ΙΩΑΝΝΟΥ Α. ΛΕΒΕΝΤΑΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὸ πρόβλημα τῆς ἀρίστης κατανομῆς τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς ἀποτελεῖ βασικὸν πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας. Ἡ οἰκονομικὴ τῆς εὐημερίας, ἡ θεωρία τῆς παραγωγῆς καὶ ἡ θεωρία τῆς διανομῆς ἀναφέρονται κυρίως εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο. Ἡ ἀντιμετώπισις τοῦ προβλήματος τῆς ἀρίστης κατανομῆς τῶν διαθεσίμων πόρων μεταξὺ διαφόρων χρήσεων βάσει προκαθωρισμένων κριτηρίων καθίσταται δυνατὴ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς τεχνικῆς τοῦ μαθηματικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἡ τεχνικὴ αὕτη καθιστᾷ δυνατὴν τὴν λύσιν μιᾶς κατηγορίας προβλημάτων ἀριστοποιήσεως, τὰ ὁποῖα δὲν δύνανται νὰ ἀντιμετωπισθοῦν διὰ τῶν κλασσικῶν μεθόδων μεγιστοποιήσεως ἢ ἐλαχιστοποιήσεως.

Ὁ μαθηματικὸς προγραμματισμὸς περιλαμβάνει τὸν γραμμικὸν καὶ μὴ γραμμικὸν προγραμματισμόν. Ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς ἐφαρμόζεται εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν τόσον ἡ συνάρτησις ἀριστοποιήσεως, ὅσον καὶ αἱ συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος εἶναι γραμμικῆς μορφῆς. Ὁ μὴ γραμμικὸς προγραμματισμὸς χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων ἀριστοποιήσεως, εἰς τὰ ὁποῖα εἴτε ἡ συνάρτησις μεγιστοποιήσεως ἢ ἐλαχιστοποιήσεως εἴτε αἱ συναρτήσεις αἱ ἐκφράζουσαι τοὺς περιορισμοὺς εἴτε ἀμφότεραι αἱ ἀνωτέρω συναρτήσεις λαμβάνουν μὴ γραμμικὴν μορφήν.

Ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομικῆς ἀναλύσεως ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν δὲν ὑφίστανται ἐξωτερικαὶ ἢ ἐσωτερικαὶ οἰκονομίαι καὶ ἡ παραγωγὴ λαμβάνει χώραν ὑπὸ σταθερὰς ἀποδόσεις κλίμακος. Ὁ μὴ γραμμικὸς προγραμματισμὸς ἐξ ἄλλου εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ ὅταν ἡ συνάρτησις παραγωγῆς ὑπόκειται εἰς τὸν νόμον τοῦ φθίνοντος ὁριακοῦ λόγου ὑποκαταστάσεως καὶ γενικῶς ὅταν λαμβάνουν χώραν φθίνουσαι ἢ αὔξουσαι ἀποδόσεις κλίμακος.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν ἐπιχειρεῖται ἡ συνοπτικὴ παρουσίασις ὡρισμένων βασικῶν τεχνικῶν καὶ οἰκονομικῶν ἐννοιῶν τῆς θεωρίας τοῦ γραμμικοῦ καὶ μὴ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ ἐξετάζεται ἡ σημασία αὐτοῦ ὡς ἀναλυτικῆς μεθόδου προγραμματισμοῦ τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἡ προσπάθεια, εἰδικώτερον, στρέφεται εἰς τὰ ἑξῆς κυρίως θέματα : α) τὴν ἐξέτασιν τῆς οἰκονομικῆς ἐννοίας τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ὡς καὶ τῆς χρησιμότητος αὐτοῦ διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν προβλημάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, β) τὴν διατύπωσιν τῶν συνθηκῶν ὑπὸ τὰς ὁποίας ἓν μὴ γραμμικὸν πρόβλημα δύναται νὰ ἔχῃ λύσιν, τὴν οἰκονομικὴν σημασίαν τῶν συνθηκῶν αὐτῶν ὡς καὶ τὴν οἰκονομικὴν ἑρμηνείαν τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος τοῦ μὴ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Τέλος, εἰς τὸ παράρτημα παρατίθεται μία μέθοδος λύσεως προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἀναφερομένων εἰς μακροοικονομικὰς ἐφαρμογάς.

2. Η ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς εἶναι μία μαθηματικὴ μέθοδος, ἡ ὁποία ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν ἀριστοποίησιν (μεγιστοποίησιν ἢ ἐλαχιστοποίησιν) μιᾶς γραμμικῆς συναρτήσεως, ὑποκειμένης εἰς ὡρισμένους περιορισμοὺς οἱ ὁποῖοι λαμβάνουν τὴν μορφὴν γραμμικῶν ἀνισοτήτων. Τυπικῶς τὸ πρόβλημα μεγιστοποιήσεως δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως :

Νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ συνάρτησις :

$$C'X = (C_1, C_2, \ldots C_n)\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nXC_n \qquad (1)$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$AX < b \qquad (2)$$

$$X > o \qquad (3)$$

ὅπου $X=(X_1, X_2, \ldots X_n)$ τὸ διάνυσμα-στήλη τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν παραγωγικῶν κλάδων, $b = (b_1, b_2, \ldots b_m)$ τὸ διάνυσμα -στήλη τῶν διαθεσίμων ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, $C = (C_1, C_2, \ldots C_n)$ τὸ διάνυσμα-γραμμὴ τὸ ὁποῖον ἔχει στοιχεῖα τοὺς συντελεστὰς τῆς συναρτήσεως ἀριστοποιήσεως καὶ A ἡ τεχνολογικὴ μήτρα τῆς οἰκονομίας τῆς τάξεως $m \times n$, ἤτοι :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots \alpha_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \ldots \alpha_{mn} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Πρὸς πληρεστέραν ἐξέτασιν τῆς οἰκονομικῆς ἐννοίας τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. Ὡς παραγωγικὴ δραστηριότης ὁρίζεται ὁ συγκεκριμένος συνδυασμὸς τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος προϊόντος εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου. Μαθηματικῶς μία παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται νὰ παρασταθῇ δι' ἑνὸς διανύσματος, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα ἀποτελοῦν ἐκροὰς ἐὰν προσημαίνωνται μὲ θετικὸν σημεῖον ἢ εἰσροὰς ἐὰν λαμβάνουν ἀρνητικὸν σημεῖον.

Ὡρισμέναι ἐκ τῶν εἰσροῶν τὰς ὁποίας ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης χρησιμοποιεῖ ἀποτελοῦν ποσότητας ἀγαθῶν παραγομένων ἐντὸς τοῦ συστήματος, ἐνῷ ὡρισμέναι ἄλλαι παριστοῦν ποσότητας συντελεστῶν παραγωγῆς μὴ παραγομένων ὑπὸ τοῦ συστήματος. Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν χρησιμοποιουμένων ὑφ' ἑκάστης παραγωγικῆς δραστηριότητος ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ τῶν ποσοτήτων τῶν παραγομένων προϊόντων, δηλαδὴ ἡ σχέσις μεταξὺ εἰσροῶν καὶ ἐκροῶν παραμένει σταθερά, ἀνεξαρτήτως χρόνου καὶ ἐπιπέδου παραγωγικῆς δραστηριότητος. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη εἶναι θεμελιώδης διὰ τὴν γραμμικὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν καὶ εἶναι γνωστὴ ὡς ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ἕτεραι ὑποθέσεις εἰς τὰς ὁποίας ὑπόκεινται αἱ παραγωγικαὶ δραστηριότητες εἶναι τοῦ περιωρισμένου ἀριθμοῦ αὐτῶν (finite), τῆς προσθετικότητος (additivity) καὶ τῆς διαιρετότητος (divisibility). Ἡ ὑπόθεσις τῆς προσθετικότητος ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι ἡ ταυτόχρονος χρησιμοποίησις διαφόρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων δὲν συνεπάγεται εὐνοϊκὴν ἢ δυσμενῆ ἐπίδρασιν ἐπὶ τοῦ συνολικοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος ἢ τῆς συνολικῆς οἰκονομικῆς θυσίας. Ἡ ὑπόθεσις ἐξ ἄλλου τῆς διαιρετότητος σημαίνει ὅτι ὑφίσταται δυνατότης συνδυασμοῦ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων εἰς οἱονδήποτε θετικὸν ἐπίπεδον παραγωγῆς. Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν καὶ ἡ ὑπόθεσις τῆς διαιρετότητος ὁδηγοῦν εἰς συναρτήσεις παραγωγῆς γραμμικῆς μορφῆς.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μία οἰκονομία παράγει τὰ ἀγαθὰ 1, 2, ...m καὶ ἔχει εἰς τὴν διάθεσιν της τοὺς συντελεστὰς παραγωγῆς $m+1, m+2, \ldots m+\nu$. Ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης, π.χ. ἡ Πj δύναται νὰ παρασταθῇ δι' ἑνὸς διανύσματος ὡς ἀκολούθως:

$$\Pi_j = (\alpha_{1j}, \ldots \alpha_{mj}, \alpha_{m+1,j} \ldots \alpha_{m+\nu,j}) \tag{5}$$

ὅπου α_{ij} παριστᾷ τὴν ποσότητα τοῦ ἀγαθοῦ i τὴν χρησιμοποιουμένην ἢ παραγομένην ὑπὸ τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος j εἰς τὸ ἐπίπεδον μονάδος. Ἐὰν $\alpha_{ij} < o$, ἡ ποσότης αὕτη ἀποτελεῖ εἰσροήν. Ἀντιθέτως, ἐὰν $\alpha_{ij} > o$, ἡ ἐν λόγῳ ποσότης ἀποτελεῖ ἐκροήν, ἤτοι ἐκφράζει ποσότητα τοῦ ἀγαθοῦ i παραγομένην ὑπὸ τῆς δραστηριότητος j.

Ἔστω ὅτι ἡ ὑπ' ὄψιν οἰκονομία διαθέτει τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n$. Τὸ σύνολον τῶν ἐν λόγῳ δραστηριοτήτων ἀποτελεῖ τὴν τεχνολογικὴν μήτραν τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας, ἤτοι :

$$A = (\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n) \qquad (6)$$

Ἔστω ἐπίσης ὅτι $b_1, b_2, \ldots b_m$ παριστοῦν τὴν τελικὴν ζήτησιν τῶν παραγομένων ἀγαθῶν 1, 2, ... m ἀντιστοίχως καὶ $b_{m}+1, b_m+2, \ldots b_m+v$ τὰς διαθεσίμους ποσότητας τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς $m+1, m+2, \ldots m+v$.

Ἐὰν $X = (X_1, X_2, \ldots X_n)$ εἶναι τὸ διάνυσμα τῶν ἐπιπέδων χρησιμοποιήσεως τῶν n παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, τότε τὸ σύστημα ἐξισώσεων $AX < b$ ἔχει ἀπείρους λύσεις, δεδομένου ὅτι $n > m+v$.

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀρίστης λύσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων δυνατῶν λύσεων ἀπαιτεῖται ἡ ὕπαρξις ἑνὸς κριτηρίου ἐπιλογῆς, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὴν συνάρτησιν ἀριστοποιήσεως. Διὰ τὴν συμβολὴν ἑκάστης παραγωγικῆς δραστηριότητος λειτουργούσης εἰς τὸ ἐπίπεδον μονάδος εἰς τὴν συνάρτησιν ἀριστοποιήσεως λαμβάνεται μία δεδομένη τιμὴ C_j $(j = 1, 2, \ldots n)$ εἰς τρόπον ὥστε διὰ τὰς n παραγωγικὰς δραστηριότητας ἔχομεν τὸ διάνυσμα $C = (C_1, C_2, \ldots C_n)$.

Ἤδη μετὰ τὸν καθορισμὸν τῆς συναρτήσεως ἀριστοποιήσεως, τῶν περιορισμῶν τοῦ προβλήματος καὶ τῆς τεχνολογικῆς μήτρας τῆς οἰκονομίας τὸ πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως :

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ ἐκείνων τῶν μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι μεγιστοποιοῦν τὴν συνάρτησιν $C'X$ ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς $AX < b$ καὶ $X > O$. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀποτελεῖ κατ' οὐσίαν ἓν πρόβλημα ἐπιλογῆς τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων καὶ τῶν ἐπιπέδων χρησιμοποιήσεως αὐτῶν κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται ἡ μεγιστοποίησις τῆς συνολικῆς ἀξίας τῆς παραγωγῆς ἢ οἱουδήποτε κριτηρίου, τὸ ὁποῖον ἤθελεν ἐπιλεγῆ. Ἐὰν τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἔχῃ λύσιν, τότε δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι ὑφίσταται ἓν ἄριστον πρόγραμμα τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει ἀριθμὸν μὴ ἀρνητικῶν μεταβλητῶν ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμικῶν ἀνισοτήτων, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος.

Εἰς ἕκαστον πρόβλημα μεγιστοποιήσεως ἀντιστοιχεῖ ἓν δυαδικὸν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως καὶ ἀντιστρόφως. Τὸ δυαδικὸν τοῦτο πρόβλημα συνίσταται εἰς τὴν ἐλαχιστοποίησιν τῆς συναρτήσεως :

$$b'P \qquad (7)$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$A'P \geq C \qquad (8)$$

$$P \geq C \qquad (9)$$

ὅπου A' εἶναι ἡ ἐνηλλαγμένη μήτρα τῆς A καὶ $P = (P_1, \ldots P_m)$ τὸ διάνυσμα τῶν ὑπολογιστικῶν τιμῶν τῶν διαθεσίμων συντελεστῶν παραγωγῆς.

Αἱ ὑπολογιστικαὶ αὗται τιμαὶ εἶναι θεμελιώδους σημασίας διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν. Διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν καθίσταται δυνατὸς ὁ ἐπιμερισμὸς (imputation) τοῦ συνολικοῦ κέρδους εἰς τοὺς συντελεστὰς παραγωγῆς κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ συνολικῶς καταλογιζομένη ἀξία εἰς τοὺς συντελεστὰς παραγωγῆς οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται εἰς μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ προκῦπτον ἐκ τῆς δραστηριότητος ταύτης κέρδος. Ἐὰν τὸ συνολικῶς κατανεμόμενον εἰς τὰς ποσότητας τῶν συντελεστῶν μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος κέρδος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὑπολογιστικὸν κόστος, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κέρδους τὸ ὁποῖον παράγει ἡ δραστηριότης αὕτη, ἡ ἐν λόγῳ δραστηριότης πραγματοποιεῖ ἀρνητικὸν κέρδος καὶ διὰ τὸν λόγον τοῦτον δὲν συμφέρει ἡ χρησιμοποίησίς της. Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ἐὰν ὡρισμένοι συντελεσταὶ παραγωγῆς δὲν χρησιμοποιοῦνται πλήρως, αἱ ὑπολογιστικαὶ τιμαὶ αὐτῶν εἶναι μηδέν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει σαφῶς ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς κατανομῆς τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, δηλαδὴ ὡς πρόβλημα ἀριστοποιήσεως. Εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν ἡ κατανομὴ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ ἡ ἀξιολόγησις αὐτῶν ἀποτελοῦν κατ' οὐσίαν δύο ὄψεις τοῦ αὐτοῦ προβλήματος. Ἡ σαφὴς διατύπωσις καὶ λύσις τοῦ ἐν λόγῳ προβλήματος καθίσταται δυνατὴ διὰ τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται εἰς τὴν τυπικὴν σχέσιν μεταξὺ ἑνὸς προβλήματος μεγιστοποιήσεως καὶ τοῦ δυαδικοῦ αὐτοῦ προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως. Τὸ θεώρημα τοῦτο τῆς δυαδικότητος καθιστᾷ δυνατὸν τὸν καθορισμὸν ὑπολογιστικῶν τιμῶν διὰ τοὺς ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστὰς παραγωγῆς, αἱ ὁποῖαι διευκολύνουν εἰς τὴν λῆψιν ἀποφάσεων ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν κατανομὴν τῶν διαθεσίμων πόρων μεταξὺ τῶν διαφόρων χρήσεων. Ἐπὶ πλέον ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τιμῶν αὐτῶν δύναται νὰ ἀποφασισθῇ ἐὰν εἶναι συμφέρουσα ἢ ὄχι ἡ ἐπέκτασις μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος. Καθίσταται οὕτω προφανὴς ἡ χρησιμότης τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν προβλημάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

3. ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΣ ΚΑΙ ΑΔΥΝΑΜΙΑΙ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΩΣ ΟΡΓΑΝΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΕΩΣ

Ὁ γραμμικὸς προγραμματισμός, ὅστις ἀποτελεῖ μίαν τεχνικὴν ἀριστοποιήσεως, ἐχρησιμοποιήθη ἀρχικῶς πρὸς ἐπίλυσιν προβλημάτων σχετιζομένων πρὸς τὴν ἐπιστημονικὴν διοίκησιν καὶ λειτουργίαν τῆς ἐπιχειρήσεως. Λόγῳ ὅμως τοῦ ἐνδιαφέροντος τὸ ὁποῖον παρουσιάζει ἡ μέθοδος αὕτη, προσείλκυσε τὸ ἐνδιαφέρον τῶν οἰκονομολόγων τῶν ἀσχολουμένων μὲ τὴν μελέτην θεμάτων ἀφορώντων εἰς τὸν προγραμματισμὸν καὶ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν μιᾶς οἰκονομίας. Ἡ πρώτη προσπάθεια ἐφαρμογῆς τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ διὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ἐγένετο ὑπὸ τοῦ Chenery, ὅστις ἀνέπτυξε τὸν τρόπον χρησιμοποιήσεως καὶ ἐφαρμογῆς τῆς τεχνικῆς τοῦ προγράμματισμοῦ εἰς τὴν κατάρτισιν ἑνὸς προγράμματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἤδη ἡ τεχνικὴ τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ χρησιμοποιεῖται εὐρέως εἰς θεωρητικὰς καὶ πρακτικὰς ἀναλύσεις ἀναφερομένας εἰς τὸν προγραμματισμὸν τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως μιᾶς ὑπὸ ἀνάπτυξιν οἰκονομίας [1].

Ἡ χρησιμότης τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ διὰ τὴν κατάστρωσιν ἑνὸς ἀρίστου προγράμματος ἀναπτύξεως εἶναι λίαν σημαντική. Οὕτω, δεδομένης τῆς συναρτήσεως ἀριστοποιήσεως, ἐκ τῆς ἀρίστης λύσεως τοῦ προβλήματος τοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς τῶν ἐγχωρίων παραγωγικῶν κλάδων, τὰ ἐπίπεδα εἰσαγωγῶν, ὁ σχηματισμὸς παγίου κεφαλαίου, τὰ ἀποθέματα, ἡ ἀπαιτουμένη ποσότης ἐργασίας καὶ αἱ ἀνάγκαι εἰς ξένα κεφάλαια ἐντὸς τῆς προγραμματιζομένης περιόδου, προκειμένου νὰ πραγματοποιηθοῦν οἱ ἀντικειμενικοὶ σκοποὶ τοὺς ὁποίους ἐκφράζει ἡ συνάρτησις ἀριστοποιήσεως. Διὰ τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ συνεπῶς εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ κατανομὴ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς κατὰ τρόπον ἐξασφαλίζοντα τὴν πραγματοποίησιν δοθέντων σκοπῶν, ὑπὸ τοὺς καλυτέρους δυνατοὺς ὅρους.

Τὸ πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ὡς ἤδη ἔχει λεχθῆ, συνίσταται εἰς τὴν ἀριστοποίησιν (μεγιστοποίησιν ἢ ἐλαχιστοποίησιν) μιᾶς συναρτήσεως, ὑπὸ ὡρισμένους περιορισμούς. Οἱ περιορισμοὶ οὗτοι, εἰς τὴν περίπτωσιν ἐφαρμογῆς τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν προβλημάτων πολιτικῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναφέ-

1. Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἰς τὴν ἀνάλυσιν θεμάτων ἀναφερομένων εἰς τὸν προγραμματισμὸν καὶ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν βλέπε: H. B. Chenery, «Development Policies and Programmes», Economic Bulletin for Latin America, Μάρτιος 1958. H. B. Chenery καὶ P. G. Clark, Inderindustry Economics, New York, John Willey and Sons, 1959, Κεφ. 4 καὶ 11. H. B. Chenery καὶ K. S. Kretschmer, «Resource Allocation for Economic Development», Econometrica, Ὀκτώβριος 1956. H. B. Chenery καὶ H. Uzawa, «Non Linear Programming in Economic Development», εἰς Arrow, Hurwicz καὶ Uzawa (eds), Studies in Linear and non Linear Programming, Stanford University Press 1958. J. Sandee, A demonstration planning model for India, Bombay, Asia Publishing house, 1960. A. S. Manne καὶ H. M. Markowitz, Studies in Process Analysis, New York, John Wiley and Sons, 1963. J. B. Nugent, Programming the optimal development of Greek Economy 1954—1961, Center of Planning and Economic Research, Athens 1966. I. Adelman καὶ E. Thorbecke (eds), The Theory of Design of economic development, Baltimore 1966. S. M. Naseem, «A programming model for reduction of import dependence of Pakistan», Pakistan Development Review, 1968, I. A. Λεβεντάκη, Στόχοι Οἰκονομικῆς Ἀναπτύξεως ὑπὸ διαφόρους συναρτήσεις προτιμήσεως, Ἀθῆναι 1969.

ρωνται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς ἓν ἄριστον πρόγραμμα τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς, εἰσαγωγῶν, ἐπενδύσεων καὶ καταναλώσεως πρέπει νὰ εὑρίσκωνται ἐν συνεπείᾳ πρὸς τὴν διαθέσιμον παραγωγικὴν δυναμικότητα, τὴν προσφορὰν ἐργασίας, τὴν δυνατότητα πρὸς εἰσαγωγὰς καὶ τὴν προσφορὰν ἀποταμιευτικῶν κεφαλαίων. Οἱ ἐν λόγῳ περιορισμοὶ προσδιορίζουν τὴν πραγματοποιήσιμον περιοχήν, ἐντὸς τῆς ὁποίας ἡ συνάρτησις ἀριστοποιήσεως λαμβάνει τὴν μεγίστην ἢ ἐλαχίστην τιμήν της. Ἡ συνάρτησις αὕτη ἀριστοποιήσεως ἐκφράζει τοὺς ἀντικειμενικοὺς σκοποὺς τοὺς ὁποίους αἱ οἰκονομικαὶ ἀρχαὶ ἐπιθυμοῦν νὰ ἐπιτύχουν. Ἐπὶ παραδείγματι, ἡ συνάρτησις ἀριστοποιήσεως δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ ἐθνικοῦ προϊόντος καὶ νὰ ἐπιδιωχθῇ ἡ μεγιστοποίησις αὐτοῦ, ὑπὸ ὡρισμένας προϋποθέσεις. Ἡ συνάρτησις ἀριστοποιήσεως εἶναι ἐπίσης δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τῆς καταναλώσεως, τῆς ἀπασχολήσεως, τοῦ ἰσοζυγίου πληρωμῶν κλπ. Καθίσταται οὕτω προφανὲς ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς κατανομῆς τῶν διαθεσίμων οἰκονομικῶν πόρων δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον οἱ στόχοι τῆς οἰκονομικῆς πολιτικῆς ἐκφράζουν τὴν συνάρτησιν ἀριστοποιήσεως ἐνῷ ἡ διαθέσιμος παραγωγικὴ δυναμικότης, ἡ προσφορὰ ἐργασίας, ἡ προσφορὰ ἀποταμιευτικῶν κεφαλαίων κλπ. ἀποτελοῦν τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος.

Ἐκ τῆς ἀρίστης λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ ἡ διαδικασία ἀναπτύξεως, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἀκολουθηθῇ διὰ τὴν πραγματοποίησιν τεθέντων στόχων οἰκονομικῆς πολιτικῆς. Πρὸς διευκρίνησιν, θεωροῦμεν σκόπιμον νὰ ἀναφερθῶμεν εἰς τὴν ἐργασίαν τῶν Adelman καὶ Sparrow [2], ἡ ὁποία ἀφορᾷ εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ μαθηματικοῦ προγραμματισμοῦ διὰ τὴν ἐπιλογὴν τῆς ἐνδεδειγμένης στρατηγικῆς ἀναπτύξεως. Οἱ ἐν λόγῳ συγγραφεῖς ἐχρησιμοποίησαν τὸν μαθηματικὸν προγραμματισμὸν καὶ ἐπὶ τῇ βάσει δεδομένων τῆς Οἰκονομίας τῆς Κολομβίας ἐπεχείρησαν νὰ προσδιορίσουν τὴν ἀρίστην στρατηγικὴν ἀναπτύξεως, λαμβάνοντες ὡς κριτήρια ἀριστοποιήσεως τὰ κάτωθι : τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ ἐθνικοῦ προϊόντος, τὴν ἐλαχιστοποίησιν τῆς ξένης βοηθείας, τὴν μεγιστοποίησιν τῆς καταναλώσεως καὶ τὴν ἐλαχιστοποίησιν τῆς ἀνεργίας. Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω κριτηρίων ἀριστοποιήσεως προκύπτει ἓν σύνολον τεσσάρων ἀρίστων προγραμμάτων. Ἐκ τῆς ἐξετάσεως τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν προγραμμάτων αὐτῶν προκύπτουν αἱ κάτωθι διαπιστώσεις ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἀκολουθητέαν ἑκάστοτε στρατηγικὴν ἀναπτύξεως.

Ἡ στρατηγικὴ διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ ἐθνικοῦ προϊόντος, συμφώνως πρὸς τὰ ἀποτελέσματα τῶν Adelman καὶ Sparrow, συνίσταται εἰς τὴν ἐξειδί-

2. I. Adelman καὶ F. T. Sparrow, «Experiments with Linear and Piecewise Linear Dynamic Programming», εἰς Adelman and Thorbecke (eds), The Theory of Design and Economic Development, Baltimore 1966, σελ. 291-326.

κευσιν τῆς παραγωγῆς συμφώνως πρὸς τὸ συγκριτικὸν πλεονέκτημα. Ἡ στρατηγικὴ αὕτη ὑποδηλοῖ ὅτι πρέπει νὰ δοθῇ ἰδιαιτέρα ἔμφασις εἰς τὴν πρωτογενῆ παραγωγήν. Τὸ ἄριστον πρόγραμμα, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὴν διαδικασίαν μεγιστοποιήσεως τοῦ ἐθνικοῦ προϊόντος, προβλέπει ὅτι ἡ τελικὴ ζήτησις δι' εἴδη ἐνδύσεως, ὑποδήσεως καὶ ἐκτυπώσεως ὡς καὶ σημαντικὸν μέρος τῆς ζητήσεως διὰ προϊόντα τῆς χημικῆς, μηχανολογικῆς καὶ μεταλλουργικῆς βιομηχανίας θὰ ἱκανοποιῆται δι' εἰσαγωγῶν.

Ἡ στρατηγικὴ διὰ τὴν ἐλαχιστοποίησιν τῆς ξένης βοηθείας συνίσταται κατὰ κύριον λόγον εἰς τὴν ὑποκατάστασιν τῶν εἰσαγωγῶν δι' ἐγχωρίου παραγωγῆς καὶ κατὰ δεύτερον λόγον εἰς τὴν ἐπέκτασιν τῶν ἐξαγωγῶν. Ἡ ἐν λόγῳ στρατηγικὴ ὁδηγεῖ εἰς ἐπίπεδα ἐθνικοῦ προϊόντος, καταναλώσεως καὶ ἀπασχολήσεως χαμηλότερα ἐν σχέσει πρὸς ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἐπιτυγχάνονται ὅταν ἐπιδιώκεται ἡ μεγιστοποίησις τοῦ ἐθνικοῦ προϊόντος. Πλὴν ὅμως ἡ ἀνωτέρω διαδικασία συνεπάγεται ὑψηλότερον βαθμὸν ἐκβιομηχανίσεως ἔναντι τῆς διαδικασίας μεγιστοποιήσεως τοῦ ἐθνικοῦ προϊόντος.

Ἡ διαδικασία διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τῆς καταναλώσεως ὁδηγεῖ εἰς τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν ἐπίπεδον ἐπενδύσεων. Τὸ ἄριστον πρόγραμμα ἐν προκειμένῳ, συμφώνως πρὸς τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἀναλύσεως τῶν Adelman καὶ Sparrow, ὑποδηλοῖ ὅτι πρέπει νὰ δοθῇ μεγαλυτέρα ἔμφασις εἰς τὴν ὑποκατάστασιν τῶν εἰσαγωγῶν. Εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦτο σημαντικὸν μέρος τῆς ζητήσεως διὰ χημικὰ καὶ πετρελαιοειδῆ προϊόντα ὡς καὶ δι' εἴδη ἐκτυπώσεως προβλέπεται νὰ ἱκανοποιηθῇ δι' ἐγχωρίου παραγωγῆς.

Ἡ στρατηγικὴ διὰ τὴν ἐλαχιστοποίησιν τῆς ἀνεργίας συνίσταται εἰς τὴν ἐφαρμογὴν ἑνὸς προγράμματος ἐκβιομηχανίσεως, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ πρέπει νὰ δίδεται μεγαλυτέρα ἔμφασις εἰς τοὺς κλάδους ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι συνεπάγονται ταχεῖαν αὔξησιν τῆς ἀπασχολήσεως. Οἱ βιομηχανικοὶ κλάδοι, οἱ ὁποῖοι προβλέπεται νὰ ἀναπτυχθοῦν εἰς τὸ ἄριστον πρόγραμμα ἐν προκειμένῳ, συμφώνως πρὸς τὰ ἀποτελέσματα τῶν Adelman καὶ Sparrow, εἶναι τῆς ἐνδύσεως, ὑποδήσεως, κλωστοϋφαντουργίας, μηχανολογίας καὶ μεταλλουργίας. Κατὰ τοὺς ἀνωτέρω συγγραφεῖς, τὴν ἐπίτευξιν πλήρους ἀπασχολήσεως εἰς τὴν οἰκονομίαν παρεμποδίζει ἡ περιωρισμένη προσφορὰ ἐπιχειρηματικοῦ δυναμικοῦ καὶ εἰδικευμένης ἐργασίας. Ὡς ἀναφέρουν οἱ Adelman καὶ Sparrow, ἡ αὔξησις τῆς προσφορᾶς εἰδικευμένης ἐργασίας κατὰ μίαν μονάδα συνεπάγεται αὔξησιν τῆς ἀπασχολήσεως τοῦ ἀνειδικεύτου ἐργατικοῦ δυναμικοῦ κατὰ 6 μονάδας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ ἀκολουθητέα στρατηγικὴ ἀναπτύξεως εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἐπιδιωκομένων στόχων. Εἰδικώτερον, μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων ἀρίστων προγραμμάτων ὑφίστανται σημαντικαὶ διαφοραὶ ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἀκολουθητέαν στρατηγικήν, αἱ ὁποῖαι εἶναι τόσον ποσοτικῆς ὅσον καὶ ποιοτικῆς φύσεως. Οὕτως, ὁ βαθμὸς ἐκβιομηχανίσεως, ἡ κατανομὴ τῶν ἐπενδύσεων μεταξὺ ἐλαφρᾶς καὶ βαρείας βιομηχανίας, ὁ βαθμὸς ἐξαρτήσεως τῆς οἰκονομίας ἐκ τῆς ἐπεκτάσεως τῶν ἐξαγωγῶν ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν ὑποκατάστασιν τῶν εἰσαγωγῶν καὶ ἡ ἔκτασις διαφοροποιήσεως εἰς τὴν διάρθρωσιν τῆς βιομηχανικῆς παραγωγῆς διαφέρουν σημαντικῶς εἰς τὰ ὡς ἄνω τέσσαρα ἄριστα προγράμματα, τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τῆς λύσεως τῶν σχετικῶν προβλημάτων ἀριστοποιήσεως. Διὰ τῆς συγκριτικῆς ἀξιολογήσεως τῶν προγραμμάτων αὐτῶν δύναται νὰ προσδιορισθῇ τὸ κόστος εὐκαιρίας ἑκάστου κριτηρίου ἀριστοποιήσεως, δηλαδὴ τὸ κόστος τὸ ὁποῖον συνεπάγεται ἡ ἱκανοποίησις ἑνὸς κριτηρίου-στόχου εἰς ὅρους ἑνὸς ἄλλου.

Ἡ χρησιμοποίησις τῆς τεχνικῆς τοῦ μαθηματικοῦ προγραμματισμοῦ συνεπῶς καθιστᾷ δυνατὸν τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀκολουθητέας στρατηγικῆς ἀναπτύξεως εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἀναλόγως τῶν ἀντικειμενικῶν σκοπῶν τῶν ὑπευθύνων οἰκονομικῶν ἀρχῶν. Ἐπὶ πλέον, διὰ τῆς συγκριτικῆς ἐξετάσεως διαφόρων optimal προγραμμάτων καθίσταται δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τοῦ κόστους εὐκαιρίας ἑκάστου κριτηρίου ἀριστοποιήσεως.

Διὰ τὴν συναγωγὴν χρησίμων συμπερασμάτων οἰκονομικῆς πολιτικῆς ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἰς τὴν μακροοικονομικὴν ἀνάλυσιν, εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως ἐξετασθῇ ὁ βαθμὸς μεταβολῆς τῆς optimal στρατηγικῆς ἀναπτύξεως, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς λειτουργίας τοῦ ὑποδείγματος, ἐν σχέσει πρὸς τὴν μεταβολὴν τῶν περιορισμῶν τοῦ προβλήματος ἢ τὴν ἀλλαγὴν τῆς συναρτήσεως ἀριστοποιήσεως. Ἐὰν τὰ ἀποτελέσματα ἐκ τῆς μεταβολῆς τῶν περιορισμῶν ἢ ἐκ τῆς ἀλλαγῆς τῆς συναρτήσεως ἀριστοποιήσεως εἶναι ἀσήμαντα, τότε δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν μὲ κάποιαν βεβαιότητα ὅτι αἱ προτάσεις τοῦ ὑποδείγματος εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποτελέσουν τὴν βάσιν διὰ τὴν χάραξιν μιᾶς ἐπιτυχοῦς πολιτικῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἀντιθέτως, ἐὰν ἡ optimal στρατηγικὴ ἀναπτύξεως μεταβάλλεται σημαντικῶς κατόπιν μεταβολῆς τῶν περιορισμῶν τοῦ προγράμματος ἢ ἀλλαγῆς τῆς συναρτήσεως ἀριστοποιήσεως, τότε εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως ἐξετασθοῦν λεπτομερῶς τόσον οἱ ἐπιδιωκόμενοι στόχοι, ὅσον καὶ οἱ περιορισμοὶ τοῦ προβλήματος πρὶν ἢ διατυπωθοῦν αἱ προτάσεις πολιτικῆς τοῦ ὑποδείγματος. Διότι ἐὰν ἡ στρατηγικὴ ἀναπτύξεως ὑπόκειται εἰς ἐντόνους ἐπιδράσεις τῶν μεταβλητῶν τοῦ ὑποδείγματος, εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψουν σημαντικα σφάλματα. Τοῦτο ὅμως εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποφευχθῇ ἐὰν μεταβληθοῦν εἴτε οἱ περιορισμοὶ τοῦ προβλήματος εἴτε ἡ συνάρτησις ἀριστοποιήσεως κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ optimal στρατηγικὴ ἀναπτύξεως νὰ μὴ ὑπόκειται εἰς σημαντικὰς μεταβολὰς τῶν μεταβλητῶν τοῦ ὑποδείγματος.

Τὸ ὑπόδειγμα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, παρὰ τὴν ἀναλυτικήν του ἀξίαν, ἐμφανίζει ὡρισμένας ἀδυναμίας, αἱ ὁποῖαι περιορίζουν τὴν χρησιμότητά του ὡς ὀργάνου πολιτικῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἡ βασικὴ ἀδυναμία τοῦ ὑποδείγματος τοῦ προγραμματισμοῦ ἔγκειται εἰς τὴν γραμμικότητα αὐτοῦ. Οὕτως, ἡ ὑπόθεσις τῆς γραμμικότητος σημαίνει ὅτι ἡ σχέσις μεταξὺ χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ παραγομένων ποσοτήτων προϊόντων παραμένει σταθερά, ἀνεξαρτήτως ἐπιπέδου καὶ χρόνου παραγωγῆς. Συνέπεια τῆς ἀνωτέρω ὑποθέσεως εἶναι ὅτι εἰς ἕνα δεδομένον παραγωγικὸν κλάδον δὲν λαμβάνει χώραν ὑποκατάστασις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν εἰς τὴν συνάρτησιν παραγωγῆς. Διὰ τὴν οἰκονομίαν ἐν τῷ συνόλῳ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ὑποκατάστασις μεταξὺ διαφόρων τεχνικῶν μεθόδων παραγωγῆς ἀλλὰ μόνον κατόπιν μεταβολῆς τῆς συνθέσεως τοῦ συνολικοῦ παραγομένου προϊόντος. Ἐπὶ πλέον, ἡ ὑπόθεσις τῆς γραμμικότητος σημαίνει ὅτι δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ οἰκονομίαι κλίμακος ἢ αἱ ἐξωτερικαὶ οἰκονομίαι. Συνεπείᾳ τῶν ἀνωτέρω, περιορίζεται ἡ χρησιμότης τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ὡς ἀναλυτικῆς μεθόδου προγραμματισμοῦ τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, καθ' ὅσον ἡ στρατηγικὴ τῆς ἀναπτύξεως συνίσταται, μεταξὺ τῶν ἄλλων, καὶ εἰς τὴν ἐπέκτασιν τῆς παραγωγῆς τῶν κλάδων ἐκείνων οἱ ὁποῖοι θὰ δημιουργήσουν ἐξωτερικὰς οἰκονομίας καὶ συνεπῶς εὐρείας προοπτικὰς διὰ τὴν ἀνάπτυξιν καὶ τῶν λοιπῶν παραγωγικῶν κλάδων.

Ἑτέρα συνέπεια τῆς γραμμικότητος τοῦ ὑποδείγματος εἶναι ὅτι ἡ ἀξία τοῦ προϊόντος ἑκάστου παραγωγικοῦ κλάδου ὡς καὶ ἡ ἀξία ἑκάστου συντελεστοῦ παραγωγῆς ἐκτιμῶνται ἐπὶ τῇ βάσει τιμῶν παραμενουσῶν σταθερῶν καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας. Συνεπείᾳ τούτου ἡ ὁριακὴ κοινωνικὴ χρησιμότης ἑκάστου προϊόντος ἰσοῦται πάντοτε πρὸς τὴν μέσην τοιαύτην, ἀνεξαρτήτως ἐπιπέδου παραγωγῆς. Συνεπῶς, εἰς ἓν ἄριστον πρόγραμμα ὑπάρχει μία τάσις ὑπερεκτιμήσεως τῆς ἐκτάσεως τῶν ἐπιθυμητῶν μεταβολῶν ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀρχικὴν διάρθρωσιν τῆς οἰκονομίας.

Θὰ ἠδύνατο νὰ ὑποστηριχθῇ ὅτι ἡ βασικὴ ἀδυναμία τοῦ ὑποδείγματος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἡ ὁποία ἀπορρέει ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν τῆς γραμμικότητος, δύναται νὰ ἀντιμετωπισθῇ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως μὴ γραμμικῶν συναρτήσεων. Πράγματι, ἡ μὴ γραμμικὴ διατύπωσις τοῦ ὑποδείγματος ἀποτελεῖ μίαν σημαντικὴν βελτίωσιν αὐτοῦ. Ἐν τούτοις, καὶ τὸ μὴ γραμμικὸν ὑπόδειγμα δὲν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ μετὰ βεβαιότητος ὡς ὄργανον πολιτικῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως διὰ τοὺς ἑξῆς κυρίως λόγους: α) Ἓν ὑπόδειγμα, ἀνεξαρτήτως ἐὰν εἶναι γραμμικὸν ἢ μή, δὲν δύναται νὰ περιλάβῃ τὸ σύνολον τῶν μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι ἐπηρεάζουν τὸν μηχανισμὸν λειτουργίας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Ἐπὶ παραδείγματι, ὑπάρχουν ὡρισμένοι παράγοντες, οἱ ὁποῖοι, μολονότι εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπηρεάζουν σημαντικῶς τὰς διαφόρους οἰκονομικὰς σχέσεις, ἐν τούτοις δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν εἰς τὸ ὑπόδειγμα εἴτε διότι δὲν τυγχάνουν γνωστοί, εἴτε διότι δὲν δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν εἰς ποσοτικὰς σχέσεις. β) Ἀπὸ ἀπόψεως ὑπολογιστικῆς διαδικασίας τὰ μὴ γραμμικὰ προβλήματα εἶναι γενικῶς πολύπλοκα καὶ ἡ ἐπίλυσις αὐτῶν λίαν δυσχερής.

Ὡς γενικὸν συμπέρασμα δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν βασικῶν προβλημάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, ὡς εἶναι π.χ. τὸ πρόβλημα τῆς ἀρίστης κατανομῆς τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τὴν πραγματοποίησιν δοθέντων στόχων, τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς μεταξὺ εἰσαγωγῶν καὶ ἐγχωρίως παραγομένων ἀγαθῶν, τὸ πρόβλημα τῆς ἐκβιομηχανίσεως κλπ. Τὰ ποσοτικὰ ἀποτελέσματα ἐν τούτοις τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς τεχνικῆς τοῦ μαθηματικοῦ προγραμματισμοῦ ὑπόκεινται εἰς ὡρισμένας βασικὰς προϋποθέσεις, αἱ ὁποῖαι περιορίζουν τὴν πρακτικὴν χρησιμότητα τῶν προτάσεων πολιτικῆς τοῦ ὑποδείγματος.

4. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως μὴ γραμμικῶν συναρτήσεων τὸ ὑπόδειγμα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ μετατρέπεται εἰς μὴ γραμμικὸν τοιοῦτον. Ἡ διατύπωσις τοῦ γενικοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως τοῦ μὴ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἔχει ὡς ἀκολούθως :

Νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ συνάρτησις :

$$Z(X) = Z(X_1, \ldots X_n) \qquad (10)$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\begin{aligned} f_1(X_1, \ldots X_n) &< b_1 \\ f_2(X_1, \ldots X_n) &\leq b_2 \\ &\ldots\ldots \\ f_m(X_1, \ldots X_n) &< b_m \end{aligned} \qquad (11)$$

$$X_j > 0 \, (j = 1, 2, \ldots n) \qquad (12)$$

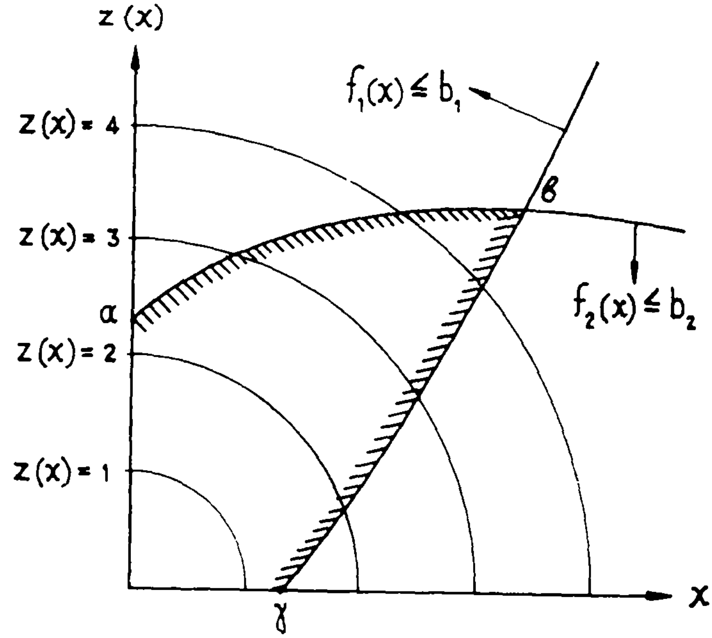
Ἡ συνάρτησις μεγιστοποιήσεως $Z(X)$, ἡ ὁποία εἶναι συνεχὴς καὶ παραγωγήσιμος, δύναται νὰ εἶναι οἱαδήποτε συνάρτησις χρησιμότητος. Ἐὰν ἡ συνάρτησις αὕτη παριστᾷ μίαν κοίλην καμπύλην, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ὁριακὴ χρησιμότης δὲν βαίνει αὔξουσα. Αἱ συναρτήσεις $fi(X)$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελοῦν συναρτήσεις μετασχηματισμοῦ, εἰς τὰς ὁποίας λαμβάνουν χώραν μετατροπαὶ τῶν εἰσροῶν εἰς ἐκροάς. Ἐὰν αἱ συναρτήσεις αὗται μετασχηματισμοῦ παριστοῦν κυρτὰς καμπύλας [3], ἡ περιοχὴ ἡ ὁποία

3. Μία συνάρτησις $f(X)$ ὡς πρὸς μίαν μεταβλητὴν εἶναι κυρτὴ (convex) ἐὰν δι' ἕκαστον ζεῦγος σημείων τῆς καμπύλης τῆς παριστώσης τὴν ἐν λόγῳ συνάρτησιν, π.χ. τῶν σημείων X_1 καὶ X_2 ὅπου $X_1 < X_2$, πληροῦται ἡ συνθήκη :

$$f\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) \leq \frac{f(X_1) + f(X_2)}{2}$$

Ἡ συνθήκη αὕτη δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἀκολούθως : $f[(1-\theta) X_1 + \theta X_2] < (1-\theta) f(X_1) + \theta f(X_2)$ ὅπου $0 < \theta < 1$. Ἐὰν D εἶναι ἓν κυρτὸν σύνολον εἰς τὸν χῶρον τῶν προσδιορίζεται ὑπ' αὐτῶν ἀποτελεῖ ἓν κυρτὸν σύνολον. Τὸ σύνολον τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν πραγματοποιήσιμον περιοχὴν ἐντὸς τῆς ὁποίας ἐπιτυγχάνεται ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως Z (X). Ἡ ὑπόθεσις περὶ κυρτότητος τῆς πραγματοποιησίμου περιοχῆς σημαίνει ὅτι ἐὰν δύο προγράμματα, π.χ. τὰ $X' = (X'_1, X'_2, \ldots X'_m)$ καὶ $X'' = (X''_1, X''_2, \ldots X''_m)$ εἶναι πραγματοποιήσιμα, δηλαδὴ ἱκανοποιοῦν τοὺς περιορισμοὺς οἱ ὁποῖοι δίδονται ὑπὸ τοῦ συστήματος ἀνισοτήτων (11), τότε οἱονδήποτε ἐνδιάμεσον πρόγραμμα τὸ ὁποῖον πληροῖ τὴν συνθήκην : $\theta X' + (1-\theta) X''$, ὅπου $0 \leq \theta \leq 1$, εἶναι ἐπίσης πραγματοποιήσιμον.

Ἡ ὑπόθεσις περὶ κοιλότητος (concavity) τῆς συναρτήσεως Z (X) καὶ ἡ ὑπόθεσις περὶ κυρτότητος (convexity) τῶν συναρτήσεων fi (X) (i = 1, 2, ...m) ὁδηγοῦν εἰς τὴν ἑξῆς ἰδιότητα · Ἐὰν ἓν πραγματοποιήσιμον πρόγραμμα



Διάγραμμα 1

X ἀποτελῇ τοπικὸν (local) optimum τῆς συναρτήσεως Z (X), τοῦτο ἀποτελεῖ καὶ συνολικὸν (global) obtimum. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ γεγονότος

σημείων $(X_1 \ldots X_n)$, μία συνάρτησις f(X) πολλῶν μεταβλητῶν εἶναι κυρτὴ εἰς τὴν περιοχὴν D ἐὰν διὰ X καὶ y πληροῦται ἡ συνθήκη : $f[(1-\theta)X + \theta y] \leq (1-\theta) f(X) + \theta f(y)$ ὅπου $0 < \theta < 1$. Μία συνάρτησις f (X) εἶναι κοίλη (concave) ἐὰν ἡ συνάρτησις $-f(X)$ εἶναι κυρτή. Ἓν σύνολον D χαρακτηρίζεται ὡς κυρτὸν ἐὰν δι' ἕκαστον ζεῦγος τῶν στοιχείων αὐτοῦ τὸ τμῆμα τῆς εὐθείας τὸ συνδέον ταῦτα κεῖται ἐντὸς τοῦ συνόλου.

ὅτι τὸ τμῆμα εὐθείας τὸ συνδέον ἓν τοπικὸν optimum τῆς πραγματοποιησίμου περιοχῆς μὲ τὸ συνολικὸν optimum τῆς ἐν λόγῳ περιοχῆς πρέπει νὰ κεῖται ἐντὸς τῆς πραγματοποιησίμου περιοχῆς λόγῳ τῆς κυρτότητος ταύτης.

Εἰς τὸ διάγραμμα 1 ἡ περιοχὴ α, β, γ, ἥτις προσδιορίζεται ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων $f_1(X) < b_1$ καὶ $f_2(X) \leq b_2$ εἰς τὸν χῶρον τῶν δύο διαστάσεων, ἀποτελεῖ τὴν πραγματοποιήσιμον περιοχὴν ἐντὸς τῆς ὁποίας ἡ συνάρτησις ἀριστοποιήσεως λαμβάνει τὴν μεγίστην ἢ ἐλαχίστην τιμὴν αὐτῆς. Ἡ συνάρτησις αὕτη παριστᾶ κοίλην ἢ κυρτὴν καμπύλην ἀναλόγως τοῦ ἐὰν τὸ πρόβλημα τοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ἓν πρόβλημα μεγιστοποιήσεως ἢ ἐλαχιστοποιήσεως.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν μὴ γραμμικῶν προβλημάτων δὲν ὑφίσταται μία γενικὴ μέθοδος λύσεως αὐτῶν. Ἐν τούτοις, ἐὰν οἱ συναρτήσεις $Z(X)$ καὶ $f_i(X)$ $(i = 1, 2, \dots m)$ πληροῦν ὡρισμένας συνθήκας περὶ κοιλότητος καὶ κυρτότητος, ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τῆς μορφῆς ταύτης θὰ ἠδύνατο νὰ ἀναζητηθῇ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange. Μία κατηγορία ἐπίσης μὴ γραμμικῶν προβλημάτων μεγιστοποιήσεως καὶ ἐλαχιστοποιήσεως εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιμετωπισθῇ διὰ μετασχηματισμοῦ τῶν καμπυλοειδῶν συναρτήσεων εἰς ἄλλας καμπύλας ἀποτελουμένας ἐκ γραμμικῶν τμημάτων. Πρὸς διευκρίνησιν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται ἡ ἐλαχιστοποίησις τῶν συνολικῶν ἐπενδύσεων τῶν ἀπαιτουμένων διὰ τὴν ἐπίτευξιν δεδομένης τελικῆς ζητήσεως. Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ συντελεστὴς κεφαλαίου εἶναι μία αὔξουσα συνάρτησις τοῦ προϊόντος X_j, ἤτοι :

$$C_j = \alpha_j + \beta_j X_j$$
$$\alpha \geq 0, \quad \beta > 0 \qquad (j = 1, 2, \dots n) \qquad (13)$$

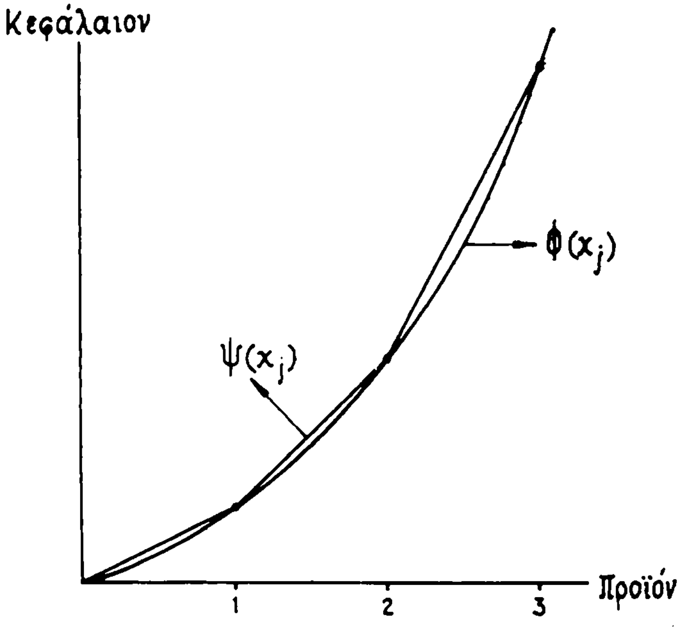
Ἐκ τῆς (13) λαμβάνομεν :

$$C_j X_j = \alpha_j X_j + \beta_j X_j^2 \qquad (14)$$

ἡ ὁποία δηλοῖ ὅτι ἡ συνολικῶς ἀπαιτουμένη ποσότης κεφαλαίου εἶναι μία κυρτὴ συνάρτησις τοῦ προϊόντος X_j.

Εἰς τὸ διάγραμμα 2 ἡ καμπύλη $\Phi(X_j)$ παριστᾶ τὴν συνάρτησιν κεφαλαίου καὶ ζητεῖται ἡ ἀντικατάστασις αὐτῆς διὰ τῆς καμπύλης $\Psi(X_j)$ ἥτις ἀποτελεῖται ἐκ γραμμικῶν τμημάτων.

Ἡ ἀντικατάστασις αὕτη δύναται νὰ γίνῃ εὐκόλως ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ X_j ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν προϊόντων, ἕκαστον τῶν ὁποίων εὑρίσκεται ἐντὸς ὡρισμένων ὁρίων τῆς καμπύλης $\Phi(X_j)$. Ἡ κλίσις τῶν ἀντιστοίχων εἰς ἑκάστην περίπτωσιν γραμμικῶν τμημάτων τῶν ἀποτελούντων τὴν $\Psi(X_j)$ δεικνύει τὴν ἀπαιτουμένην ποσότητα κεφαλαίου πρὸς παραγωγὴν τοῦ σχετικοῦ προϊόντος. Καθίσταται οὕτω προφανὲς ὅτι αὐξανομένης τῆς παραγομένης ποσότητος προϊόντος αὐξάνεται καὶ ἡ σχέσις κεφαλαίου—προϊόντος. Ἐκεῖνο πάντως τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει ἐν προκειμένῳ εἶναι ὅτι καθίσταται δυνατὴ ἡ ἀντικατάστασις μιᾶς μὴ γραμμικῆς καμπύλης διὰ μιᾶς ἄλλης ἀποτελουμένης ἐκ γραμμικῶν τμημάτων. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην καθίσταται δυνατὴ ἡ λύσις τῶν μὴ γραμμικῶν προβλημάτων διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τροποποιημένων· μεθόδων ἐπιλύσεως τῶν γραμμικῶν προβλημάτων.



Διάγραμμα 2

5. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ KUHN ΚΑΙ TUCKER ΚΑΙ Η ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΑΥΤΟΥ

Κατωτέρω ἐπιχειρεῖται ἡ διατύπωσις τῶν συνθηκῶν ὑπὸ τὰς ὁποίας ἓν μὴ γραμμικὸν πρόβλημα δύναται νὰ ἔχῃ λύσιν καὶ ἐξετάζεται ἡ οἰκονομικὴ σημασία τῶν συνθηκῶν αὐτῶν.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπιζητεῖται ἡ μεγιστοποίησις τῆς συναρτήσεως (10) ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς (11) καὶ (12). Ὑποθέτομεν ὅτι τόσον ἡ συνάρτησις μεγιστοποιήσεως, ὅσον καὶ οἱ περιορισμοὶ οἱ ὁποῖοι ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ συστήματος ἀνισοτήτων (11) ἀποτελοῦν παραγωγισίμους συναρτήσεις καὶ ὅτι ἡ πραγματοποιήσιμος περιοχὴ ἀποτελεῖ ἓν κυρτὸν σύνολον.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος μεγιστοποιήσεως σχηματίζομεν τὴν συνάρτησιν τοῦ Lagrange καὶ ἔχομεν :

$$F(X, P) = Z(X_1, \ldots. X_n) + \Sigma P_i [b_i - f_i (X_1, \ldots\ldots X_n)] \qquad (15)$$

ὅπου $X = (X_1, \ldots X_n)$ τὸ διάνυσμα τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν n παραγωγικῶν δραστηριοτήτων καὶ $P = (P_1, \dots P_m)$ τὸ διάνυσμα τῶν ὑπολογιστικῶν τιμῶν. Αἱ ὑπολογιστικαὶ αὗται τιμαί, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται καὶ πολλαπλασιασταὶ τοῦ Lagrange, πρέπει νὰ πληροῦν τὴν συνθήκην τῆς μὴ ἀρνητικότητος. Ἐπὶ πλέον, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν λόγῳ τιμῶν πρέπει νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν περιορισμῶν τοῦ προβλήματος.

Οἱ Kuhn καὶ Tucker[4] ἀποδεικνύουν τὸ ἑξῆς θεώρημα. Τὸ διάνυσμα $\bar{X} = (\bar{X}_1, \dots \bar{X}_n)$ ἀποτελεῖ optimum λύσιν τοῦ γενικοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως ἐὰν ὑφίσταται ἓν διάνυσμα ὑπολογιστικῶν τιμῶν $\bar{P} = (\bar{P}_1, \dots P_m)$ τοιοῦτον ὥστε τὸ ζεῦγος διανυσμάτων $(\bar{X}, \bar{P})$ ἀποτελεῖ ἓν σελοειδὲς σημεῖον (saddle–point) τῆς συναρτήσεως τοῦ Lagrange, ἤτοι [5]:

$$F(X\bar{P}) \leq F(\bar{X}, \bar{P}) < F(\bar{X}, P) \qquad (16)$$

ὅπου $X, P \geq 0$

Ἡ (16) δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἀκολούθως :

$$F(\bar{X}, \bar{P}) = \underset{P \geq 0}{\mathrm{MIN}}\ \underset{X \geq 0}{\mathrm{MAX}}\ F(X, P) = \underset{X \geq 0}{\mathrm{MAX}}\ \underset{P \geq 0}{\mathrm{MIN}}\ F(X, P) \qquad (17)$$

Αἱ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ πληροῦνται ἵνα τὸ ζεῦγος διανυσμάτων $(\bar{X}, P)$ ἀποτελεῖ ἓν σελοειδὲς σημεῖον τῆς συναρτήσεως $F(X, P)$ ἔχουν ὡς ἀκολούθως :

---

4. H. W. Kuhn καὶ A. W. Tucker, «Non-Linear Programming», εἰς J. Neyman (ed.) Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press 1951, σελ. 481–492.

5. Ἡ πρότασις ὅτι τὸ $\bar{X}$ ἀποτελεῖ optimum διάνυσμα τοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως ἐὰν $(\bar{X}, \bar{P})$ εἶναι ἓν σελοειδὲς σημεῖον τῆς συναρτήσεως $F(X, P)$, ὅπου $X, P \geq O$, ἀποδεικνύεται ὡς ἀκολούθως :

Ἀντικαθιστῶντες τὴν (15) εἰς τὴν (16) λαμβάνομεν :

$$Z(X) + \Sigma_i \bar{p}_i [b_i - f_i(X)] \leq Z(\bar{x}) + \Sigma_i \bar{p}_i [b_i - f_i(\bar{x})] < Z(\bar{x}) + \Sigma_i P_i [b_i - f_i(\bar{x})] \qquad (18)$$

ὅπου $X, P > 0$

Δεδομένου ὅτι τὸ δεξιὸν σκέλος τῆς ἀνισότητος (18) ἰσχύει δι' ὅλα τὰ $P > O$, προκύπτει ὅτι $(b_i - f_i(\bar{x}))$ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἀρνητικὸν στοιχεῖον καὶ συνεπῶς $\Sigma_i p [b_i - f_i(\bar{x})]$ θὰ πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν, ἤτοι :

$$f_i(\bar{x}) \leq b_i \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_i p [b_i - f_i(\bar{x})] = 0$$

Οὕτω τὸ ἀριστερὸν σκέλος τῆς ἀνισότητος (18) δύναται νὰ γραφῇ :

$$Z(X) + \Sigma_i \bar{p}_i [b_i - f_i(X)] < Z(\bar{x}) \qquad \text{δι' ὅλα τὰ } X > 0$$

Ἐξ ἄλλου, δεδομένου ὅτι δι' οἱονδήποτε πραγματοποιήσιμον διάνυσμα X ἔχομεν :

$$\Sigma_i p_i [b_i - f_i(X)] \geq 0, \text{ προκύπτει ὅτι :}$$

$$Z(X) \leq Z(X) + \Sigma_i \bar{p}_i [b_i - f_i(X)] \leq Z(\bar{x})$$

περ ἀποδεικνύει ὅτι τὸ διάνυσμα x εἶναι optimum. Βλέπε σχετικῶς : H. Uzawa, «The Kuhn-Tucker theorem in concave programming», εἰς Arrow, Hurwicz, καὶ Uzawa (eds.), Studies in linear καὶ non linear programming, Stanford University Press, California 1956, σελ. 32–37.

α) $d\overline{F}/dP_i > 0$ καὶ $\overline{P}_i \geq 0$

ἤτοι : $f_i(\overline{X}) \leq b_i$

$$\overline{P}_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \qquad (19)$$

καὶ β) $d\overline{F}/dX_j \leq 0$ καὶ $\overline{X}_j \geq 0$

ἤτοι : $$dZ/dX_j \leq \Sigma_i \overline{P}_i\, d\overline{f}_i/dX_j \qquad (20)$$

$$\overline{X}_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

Ἡ συνθήκη (19) δηλοῖ ὅτι ἐὰν $f_i(X) < b_i$, τότε $P_i = 0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἐὰν ὡρισμένη ποσότης τοῦ παραγωγικοῦ συντελεστοῦ i μένει ἀχρησιμοποίητος, ἡ ὑπολογιστικὴ τιμὴ αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Ἀντιθέτως, ἐὰν $f_i(X) = b_i$ τότε $P_i > 0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἐὰν ἡ διαθέσιμος ποσότης τοῦ συντελεστοῦ i χρησιμοποιῆται πλήρως, ἡ ὑπολογιστικὴ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι θετική.

Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τῆς συνθήκης (20) εἶναι ἡ ἑξῆς : Ἡ μερικὴ παραγωγὸς dZ/dX_j δεικνύει τὸ ὁριακὸν κέρδος τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος j ἡ ὁποία παράγει τὸ προϊὸν j. Ἡ μερικὴ παράγωγος $dfi/dχ_j$ δεικνύει τὴν ὁριακὴν ποσότητα τοῦ συντελεστοῦ i τὴν καταναλισκομένην ὑπὸ τῆς δραστηριότητος j διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος προϊόντος. Ἐὰν συνεπῶς P_i παριστᾷ τὴν ὑπολογιστικὴν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ i, ἡ παράστασις $P_i df_i/dX_j$ δεικνύει τὴν ὁριακὴν ὑπολογιστικὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ i τῆς χρησιμοποιουμένης ὑπὸ τῆς δραστηριότητος j διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος προϊόντος. Καὶ δεδομένου ὅτι ὑπάρχουν 1, 2. . . .m συντελεσταὶ παραγωγῆς, ἡ παράστασις $\Sigma_i P_i df_i/dZ_j$ δεικνύει τὸ συνολικὸν ὁριακὸν ὑπολογιστικὸν κόστος τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος j διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος προϊόντος, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν καταναλισκομένων ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς ἐπὶ τὰς ὑπολογιστικὰς τιμὰς αὐτῶν. Δυνάμεθα τώρα θὰ διατυπώσωμεν τὴν οἰκονομικὴν ἔννοιαν τῆς συνθήκης (20) ὡς ἀκολούθως :

Τὸ ὁριακὸν κέρδος ἑκάστης παραγωγικῆς δραστηριότητος δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ συνολικὸν ὁριακὸν ὑπολογιστικὸν κόστος αὐτῆς. Ἐὰν $Xj > O$, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης j χρησιμοποιεῖται εἰς τὸ ἄριστον πρόγραμμα, τότε τὸ ὁριακὸν κέρδος τῆς ἐν λόγῳ δραστηριότητος πρέπει νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ συνολικὸν ὁριακὸν ὑπολογιστικὸν κόστος αὐτῆς, δηλαδὴ ἡ (20) ἰσχύει διὰ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος. Ἐὰν ἡ (20) ἰσχύῃ μόνον διὰ τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος, ἤτοι διὰ τὸ σημεῖον $<$,τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ὁριακὸν κέρδος τῆς δραστηριότητος j εἶναι μικρότερον ἐν σχέσει πρὸς τὸ συνολικὸν ὁριακὸν ὑπολογιστικὸν κόστος αὐτῆς καὶ διὰ τοῦτο ἡ δραστηριότης αὕτη δὲν χρησιμοποιεῖται, δηλαδὴ $Xj = O$.

Ἡ οἰκονομικὴ ἑρμηνεία τῶν συνθηκῶν (19) καὶ (20) εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἑρμηνείαν ἡ ὁποία δίδεται εἰς τοὺς περιορισμοὺς καὶ τὰς μεταβλητὰς τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἡ μόνη διαφορὰ ἔγκειται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἐνῷ εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν ἡ ὁριακὴ ἔννοια συμπίπτει πρὸς τὴν μέσην τοιαύτην, εἰς τὸν μὴ γραμμικὸν προγραμματισμὸν αἱ ἔννοιαι αὗται διαφέρουν.

6. ΤΟ ΔΥΑΔΙΚΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΝ ΚΑΙ Η ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΑΥΤΟΥ

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις μεγιστοποιήσεως (10) παριστᾷ μίαν κοίλην καμπύλην ἐνῷ οἱ περιορισμοὶ (11) ἀποτελοῦν κυρτὰς συναρτήσεις, τότε τὸ δυαδικὸν πρόβλημα τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα μεγιστοποιήσεως τοῦ μὴ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως [6] :

Νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ ἡ συνάρτησις :

$$\Phi(X, P) = Z(X) + \Sigma_i P_i [b_i - f_i(X)] - \Sigma_j X_j [dZ/dX_j - \Sigma_i P_i df_i/dX_j] \qquad (21)$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\begin{aligned} \Sigma_i P_i df_i/dX_1 &\geq dZ/dX_1 \\ \Sigma_i P_i df_i/dX_2 &\geq dZ/dX_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma_i P_i df_i/dX_n &\geq dZ/dX_n \end{aligned} \qquad (22)$$

$$P_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots m) \qquad (23)$$

Ἐὰν τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως χαρακτηρισθῇ ὡς ἀρχικόν, τότε τὸ πρόβλημα μεγιστοποιήσεως (10), (11) καὶ (12) δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελεῖ τὸ δυαδικὸν τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ὡς ἄνω πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως. Δηλαδὴ εἰς τὸν μὴ γραμμικὸν προγραμματισμὸν δὲν ἰσχύει ἡ πρότασις ὅτι εἰς ἕκαστον ἀρχικὸν πρόβλημα μεγιστοποιήσεως ἀντιστοιχεῖ καὶ ἓν δυαδικὸν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως καὶ ἀντιστρόφως.

Ἡ δυαδικότης παρουσιάζει σημαντικὸν ἐνδιαφέρον καὶ εἰς τὸν μὴ γραμμικὸν προγραμματισμόν. Τοῦτο θὰ καταστῇ σαφὲς ἐκ τῆς ἐξετάσεως τῆς οἰκονομικῆς σημασίας τόσον τῶν περιορισμῶν τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος, ὅσον καὶ τῆς συναρτήσεως ἀριστοποιήσεως αὐτοῦ.

Ἄς ἐξετάσωμεν ἐν πρώτοις τὴν οἰκονομικὴν ἔννοιαν τῶν περιορισμῶν οἱ ὁποῖοι ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ συστήματος ἀνισοτήτων (22). Ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι αἱ μεταβληταὶ τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος P_1, P_2, $\ldots P_m$ ἀποτελοῦν ὑπολογιστικὰς τιμὰς ἢ ἀξίας τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς $1, 2, \ldots m$, ἡ οἰκονομικὴ σημασία τῶν ἀνισοτήτων τοῦ συστήματος (22) εἶναι προφανής. Οὕτω π.χ. τὸ ἀριστερὸν σκέλος τῆς πρώτης ἀνισότητος τοῦ συστήματος (22) δει-

6. W. Philip, «A duality theorem for non-linear programming», Quarterly of Applied Mathematics, 1961, σελ. 239-244.

κνύει τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν καταναλισκομένων ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς ἐπὶ τὰς ὑπολογιστικὰς τιμὰς αὐτῶν, δηλαδὴ τὴν συνολικὴν ὑπολογιστικὴν ἀξίαν τῶν χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ X_1. Ἡ ὑπολογιστικὴ αὕτη ἀξία, ὡς ἤδη ἔχει λεχθῆ, ἀποτελεῖ τὸ ὁριακὸν ὑπολογιστικὸν κόστος τῆς δραστηριότητος j λειτουργούσης εἰς τὸ ἐπίπεδον μονάδος. Τὸ δεξιὸν σκέλος τῆς πρώτης ἀνισότητος τοῦ συστήματος (22) δεικνύει τὸ ὁριακὸν κέρδος τοῦ παραγομένου ἀγαθοῦ X_1. Δυνάμεθα τώρα τὰ διατυπώσωμεν τὴν οἰκονομικὴν ἔννοιαν τῆς πρώτης ἀνισότητος τοῦ συστήματος (22) ὡς ἀκολούθως :

Τὸ συνολικὸν ὁριακὸν ὑπολογιστικὸν κόστος διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ X_1 δὲν δύναται νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ὁριακοῦ κέρδους τοῦ ἐν λόγῳ ἀγαθοῦ. Ἀνάλογος ἑρμηνεία δύναται νὰ δοθῇ καὶ εἰς τὰς ὑπολοίπους ἀνισότητας τοῦ συστήματος (22).

Ἀλλ' ἤδη τίθεται τὸ ἐρώτημα : αἱ μεταβληταὶ P_1, P_2, ...P_m ἀποτελοῦν πράγματι ὑπολογιστικὰς τιμὰς τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς.

Τὸ ἐρώτημα τοῦτο προσεπάθησαν νὰ διερευνήσουν οἱ Baumol καὶ Balinsky [7]. Οἱ ἐν λόγῳ συγγραφεῖς θεωροῦν τὸ συνολικὸν κέρδος ὡς συνάρτησιν τῶν διαθεσίμων ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς b_1, b_2, ...b_m ἤτοι :

$$\Pi(b) = \Pi(b_1, \dots b_m) = \underset{X}{\mathrm{MAX}} \; [Z(X)/fi(X) \leq b_i] \quad X \geq 0$$

καὶ ἐξετάζουν τὴν πρότασιν ἐὰν ἡ τιμὴ μιᾶς μεταβλητῆς τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος, π.χ τῆς $\bar{P}_k$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ὁριακὸν κέρδος τοῦ συντελεστοῦ k, ἤτοι $\bar{P}_k = d\Pi/db_k$

Οἱ Baumol καὶ Balinsky ἀποδεικνύουν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς $\bar{P}_k$ εὑρίσκεται ἐντὸς τῶν ὁρίων τὰ ὁποῖα προσδιορίζονται ὑπὸ τῆς ἐκ δεξιῶν καὶ ἐξ ἀριστερῶν μερικῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως τοῦ κέρδους ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν b_k, ἤτοι :

$$d\Pi/db_k \,|_+ \;\leq \bar{P}_k < d\Pi/db_k \,|_-$$

Καθίσταται προφανὲς ὅτι ἐὰν εἰς δεδομένην τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ k προσδιορίζεται ἡ μερικὴ παράγωγος εἰς τρόπον ὥστε $d\Pi/db_k\,|_+ = d\Pi/db_k\,|_-$ τότε $\bar{P}_k = d\Pi/db_k$, δηλαδὴ ἡ ἀρίστη τιμὴ τῆς μεταβλητῆς P_k ἰσοῦται πρὸς τὸ ὁριακὸν κέρδος τοῦ συντελεστοῦ k. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ θεωρήσωμεν ὅτι αἱ μεταβληταὶ τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος P_1, P_2, ...P_n ἀποτελοῦν πράγματι ὑπολογιστικὰς τιμὰς τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν παραγωγῆς, αἱ ὁποῖαι ὑπὸ ὡρισμένας προϋποθέσεις ἰσοῦνται πρὸς τὰ ὁριακὰ κέρδη τῶν ἐν λόγῳ συντελεστῶν.

7. W. J. Baumol καὶ M. L. Balinsky, «The dual in non Linear Programming and its economic interpretation». Review of Economic Studies, 1968, σελ. 237-256.

Ἄς ἐξετάσωμεν τώρα τὴν οἰκονομικὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως ἐλαχιστοποιήσεως (21) τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος. Ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι αἱ μεταβληταὶ X_1, X_2, ...X_n τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος μεγιστοποιήσεως λαμβάνουν optimum τιμάς, ὁ πρῶτος ὅρος Z (X_1, ...X_n) τῆς συναρτήσεως ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος δεικνύει τὸ μέγιστον κέρδος καὶ ὡς ἐκ τούτου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σταθερός.

Ἡ παράστασις $[b_i—f_i(X)]$ τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς συναρτήσεως ἐλαχιστοποιήσεως (21) δεικνύει τὴν ἀχρησιμοποίητον ποσότητα τοῦ συντελεστοῦ i ἐνῷ P_i παριστᾷ τὴν κατὰ μονάδα ὑπολογιστικὴν ἀξίαν τοῦ ἐν λόγῳ συντελεστοῦ. Συνεπῶς ἐλαχιστοποίησις τοῦ δευτέρου ὅρου $\Sigma_i P_i$ $[b_i—f_i\ (X)]$ τῆς συναρτήσεως (21) σημαίνει ἐλαχιστοποίησιν τῆς ἀξίας τῶν μὴ χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς.

Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τοῦ τρίτου ὅρου τῆς συναρτήσεως ἐλαχιστοποιήσεως (21) : $\Sigma_j X_j\ [dZ/dX_j—\Sigma_i P_i df_i/dX_j]$ δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως : Ὡς ἤδη ἔχει ἀναφερθῆ, ἡ μερικὴ παράγωγος dZ/dX_j δεικνύει τὸ ὁριακὸν κέρδος τοῦ ἀγαθοῦ X_j ἐνῷ ἡ παράστασις $\Sigma_i P_i df_i/dX_j$ δεικνύει τὸ συνολικὸν ὁριακὸν ὑπολογιστικὸν κόστος διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ Xj. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ συνολικοῦ ὁριακοῦ ὑπολογιστικοῦ κόστους καὶ ὁριακοῦ κέρδους τοῦ προϊόντος j δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελεῖ τὴν ὁριακὴν ζημίαν (Marginal opportunity loss) τὴν ὁποίαν συνεπάγεται μία αὔξησις τοῦ προϊόντος j. Πολλαπλασιάζοντες τὴν διαφορὰν ταύτην ἐπὶ τὴν ποσότητα τοῦ προϊόντος j, δηλαδὴ ἐπὶ Xj καὶ ἀθροίζοντες ὅλα τὰ j ($j = 1, 2, \ldots n$) λαμβάνομεν τὴν ὁριακὴν ζημίαν ἡ ὁποία προκύπτει ἐξ ὅλων τῶν παραγομένων προϊόντων. Οὕτως, ὁ τρίτος ὅρος τῆς συναρτήσεως (21) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελεῖ τὸ ὁριακὸν κόστος εὐκαιρίας ὅλων τῶν παραγομένων ἀγαθῶν.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι ἡ ἐλαχιστοποίησις τῆς συναρτήσεως (21) τοῦ δυαδικοῦ προβλήματος σημαίνει : α) ἐλαχιστοποίησιν τῆς ἀξίας τῶν μὴ χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ β) ἐλαχιστοποίησιν τοῦ κόστους εὐκαιρίας τοῦ συνολικοῦ παραγομένου προϊόντος.

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ἐκ τῆς προηγηθείσης ἀναλύσεως εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξαχθοῦν τὰ κάτωθι γενικὰ συμπεράσματα :

1) Ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν τοῦ προβλήματος τῆς κατανομῆς καὶ ἀξιολογήσεως τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τοῦ καθορισμοῦ ὀρθῶν ὑπολογιστικῶν τιμῶν τῶν ἐν λόγῳ συντελεστῶν. Ἡ βασικὴ ὑπόθεσις τοῦ γραμμικοῦ

προγραμματισμοῦ εἶναι ὅτι τόσον ἡ συνάρτησις ἀριστοποιήσεως, ὅσον καὶ αἱ ἀνισότητες αἱ ἐκφραζουσαι τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος ἀποτελοῦν γραμμικὰς συναρτήσεις δυναμένας νὰ διατυπωθοῦν ποσοτικῶς.

2) Ὁ μὴ γραμμικὸς προγραμματισμὸς καθιστᾷ δυνατὴν τὴν λύσιν προβλημάτων προγραμματισμοῦ, εἰς τὰ ὁποῖα εἴτε ἡ συνάρτησις ἀριστοποιήσεως εἴτε αἱ συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος εἴτε ἀμφότεραι αἱ ὡς ἄνω συναρτήσεις εἶναι μὴ γραμμικῆς μορφῆς δυνάμεναι νὰ ἐκφρασθοῦν ποσοτικῶς. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ μὴ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ τὸ οριακὸν κέρδος ἑκάστου συντελεστοῦ παραγωγῆς ἰσοῦται ὑπὸ ὡρισμένας προϋποθέσεις πρὸς τὸ οριακὸν κόστος αὐτοῦ. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, λόγῳ τῆς ὑποθέσεως τῆς γραμμικότητος, ἡ ἔννοια τοῦ οριακοῦ κόστους συμπίπτει πρὸς τὴν ἔννοιαν τοῦ μέσου κόστους.

3) Ὁ μαθηματικὸς προγραμματισμὸς καθιστᾷ δυνατὸν τὸν ἐπὶ ποσοτικῆς βάσεως προσδιορισμὸν τῆς ἐνδεδειγμένης στρατηγικῆς διὰ τὴν ἐπίτευξιν τεθέντων στόχων οἰκονομικῆς πολιτικῆς. Βασικὸν πλεονέκτημα τοῦ μαθηματικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ὅτι ἐξασφαλίζει λύσεις, αἱ ὁποῖαι ἀφ' ἑνὸς εὑρίσκονται ἐν συνεπείᾳ πρὸς τοὺς διαθεσίμους οἰκονομικοὺς πόρους καὶ τὰς ἐν χρήσει τεχνολογικὰς μεθόδους παραγωγῆς καὶ ἀφ' ἑτέρου ἱκανοποιοῦν τοὺς στόχους τοὺς ὁποίους ἐκφράζει ἡ συνάρτησις ἀριστοποιήσεως. Τὸ πλεονέκτημα τοῦτο ἐν τούτοις ἐπιτυγχάνεται μ' ἕνα κόστος. Ἐν πρώτοις, ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς χρησιμοποιεῖ τὴν ὑπόθεσιν τῆς γραμμικότητος. Δεύτερον, τὸ ὑπόδειγμα τοῦ προγραμματισμοῦ, γραμμικοῦ καὶ μή, δὲν λαμβάνει ὑπ' ὄψιν ὡρισμένους ποιοτικοὺς ἢ ποσοτικοὺς παράγοντας, οἱ ὁποῖοι εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπηρεάζουν σημαντικῶς τὴν διαμόρφωσιν τῶν βασικῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν.

8. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
ΜΕΘΟΔΟΣ ΛΥΣΕΩΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ θὰ ἠδύνατο νὰ ἀναζητηθῇ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου Simplex. Ἐνταῦθα θὰ χρησιμοποιήσωμεν μίαν τροποποιημένην μέθοδον Simplex διὰ τὴν λύσιν τοῦ ὡς ἄνω προβλήματος. Ἡ μέθοδος αὐτή, ἥτις διαφέρει τῆς συνήθως χρησιμοποιουμένης μεθόδου Simplex ὡς πρὸς τὴν διαδικασίαν προσδιορισμοῦ τῆς ἀποδοτικότητος τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῶν μὴ ἀνηκουσῶν εἰς τὸ πρόγραμμα βάσεως [8], διευκολύνει τὰ μέγιστα τὴν λύσιν πολυπλόκων προβλημά-

8. Πρόγραμμα βάσεως καλεῖται τὸ πρόγραμμα τὸ περιλαμβάνον ἀριθμὸν δραστηριοτήτων ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν περιορισμῶν τοῦ προβλήματος.

των ὡς εἶναι τὰ προβλήματα τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως διότι ἁπλοποιεῖ κατὰ πολὺ τὰς ὑπολογιστικὰς πράξεις κατὰ τὴν λύσιν αὐτῶν. Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν τὴν διαδικασίαν ἐπιλύσεως ἑνὸς προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς τροποποιημένης μεθόδου Simplex [9].

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπιδιώκεται ἡ ἐλαχιστοποίησις τῶν ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων διὰ τὴν ἱκανοποίησιν δεδομένης τελικῆς ζητήσεως. Ὑποθέτομεν ὅτι ἕκαστος παραγωγικὸς κλάδος δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ περισσοτέρας τῆς μιᾶς παραγωγικὰς δραστηριότητας πρὸς παραγωγὴν ἑνὸς ὡρισμένου ἀγαθοῦ. Ἡ ἐπιλογὴ τῆς οἰκονομικωτέρας παραγωγικῆς δραστηριότητος ἐπιδιώκεται νὰ γίνῃ βάσει τοῦ κριτηρίου τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τῶν ἐπενδύσεων. Τὸ πρόβλημα τοῦτο διατυποῦται ὡς ἀκολούθως :

Νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ ἡ συνάρτησις :

$$Z = \Sigma_j c_j X_j \tag{24}$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\Sigma_j \alpha_{ij} X_j \geq b_i \qquad (i = 1, 2, \dots m) \tag{25}$$

$$X_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots n) \tag{26}$$

Σχηματικῶς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως, εἰς περίπτωσιν μιᾶς ὑποθετικῆς οἰκονομίας περιλαμβανούσης τρεῖς παραγωγικοὺς κλάδους ἕκαστος τῶν ὁποίων παράγει ἓν μόνον ἀγαθόν, ἔχει ὡς ἀκολούθως :

	Κλάδος 1			Κλάδος 2		Κλάδος 3	Περιορισμοί
Παραγωγικαὶ δραστηριότητες / Κλάδοι	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	Π_6	Τελικὴ ζήτησις
1	1	1	1	$-\alpha_{14}$	$-\alpha_{15}$	$-\alpha_{16}$	b_1
2	$-\alpha_{21}$	$-\alpha_{22}$	$-\alpha_{23}$	1	1	$-\alpha_{26}$	b_2
3	$-\alpha_{31}$	$-\alpha_{32}$	$-\alpha_{33}$	$-\alpha_{34}$	$-\alpha_{35}$	1	b_3
Κεφάλαιον	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	Ἐλάχιστον

Ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος, ὁ κλάδος 1 δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας (μεθόδους παραγωγῆς) Π_1, Π_2 ἢ Π_3. Ὁμοίως ὁ κλάδος 2 τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας Π_4 καὶ Π_5 κ.ο.κ. Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης Π_1 δεικνύει ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος προϊόντος τοῦ κλάδου 1 ἀπαιτοῦνται α_{21} μονάδες προϊόντος τοῦ κλάδου

9. Βλέπε σχετικῶς : H. B. Chenery and P. C. Clark, Interindustry Economics, John Willey and Sons, New York 1959, Κεφ. 4.

2 καὶ α_{31} μονάδες προϊόντος τοῦ κλάδου 3. Πλὴν τῶν ἀνωτέρω εἰσροῶν, ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης Π_1 χρησιμοποιεῖ ἐπίσης (πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος προϊόντος) καὶ κεφάλαιον C_1 μονάδες. Ἀνάλογος ἑρμηνεία δύναται νὰ δοθῇ καὶ εἰς τὰς λοιπὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας.

Τὸ ὡς ἄνω πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως συνίσταται εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων καὶ τῶν ἐπιπέδων χρησιμοποιήσεως αὐτῶν εἰς τρόπον ὥστε αἱ ἀπαιτούμεναι ἐπενδύσεις διὰ τὴν ἐπίτευξιν τῆς δοθείσης τελικῆς ζητήσεως νὰ εἶναι αἱ ἐλάχιστοι δυναταί. Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ ὡς ἀκολούθως: Εὑρίσκομεν μίαν πραγματοποιήσιμον βασικὴν λύσιν, ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τοὺς περιορισμοὺς (25) καὶ (26). Οὕτως, ἐὰν $X_1, X_2, \ldots X_m$ παριστοῦν τὰ ἐπίπεδα τῶν ἀντιστοίχων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων Π_1, $\Pi_2, \ldots \Pi_m$ μιᾶς πραγματοποιησίμου βασικῆς λύσεως, ἔχομεν:

$$\Sigma_j \alpha_{ij} X_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \tag{27}$$

Λύοντες ταύτην ὡς πρὸς Xj, λαμβάνομεν:

$$X_j = \Sigma_i \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} b_i \qquad (j = 1, 2, \ldots m) \tag{28}$$

ὅπου Δ εἶναι ἡ ὁρίζουσα τῶν στοιχείων τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὴν βάσιν καὶ Δ_{ij} ὁ συμπαράγων τοῦ στοιχείου α_{ij}.

Χρησιμοποιοῦντες τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας τοῦ προγράμματος τῆς βάσεως, δυνάμεθα νὰ καταστρώσωμεν τὸ ἀκόλουθον σύστημα ἐξισώσεων διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ὑπολογιστικῶν τιμῶν τῶν τελικῶν προϊόντων[10].

$$\Sigma_i \alpha_{ij} P_i = C_j \qquad (j = 1, 2, \ldots m) \tag{29}$$

ὅπου P_i παριστᾷ τὸ συνολικὸν (ἄμεσον καὶ ἔμμεσον) κόστος κεφαλαίου τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος τελικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου i[11].

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑπολογιστικῶν τιμῶν δύναται νὰ ἐξακριβωθῇ ἡ δυνατότης βελτιώσεως τοῦ προγράμματος, διὰ τοῦ ἐλέγχου τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῶν μὴ ἀνηκουσῶν εἰς τὸ πρόγραμμα τῆς βάσεως. Διὰ νὰ ἐλέγξωμεν τὰς ὡς ἄνω παραγωγικὰς δραστηριότητας, πρέπει προηγουμένως νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ καθαρὸν κέρδος αὐτῶν. Τὸ ἀκαθάριστον κέρδος μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος μὴ ἀνηκούσης εἰς τὴν βάσιν, π.χ. τῆς Π_6 εὑρίσκεται ὡς διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἀξίας (εἰς μονάδας κεφαλαίου) μιᾶς μονάδος

10. Οἱ συντελεσταὶ α_{ij} προσημαίνονται μὲ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν σημεῖον ἀναλόγως τοῦ ἐὰν ἀποτελοῦν ἐκροὰς ἢ εἰσροὰς τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος j. Ἐνταῦθα οἱ συντελεσται α_{ij} οἱ παριστῶντες ἐκροὰς ἰσοῦνται πρὸς τὴν μονάδα.

11. Αἱ ὑπολογιστικαὶ τιμαὶ ἐκφράζονται εἰς μονάδας τοῦ κριτηρίου ἀριστοποιήσεως. Οὕτω π.χ. ἐὰν ὡς κριτήριον ἀριστοποιήσεως ληφθῇ ἡ μεγιστοποίησις τοῦ ἐθνικοῦ προϊόντος, ἡ ὑπολογιστικὴ τιμὴ P_i δεικνύει τὴν ἀξίαν τῶν ἀπαιτουμένων εἰσροῶν πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος προϊόντος τοῦ κλάδου i.

τελικοῦ προϊόντος τῆς ἐν λόγῳ δραστηριότητος καὶ τοῦ κόστους τῶν χρησιμοποιουμένων εἰσροῶν :

$$\lambda_6 = \Sigma_i \, \alpha_{i6} \, P_i \qquad (30)$$

Τὸ καθαρὸν κέρδος ἰσοῦται μὲ τὸ ἀκαθάριστον κέρδος μεῖον τὸ ἄμεσον κόστος κεφαλαίου :

$$W_6 = \lambda_6 - C_6 \qquad (31)$$

Ἐὰν $W_6 < o$, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης Π_6 πραγματοποιεῖ ἀρνητικὰ κέρδη καὶ διὰ τὸν λόγον τοῦτον δὲν συμφέρει ἡ χρησιμοποίησίς της. Ἐάν, ἀντιθέτως, $W_6 > o$, αὕτη πραγματοποιεῖ θετικὰ κέρδη, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ εἰσαγωγὴ ταύτης εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος θὰ προκαλέσῃ μείωσιν τῆς συναρτήσεως-προτιμήσεως. Κατὰ συνέπειαν εἶναι συμφέρουσα ἡ εἰσαγωγὴ τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος Π_6 εἰς τὸ πργραμμα βάσεως. Ἀλλ', ὡς γνωστόν, ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων μιᾶς πραγματοποιησίμου βασικῆς λύσεως πρέπει νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν περιορισμῶν τοῦ προβλήματος. Κατὰ συνέπειαν ἐκ τοῦ προγράμματος πρέπει νὰ ἐξέλθῃ μία παραγωγικὴ δραστηριότης τῆς βάσεως ὑποκαθισταμένη διὰ τῆς Π_6. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐξέλθῃ ἐκ τῆς βάσεως σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως :

Ἐκφράζομεν τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα Π_6 ὡς γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῆς βάσεως καὶ ἔχομεν :

$$\Pi_6 = X_1 \Pi_1 + X_2 \Pi_2 + \ldots\ldots + X_m \Pi_m \qquad (32)$$

Προσδιορίζομεν τὰ ἐπίπεδα χρησιμοποιήσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῆς βάσεως μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὸ πρόγραμμα τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος Π_6 εἰς τὸ ἐπίπεδον μονάδος καὶ ἔχομεν :

$$x_j = \Sigma_i \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} (b_i - \alpha_{i,6}) \qquad (j = 1, 2, \ldots. m) \qquad (33)$$

Τὸ ἐπίπεδον μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος τῆς βάσεως, π.χ. τῆς j μειοῦται διὰ τῆς εἰσαγωγῆς εἰς τὸ πρόγραμμα τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος Π_6 εἰς τὸ ἐπίπεδον μονάδος ἐὰν $Xj - Xj < o$. Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης τώρα ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐξέλθῃ ἐκ τῆς βάσεως δύναται νὰ προσδιορισθῇ διὰ τοῦ ἀκολούθου τύπου :

$$X'_j = X_j - x_j \, \Theta \qquad (34)$$

ὅπου $X'j$ παριστᾷ τὴν μεταβολὴν τοῦ ἐπιπέδου τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος j καὶ Θ τὸ ἐπίπεδον τῆς εἰσερχομένης παραγωγικῆς δραστηριότητος Π_6 Θέτομεν τὴν (34) ἴσην πρὸς τὸ μηδὲν καὶ λύομεν ὡς πρὸς Θ. Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης τῆς βάσεως ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μικροτέραν τιμὴν τοῦ Θ περιέχεται εἰς τὸ πρόγραμμα μὲ ἐπίπεδον Ο, δηλαδὴ ἐξέρχεται ἐκ τῆς βάσεως.

Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἐξερχομένης παραγωγικῆς δραστηριότητος, σχηματίζομεν μίαν νέαν βάσιν περιλαμβάνουσαν τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα Π_6. Ἀκολουθοῦντες τὴν γνωστὴν διαδικασίαν προσδιορίζομεν τὰς ὑπολογιστικὰς τιμὰς χρησιμοποιοῦντες τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας τῆς νέας βάσεως. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑπολογιστικῶν τούτων τιμῶν εὑρίσκομεν τὸ καθαρὸν κέρδος μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος π.χ. τῆς Π_i, ἡ ὁποία δὲν ἀνήκει εἰς τὴν βάσιν. Ἐὰν διαπιστωθῇ ὅτι τὸ καθαρὸν κέρδος τῆς δραστηριότητος ταύτης εἶναι θετικόν, τοῦτο σημαίνει ὅτι εἶναι συμφέρουσα ἡ χρησιμοποίησίς της. Προσδιορίζομεν τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα τῆς βάσεως ἥτις πρέπει νὰ ἐξέλθῃ ἐκ τοῦ προγράμματος. Μετὰ ταῦτα, εὑρίσκομεν μίαν νέαν πραγματοποιήσιμον βασικὴν λύσιν κ.ο.κ. Ἡ διαδικασία αὕτη συνεχίζεται μέχρις ὅτου καταλήξωμεν εἰς ἓν πρόγραμμα ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁποίου δύναται νὰ διαπιστωθῇ ὅτι δὲν ὑφίσταται παραγωγικὴ δραστηριότης, ἐκτὸς τῆς βάσεως, ἡ ὁποία νὰ πραγματοποιῇ θετικὰ κέρδη. Τὸ πρόγραμμα τοῦτο, τοῦ ὁποίου αἱ παραγωγικαὶ δραστηριότητες πραγματοποιοῦν καθαρὸν κέρδος μηδέν, εἶναι τὸ ἄριστον πρόγραμμα.

Ἐκ τοῦ ἀρίστου τούτου προγράμματος δύνανται νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα χρησιμοποιήσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, τὰ ὁποῖα ἐλαχιστοποιοῦν τὰς ἀπαιτουμένας ἐπενδύσεις πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς δεδομένης τελικῆς ζητήσεως.