi_i = \frac{x_i - x}{\vartheta}$ δι' ἣν $\Delta\xi = 1$, ὅτε οἱ τύποι τοῦ Bessel καθίστανται

$$\alpha_\kappa = \frac{2}{\nu}\ \Sigma\ y_i\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{2\pi.K.}{\nu}\ \xi_i$$

$$\beta_\kappa = \frac{2}{\nu} \Sigma\, y_i \;\text{ἡμ.}\, \frac{2\pi.K.}{\nu}\, \xi_i \qquad \text{κ.λ.π.}$$

Ἑπομένως διὰ τὴν μαθηματικὴν ἀναπαράστασιν, ἐπειδὴ διαθέτομεν ν τιμάς, καθορίζομεν πρῶτον τὴν μέσην τιμὴν τῆς συναρτήσεως ἐν τῇ περιόδῳ ν, εἶτα τὰς τιμὰς καθ' ἃς τὸ τόξον αὐξάνει ἐντὸς τῆς περιόδου 2π κατὰ $\frac{2\pi}{\nu}$ καὶ τέλος ὑπολογίζομεν τὰς λοιπὰς σααθεράς.

Προσέγγισις ἐπιτευχθείσης ἀναπαραστάσεως

Ἐπειδὴ ἡ $Z_i = \alpha_0 + \alpha_1 \,\text{συν.}\, \frac{2\pi}{\nu} i + \alpha_2 \,\text{συν.}\, 2\frac{2\pi}{\nu} i + \,.\,.\, + \beta_1 \,\text{ἡμ.}\, \frac{2\pi}{\nu} i$ $+ \,.\,.\,$ παριστᾷ τὴν θεωρητικὴν καμπύλην ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ τὸν ἐμπειρικὸν ποσοτικὸν νόμον τοῦ ὑπ' ὄψει φαινομένου, y_i τὰς τιμὰς τῆς ἐμπειρικῆς συναρτήσεως, ὡς αὗται παρέχονται ὑπὸ τῆς στατιστικῆς ὑποτυπώσεως, αἱ διαφοραὶ $\delta = Z_i - y_i$ θὰ παριστῶσι τὰς μεταξὺ ὑπολογισμοῦ καὶ παρατηρήσεως ἀποκλίσεως

$$\text{ἀλλὰ } Z_i = \alpha_0 + \alpha_1 \,\text{συν.}\, \frac{2\pi}{\nu} i + \,.\quad.\, + \beta_1 \,\text{ἡμ.}\, \frac{2\pi}{\nu} i + \,.\,.\,.\,.\,.$$

$$\text{ὅθεν } \delta = \alpha_0 + \alpha_1 \,\text{συν.}\, \frac{2\pi}{\nu} i + \,.\,.\,.\, + \beta_1 \,\text{ἡμ.}\, \frac{2\pi}{\nu} \iota + \,.\,.\,.\,.\, - y_i \qquad (1)$$

πολ)ζοντες ὅθεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ δ καὶ ἀθροίζοντες εὑρίσκομεν

$$\Sigma\,\delta^2 = \alpha_0\, \Sigma\,\delta + \alpha_1\, \Sigma\,\delta \,\text{συν.}\, \frac{2\pi}{\nu} i + \,.\,.\,.\,.\, + \beta_1 \,\text{ἡμ.}\, \frac{2\pi}{\nu} i\delta + ..-\Sigma y\delta$$

ἀλλὰ $\Sigma\,\delta = o$ καὶ $\Sigma\,\delta \,\text{ἡμ.}\, \frac{2\pi}{\nu} i = o$, $\Sigma\,\delta \,\text{συν.}\, \frac{2\pi}{\nu} i = o$, καθ' ὅσον ἵνα προσδιορίσωμεν τὰς σταθερὰς $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ πρέπει νὰ καταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων δ ἐλάχιστον, τοῦτο δὲ πραγματοποιεῖται ἐφ' ὅσον αἱ μερικαὶ παράγωγοι πρὸς $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ τοῦ $\Sigma\,(Z_i - y_i)^2$ ἐξισοῦνται πρὸς τὸ μηδέν, ἐφ' ὅσον δηλ. ἔχομεν

$$\Sigma \,\text{συν.}\, \frac{2\pi}{\nu} i\, (\alpha_0 + \alpha_1 \,\text{συν.}\, \frac{2\pi}{\nu} i + . - y_i) = \Sigma \,\text{συν.}\, \frac{2\pi}{\nu} i\, \delta = o$$

$$\text{ἀλλὰ } \Sigma \,\text{συν.}\, \frac{2\pi}{\nu} i = o, \text{ ὅθεν } \Sigma \,\text{συν.}\, \frac{2\pi}{\nu} \delta = \Sigma \,\text{ἡμ.}\, \frac{2\pi}{\nu} \delta = o$$

καὶ ἑπομένως

$$\Sigma\,\delta^2 = -\,\Sigma\, y_i\, \delta$$

Ἐὰν νῦν τῆς (1) πολ)σωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ y καὶ ἀθροίσωμεν εἶτα, εὑρίσκομεν

$$\Sigma\,\delta\, y_i = \alpha_0\, \Sigma\, y_i + \alpha_1\, \Sigma \,\text{συν.}\, \frac{2\pi}{\nu} i\, y_i + \,.\,.\,.\, + \beta_1\, \Sigma \,\text{ἡμ.}\, \frac{2\pi}{\nu} i\, y_i + \,.\,.\,.\,.\, - \Sigma y_i^2$$

ἢ $\quad -\Sigma \delta y_i = -\alpha_0\, \Sigma y_i - \alpha_1\, \Sigma\ \text{συν.} \frac{2\pi}{\nu} i y_i - \ldots - \beta_1\, \Sigma\ \text{ἡμ.} \frac{2\pi}{\nu} i y_i - \ldots + \Sigma y_i^2$

ἀλλὰ $\quad \alpha_i = \frac{2}{\nu} \Sigma\ \text{συν.} \frac{2\pi}{\nu} i\, y_i\ ,\ \text{ἢ}\ \frac{\alpha_i\, \nu}{2} = \Sigma\ \text{συν.} \frac{2\pi}{\nu} i y_i$

$$\beta_i = \frac{2}{\nu} \Sigma\ \text{ἡμ.} \frac{2\pi}{\nu} i\, y_i\ ,\ \text{ἢ}\ \frac{\beta_i\, \nu}{2}\ \Sigma\ \text{ἡμ.} \frac{2\pi}{\nu} i y_i$$

καὶ γενικῶς $\quad \frac{\alpha_\varkappa\, \nu}{2} = \Sigma\ \text{συν}\ K \frac{2\pi}{\nu} i y_i\ ,\ (\varkappa = K)$

καὶ $\quad \frac{\beta_\varkappa\, \nu}{2} = \Sigma\ \text{ἡμ.}\ K \frac{2\pi}{\nu} i y_i\ ,\ (\varkappa = K)$

ἀντικαθιστῶντες ὅθεν λαμβάνομεν

$$\Sigma \delta^2 = \Sigma y_i^2 - \nu \alpha_0^2 - \frac{\nu}{2} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\nu} (\alpha_\varkappa^2 + \beta_\varkappa^2)$$

ὁ τελευταῖος τύπος δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων (σφαλμάτων) συναρτήσει τῶν συντελεστῶν α_0, $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$ καὶ τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν y_i Ὅταν $\nu = 2\mu + 1$, ἡ καμπύλη διέρχεται διὰ τῶν δεδομένων ν σημείων καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων εἶναι μηδέν, τοῦτ' αὐτὸ συμβαίνει ἐπίσης διὰ $\nu = 2\mu$.

Τὸ μέσον σφάλμα τοῦ τετραγώνου $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{\nu}}$ ἐὰν τείνῃ πρὸς τὸ 0, ἡ γενομένη ἀναπαράστασις τριγωνομετρικῶς εἶναι κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ἐπιτυχής.

Σφάλματα φάσεως καὶ πλάτους.

Τὸ πλάτος ὡς γνωστὸν δίδεται ὑπὸ τῆς $p_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$ ἑπομένως διαφορίζοντες ἔχομεν

$$dp_1 = \frac{\alpha_1\, d\alpha_1 + \beta_1\, d\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}$$

ἀλλὰ $\text{ἐφ.}\varphi_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, ὅθεν $\frac{d\varphi_1}{\text{συν}^2 \varphi_1} = \frac{\beta_1\, d\alpha_1 - \alpha_1\, d\beta_1}{\beta_1^2}$

ἀλλὰ $\beta_1^2 = p_1^2\ \text{συν}^2 \varphi_1$ ἑπομένως $\text{συν}^2 \varphi_1 = \frac{\beta_1^2}{p_1^2}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν

$$d\varphi_1 = \frac{\beta_1\, d\alpha_1 - \alpha_1\, d\beta_1}{p_1^2} = \frac{\beta_1\, d\alpha_1 - \alpha_1\, d\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$$

ἡ τελευταία σχέσις δίδει τὸ σφάλμα τῆς φάσεως $\pm$ εἰς ἀκτίνια (radians), ὅπου $\alpha_1 = p_1$ ἡμ. φ_1 καὶ $\beta_1 = p_1$ συν. φ_1

κατ' ἀκολουθίαν σφάλμα πλάτους $dp = \frac{\alpha d\alpha + \beta d\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

καὶ σφάλμα φάσεως $d\varphi = \frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{\alpha^2+\beta^2}$

ὅπου dp ἔχει τὰς διαστάσεις τοῦ p, ἐνῷ dφ ἐκφράζεται εἰς ἀκτίνια.

2ον. Περίοδος ἄγνωστος.

Καὶ ὅταν μὲν ἡ περίοδος εἶναι γνωστή, τὸ πρόβλημα τῆς ὑποκαταστάσεως τῆς ἐμπειρικῆς συναρτήσεως $y=f(t)$ ὑπὸ τριγωνομετρικῶν ἀθροισμάτων εἶναι ἁπλούστατον, περιοριζόμενον εἰς ἁπλοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμοὺς διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν παραμέτρων τῆς παρεμβολικῆς τριγωνομετρικῆς συναρτήσεως, ὅταν ὅμως ἡ περίοδος εἶναι ἄγνωστος, διότι ἀποκρύπτεται ὑπὸ τῶν στατιστικῶν δεδομένων, τότε ἡ ἀναζήτησις τῆς ἀληθοῦς περιόδου εἶναι δύσκολος καὶ γίνεται διὰ διαδοχικῶν προσεγγίσεων. Τὴν τοιαύτην περίπτωσιν ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν πρῶτος ἀντιμετώπισεν ὁ πολὺς Lagrange κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τροχιῶν τῶν πλανητῶν καὶ παρέσχε μέθοδον ὑπολογισμοῦ ἑδραζομένην ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως ὅτι αἱ διαφοραὶ τῶν διαφόρων σχηματιζομένων τάξεων μετὰ τῶν δεδομένων τιμῶν τῆς πρὸς ἀναπαράστασιν συναρτήσεως ἀπαρτίζουσι πρόοδον γεωμετρικὴν λόγου σταθεροῦ. Οὐχ ἧττον ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἀρκετὰ πολύπλοκος ὡς καὶ ἡ μέθοδος τῶν Nervander καὶ Buys-Ballot. Εἰς τὴν Στατιστικὴν διὰ τοῦτο χρησιμοποιεῖται ἡ μέθοδος τοῦ 'Αμερικανικοῦ φυσικοῦ A. Schuster (Terrestral magnetism 1898 Βαλτιμόρη), ἡ καλουμένη π ε ρ ι ο δ ό γ ρ α μ μ ο ν, εἶναι δὲ οὐχ' ἧττον καὶ αὕτη κοπιώδης, ὡς ἐκ τῶν δοκιμαστικῶν περιόδων αἵτινες χρησιμοποιοῦνται πρὸς καθορισμὸν τῆς ἀγνώστου ἀληθοῦς τοιαύτης.

'Εὰν αἱ παρατηρήσεις ἀναφέρωνται εἰς ἰσαπεχούσας τῆς μεταβλητῆς τιμὰς T|ν, ὑφίστανται δὲ Κν παρατηρήσεις ἐκτεινόμεναι ἐπὶ Κ περιόδων, τότε εἶναι δυνατὸν νὰ διατάξωμεν τὰς τιμὰς y_i εἰς σειράς, ἑκάστης ἐκ ν διαδοχικῶν τιμῶν καὶ νὰ ἀθροίσωμεν τὰς ν στήλας, ἀκολούθως δὲ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν μέσον ἑκάστης στήλης. 'Η ἄνω μέθοδος, ὡς γνωστόν, χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν ἐποχιακῶν διακυμάνσεων, χωρὶς ὅμως πρὸς ἀναπαράστασιν τῆς οὕτω συνισταμένης σειρᾶς νὰ ἐφαρμόζηται ἡ ἁρμονικὴ ἀνάλυσις. Οὐχ' ἧττον ὅμως εἶναι βέβαιον ὅτι πλείστων χρονολογικῶν στατιστικῶν σειρῶν, μορφῆς περιοδικῆς, ἡ περίοδος τούτων δὲν εἶναι αὐστηρῶς (ἀπολύτως) σταθερά, δι' ὃ καὶ ἡ χρῆσις τῆς τριγωνομετρικῆς παρεμβολῆς δύναται νὰ παράσχῃ πεπλανημένα ἀποτελέσματα. Πιθανὸν μάλιστα τὸ πλάτος τῆς περιόδου νὰ μὴ ὑποπίπτῃ ἔστω καὶ ἐμμέσως εἰς τὴν ἀντίληψιν ἡμῶν ἐκ τῶν ὑπ' ὄψει στατ. στοιχείων ἢ τοῦ ἀντιστοίχου ἐκ τούτων διαγράμματος, δι' ὃ ἀπαραίτητος τυγχάνει ὁ προσδιορισμός, ἔστω προσεγγιζόντως, τῆς ἀγνώστου ἀληθοῦς περιόδου. Τὸ τελευταῖον ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς μνημονευθείσης μεθόδου τοῦ περιοδογράμμου. 'Η θεωρία τοῦ περιοδογράμμου δύναται νὰ διατυπωθῇ περιληπτικῶς ὡς ἑξῆς :

1ον. Ἔστω σειρά τις ὅρων ἐπαναλαμβανομένων περιοδικῶς κατὰ τάξιν ν. Ἐὰ τάξωμεν τούτους εἰς πίνακα οὗτινος ἡ πρώτη γραμμὴ ἀπαρτίζεται ἐκ τῶν ὅρων τῶν τάξεων 1, 2, . . . ν, ἡ δευτέρα γραμμὴ ἐκ τῶν ὅρων τάξεων ν+1, ν+2, . . . 2ν, ἡ τρίτη γραμμὴ ἐκ τῶν ὅρων τάξεων 2ν+1, 2ν+2, ... , 3ν καὶ οὕτω ἐφεξῆς, ἀθροίσωμεν δὲ ἀκολούθως τοὺς ὅρους ἑκάστης στήλης εὑρίσκομεν σειρὰν ὁμοειδῆ πρὸς τὴν πρώτην.

2ον. Ἀλλὰ ἐὰν διατάξωμεν τοὺς ὅρους τούτους εἰς ἄλλον πίνακα θέτοντες εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τοὺς ὅρους τάξεως 1, 2. . . . . ν+1, εἰς τὴν δευτέραν γραμμὴν τοὺς ὅρους τάξεως ν+2, ν+3, ... 2ν+2, εἰς την τρίτην γραμμὴν τοὺς ὅρους τάξεως 2ν+3, 2ν+4, ... 3ν+3, καὶ οὕτω ἐφεξῆς, ἡ περιοδικότης ἐν τῷ ἀθροίσματι τῶν ὅρων τῶν στηλῶν θὰ ἐμφανισθῇ. Τοῦτ' αὐτὸ θὰ συμβῇ ἀκόμη ἐναργέστερον ἐὰν ἡ δευτέρα γραμμὴ ἀρχίζῃ ἀπὸ τοῦ ὅρου τῆς τάξεως ν+3, ἡ τρίτη ἀπὸ τοῦ ὅρου τῆς τάξεως 2ν+5 καὶ οὕτω ἐφεξῆς. Δύναται ὅθεν νὰ λεχθῇ ὅτι ἡ περιοδικότης ἐξαλείφεται ἐπὶ τοσοῦτον ταχύτερον, ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν χρησιμοποιμένων γραμμῶν εἶναι μεγαλείτερος καὶ ὅταν πρὸς σχηματισμὸν τῶν διαφόρων γραμμῶν ἀπομακρυνόμεθα ἐπὶ μᾶλλον της περιόδου τῆς δεδομένης σειρᾶς.

3ον. Ἐὰν οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς εὑρίσκωνται διὰ ὑπερεπιθέσεως πλειόνων διαφόρων περιόδων, ἡ εὑρισκομένη σειρὰ διὰ τῆς ἀθροίσεως κατὰ στήλας φανερώνει μίαν μόνην περίοδον.

4ον. Ἐὰν κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν γραμμῶν, ληφθῇ περίοδός τις λίαν μικρά, τὸ μέγιστον ἐν τῷ ἀθροίσματι κατὰ στήλας μετατίθεται πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἐὰν ἡ περίοδος τοῦ σχηματισμοῦ εἶναι πολὺ μεγάλη. Καθ' ὅλας τὰς περιπτώσεις ἡ μετάθεσις εἶναι ἐπὶ τοσοῦτον ταχυτέρα ἐφ' ὅσον ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς περιόδου τοῦ φαινομένου καὶ τῆς ληφθείσης εἶναι μεγαλειτέρα.

Ἐὰν ἤδη ὑποτεθῇ ὅτι ἕκαστος ὅρος δίδεται ὑπὸ

$$u_t = \alpha \text{ ἡμ.} \frac{2\pi}{T} t$$

(παραλειπομένης πρὸς στιγμὴν τῆς φάσεως φ), ἔχουσι δὲ ταχθῇ αἱ παρατηρήσεις εἰς ν γραμμάς, ἑκάστης ἐκ μ ὅρων, τότε τὸ

$$U_t = u_t + u_{t+\mu} + \dots\dots + u_{(\nu-1)\mu+t} \text{ δηλ.}$$

$$U_x = \alpha \left\{ \text{ἡμ.} \frac{2\pi t}{T} + \text{ἡμ.} \frac{2\pi}{T}(t+\mu) + \dots + \text{ἡμ.} \frac{2\pi(\nu-1)\mu+2\pi\mu}{T} \right\}$$

ἀλλὰ ἡ παρένθεσις εἶναι ἄθροισμα ἡμιτόνων τόξων βαινόντων κατὰ πρόοδον ἀριθμητικήν, λόγου $\Theta = \frac{2\mu\pi}{T}$ ὅθεν

$$U_x = \alpha \frac{\text{ἡμ.}\ \frac{\nu\mu\pi}{T}}{\text{ἡμ.}\ \frac{\mu\pi}{T}} \left\{ \frac{2\pi}{T} t + (\nu - 1) \frac{\mu\pi}{T} \right\}$$

ἂν δὲ ἐν τῇ παρενθέσει προστεθῇ καὶ ἡ φάσις φ, ἕπεται ὅτι, ἐκ τῆς γενομένης ἀθροίσεως κατὰ στήλας, ἡ φάσις αὐξάνει κατὰ $(\nu-1)\frac{\mu\pi}{T}$ καὶ τὸ πλάτος πολ)ζεται ἐπὶ $Z = \frac{\text{ἡμ.}\ \nu\pi x}{\text{ἡμ.}\ \pi x}$, $x = \frac{\mu}{T}$. Ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ Z εἶναι ν καὶ ὑπάρχει διὰ $x=1$ ἤτοι διὰ $\mu = T$· Ἐκ τῶν ἄνω ἕπεται ὅτι ὅταν διαθέτομεν $p=\nu$. r παρατηρήσεις τάσσομεν ταύτας εἰς ν στήλας ἐκ r ὅρων ἑκάστη καὶ ἀθροίζομεν τὰ δεδομένα ἑκάστης στήλης, εὑρίσκοντες T_1, T_2, ... δι' ἑκάστην ἐξ αὐτῶν. Συναρτήσει τὸν T_1, T_2, ... καθορίζομεν τὸ p_1 καὶ α_1 καὶ β_1 διὰ τῶν τύπων τοῦ Bessel, ἐξ ὧν $p_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$. Δοκιμάζομεν εἶτα διαφόρους περιόδους, καθορίζοντες συναρτήσει τούτων διαφόρους τοῦ p_1 τιμάς. Εἶτα ἐπὶ συστήματος ἀξόνων ὀρθογωνίων, λαμβάνομεν ἐπὶ μὲν τοῦ ἄξονος τῶν x τὰς δοκιμαστικὰς περιόδους, ἀντιστοίχως δὲ τούτων ὑψοῦμεν τεταγμένας ἴσας πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἀντιστοίχου πλάτους πολ)σθὲν ἐπὶ τὸ δλικὸν διάστημα, τοῦ γινομένου διαιρουμένου μετὰ ταῦτα διὰ 10000 πρὸς ἁπλοποίησιν, δι' ὃ αἱ παρατηρήσεις. Ἡ τετμημένη ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν οὑτωσὶ καθοριζομέμένην μ ε γ ί σ τ η ν τ ε τ α γ μ έ ν η ν εἶναι ἡ προσεγγίζουσα τιμὴ τῆς ἀγνώστου ἀληθοῦς περιόδου.

Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τύπων τοῦ Bessel, διὰ γνωστὴν καὶ ἄγνωστον περίοδον, εἶναι εὔκολος. ἀπαιτοῦνται μόνον πίνακες τῶν φυσικῶν τριγων. γραμμῶν, πρὸς ἀποφυγὴν τῶν ἐκ τῶν λογαρίθμων δυσκολιῶν.
