

ΑΡΧΕΙΟΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΚΔΙΔΟΜΕΝΟΝ

ΥΠΟ

ΔΗΜΗΤΡ. ΕΜΜ. ΚΑΛΙΤΣΟΥΝΑΚΗ

ΕΤΟΣ 39ον (1959)
ΤΟΜΟΣ 39ος

ΤΕΥΧΟΣ Β'
ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ

ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΟΣ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Υπό Ρ. Δ. ΘΕΟΧΑΡΗ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΟΣ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Ἡ ἔννοια τῆς ἰσορροπίας ἐκπηγάζει ἀπὸ μηχανικὰς ἔννοιαις. Οὕτως εἰς τὴν Φυσικὴν ἢ ἀπλουστέρα μορφῇ ἰσορροπίας εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν δύο ἢ περισσότεραι δυνάμεις ἀλληλοεξουδετεροῦνται¹. Καὶ ἀνάλογον πρὸς τοῦτο οἰκονομικὸν φαινόμενον εἶναι ἡ ἰσορροπία μεταξὺ προσφορᾶς καὶ ζητήσεως ἐνὸς ἀγαθοῦ ἢ ἡ ἰσορροπία μεταξὺ ἐπιθυμίας ἐνὸς προσώπου πρὸς ἱκανοποίησιν μιᾶς ἀνάγκης του καὶ τῆς πρὸς τοῦτο ἀπαιτουμένης προσπάθειας². Ἡ ἐξέτασις τῆς ἰσορροπίας εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς γίνεται μὲ βάσιν τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ὅλα τὰ ἄλλα μεγέθη τῆς οἰκονομίας παραμένουν ἀμετάβλητα. Ἀλλὰ ὑπάρχει καὶ ἡ ἔννοια τῆς γενικῆς ἰσορροπίας καθ' ἣν ὅλα τὰ μεγέθη ἐν τῇ οἰκονομίᾳ καθορίζονται ταυτοχρόνως καὶ ἐν ἀλληλεξαρτήσῃ.

Ἀπὸ τὸ πρόβλημα τῆς ὑπάρξεως ἐνὸς ἢ πλείονων σημείων ἰσορροπίας ἐνὸς οἰκονομικοῦ μεγέθους ἀντιδιαστέλλεται τὸ πρόβλημα τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας.

1. Πρβλ. καὶ F. Knight, «Statics and Dynamics. Some queries regarding the mechanical analogy in Economics» ἐν The Ethics of Competition (1935), σελ. 161-185 ὡς καὶ τοῦ ἰδίου «Statik und Dynamik-zur Frage der mechanischen Analogie in der Wirtschaftswissenschaften» ἐν Zeitschrift für Nationalökonomie, τόμ. II, 1930, σελ. 1-26.

2. A. Marshall, Principles of Economics, 8η ἐκδόσις (1936), σελ. 331, L. Robbins, «On a certain ambiguity in the conception of stationary equilibrium», Economic Journal, 1930, σελ. 194.

Ἡ ἔρευνα¹ τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας σκοπὸν ἔχει νὰ ἐξετάσῃ κατὰ πόσον εἰς περίπτωσιν ἀποκλίσεως οἰκονομικοῦ τινος μεγέθους ἀπὸ τῆς ἀξίας ἰσορροπίας του θὰ υπάρξῃ τάσις πρὸς ἐπιστροφήν τοῦτου πρὸς τὴν ἀξίαν ἰσορροπίας ἢ ὄχι.

Ὁ ὅρος «σταθερότης τῆς ἰσορροπίας» φαίνεται νὰ ἔχῃ χρησιμοποιηθῇ τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Cournot². Συζητῶν περὶ τοῦ σημείου εἰς ὃ συναντῶνται αἱ καμπύλαι ἀντιδράσεως τῶν δύο ὀλιγοπωλητῶν λέγει ὅτι ἡ κατάστασις τῆς ἰσορροπίας ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι «σταθερά· ἐὰν δηλαδὴ ἐχάτερος τῶν παραγωγῶν, ἀπατηθεὶς ὡς πρὸς τὸ πραγματικόν του συμφέρον, ἐγκυαλίψῃ τὸ σημεῖον τοῦτο προσωρινῶς, θὰ ὀδηγηθῇ ὑπίσῳ πρὸς τοῦτο διὰ σειρᾶς ἀντιδράσεων, τῶν ὑποίων αἱ διακυμάνσεις θὰ βαίνουν συνεχῶς ἐλαττούμεναι»³.

Ἀλλὰ ὁ Cournot περιωρίσθη μόνον εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας προκειμένου περὶ μιᾶς μορφῆς ὀλιγοπωλίου. Τὸ πρόβλημα τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας τῆς τιμῆς ὑπὸ καθεστῶς ἐλευθέρου συναγωνισμοῦ ἐξετάσθη σχεδὸν ταυτοχρόνως ὑπὸ τοῦ L. Walras καὶ τοῦ A. Marshall, ἐπὶ τοῦ ἔργου τῶν ὑποίων ἡ ἐπίδρασις τοῦ Cournot εἶναι προφανής.

Ἡ βασικὴ ὑπόθεσις τοῦ Walras εἶναι ὅτι ὅταν ὑπάρχῃ ὑπερ-

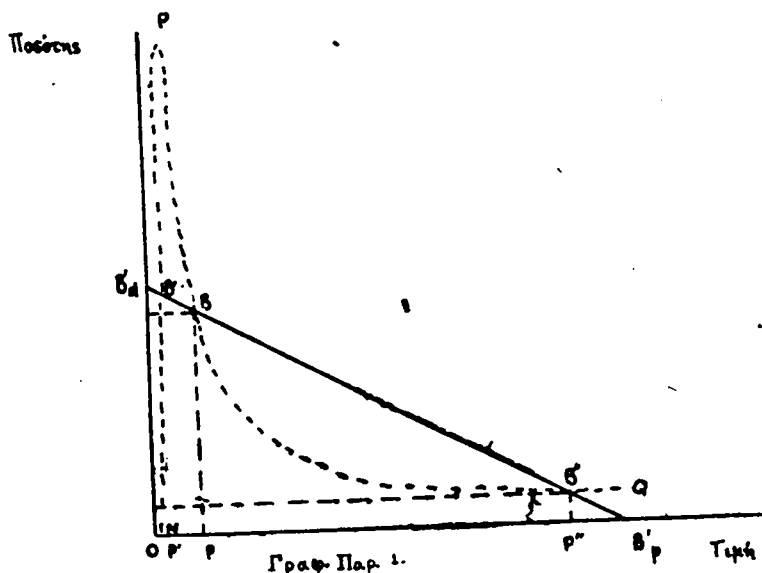
1. Γενικῶς ἐπὶ τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας πρβλ. R. Frisch, «On the notion of equilibrium and disequilibrium» ἐν Review of Economic Studies, 1936, σελ. 100 ἐφ. καὶ τοῦ ἰδίου «Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics» ἐν Economic Essays in honour of Gustav Cassel, 1933, σελ. 171-205.

2. A. Cournot, «Recherches sur les principes mathématiques de la Théorie des Richesses», (1838), Ἀγγλικὴ μετάφρασις ὑπὸ N. T. Bacon, 1929, σελ. 81-82. Συζητήσεις περὶ τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας καὶ δὴ ὑπὸ δυναμικὴν μορφήν ἀπαντῶμεν καὶ πρὸ τοῦ Cournot, κυρίως παρὰ τῷ Giambattista Vasco, «Saggio Politico della Moneta» (1772), ἐν Custodi. Scrittori Classici Italiani di Economia Politica, parte moderna, τόμ. XXXIII, σελ. 109-115 καὶ παρὰ τῷ Pierre Samuel Du Pont de Nemours, «Des courbes politiques» (1774), ἐν «Carl Friedrichs von Baden brieflicher Verkehr mit Mirabeau und Du Pont» (1892), τόμ. II, σελ. 289-300.

3. Cournot, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 81.

βάλλουσα προσφορά καὶ εἰς τὴν δεδομένην τιμὴν συνεπῶς ἡ προσφορά ὑπερέχει τῆς ζήτησεως, ἡ τιμὴ θὰ σημειώσῃ πτώσιν. Ἀντιθέτως εἰς τὴν δεδομένην τιμὴν ἡ ζήτησις τοῦ ἀγαθοῦ ὑπερέχει τῆς προσφορᾶς του, ἡ τιμὴ θὰ παρουσιάσῃ ἀνοδὸν ¹.

Χρησιμοποιῶν τὴν ἀνωτέρω ὑπόθεσιν καὶ γραφικὴν παράστασιν παρομοίαν πρὸς τὴν ὑπ' ἀρ. 1 ἐνταῦθα εἰκονιζομένην, ὁ Walras ἐξετάζει κατὰ πόσον ἡ τιμὴ ἀποκλίνει ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας θὰ ἐπανέλθῃ πρὸς αὐτό.



Εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν 1 ἡ καμπύλη τῆς ζήτησεως παρίσταται ὑπὸ τῆς $B'd B'p$ καὶ ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς ὑπὸ τῆς NPQ . Αἱ δύο καμπύλαι συναντῶνται εἰς τὰ σημεία B , B' καὶ B'' τὰ ὅποια καὶ ἀποτελοῦν τὰ σημεία ἰσορροπίας. Πρόκειται συνεπῶς περὶ περιπτώσεως πολλαπλῆς ἰσορροπίας (multiple equilibrium).

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν σημείων B' καὶ B'' ἡ μετατόπισις τῆς τιμῆς πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς πρὸς ἑκάτερον σημεῖον ἀντιστοιχοῦ-

1. L. Walras, «*Eléments d'Economie Politique Pure*» (1874), Ἀγγλ. μετάφρασις ὑπὸ W. Jaffé (1954), σελ. 109 καὶ ἐφ.

σης τιμῆς ἰσορροπίας, σημαίνει αὐξήσιν τῆς προσφορᾶς ἐν σχέσει πρὸς τὴν ζήτησιν, γεγονός ὅπερ θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν πτώσιν τῆς τιμῆς, ἥτοι ἐπάνοδον εἰς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας ¹. Ἀντιθέτως μετατόπισις τῆς τιμῆς πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν σημείων ρ' καὶ ρ'' καὶ συνεπῶς πτώσις τῆς τιμῆς κάτω τοῦ ἐπιπέδου ἰσορροπίας θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν αὐξήσιν τῆς ζητουμένης ποσότητος ἐν σχέσει πρὸς τὴν προσφερομένην, πρᾶγμα «ὅπερ πρέπει νὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν ἄνοδον τῆς τιμῆς, ἥτοι κίνησιν πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας» ². Καὶ ὁ Walras προσθέτει : «Ἡ τοιαύτη ἰσορροπία ὁμοιάζει ἀκριβῶς πρὸς ἐκείνην σώματος ἐκκρεμοῦς, τὸ κέντρον βάρους τοῦ ὁποίου εὐρίσκεται ἀκριβῶς κάτωθεν τοῦ σημείου τῆς αἰωρήσεως εἰς τρόπον ὥστε ἐὰν τὸ κέντρον τοῦτο τοῦ βάρους μετατοπισθῇ ἀπὸ τὴν κάθετον γραμμὴν κάτωθεν τοῦ σημείου τῆς αἰωρήσεως, θὰ τείνῃ αὐτομάτως νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν του θέσιν χάρις εἰς τὴν δύναμιν τῆς ἑλξεως. Ἡ ἰσορροπία αὕτη εἶναι συνεπῶς σταθερά» ³.

Ἀντιθέτως ἡ ἰσορροπία εἰς τὸ σημεῖον Β τῆς γραφικῆς παραστάσεως 1 εἶναι κατὰ τὸν Walras ἀσταθής. Διότι μετατόπισις τῆς τιμῆς πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ρ, θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν αὐξήσιν τῆς ζητουμένης ποσότητος ἐν σχέσει πρὸς τὴν προσφερομένην. Ἀλλὰ τοῦτο θὰ σημαίνῃ αὐξήσιν τῆς τιμῆς ἥτοι «κίνησιν περισσότερον καὶ περισσότερον ἀπομακρυνομένην ἀπὸ τοῦ σημείου ἰσορροπίας» ⁴. Ὅμοίως, μετατόπισις τῆς τιμῆς πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ρ καὶ συνεπῶς πτώσις τῆς θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν τὴν δημιουργίαν ὑπερπροσφορᾶς καὶ συνεπῶς περαιτέρω πτώσιν τῆς τιμῆς καὶ ἀπομάκρυνσιν τῆς ἀπὸ τοῦ ρ.

Οὕτω διὰ τὸν Walras ἡ σειρὰ τῶν ἀντιδράσεων εἶναι : Αὐτόνομος μεταβολὴ τῆς τιμῆς, δημιουργία ὑπερβαλλούσης προσφερομένης ἢ ζητουμένης ποσότητος καὶ δευτερογενὴς μεταβολὴ

1. Walras, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 109.

2. Ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 109.

3. Ἐνθ' ὄνωτ., σελ. 109-110.

4. Ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 110.

τῆς τιμῆς συνεπεία τῆς οὕτω δημιουργηθείσης ὑπερπροσφορᾶς ἢ ὑπερζήτησεως.

Ὁ A. Marshall ἀντιθέτως ἄρχεται ἀπὸ τῆς αὐτονόμου παρεκκλίσεως τῆς ποσότητος ἀπὸ τῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας ἀντιστοιχοῦσης ποσότητος καὶ ἐξετάζει ποίαν ἐπίδρασιν θὰ ἔχῃ τὸ γεγονός τοῦτο ἐπὶ τῆς τιμῆς προσφορᾶς καὶ τῆς τιμῆς ζήτησεως. Εἶναι δέ, ὡς γνωστόν, διὰ τὸν Marshall, τιμὴ προσφορᾶς (supply price) «ἡ τιμὴ ἣτις ἀπαιτεῖται ὥστε νὰ προσφερθῇ ἡ προσπάθεια ἢ ἀπαιτουμένη πρὸς παραγωγὴν μιᾶς οἰασδήποτε δεδομένης ποσότητος ἐνὸς ἀγαθοῦ»¹, καὶ τιμὴ ζήτησεως (demand price) ἡ τιμὴ κατὰ μονάδα τὴν ὁποίαν εἶναι διατεθειμένοι νὰ πληρώσουν οἱ ἀγορασταὶ ὥστε νὰ ἀπορροφήσουν μίαν δεδομένην ποσότητα ἐνὸς ἀγαθοῦ.

Ἡ βασικὴ ὑπόθεσις τοῦ Marshall εἶναι ὅτι ἐάν, δοθείσης τῆς ποσότητος, ἡ τιμὴ ζήτησεως εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς προσφορᾶς, οἱ πωληταὶ θὰ λαμβάνουν περισσότερα ἀπὸ ὅ,τι εἶναι ἀπαραίτητον διὰ νὰ προσφέρουν τὴν ἐν λόγῳ ποσότητα εἰς τὴν ἀγοράν. «Ὑπάρχει συνεπῶς μία ἐνεργὸς δύναμις ἣτις καὶ τείνει νὰ αὐξήσῃ τὴν πρὸς πώλησιν προσφερομένην ποσότητα»². Ἀντιθέτως ἐάν ἡ τιμὴ προσφορᾶς ὑπερέχῃ τῆς τιμῆς ζήτησεως, οἱ πωληταὶ λαμβάνουν ὀλιγώτερα ἀπὸ ὅ,τι εἶναι ἀπαραίτητον διὰ νὰ προσφέρουν τὰ ἀγαθὰ των, καὶ οὕτως ὑπάρχει ἐνεργὸς δύναμις ἣτις πιέζει πρὸς ἐλάττωσιν τῆς προσφερομένης ποσότητος. Μόνον ὅταν ἡ τιμὴ προσφορᾶς καὶ ἡ τιμὴ ζήτησεως εἶναι ἴσαι ὑπάρχει ἰσορροπία.

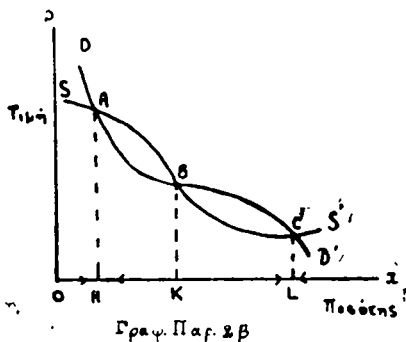
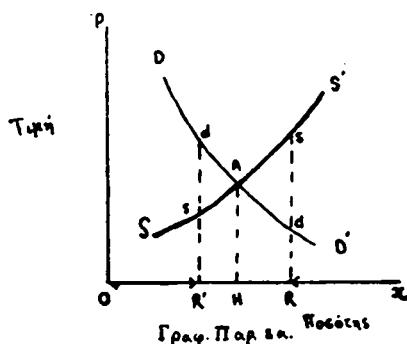
Ὁ Marshall χρησιμοποιεῖ δύο γραφικὰς παραστάσεις διὰ νὰ συζητήσῃ τὴν σταθερότητα τῆς ἰσορροπίας. Ἡ πρώτη, ἣτις παρίσταται ἐνταῦθα ὑπὸ τῆς γραφικῆς παραστάσεως (2α), δεικνύει τὴν συνήθη περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ καμπύλη τῆς ζήτησεως μὲ

1. A. Marshall, «Principles of Economics», 8η ἐκδοσις, (1936), σελ. 142.

2. Ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 345.

ἀρνητικὴν κλίσιν τέμνει τὴν μὲ θετικὴν κλίσιν καμπύλην τῆς προσφορᾶς¹.

Ἐὰν ἡ ποσότης H , ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας A , μετατοπισθῇ πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ κατὰ συνέπειαν ἐλαττωθῇ, ἡ τιμὴ ζητήσεως θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς προσφορᾶς καὶ ἡ ποσότης θὰ τείνῃ νὰ αὐξηθῇ καὶ κατὰ συνέπειαν νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας. Ἀντιθέτως ἐὰν ἡ ποσότης μετατοπισθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου H πρὸς τὰ δεξιὰ εἰς τὸ σημεῖον R , ἡ τιμὴ προσφορᾶς θὰ ὑπερέχῃ τῆς τιμῆς ζητήσεως καὶ ἡ ποσότης θὰ τείνῃ νὰ ἐπανέλθῃ, διὰ τῆς μειώσεώς της, εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας. Οὕτω κατὰ τὸν Marshall ἡ ἰσορροπία θὰ εἶναι σταθερὰ διότι «ἐὰν οἷονδήποτε τυχαῖον γεγονός μετατοπίσῃ τὴν κλίμακα τῆς παραγωγῆς ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας, θὰ τεθοῦν πάραυτα εἰς ἐνέργειαν δυνάμεις αἵτινες θὰ τείνουν νὰ τὴν ὠθήσουν ὑπίσσω πρὸς τὴν θέσιν ἰσορροπίας»².



Εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν (2β) ἀπεικονίζεται ἡ δευτέρα περίπτωσις ἡ συζητηθεῖσα ὑπὸ τοῦ Marshall. Πρόκειται περὶ πολλαπλῆς ἰσορροπίας, παρομοίας πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ Walras ἐξετα-

1. Ἀντιθέτως πρὸς τὴν γραφικὴν παράστασιν 1, εἰς τὰς γραφικὰς παραστάσεις (2α) καὶ (2β) ἐπὶ τῆς τετμημένης μετρεῖται ἡ ποσότης. Τοῦτο εἶναι συνέπεια τοῦ γεγονότος ὅτι διὰ τὸν Marshall ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι ἡ ποσότης καὶ οὐχὶ ἡ τιμὴ. Πρβλ. Marshall, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 346.

2. Marshall, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 346.

σθεῖσαν¹. Καὶ τὰ μὲν σημεῖα A καὶ C, παριστοῦν σημεῖα σταθερᾶς ἰσορροπίας διότι πρὸς τὰ ἀριστερὰ μὲν ἑκατέρου τούτων ἡ τιμὴ ζητήσεως ἢ διδομένη ὑπὸ τῆς καμπύλης DD' ὑπερέχει τῆς τιμῆς προσφορᾶς τῆς διδομένης ὑπὸ τῆς καμπύλης SS', πρὸς τὰ δεξιὰ δὲ ἑκατέρου τῶν σημείων τούτων συμβαίνει τὸ ἀντίθετον. Ἀλλὰ εἰς τὸ σημεῖον B ἡ ἰσορροπία εἶναι ἀσταθής. Μετατόπισις τῆς ποσότητος πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ συνεπῶς ἐλάττωσίς της σημαίνει ὑπεροχὴν τῆς τιμῆς προσφορᾶς ἔναντι τῆς τιμῆς ζητήσεως καὶ συνεπῶς περαιτέρω ἐλάττωσιν τῆς ποσότητος. Ὀμοίως μετατόπισις τῆς ποσότητος πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ συνεπῶς αὐξησίς της θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν ὑπεροχὴν τῆς τιμῆς ζητήσεως ἔναντι τῆς τιμῆς προσφορᾶς καὶ συνεπῶς περαιτέρω αὐξησιν τῆς ποσότητος².

Τὸ κριτήριον συνεπῶς τῆς σταθερότητος ἢ μὴ τῆς ἰσορροπίας εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις τῶν καμπυλῶν προσφορᾶς καὶ ζητήσεως. Ἡ ἰσορροπία «εἶναι σταθερὰ ἢ ἀσταθής ἀναλόγως τοῦ ἔαν ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως κεῖται πρὸς τὰ ἄνω ἢ πρὸς τὰ κάτω τῆς καμπύλης προσφορᾶς ἀκριβῶς πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ σημείου ἰσορροπίας· ἢ, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ αὐτό, ἀναλόγως τοῦ ἔαν ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως κεῖται κάτωθεν· ἢ ἄνωθεν τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς ἀκριβῶς πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ σημείου τούτου»³.

1. Ὁ Marshall ἀμφισβητεῖ ὅτι ἦτο ὁ Walras ὁ πρῶτος ὅστις εἰς περιπτώσεις πολλαπλῆς ἰσορροπίας ἐξήτασε ζητήματα σταθερότητος. Πρβλ. ἐπιστολὴν τοῦ Marshall πρὸς τὸν Walras τῆς 1ης Νοεμβρίου 1883 εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρει ὅτι ἐξήτασε παρεμπιπτόντως τὸ 1873 τὴν σταθερότητα τῆς ἰσορροπίας. Πράγματι ὁ Marshall εἰς ἀνακοίνωσίν του τὸ 1873 πρὸς τὴν Cambridge Philosophical Society ὑπὸ τὸν τίτλον «Graphic representation by aid of a series of Hyperbolas of some economic problems having reference to monopolies» (Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, τόμ. II, 1876, σελ. 318-319) παρενέβαλε τὴν παρατήρησιν ὅτι εἰς περιπτώσεις πολλαπλῆς ἰσορροπίας, μόνοι εἰς ἐναλλάξ σημεῖα τομῆς τῶν καμπυλῶν προσφορᾶς καὶ ζητήσεως ἡ ἰσορροπία εἶναι σταθερά, ἐνῶ εἰς τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἀσταθής, ἀλλ' εἰς τὴν ἀνακοίνωσίν του δὲν ἐπεξέτεινε τὴν παρατήρησιν ταύτην περαιτέρω.

2. Marshall, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 806.

3. Ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 807.

Ούτω τόνον ὁ Walras ὅσον καὶ ὁ Marshall δεικνύουν ὅτι ὑπάρχουν δυνάμεις αἰτίνες, ὅταν ἡ ἰσορροπία εἶναι κατὰ τὴν ἀντίληψίν των σταθερά, πιέζουν πρὸς ἐπιστροφὴν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας. Δὲν ἀποδεικνύουν ὁμως, ὅτι καὶ πράγματι θὰ σημειωθῇ ἐπιστροφὴ πρὸς τὴν ἀρχικὴν θέσιν ἰσορροπίας ἢ ἔστω, ὡς ὀρίζει ὁ Frisch¹, καὶ εἰς θέσιν πλησίον τῆς ἀρχικῆς. Μόνον διὰ τῆς ἐξετάσεως τῆς πορείας τοῦ οἰκονομικοῦ μεγέθους διὰ μέσου τοῦ χρόνου θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξακριβωθῇ τοῦτο. Καὶ ἡ ἐξέτασις τῆς πορείας ταύτης ἀποτελεῖ ἀντικείμενον τῆς δυναμικῆς ἀναλύσεως².

Θὰ ἐξετάσωμεν τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς δυναμικῆς ἀναλύσεως εἰς τὰς περιπτώσεις εἰς ἃς ἡ τιμὴ καθορίζεται ὑπὸ τὸ καθεστῶς μιᾶς τῶν τριῶν κυρίων ἀγοραίων μορφῶν, ἦτοι τοῦ καθεστῶτος τοῦ ἐλευθέρου συναγωνισμοῦ, τοῦ καθεστῶτος τοῦ ὀλιγοπωλίου καὶ τοῦ καθεστῶτος τοῦ μονοπωλίου.

2. Η ΤΑΧΥΤΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΚΑΙ Η ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ³

α) Τὸ πρότυπον τῆς ὑπερβαλλούσης προσφορᾶς ἢ ζητήσεως

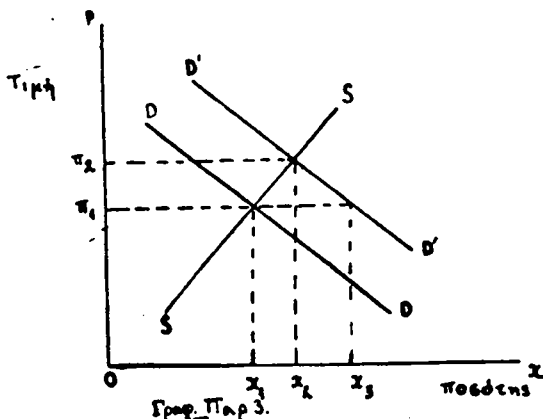
Εἶδομεν ὅτι ὅταν ὑπάρχῃ ὑπερβάλλουσα ζήτησις ἢ τιμὴ θὰ τείνῃ νὰ ἀύξηθῇ. Ἐὰν ἀντιθέτως ὑπάρχῃ ὑπερβάλλουσα προσφορὰ ἢ τιμὴ τοῦ ἀγαθοῦ θὰ τείνῃ νὰ πέσῃ. Ἀλλὰ ἐπιπροσθέτως πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τὴν ὁποίαν θὰ λάβῃ ἡ μεταβολὴ τῆς τιμῆς ὑπάρ-

1. R. Frisch, «On the notion of Equilibrium and Disequilibrium», Review of Economic Studies, Φεβρουάριος 1936, σελ. 102. Πρὸς καὶ N. Kaldor, «A classificatory note on the Determinateness of Equilibrium», Review of Economic Studies, 1934, σελ. 125.

2. Περὶ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς δυναμικῆς ἀναλύσεως ἴδε Frisch, ἐνθ' ἄνωτ. καὶ P.A. Samuelson, «Dynamics, Statics and the Stationary State», Review of Economic Statistics, 1943, σελ. 58-68.

3. Πρωτοπόρος εἰς τὸ πεδῖον τοῦτο ὑπῆρξεν ἡ ἐργασία τοῦ P. A. Samuelson, «Foundations of Economic Analysis» (1947), σελ. 257 καὶ ἐφ., τμήματα τῆς ὁποίας ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὴν Econometrica, τὸ 1941, 1942 καὶ 1944. Πρὸς καὶ O. Lange, «Price Flexibility and Employment» (1944), σελ. 91 καὶ ἐφ. M. W. Reder, «Studies in the Theory of Welfare

χει καὶ τὸ ὕψος τῆς μεταβολῆς. Θὰ ἦτο δυνατόν νὰ ὑποθεθῇ ὅτι εὐθὺς ἅμα τῇ ἐμφανίσει ὑπερβαλλούσης ζητήσεως ἢ προσφορᾶς, ἡ τιμὴ εἶναι τόσο ἐνταῖος ὥστε πάραυτα ἐπανερχεται εἰς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας. Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς ἡ ταχύτης προσ-
αρμογῆς τῆς τιμῆς θὰ ἦτο ἄπειρος καὶ τὸ πρόβλημα θὰ ἦτο πρόβλημα ἀπλῶς συγκριτικῆς στατικῆς. Οὕτως εἰς τὴν γραφικὴν



παράστασιν 3, ἡ μετατόπισις τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως ¹ ἀπὸ DD εἰς $D'D'$ δημιουργεῖ, δοθείσης τῆς τιμῆς π_1 , ὑπερβάλλουσιν

Economics» (1947), σελ. 103 καὶ ἐφ. Ὁ Samuelson, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 261-262 διακρίνει μεταξὺ «τελείας σταθερότητος», ὅταν, ἀνεξαρτήτως τοῦ μεγέθους τῆς ἀποκλίσεως ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας, ἡ μεταβλητὴ τείνῃ διὰ μέσου τοῦ χρόνου πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας, καὶ «περιορισμένης σταθερότητος» (stability in the small), ὅταν ἡ τάσις πρὸς ἐπιστροφὴν πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας παρατηρεῖται μόνον ἐπὶ μικρῶν ἀποκλίσεων. Διακρίνει ἐπίσης δύο εἶδη σταθερότητος. «Σταθερότητα πρώτου εἶδους» τὴν ἄνωτέρω περιγραφείσαν, ὅπου ὑπάρχει τάσις ἐπιστροφῆς πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας καὶ «σταθερότητα δευτέρου εἶδους», ὅπου εἰς τὸ διηγετικὸν ἡ μεταβλητὴ κυμαίνεται δίχην ἐκκρεμοῦς πέριξ τοῦ σημείου ἰσορροπίας. Διὰ τοὺς σκοποὺς τοῦ παρόντος λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν πάντοτε ἡ σταθερότης τοῦ πρώτου εἶδους.

1. Ὁμιλοῦμεν περὶ «καμπύλης» τῆς ζητήσεως, τῆς προσφορᾶς κλπ., ἔστω καὶ ἂν πρόκειται περὶ εὐθειῶν γραμμῶν εἰς τὰς ἐξεταζομένας περιπτώσεις, λόγῳ τῆς καθιερώσεως ἐν τῇ θεωρίᾳ τοῦ ὅρου. Ἐν ἀκριβολογίᾳ θὰ ἔδει νὰ ὀμιλήσωμεν περὶ «εὐθείας» τῆς ζητήσεως κλπ.

ζήτησιν ἴσην πρὸς $x_1 x_3$. Ἐὰν ὑποθεθῇ ὅτι ἀστραπιαίως, ἅμα τῇ μετατοπίσει, ἡ τιμὴ θὰ ἀνέλθῃ εἰς τὸ ὕψος π_2 , τοῦτο θὰ σημαίνει ὅτι ἡ ταχύτης μετὰ τῆς ὑπόστασιν ἢ μεταβολὴ τῆς τιμῆς ἀντιδρᾷ εἰς τὴν ὑπαρξίν ὑπερβαλλούσης ζητήσεως ἴσης πρὸς $x_1 x_3$ εἶναι ἄπειρος. Τὸ πρόβλημα ἐμπίπτει συνεπῶς οὐσιαστικῶς εἰς τὴν στατικὴν θεωρίαν.

Θὰ ἦτο δυνατόν ἐν τούτοις νὰ ὑποθεθῇ ὅτι ἡ τιμὴ μεταβάλλεται συνεχῶς καὶ ἀναλόγως πρὸς τὸ ὕψος τῆς ὑπερβαλλούσης ζητήσεως (ἡ τῆς ὑπερβαλλούσης προσφορᾶς).

Ἐστω δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν

$$(1) \quad \dot{\pi} = \frac{d\pi}{d\tau} = \lambda (x_z - x_s) = -\lambda (x_s - x_z), \quad \text{ὅπου } \lambda > 0 \text{ καὶ}$$

ὅπου π = ἡ τιμὴ, τ = ὁ χρόνος, λ = σταθερὰ ποσότης (ταχύτης προσαρμογῆς) x_z = ἡ ζητούμενη ποσότης καὶ x_s = ἡ προσφερομένη ποσότης. Ἡ παράστασις (1) σημαίνει ὅτι ἡ τιμὴ μεταβάλλεται ἀναλόγως τῆς ὑπερβαλλούσης ζητήσεως ἢ ἀντιστρόφως ἀναλόγως τῆς ὑπερβαλλούσης προσφορᾶς. "Ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ὑπερβάλλουσα ζήτησις, τόσον πλέον εὐαίσθητος εἶναι ἡ τιμὴ καὶ τόσον μεγαλυτέρα ἡ αὐξήσις τῆς. "Ὅταν ἡ ζητούμενη ποσότης ἰσοῦται πρὸς τὴν προσφερομένην δὲν ὑπάρχει λόγος μεταβολῆς τῆς τιμῆς. Ἀντιθέτως, ἡ τιμὴ θὰ τείνῃ νὰ ἐλαττωθῇ ἀναλόγως πρὸς τὴν ὑπερπροσφορὰν. "Ὅσον μεγαλυτέρα ἡ ὑπερπροσφορὰ τόσον μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ ἐλάττωσις τῆς τιμῆς.

Ἐστω ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ζητήσεως εἶναι

$$(2) \quad x_z = D(\pi, \alpha) \quad \text{ὅπου } \alpha \text{ εἶναι παραμετρικὸς τις συντελεστής,}$$

καὶ ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς προσφορᾶς εἶναι

$$(3) \quad x_s = S(\pi)$$

Εἰς τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας θὰ ἔχωμεν, ἔστω, τὴν τιμὴν π^0 καὶ τὴν ποσότητα x^0 , εἰς τρόπον ὥστε ἡ προσφερομένη καὶ ἡ ζητούμενη ποσότης νὰ εἶναι ἴσαι,

$$(4) \quad x_z = x_s \text{ καὶ}$$

$$(5) \quad D(\pi^0, \alpha) = S(\pi^0).$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) δύναται τώρα νὰ γραφῇ ὡς συνάρτησις τῆς ἀποκλίσεως τῆς τιμῆς ἀπὸ τῆς ἀξίας ἰσορροπίας της.

Διότι κατὰ τὰ γνωστὰ περὶ γραμμικῆς προσεγγίσεως¹, πλησίον τοῦ π^0 θὰ ἔχωμεν

$$(6) \lambda D(\pi, \alpha) = \lambda D(\pi^0, \alpha) + (\pi - \pi^0) \lambda D \pi^0$$

δπου $D_{\pi^0} = \frac{\partial D(\pi^0, \alpha)}{\partial \pi^0}$ παριστᾷ τὴν κλίσιν τῆς καμπύλης

τῆς ζητήσεως εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τιμῆς.

Ὀμοίως θὰ ἔχωμεν

$$(7) \lambda S(\pi) = \lambda S(\pi^0) + (\pi - \pi^0) \lambda S \pi^0 \quad \delta\text{που} \quad S_{\pi^0} = \frac{\partial S(\pi^0)}{\partial \pi^0}$$

παριστᾷ τὴν κλίσιν τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς εἰς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τιμῆς.

Ἐφόσον κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1)

$$(7a) \frac{d\pi}{d\tau} = \lambda D(\pi, \alpha) - \lambda S(\pi) \quad \text{καὶ ἐφόσον, κατὰ τὴν (5),}$$

εἰς τὴν τιμὴν ἰσορροπίας π^0

$D(\pi^0, \alpha) = S(\pi^0)$, θὰ ἔχωμεν, δταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (7a) τὰς ἐξισώσεις (6) καὶ (7) :

$$(8) \frac{d\pi}{d\tau} = \lambda (D \pi^0 - S \pi^0) (\pi - \pi^0).$$

Ἡ λύσις τῆς διαφορικῆς αὐτῆς ἐξισώσεως δίδει²

$$(9) \pi_{(\tau)} = \pi^0 + (\pi - \pi^0) e^{\lambda (D \pi^0 - S \pi^0) \tau}$$

δπου π ἡ ἀρχικὴ τιμὴ καὶ π^0 ἡ τιμὴ ἰσορροπίας.

1. Ἐὰν $x = a + h$, $f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \delta$ ροι, οἵτινες δύνανται κατὰ προσέγγισιν νὰ παραλειφθοῦν δταν τὸ h εἶναι μικρὸν καί, συνεπῶς, $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα $x = \pi$, $a = \pi^0$ καὶ $f(x) = D(\pi, \alpha)$.

2. Πρβλ. Samuelson, ἐνθ' ἄνωτ. σελ. 263.

Ἡ πορεία συνεπῶς διὰ μέσου τοῦ χρόνου τῆς τιμῆς θὰ καθορισθῇ ὑπὸ τῆς ἐξίσωσως (9). Ἡ ἰσορροπία θὰ εἶναι σταθερά μόνον ἐφόσον

$$\pi_c \rightarrow \pi^0$$

καὶ τοῦτο θὰ συμβῇ ἐφόσον, ὅταν ἐνῶ $\tau \rightarrow \infty$ ἡ παράστασις

$$(\pi - \pi^0) e^{\lambda(D\pi^0 - S\pi^0)\tau}$$

θὰ τείνῃ πρὸς 0.

Ἐπειδὴ δὲ $\tau > 0$ καὶ $\lambda > 0$, τοῦτο θὰ συμβῇ ὅταν

$$(10) D\pi^0 - S\pi^0 < 0$$

Καὶ ἐπειδὴ, λόγῳ τῆς φύσεως τῆς ζήτησεως, ἡ κλίσις τῆς εἶναι ἀρνητική, θὰ ἐξαρτηθῇ ἡ σταθερότης τῆς ἰσορροπίας ἀπὸ τὸ $S\pi^0$, ἀπὸ τὴν κλίσιν δηλαδὴ τῆς καμπύλης τῆς προσφοῶς. Ἐὰν ἡ κλίσις κῦτῃ εἶναι θετική, τότε πάντοτε θὰ ὑπάρξῃ σταθερότης τῆς ἰσορροπίας. Ἐὰν ὅμως ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς προσφοῶς εἶναι ἀρνητική τότε $-S\pi^0 > 0$ καὶ σταθερότης θὰ ὑπάρξῃ μόνον ὅταν $|D\pi^0| > |S\pi^0|$, ἥτοι ὅταν ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς ζήτησεως εἶναι μεγαλυτέρα τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης τῆς προσφοῶς.

Τὸ ζήτημα δύναται νὰ ἀπλουστευθῇ ἐὰν ἐξ ἀρχῆς χρησιμοποιηθοῦν γραμμικαὶ ἐξισώσεις.

Οὕτως ἔστω ὅτι ἀντὶ τῆς (2) ἔχομεν :

(2α) $x_c = \alpha - \beta\pi$ ὅπου x_c ἡ ζητούμενη ποσότης, π ἡ τιμὴ, καὶ α καὶ β θετικαὶ παράμετροι, καὶ ὅτι ἀντὶ τῆς (3) ἔχομεν

(3α) $x_s = \gamma + \delta\pi$ ὅπου γ καὶ δ εἶναι θετικαὶ παράμετροι.

Ἐν καταστάσει ἰσορροπίας θὰ ἔχωμεν

(5α) $\alpha - \beta\pi^0 = \gamma + \delta\pi^0$ ὅπου π^0 ἡ τιμὴ ἰσορροπίας.

Ἡ ἐξίσωσις (5α) λυομένη δίδει ὡς τιμὴν ἰσορροπίας

$$(5\beta) \pi^0 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν ἀξίαν τῶν συναρτήσεων ζήτησεως καὶ προσφοῶς ὡς δίδεται ὑπὸ τῶν (2α) καὶ (3α) εἰς τὴν βασι-

κὴν ἐξίσωσιν (1), λαμβάνομεν διὰ μίαν οἰανδήποτε τιμὴν π :

$$(1\alpha) \quad \frac{d\pi}{d\tau} = \lambda (\alpha - \gamma) + \lambda (-\beta - \delta) \pi$$

Ὅταν ὁμως ἡ τιμὴ εὐρίσκεται ἐν ἰσορροπία, δὲν ὑπάρχει οὔτε ὑπερβάλλουσα ζήτησις ἀλλ' οὔτε ὑπερβάλλουσα προσφορά καὶ συνεπῶς οὐδεμία τάσις μεταβολῆς τῆς τιμῆς. Ὅταν συνεπῶς $\pi = \pi^0$ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{d\pi}{d\tau} = 0$$

καὶ ἀντὶ τῆς (1α) θὰ ἔχωμεν

$$(1\beta) \quad \frac{d\pi^0}{d\tau} = 0 = \lambda (\alpha - \gamma) + \lambda (-\beta - \delta) \pi^0, \text{ ἡ λύσις τῆς}$$

ὁποίας μᾶς δίδει τὴν ἐξίσωσιν (5β).

Ἀφαιροῦντες τὴν ἐξίσωσιν (1β) ἀπὸ τὴν (1α), λαμβάνομεν

$$(8\alpha) \quad \frac{d}{d\tau} (\pi - \pi^0) = \lambda (-\beta - \delta) (\pi - \pi^0)$$

Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (8α) δίδει

$$(9\alpha) \quad \pi_{(\tau)} = \pi^0 + (\pi - \pi^0) e^{\lambda (-\beta - \delta) \tau}$$

ὅπου π ἡ ἀρχικὴ τιμὴ καὶ π^0 ἡ τιμὴ ἰσορροπίας.

Ἐφόσον $\lambda > 0$ καὶ $\tau > 0$, διὰ νὰ ὑπάρξῃ σταθερότης τῆς ἰσορροπίας ἀπαιτεῖται

$$(10\alpha) \quad -\beta - \delta < 0 \quad \text{ἢ} \quad \beta + \delta > 0$$

ὁπότε, ἐφόσον ὁ χρόνος τ θὰ παρέρχεται, ἡ ἀπόκλισις ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας θὰ βαίνει συνεχῶς ἐλαττουμένη, καὶ ὅταν $\tau \rightarrow \infty$, $\pi_{(\tau)} \rightarrow \pi^0$.

Καὶ ὅταν $\beta > 0$ καὶ $\delta > 0$, ὁπότε κατὰ τὰς ἐξισώσεις (2α) καὶ (3α) ἡ μὲν ζήτησις εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τῆς τιμῆς ἡ δὲ προσφορὰ αὐξουσα συνάρτησις τῆς, θὰ ὑπάρχῃ πάντοτε σταθερότης καὶ ἡ ἀνισότης (10α) πάντοτε θὰ ικανοποιῇται.

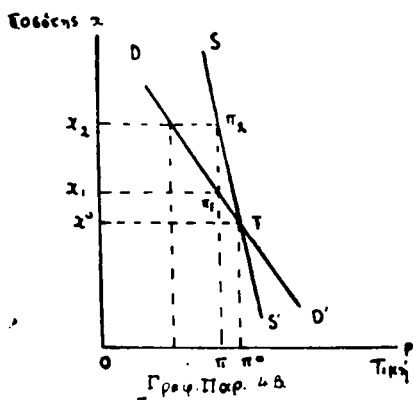
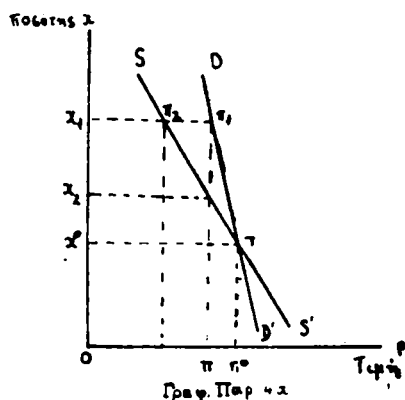
Ἐὰν ὁμως καὶ ἡ προσφορὰ συνδέεται ἀρνητικῶς μετὰ τῆς

τιμῆς, τότε $\delta < 0$ καὶ διὰ τὴν ἱκανοποιηθῆναι ἢ ἀνισότης (10α) θὰ πρέπη καὶ πάλιν

$$(11) \quad \beta + \delta > 0 \quad \text{ἢ} \quad \beta > -\delta$$

Ἀλλὰ β εἶναι ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τιμῆς καὶ $-\delta$ ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς πρὸς τὸν ἴδιον ἄξονα. Διὰ τὴν ὑπάρξιν συνεπῶς σταθερότης τῆς ἰσορροπίας θὰ πρέπη ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως νὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς, ἐφόσον ἀμφότεραι αἱ καμπύλαι συνδέονται ἀρνητικῶς μετὰ τῆς τιμῆς¹.

Οὕτως εἰς μὲν τὴν γραφικὴν παράστασιν (4α) ἡ ἰσορροπία εἶναι σταθερά, ἐνῶ εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν (4β) ἡ ἰσορ-



ροπία εἶναι ἀσταθής. Εἰς ἀμφοτέρως DD' παριστᾷ τὴν καμπύλην τῆς προσφορᾶς καὶ SS' τὴν καμπύλην τῆς ζητήσεως.

Τὰ ἐπιχειρήματα ἅτινα χρησιμοποιοῦνται καὶ σήμερον κατὰ

1. Ὁ ἄξων πρὸς τὸν ὁποῖον μετρεῖται ἡ κλίσις πρέπει νὰ καθορίζεται μετὰ προσοχῆς. Ἡμεῖς, ἀκολουθοῦντες τὸν Samuelson, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 263 καὶ ἐφ., χρησιμοποιοῦμεν τὸν ἄξονα τῆς τιμῆς. Ἐάν ὅμως χρησιμοποιηθῇ ὁ ἄξων τῆς ποσότητος, ὡς πράττει ὁ W. Baumol, τότε αἱ ἀπαιτήσεις τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας ἀντιστρέφονται καὶ εἶναι ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς (ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ποσότητος) ἥτις θὰ πρέπη νὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς κλίσεως τῆς ζητήσεως. Πρβλ. W. Baumol, *Economic Dynamics*, 1951, σελ. 118 καὶ ἐφ.

τὴν γραφικὴν ἐξέτασιν τοῦ ζητήματος εἶναι τὰ ἴδια τοῦ Walras. Οὕτως ἐὰν εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν (4α) ἡ τιμὴ π εἶναι μικροτέρα τῆς τιμῆς ἰσορροπίας π^0 , θὰ ὑπάρξῃ ὑπερβάλλουσα ζήτησις ἴση πρὸς $x_1 x_2$ καὶ ἡ τιμὴ θὰ αὐξηθῇ πρὸς τὴν π^0 . Ἡ ἀπόδειξις ὅτι πράγματι διαρκῶς θὰ τείνῃ διὰ μέσου τοῦ χρόνου πρὸς τὴν τιμὴν ἰσορροπίας δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (9α).

Ἀντιθέτως εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς γραφικῆς παραστάσεως (4β), ἡ τιμὴ π , κατωτέρα τῆς π^0 , ὁδηγεῖ εἰς ὑπερβάλλουσας προσφορὰς ἴσην πρὸς $x_1 x_2$, ἥτις καὶ ὠθεῖ εἰς περαιτέρω πτωσιν τῆς τιμῆς. Ἄλλ' ὥς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ἡ γραφικὴ παράστασις ἀπλῶς καὶ μόνον συμπλήρωμα τῆς δυναμικῆς ἀναλύσεως δύναται νὰ ἀποτελέσῃ. Ἡ ἀπόδειξις ὅτι πράγματι ἡ ἀπόκλισις τῆς τιμῆς ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας τῆς τείνει συνεχῶς εὐρυνομένη διὰ μέσου τοῦ χρόνου καὶ πάλιν δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (9α).

Ἡ γραφικὴ αὕτη μέθοδος τοῦ Walras, ἥτις καὶ ἐχρησιμοποιήθη καὶ ὑπὸ ὅλων τῶν ἄλλων οἵτινες ἀπησχολήθησαν μὲ γραφικὰς ἀπεικονίσεις τοῦ προβλήματος τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας¹, ἔχει τὸ μειονέκτημα ὅτι οὔτε τὴν ταχύτητα προσαρμογῆς δύναται νὰ ἀπεικονίσῃ οὔτε καὶ τὸ πραγματικὸν ὕψος τῆς νέας τιμῆς, ἥτις προέρχεται ἐκ τῆς πίεσεως τῆς ὑπερβαλλούσης ζήτησεως ἢ προσφορᾶς, νὰ ἀνέυρῃ καὶ κατὰ συνέπειαν ἀδυνατεῖ νὰ καθορίσῃ τὸ ὕψος τῆς συνεπειᾶς τῆς νέας τιμῆς προκυπτούσης νέας ὑπερβαλλούσης ζήτησεως ἢ προσφορᾶς κ.ο.κ.

Εἰς μίαν τοιαύτην περιγραφὴν γραφικῆς παραστάσεως, ἡ ὁποία καὶ ὅλα τὰ ἀνωτέρω φαινόμενα νὰ λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν καὶ πράγματι ἀπεικονίσιν δυναμικὴν τῆς πορείας πρὸς τὴν ἰσορροπίαν ἢ μακρὰν αὐτῆς νὰ ἀποτελῇ, προβαίνομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον. τμῆμα τοῦ παρόντος κεφαλαίου.

1. Πρβλ. M. W. Reder, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 113-116, Baumol, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 117-120, R.G.D. Allen, Mathematical Economics (1957), σελ. 21-22.

Θὰ ἐξετασθῶσι τρεῖς περιπτώσεις :

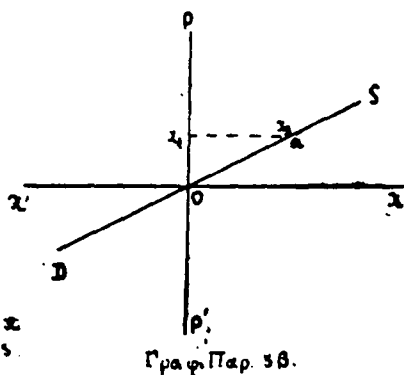
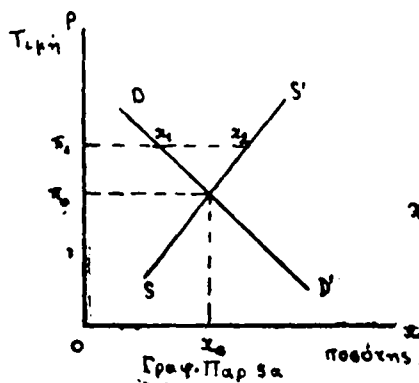
α) Ἡ περίπτωση καθ' ἣν ἡ καμπύλη προσφορᾶς ἀποτελεῖ θετικὴν συνάρτησιν τῆς τιμῆς (σταθερὰ ἰσορροπία).

β) Ἡ περίπτωση καθ' ἣν ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς ἀποτελεῖ ἀρνητικὴν συνάρτησιν τῆς τιμῆς, καὶ ἡ κλίσις τῆς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τιμῆς εἶναι μικροτέρα τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης τῆς ζήτησεως (σταθερὰ ἰσορροπία).

γ) Ἡ περίπτωση καθ' ἣν ἡ καμπύλη προσφορᾶς ἀποτελεῖ ἀρνητικὴν συνάρτησιν τῆς τιμῆς, καὶ ἡ κλίσις τῆς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τιμῆς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης τῆς ζήτησεως (ἀσταθὴς ἰσορροπία).

β) Ἡ δυναμικὴ ἀπεικόνισις τῆς πορείας τῆς τιμῆς.

Ἡ γραφικὴ παράστασις (5α) παριστᾷ μίαν συνήθη περίπτωσιν καθ' ἣν μία οἰαδήποτε καμπύλη ζήτησεως DD' με ἀρνητικὴν κλίσιν συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον T μίαν καμπύλην προσφορᾶς



SS' με θετικὴν κλίσιν. Ἡ τιμὴ ἰσορροπίας θὰ εἶναι p_0 καὶ ἡ ποσότης ἰσορροπίας x_0 . Εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν (5β) ἡ καμπύλη SOD ἀπεικονίζει τὴν ὑπερβάλλουσαν ζήτησιν ἢ προσφορὰν ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐκάστην τιμὴν. Πρὸς τοῦτο ἄγονται δύο γραμμαὶ κάθετοι πρὸς ἀλλήλας ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν τετμημένῃ μετρεῖ ποσότητα, ἡ δὲ τεταγμένη τὴν τιμὴν. Ἡ διασταύρωσι τῶν δύο καθέτων ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας τῆς (5α). Πρόδηλον συνεπῶς εἶναι ὅτι εἰς τὸ σημεῖον

τῆς διασταυρώσεως τῶν δύο καθέτων τῆς (5β) ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ ἰσορροπίας καὶ ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο οὔτε ὑπερβάλλουσα ζήτησις ἀλλ' οὔτε καὶ ὑπερβάλλουσα προσφορά ὑπάρχει.

Ἐπὶ τῆς τεταγμένης καὶ πρὸς τὰ ἄνω τοῦ σημείου O (τμήμα OP) μετροῦνται αἱ θετικαὶ ἀποκλίσεις (αὐξήσεις) ἀπὸ τῆς τιμῆς ἰσορροπίας, εἰς δὲ τὸ τμήμα τῆς τεταγμένης πρὸς τὰ κάτω τοῦ σημείου O (τμήμα OP') μετροῦνται αἱ ἀρνητικαὶ ἀποκλίσεις (μειώσεις) ἀπὸ τῆς τιμῆς ἰσορροπίας. Εἰς τὸ τμήμα τῆς τεταγμένης πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ σημείου O (τμήμα OX) μετρεῖται ἡ ὑπερβάλλουσα προσφορά. Πρὸς τοῦτο γίνεται χρῆσις τῆς γραφικῆς παραστάσεως (5α). Οὕτως εἰς τιμὴν Op_1 , ἡ ἀπόκλιςιν ἀπὸ τῆς τιμῆς ἰσορροπίας $\pi_1 - \pi_0$, ἀντιστοιχεῖ ὑπερπροσφορά ἴση πρὸς $x_1 x_2$. Τὸ σημεῖον α ἐπὶ τῆς καμπύλης SOD ἀκριβῶς ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὰ ἐν λόγῳ δεδομένα ὑπερβαλλούσης προσφορᾶς καὶ ἀποκλίσεως ἀπὸ τῆς τιμῆς ἰσορροπίας. Καθ' ὅμοιον τρόπον δύναται νὰ κατασκευασθῇ πίναξ συνδέων τὰς ἐκάστοτε θετικὰς ἀποκλίσεις τῆς τιμῆς καὶ τὴν ἐκάστοτε ὑπερβάλλουσαν προσφορὰν, ὁ δὲ γεωμετρικὸς τόπος ὅλων τῶν σημείων τούτων θὰ εἶναι ἡ καμπύλη OS ἥτις προφανῶς θὰ διέρχεται διὰ τοῦ O ἐφόσον ἡ ἀνυπαρξία ἀποκλίσεως τῆς τιμῆς συνδέεται μὲ τὴν ἀνυπαρξίαν ὑπερβαλλούσης προσφορᾶς.

Ἐπὶ τῆς τεταγμένης καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ σημείου O (τμήμα OX') μετρεῖται ἡ ὑπερβάλλουσα ζήτησις ἥτις καὶ συνδέεται μετὰ τῶν ἀρνητικῶν ἀποκλίσεων τῆς τιμῆς ἀπὸ τοῦ σημείου ἰσορροπίας. Καθ' ὅμοιον τρόπον πρὸς τὴν OS, ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν γραφικὴν παράστασιν (5α) τὸ τμήμα OD τῆς SOD τῆς (5β) ὅπερ καὶ δεικνύει τὴν εἰς ἐκάστην πτώσιν τῆς τιμῆς κάτω τοῦ σημείου ἰσορροπίας ὑπερβάλλουσαν ζήτησιν.

Ἄλλ' ἡ βασικὴ ἐξίσωσις ἣν ἐχρησιμοποίησαμεν ἦτο

$$(1) \quad \frac{d\pi}{d\tau} = -\lambda (x_s - x_c) = \lambda (x_c - x_s)$$

$$\eta \text{ ὅπερ τὸ αὐτό, ἐφόσον } \frac{d\pi^0}{d\tau} = 0,$$

$$(1\beta) \quad \frac{d}{d\tau} (\pi - \pi^0) = -\lambda (x_s - x_z) = \lambda (x_z - x_s)$$

Ἡ γραφικὴ παράστασις (5β) δίδει τὴν ὑπερβάλλουσαν προσφορὰν ἢ ζήτησιν δοθείσης τῆς ἀποκλίσεως ἀπὸ τῆς τιμῆς ἰσορροπίας. Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς συνεπειᾶ τῆς τοιαύτης ὑπερβαλλούσης προσφορᾶς ἢ ζητήσεως δημιουργουμένης νέας ἀποκλίσεως ἀπὸ τῆς τιμῆς θὰ πρέπη νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἐξίσωσις (1β).

Εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν (6) ἡ καμπύλη DOS δίδει καὶ πάλιν τὴν ὑπερβάλλουσαν προσφορὰν ἢ ζήτησιν. Ἄλλ' ἐπιπροσθέτως ἡ γραφικὴ παράστασις ἐκαλύφθη ὑπὸ ὁλοκλήρου σειρᾶς παραλλήλων $\lambda, \lambda', \lambda'' \dots$ ἡ κλίσις τῶν ὁποίων εἶναι 1 : 2. Οὕτως

$$\frac{\alpha x_1}{x_1 \pi_1} = \frac{\beta x_2}{x_2 \pi_2} = \dots = \frac{1}{2} \cdot \text{Ἡ τοιαύτη κλίσις τῶν παραλλήλων ἐπελέγη διότι ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ταχύτης προσαρμογῆς}$$

λ τῆς (1β) εἶναι ἴση πρὸς $\frac{1}{2}$ τῆς ὑπερβαλλούσης προσφορᾶς ἢ

ζητήσεως. Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν οἰανδήποτε ἀξίαν τῆς ταχύτητος προσαρμογῆς καὶ ἡ κλίσις τῶν παραλλήλων θὰ μετεβάλλετο ἀναλόγως. Ὅσον χαμηλότερα ἡ ταχύτης προσαρμογῆς τόσον μικρότερα θὰ εἶναι καὶ ἡ κλίσις τῶν παραλλήλων.

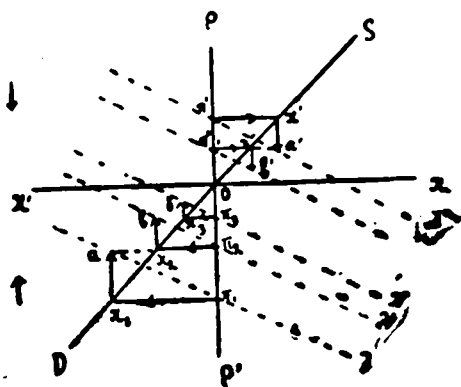
Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτάς, ἔστω ὅτι σημειώνεται ἀπόκλισις πρὸς τὰ κάτω τῆς τιμῆς καὶ ὅτι αὕτη εἶναι ἴση πρὸς $O\pi_1$. Ἡ ἀπόκλισις αὕτη δημιουργεῖ κατὰ τὰ ἤδη λεχθέντα ὑπερβάλλουσαν ζήτησιν ἴσην πρὸς $\pi_1 x_1$. Ἡ ὑπερβάλλουσα αὕτη ζήτησις θὰ ὠθήσῃ εἰς ἀνοδὸν τῆς τιμῆς ἥτις θὰ ἰσοῦται πρὸς

$$\lambda (x_z - x_s) = \frac{1}{2} x_1 \pi_1 = \alpha x_1. \text{ Αὕτη εὐρίσκεται ὅταν ἀπὸ τοῦ}$$

σημείου x_1 προχωρήσωμεν παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα OP' μέχρις ὅτου συναντήσωμεν τὴν ἰδίαν παράλληλον ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ π_1 .

Ἡ ἀπόκλισις συνεπῶς ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον θὰ εἶναι ^{1} Op_2 καὶ ἡ ὑπερβάλλουσα ζήτησις κατὰ τὴν περίοδον αὐτὴν θὰ εἶναι $\pi_2 x_2$. Θὰ σημειωθῇ αὐξήσις τῆς τιμῆς x_2 β δίδουσα ὡς τὴν νέαν ἀπόκλισιν τῆς τιμῆς Op_3 κ.ο.κ. Θὰ σημειοῦται συνεπῶς συνεχῶς προσέγγισις πρὸς τὸ σημεῖον O τῆς ἰσορροπίας.

Ἀντιθέτως ἐάν ἡ ἀπόκλισις τῆς τιμῆς εἶναι πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἔστω ἴση πρὸς Op' , θὰ δημιουργηθῇ ὑπερβάλλουσα προσφορά



Γραφ. Παρ. α.

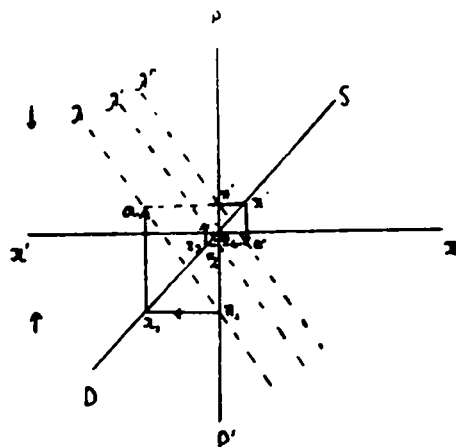
ἴση πρὸς $x'p'$. Κινούμενοι παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα OP μέχρις ὅτου συναντήσωμεν τὴν παράλληλον ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ p' , θὰ εὑρωμεν ὅτι εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ κινηθῶμεν πρὸς τὰ κάτω ὡς ἄλλωστε ὑποδεικνύει καὶ ἡ ἐξίσωσις (1β) προκειμένου περὶ ὑπερβαλλούσης προσφορᾶς. Θὰ σημειωθῇ συνεπῶς πτώσις τῆς τιμῆς κατὰ ax' καὶ ἡ νέα ἀπόκλισις θὰ εἶναι Op'' ἥτις δη-

1. Ἐφόσον $ax_1 = \pi_1 \pi_2$ καὶ συνεπῶς $Op_1 - ax_1 = Op_2$. Ἡ μέθοδος τῆς καλύψεως μιᾶς ἐπιφανείας ὑπὸ σειρᾶς ὀλοκλήρου καμπυλῶν δὲν εἶναι νέα. Αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας ἀποτελοῦν παρόμοιον φαινόμενον. Αὗται ὑποτίθεται ὅτι καλύπτουν ὀλόκληρον τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περικλειομένην μεταξὺ τῶν δύο ἁξόνων. Καὶ ὁ Marshall ἐχρησιμοποίησε παρομοίαν μέθοδον κατὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ μονοπωλίου καλύψας ὀλόκληρον τὴν ἐπιφάνειαν μεταξὺ τῶν δύο ἁξόνων ὑπὸ σειρᾶς ὑπερβολῶν (hyperbolas). Πρβλ. Marshall, Principles (8η ἐκδ.), σελ. 479 καὶ ἐφ.

μιουργεί υπερβάλλουσαν προσφοράν $\pi'x''$ κ.ο.κ. μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ἥτις μόλις ἐξετάσθη ἡ τιμὴ τῆς ἰσορροπίας προσεγγίζεται ἀσυμπτωτικῶς ἐκ τῶν κάτω ἢ τῶν ἄνω ἄνευ διακυμάνσεων. Εἶναι δυνατὸν ὅμως νὰ παρατηρηθῇ προσεγγίσεις πρὸς τὴν ἰσορροπίαν διὰ μέσου διακυμάνσεων.

Εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν (7) ἐλάβομεν $\lambda=1,5$ εἰς τρόπον ὥστε ἡ κλίσις τῶν παραλλήλων $\lambda, \lambda', \lambda''$ κλπ. ἔχει λόγον 1,5:1. Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς ἀρχικὴ ἀπόκλισις $Οπ_1$, πρὸς τὰ κάτω δημιουργεῖ υπερβάλλουσαν ζήτησιν $x_1 \pi_1$, ἥτις πιέζει τόσο πολὺ τὴν τιμὴν ὥστε σημειοῦται ἀπόκλισις πρὸς τὰ ἄνω ἴση πρὸς

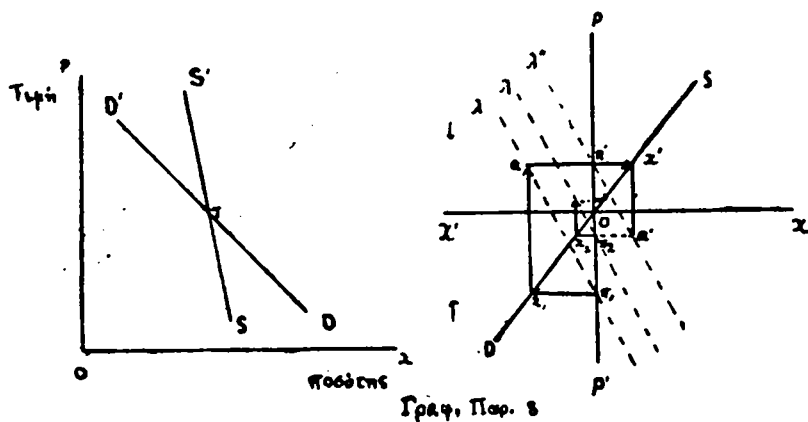


Γραφ. Παρ. 7

Οπ'. Ἡ ἀπόκλισις αὕτη δημιουργεῖ υπερβάλλουσαν προσφοράν $\pi'x'$ ἥτις μετὰ τὴν σειράν της δημιουργεῖ ἀπόκλισιν τῆς τιμῆς πρὸς τὰ κάτω ἴσην πρὸς $Οπ_2$ κ.ο.κ. μέχρις ὅτου διὰ διαδοχικῶν διακυμάνσεων τῆς τιμῆς πέριξ τῆς ἰσορροπίας της προσεγγισθῇ αὕτη.

Εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν 8 ἐξετάζεται ἡ πορεία τῆς τιμῆς διὰ μέσου τοῦ χρόνου ὅταν ἡ καμπύλη τῆς προσφοράς ἔχη ἀρνητικὴν κλίσιν. Διὰ νὰ ὑπάρξῃ ἰσορροπία σταθερά, εἶδομεν ὅτι ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς ζήτησεως πρὸς τὸν ὅξονα τῆς τιμῆς θὰ πρέπει νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης

τῆς προσφορᾶς πρὸς τὸν ἴδιον ἄξονα. Χάριν ὁμοιομορφίας ὅμως πρὸς τὴν γραφικὴν παράστασιν (5) ἐλάβομεν, ἀντιθέτως πρὸς τὴν γραφικὴν παράστασιν (4), τὴν ποσότητα ἐπὶ τῆς τετμημένης καὶ τὴν τιμὴν ἐπὶ τῆς τεταγμένης. Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς ἡ σταθερότης τῆς ἰσορροπίας ἀπαιτεῖ ὅπως ἡ κλίσις τῆς ζητήσεως πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ποσότητος εἶναι μικροτέρα τῆς κλίσεως τῆς προσφορᾶς πρὸς τὸν ἴδιον ἄξονα, γεγονός ὅπερ καὶ ἀπεικονίζεται εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν 8. Ἡ καμπύλη τῆς ὑπερβαλλούσης ζητήσεως καὶ προσφορᾶς SOD λαμβάνεται κατὰ τὰ συνήθη καὶ ἔχει εἰς τὴν γραφικὴν παράστα-

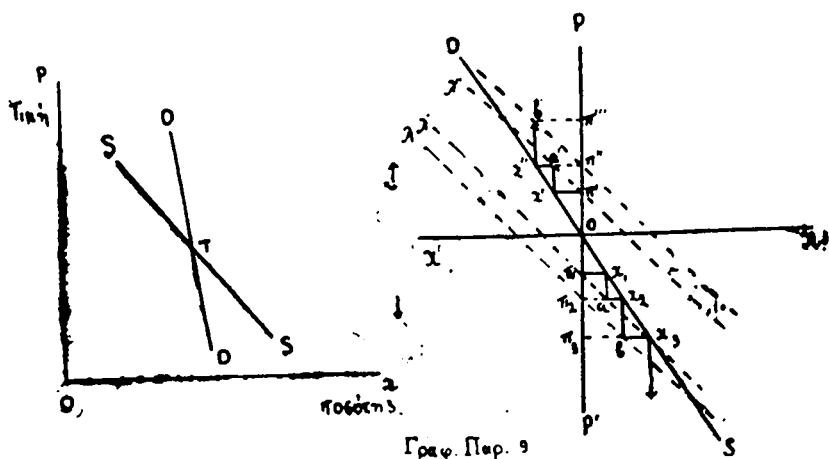


σιν (8) τὴν ἰδίαν φορὰν ὡς εἰς τὴν παράστασιν (7). Ἀπόκλισις ἀπὸ τῆς τιμῆς ἰσορροπίας πρὸς τὸν κάτω ἴση πρὸς Op_1 , δημιουργεῖ ὑπερβάλλουσαν ζήτησιν ἴσην πρὸς $\pi_1 x_1$. Μὲ $\lambda=2$, ἡ πίεσις τῆς ὑπερβαλλούσης ζητήσεως ἐπὶ τῆς τιμῆς εἶναι τοιαύτη, ὥστε εἰς τὴν ἐπομένην περίοδον δημιουργεῖται θετικὴ ἀπόκλισις ἀπὸ τῆς τιμῆς ἴση πρὸς Op' μὲ συνέπειαν τὴν δημιουργίαν ὑπερπροσφορᾶς ἴσης πρὸς $\pi'x'$ κ.ο.κ. Ὡς φαίνεται ἐκ τῆς παραστάσεως ἡ ἰσορροπία εἶναι σταθερά.

Ἀντιθέτως εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς γραφικῆς παραστάσεως 9, ἡ πρὸς τὰ ἄνω ἀπόκλισις τῆς τιμῆς ἥτις κατὰ τὰ ἥδη λεχθέντα μετρεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος OP συνδέεται μὲ ὑπερβάλλουσαν ζήτησιν ἥτις ὡς γνωστὸν μετρεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox' . Ἐπὶ

σης, ἡ ἀρνητικὴ ἀπόκλισις τῆς τιμῆς ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας, ἥτις μετρεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος OP' , συνδέεται μὲ ὑπερβάλλουσαν προσφοράν ἥτις μετρεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox . Συνεπεία τούτου ἡ φορὰ τῆς καμπύλης τῆς ὑπερβαλλούσης προσφορᾶς καὶ ζητήσεως SOD τῆς (9) εἶναι ἀντίθετος τῆς φορᾶς τῆς ἰδίας καμπύλης εἰς τὰς γραφικὰς πρᾶστασεις (7) καὶ (8).

Ἀπόκλισις τῆς τιμῆς πρὸς τὰ κάτω ἴση πρὸς Op_1 συνδέεται μὲ τὴν δημιουργίαν ὑπερβαλλούσης προσφορᾶς ἴσης πρὸς $x_1\pi_1$. Ἐάν ἡ ταχύτης προσαρμογῆς εἶναι $\lambda = 1$, καὶ ἀχθῇ ἡ παράλληλος,



κατὰ τὰ γνωστά, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ π_1 , ἀπὸ δὲ τοῦ x_1 ἀχθῇ ἡ κάθετος ὥστε νὰ συναντήσῃ τὴν ἐν λόγῳ παράλληλον, θὰ ἴδωμεν ὅτι πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς καθέτου καὶ παραλλήλου α ἀντιστοιχεῖ μείωσις τῆς τιμῆς κατὰ $x_1 \alpha$. Ἡ νέα συνεπῶς ἀπόκλισις ἀπὸ τῆς τιμῆς Op_2 κεῖται μακρότερον ἀπὸ τῆς τιμῆς ἰσορροπίας ἢ ἡ Op_1 . Εἰς τὴν νέαν ἀπόκλινσιν Op_2 ἀντιστοιχεῖ ὑπερβάλλουσα προσφορὰ ἴση πρὸς $x_2\pi_2$ ἥτις καὶ ὁδηγεῖ εἰς τὴν νέαν ἀπόκλινσιν Op_3 , κειμένην ἀκόμῃ μακρότερον τῆς τιμῆς ἰσορροπίας. Ἡ ἰσορροπία οὕτω δεικνύεται ἀσταθὴς δι' ἀρνητικὰς ἀποκλίσεις ἀπὸ τῆς τιμῆς ἰσορροπίας.

Ὅμοιως εἰς θετικὴν ἀπόκλινσιν τῆς τιμῆς Op' ἀντιστοιχεῖ ὑπερβάλλουσα ζήτησις ἴση πρὸς $\pi'x'$ ἥτις καὶ ὁδηγεῖ εἰς αὐ-

ξησιν τῆς τιμῆς κατὰ $\alpha' \chi'$ καὶ εἰς τὴν νέαν θετικὴν ἀπόκλισιν ἀπὸ τῆς τιμῆς Op'' κ.ο.κ. Οὕτω καὶ πρὸς τὰ ἄνω δεικνύεται ὅτι ἡ ἰσορροπία εἶναι ἀσταθής.

γ) Τὸ πρότυπον τῆς ὑπερβαλλούσης τιμῆς ζητήσεως ἢ τιμῆς προσφορᾶς.

Τὸ πρόβλημα τῆς προσαρμογῆς ὅταν ὑπάρξῃ ἀπόκλισις ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας δύναται ἐπίσης νὰ ἐξετασθῇ, λαμβανομένης, ὡς πράττει ὁ Marshall, ὑπ' ὅψιν τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τιμῆς ζητήσεως καὶ τιμῆς προσφορᾶς. Ἄλλ' ἀντὶ νὰ ὑποθέσωμεν ὀπλῶς, ὅπως πράττει ὁ Marshall, ὅτι ὅταν ὑπάρξῃ ὑπεροχὴ τῆς τιμῆς ζητήσεως ἢ ποσότης θὰ τείνῃ νὰ αὐξηθῇ καὶ ὅταν ὑπάρξῃ ὑπεροχὴ τῆς τιμῆς προσφορᾶς ἢ ποσότης θὰ τείνῃ νὰ ἐλαττωθῇ, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς ποσότητος γίνεται βάσει μιᾶς ὀρισμένης ταχύτητος προσαρμογῆς, ἥτις συνδέει τὴν ὑπερβάλλουσαν τιμὴν προσφορᾶς ἢ ζητήσεως μὲ τὴν μεταβολὴν τῆς ποσότητος.

Ἔστω ὅθεν ὅτι, ἀντὶ τῆς ἐξισώσεως (1) τοῦ πρώτου προτύπου, ἔχομεν

$$(12) \quad \frac{dx}{dt} = -x (\pi_s - \pi_z) = x (\pi_z - \pi_s)$$

ὅπου π_s ἡ τιμὴ προσφορᾶς καὶ π_z ἡ τιμὴ ζητήσεως, x ἡ ποσότης, t ὁ χρόνος καὶ $\frac{dx}{dt}$ ἡ ταχύτης προσαρμογῆς.

Ἔστω περαιτέρω ὅτι ἀντὶ τῆς (2) ἢ (2α) ἔχομεν τὴν τιμὴν ὡς ἐξηρτημένην μεταβλητὴν καὶ ὅτι ἡ συνάρτησις τῆς τιμῆς ζητήσεως εἶναι

$$(13) \quad \pi_z = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta} x \quad \text{ὅπου } \underline{\alpha} \text{ καὶ } \underline{\beta}$$

εἶναι θετικαὶ παράμετροι. καὶ

ὅτι ἡ συνάρτησις τῆς τιμῆς προσφορᾶς εἶναι

$$(14) \quad \pi_s = -\frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{\delta} x \quad \text{ὅπου } \underline{\gamma} \text{ καὶ } \underline{\delta}$$

εἶναι θετικαὶ παράμετροι.

Εἰς τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας θὰ ἔχωμεν

$$(15) \pi_z = \pi_s.$$

Ἡ λύσις τῆς (15) δίδει ἀποτελέσματα ἀκριβῶς τὰ ἴδια ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρότυπον ἥτοι ποσότητα ἰσορροπίας

$$(16) x^0 = \frac{\alpha\delta + \gamma\beta}{\beta + \delta}$$

καὶ τιμὴν ἰσορροπίας τὴν δεδομένην ὑπὸ τῆς (5β).

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (12) τὰς ἀξίας τῶν π_z καὶ π_s ὡς δίδονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων (13) καὶ (14) θὰ λάβωμεν

$$(12a) \frac{dx}{d\tau} = -x \left[-\frac{\gamma\beta + \alpha\delta}{\beta\delta} \right] - x \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\beta} \right) x.$$

Ἄλλ' εἰς τὴν τιμὴν τῆς ἰσορροπίας θὰ ἔχωμεν ἀντὶ τῆς (12a)

$$(17) \frac{dx^0}{d\tau} = -x \left[-\frac{\gamma\beta + \alpha\delta}{\beta\delta} \right] - x \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\beta} \right) x^0.$$

Ἀφαιροῦντες τὴν (17) ἀπὸ τὴν (12a) λαμβάνομεν

$$(18) \frac{d}{d\tau} (x - x^0) = -x \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\beta} \right) (x - x^0)$$

ἡ λύσις τῆς ὁποίας δίδει (19) $x(\tau) = x^0 + (x - x^0) e^{-x(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\beta})\tau}$

Διὰ τὴν ὑπάρξιν συνεπῶς σταθερὰ ἰσορροπία θὰ πρέπη, ἐφόσον

$$\tau \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow x^0$$

ὅπερ σημαίνει, ὅτι θὰ πρέπη, ἐφόσον x καὶ τ εἶναι θετικά, ὅτι

$$(20) \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\beta} > 0$$

Καὶ ἐφόσον δ καὶ β εἶναι θετικά (ὡς ἐλήφθησαν μέχρι τοῦδε) ἡ ἀνισότης (20) εἶναι ἰσχυρὰ καὶ ἡ ἰσορροπία εἶναι σταθερά.

Ἐὰν ὅμως ἡ τιμὴ προσφορᾶς συνδέεται ἀρνητικῶς μετὰ τῆς ποσότητος, τότε $\delta < 0$. Ἡ ἀνισότης (20) μεταβάλλεται εἰς

$$(21) \beta < -\delta.$$

Ἄλλ' ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ ἀπαίτησις τῆς ἰσορροπίας

κατὰ τὴν (21) εἶναι ἐκ διαμέτρου ἀντίθετος πρὸς τὴν ἀπαίτησιν τῆς ἰσορροπίας τὴν διδομένην ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (11) τοῦ προηγούμενου προτύπου. Ἐνῶ ἐκεῖ διὰ τὴν ὑπάρξιν σταθερότης τῆς ἰσορροπίας ἔπρεπεν ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τιμῆς νὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς πρὸς τὸν ἴδιον ἄξονα, εἰς τὴν παρούσαν περίπτωσιν εἶναι ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τιμῆς ἥτις πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως πρὸς τὸν ἴδιον ἄξονα διὰ τὴν ὑπάρξιν σταθερότης ἰσορροπίας.

Οὕτω, διὰ τὴν ἐπανελθωμεν εἰς τὰς γραφικὰς παραστάσεις (4α) καὶ (4β), εἶναι ἡ περίπτωση ἡ παριστωμένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (4β) ἥτις ἀπεικονίζει τώρα τὴν σταθερὰν ἰσορροπίαν ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν περίπτωσιν τῆς γραφικῆς παραστάσεως (4α). Τὰ ἐπιχειρήματα ἅτινα μεταχειρίζομεθα εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν γραφικῶν τούτων παραστάσεων εἶναι τὰ ἴδια τοῦ Marshall. Οὕτως ἐπὶ τῆς περιπτώσεως τῆς εἰκονιζομένης ὑπὸ τῆς παραστάσεως (4α), ποσότης x_1 , θετικῶς ἀποκλίνουσα τῆς ποσότητος ἰσορροπίας x^0 κατὰ $x_1 - x^0$, δημιουργεῖ ὑπερβολὴν τῆς τιμῆς ζητήσεως πρὸς τὴν τιμὴν προσφορᾶς κατὰ $p_1 p_2$ καὶ συνεπῶς περικιτῶν αὐξήσιν τῆς ποσότητος καὶ ἀπόκλισιν τῆς ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας. Ἀντιθέτως ἐπὶ τῆς περιπτώσεως τῆς (4β)¹.

1. Οὕτω τὰ ἀποτελέσματα δύνανται νὰ συνοψισθῶσιν ὡς ἑξῆς: Ὅταν ὑπάρχῃ σταθερότης τῆς ἰσορροπίας:

α) Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν Walras καὶ τὴν ὑπόθεσιν Marshall (καὶ ἡ καμπύλη προσφορᾶς ἔχει θετικὴν κλίσιν): Μετατόπισις τῆς καμπύλης ζητήσεως πρὸς τὰ δεξιὰ σημαίνει αὐξήσιν τῆς ποσότητος καὶ τῆς τιμῆς.

β) Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν Walras (καὶ ἡ καμπύλη προσφορᾶς ἔχει ἀρνητικὴν κλίσιν): Μετατόπισις τῆς καμπύλης ζητήσεως πρὸς τὰ δεξιὰ σημαίνει αὐξήσιν τῆς τιμῆς καὶ ἐλάττωσιν τῆς ποσότητος (Γρ. παρ. 4α).

γ) Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν Marshall (καὶ ἡ καμπύλη προσφορᾶς ἔχει ἀρνητικὴν κλίσιν). Μετατόπισις τῆς καμπύλης ζητήσεως πρὸς τὰ δεξιὰ σημαίνει ἐλάττωσιν τῆς τιμῆς καὶ αὐξήσιν τῆς ποσότητος. Πρβ. καὶ Samuelson, ἐνθ. ἄνωτ., σελ. 263-264 καὶ τοῦ ἰδίου «The Stability of Equilibrium: Comparative Statics and Dynamics», *Econometrica*, 1941, σελ. 103-104.

‘Αλλ’ ἡ μέθοδος τοῦ Marshall, ἂν καὶ δεικνύει τὴν κατεύθυνσιν τῆς μεταβολῆς τῆς ποσότητος, δὲν ὀποτελεῖ ἀπόδειξιν ὅτι καὶ πράγματι ἡ ποσότης θὰ φθάσῃ ἢ, ὅχι διὰ μέσου τοῦ χρόνου εἰς τὴν ἰσορροπίαν. Τοῦτο μόνον διὰ τῶν χρησιμοποιηθεισῶν δυναμικῶν ἐξισώσεων ἐπιτυγχάνεται. Οὕτε ἡ μέθοδος αὕτη δεικνύει τὸ ὕψος τῆς μεταβολῆς τῆς ποσότητος συνεπεία τῆς ὑπερβαλλούσης τιμῆς ζητήσεως ἢ προσφορᾶς.

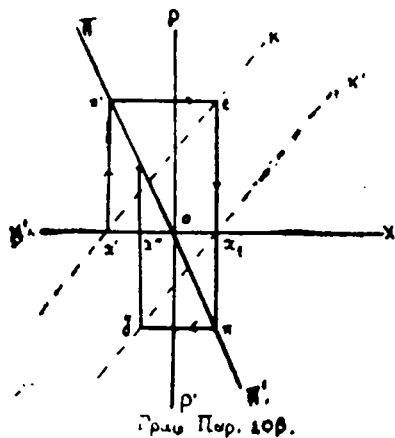
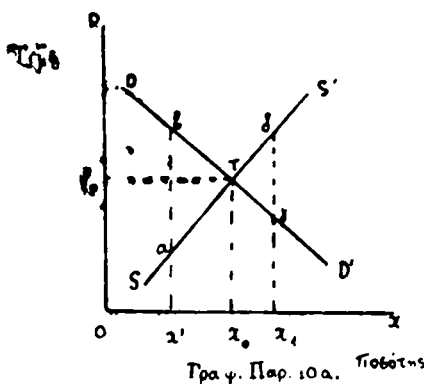
Διὰ τὴν γραφικὴν ἀπεικόνισιν τούτων δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν γραφικὴν παράστασιν, χρησιμοποιοῦσαν τὰς κεντρικὰς ιδέας τῶν παραστάσεων 5-9, ἀλλ’ εἰς τὴν ὁποίαν ἡ βασικὴ καμπύλη, δὲν θὰ εἶναι ἡ καμπύλη τῆς ὑπερβαλλούσης ζητήσεως ἢ προσφορᾶς SOD ἀλλὰ μία νέα καμπύλη, ἡ καμπύλη ΠΟΠ’ ἥτις ἀπεικονίζει τὴν ὑπερβάλλουσαν τιμὴν ζητήσεως ἢ προσφορᾶς.

Εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν 10α παρίσται ἡ συνήθης περίπτωσις προσφορᾶς καὶ ζητήσεως ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνεται ἡ καμπύλη ΠΟΠ’ τῆς 10β ὡς ἐξῆς : Τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Ο τμήμα τῆς τετμημένης Οχ μετρεῖ τὰς θετικὰς ἀποκλίσεις τῆς ποσότητος ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας. Οὕτω τὸ Οχ₁ τῆς παραστάσεως 10β ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ x₁x₀ τῆς 10α. Ὁμοίως τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Ο τμήμα τῆς τετμημένης Οχ’ μετρεῖ τὰς ἀρνητικὰς ἀποκλίσεις ἀπὸ τῆς ποσότητος ἰσορροπίας. Οὕτω τὸ Οχ’ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ἀπόστασιν x’x₀ τῆς 10α. Τὸ πρὸς τὰ ἄνω τῆς τετμημένης τμήμα τῆς τεταγμένης ΟΡ μετρεῖ τὴν ὑπερβάλλουσαν τιμὴν ζητήσεως. Οὕτως εἰς δοθεῖσαν (παρ. 10α) ἀπόκλινσιν ἀπὸ τῆς ποσότητος ἰσορροπίας ἴσην πρὸς x’x₀ ἀντιστοιχεῖ ὑπερβάλλουσα τιμὴ ζητήσεως αβ, ἥτις καὶ ἰσοῦται πρὸς x’π’ τῆς παραστάσεως 10β. Τὸ πρὸς τὰ κάτω τῆς τετμημένης τμήμα τῆς τεταγμένης ΟΡ’ μετρεῖ τὴν ὑπερβάλλουσαν τιμὴν προσφορᾶς.

Οὕτως εἰς δοθεῖσαν θετικὴν ἀπόκλινσιν τῆς ποσότητος ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας ἴσην πρὸς x₀x₁ ἀντιστοιχεῖ ὑπερβάλλουσα τιμὴ προσφορᾶς γδ (Γραφ. παράστασις 10α), ἥτις καὶ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασιν x₁π τῆς γραφ. παραστάσεως 10β. Ὁ γεωμετρικὸς τύπος τῶν συνδυασμῶν θετικῶν (ἀρνητικῶν) ἀποκλίσεων ἀπὸ

τῆς ποσότητος ἰσορροπίας καὶ ὑπερβαλλούσης τιμῆς προσφορᾶς (ζητήσεως) δίδει τὴν καμπύλην ΠΟΠ' τῆς (10β).

Δοθείσης συνεπῶς τῆς ἀποκλίσεως τῆς ποσότητος, δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὑπερβάλλουσα τιμὴ ζητήσεως ἢ προσφορᾶς. Ἀπομένει τῶρα τὸ δεύτερον βῆμα, καθ' ὃ δοθείσης τῆς ὑπερβαλλούσης τιμῆς ζητήσεως ἢ προσφορᾶς, θὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς ποσότητος. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν (12).



Ἐστω ὅτι ἡ ταχύτης προσαρμογῆς εἶναι $\kappa = 1$. Τοῦτο θὰ ἐσήμαινεν διὰ δοθέντος τοῦ $\pi'x'$ θὰ ἔπρεπε νὰ εὑρεθῇ ἀπόστασις ἐπ'

πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς $\pi'x'$ κειμένη εἰς τρόπον ὥστε $\frac{\pi' \epsilon}{\pi' x'} = 1$.

Παρομοίως δοθείσης τῆς Ox_1 θὰ πρέπη νὰ εὑρεθῇ ἀπόστασις $\zeta\pi$

ἀριστερὰ τῆς $x_1\pi$ κειμένη εἰς τρόπον ὥστε $\frac{\zeta\pi}{x_1\pi} = 1$. Τοῦτο

ἐπιτυγχάνεται ἐὰν ἡ γραφικὴ παράστασις (10β) καλυφθῇ ὑπὸ σειρᾶς παραλλήλων $\kappa, \kappa', \kappa'', \dots$ εἰς τρόπον ὥστε

$$\frac{\pi' \epsilon}{\pi' x'} = \frac{\zeta\pi}{x_1\pi} = \dots = \kappa = 1.$$

Ἡ ταχύτης κ δύναται νὰ εἶναι οἷοσδήποτε ἀριθμὸς. Οὕτως

ἐὰν $\kappa = \frac{1}{2}$, ἡ $\pi' \epsilon$ θὰ ἦτο τὸ ἥμισυ τῆς εἰς τὴν (10β) εἰκο-

νιζομένης καὶ ἡ (θετική) κλίσις τῆς κ θὰ ᾔτο ὑψηλότερα. Γενικώτερον, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν περίπτωσιν τοῦ προηγούμενου προτύπου (τῆς ὑπερβαλλούσης ζητήσεως ἢ προσφορᾶς), ἡ ἐλάττωσις τῆς ταχύτητος προσαρμογῆς συνεπάγεται αὐξήσιν τῆς κλίσεως τῶν παραλλήλων.

Ἐστω συνεπῶς εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν (10β) ὅτι παρουσιάζεται (ἀρνητικὴ) ἀπόκλισις ἀπὸ τῆς ποσότητος ἰσορροπίας ἴση πρὸς $O\kappa'$. Ἡ ἀπόκλισις αὕτη δημιουργεῖ ὑπερβάλλουσαν τιμὴν ζητήσεως, ἴσην πρὸς $\kappa' \pi'$ ἣν καὶ εὐρίσκομεν κινούμενοι ὑπὸ τοῦ κ' καὶ παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα OP' μέχρις ὅτου συναντήσωμεν τὴν $ΠΟΠ'$. Δοθείσης τώρα τῆς ὑπερβαλλούσης τιμῆς ζητήσεως $\kappa' \pi'$, κινούμεθα παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τῆς X μέχρις ὅτου συναντήσωμεν τὴν παράλληλον τὴν διὰ τοῦ κ' διερχομένην, εἰς τὸ σημεῖον ε . Ἡ ἀπόστασις ἐπ' δεικνύει τὴν αὐξήσιν τῆς ποσότητος ἣτις εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ δημιουργήσῃ θετικὴν ἀπόκλισιν τώρα ἀπὸ τῆς ποσότητος ἰσορροπίας ἴσην πρὸς $O\kappa_1$. Ἡ $O\kappa_1$ δίδει ὑπερβάλλουσαν τιμὴν προσφορᾶς ἴσην πρὸς $\kappa_1 \pi$ ἣτις μὲ τὴν σειρὰν τῆς δίδει ἐλάττωσιν τῆς ποσότητος ἴσην πρὸς $\pi\zeta$, εὐρίσκομένην ὅταν ἡ ἀπὸ τοῦ π ἀγομένη πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ X παράλληλος συναντήσῃ τὴν διὰ τοῦ κ_1 διερχομένην παράλληλον κ' . Δημιουργεῖται τώρα ἀρνητικὴ ἀπόκλισις ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας $O\kappa''$ ἡ ὁποία ὅμως εὐρίσκεται πλησιέστερον πρὸς τὸ σημεῖον O παρὰ ἡ $O\kappa'$ κ.ο.κ. Ἀκολουθοῦντες οὕτω τὴν περιγραφείσαν διαδικασίαν βλέπομεν ὅτι παρατηρεῖται διὰ μέσου τοῦ χρόνου προσέγγισις πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας.

Τὴν ἰδίαν διαδικασίαν δυνάμεθα νὰ ἀκολουθήσωμεν καὶ ὅταν ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς εἶναι ἀρνητικὴ, ὁπότε εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν τῆς Γραφ. παραστάσεως (4β) θὰ εὕρωμεν πορείαν διὰ μέσου τοῦ χρόνου παρομοίαν πρὸς τὴν τῆς Γραφ. παραστάσεως 10β, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν τῆς Γραφ. παραστάσεως (4α) θὰ εὕρωμεν ὅτι ἡ πορεία διὰ μέσου τοῦ χρόνου βαίνει συνεχῶς ἀποκλίνουσα τῆς ἰσορροπίας.

3. Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΙΣΤΟΥ ΑΡΑΧΝΗΣ ΚΑΙ Η ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΣ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ¹

α) Ἡ θεωρία ἐπὶ γραμμικῶν συστημάτων μὲ θετικὴν κλίσιν τῆς καμπύλης προσφοράς.

Ἔχομεν μέχρι τοῦδε περιγράψει πῶς ἡ σταθερότης τῆς ἰσορροπίας δύναται νὰ ἐξετασθῇ δυναμικῶς διὰ τῆς ὑποθέσεως ὅτι ἡ τιμὴ ἢ ἡ ποσότης μεταβάλλονται κινούμεναι πρὸς ἢ ἀπὸ τὴν ἰσορροπίαν κατὰ μίαν ὀρισμένην ταχύτητα. Ἀλλὰ καὶ ἡ θεωρία τοῦ «ἵστοῦ ἀράχνης» (cobweb) ἀποτελεῖ οὐσιαστικῶς συζήτησιν σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας ὀρισμένων φαινομένων συνδεομένων μὲ πρότυπα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ προσφορά ἀντιδρᾷ εἰς μεταβολὴν τῆς τιμῆς μὲ μίαν ὀρισμένην χρονικὴν καθυστέρησιν (time lag), ἐνῶ ἡ ἀντίδρασις τῆς ζήτησεως εἰς τὴν μεταβολὴν τῆς τιμῆς εἶναι ἄμεσος. Τὸ φαινόμενον παρατηρεῖται κυρίως κατὰ τὴν παραγωγὴν ὀρισμένων γεωργικῶν καὶ κτηνοτροφικῶν προϊόντων (π.χ. γεωμήλων ἢ χοίρων) τῶν ὁποίων ἡ μὲν παραγωγή δύνατον ἐν ἔτος νὰ εἶναι μεγάλῃ καὶ συνεπῶς ἡ τιμὴ των μικρά. ἐνῶ

1. Ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου πρβλ. H. Schultz, «Der Sinn der Statistischen Nachfragekurven» (1930) σελ. 33-34. Umberto Ricci, «Die synthetische Ökonomie von Henry Ludwell Moore» ἐν Zeitschrift für Nationalökonomie, 1930, τόμ. 1, σελ. 649-668. J. Tinbergen, «Bestimmung und Deutung von Angebotskurven. Ein Beispiel» ἐν Zeitschrift für Nationalökonomie, 1930, τόμ. 1, σελ. 669-679. W. Leontief, «Verzögerte Angebotsanpassung und partielles Gleichgewicht» ἐν Zeitschrift für Nationalökonomie, 1934, τόμ. V, σελ. 670-676. N. Kaldor «A classificatory note on the Determinateness of Equilibrium» ἐν Review of Economic Studies, 1934, τόμ. I, σελ. 122-136. M. Ezekiel, «The Cobweb Theorem» ἐν Quarterly Journal of Economics, 1938, σελ. 255-280. N.S. Buchanan, «A reconsideration of the Cobweb Theorem», Journal of Political Economy, 1939, σελ. 67-81. P. A. Samuelson, ἐνθ. ἄνωτ., Econometrica 1941, σελ. 104-105, Foundations, σελ. 265. F. G. Hooton, «Risk and the Cobweb Theorem», Economic Journal 1950, σελ. 69-80. Πρβλ. ἐπίσης P.N. Rosenstein-Rodan, «Das Zeitmoment in der mathematischen Theorie des wirtschaftlichen Gleichgewichtes», Zeitschrift für Nationalökonomie, 1930, σελ. 129-142.

κατά τὸ ἐπόμενονον ἔτος ἢ περίοδον ἢ μὲν παραγωγὴ ἐλαττωῦται συνεπεία τῆς ἐπικρατησάσης χαμηλῆς τιμῆς ἐνῶ ἡ τιμὴ συνεπεία τῆς χαμηλῆς παραγωγῆς ὑψώνεται.

Ἔστω ὅτι, ἀντὶ τῶν ἐξισώσεων (2α) καὶ (3α) τῶν προηγουμένων, ἔχομεν ὡς ἐξίσωσιν τῆς ζήτησεως

$$(1) x_t = \alpha - \beta p_t$$

ὅπου x_t σημαίνει τὴν ζητούμενην ποσότητα κατὰ χρόνον t , p_t τὴν τιμὴν κατὰ χρόνον t καὶ ὅπου α καὶ β εἶναι θετικοὶ παράμετροι.

Ἔστω περαιτέρω ἡ ἐξίσωσις τῆς προσφορᾶς

$$(2) y_t = \gamma + \delta p_{t-1}$$

ὅπου y_t ἡ προσφερομένη, ποσότης κατὰ χρόνον t , p_{t-1} ἡ τιμὴ κατὰ τὴν περίοδον $t-1$ καὶ ὅπου ἐπίσης γ καὶ δ εἶναι θετικοὶ παράμετροι. Ἡ ἐξίσωσις (2) παριστᾷ τὸ γεγονός ὅτι «ἡ προσφορά προσαρμόζεται ἀργότερον ἢ ἡ ζήτησις εἰς μίαν δεδομένην ἀγοραίαν κατὰστασιν»¹.

Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἀποτελοῦν σύστημα τὸ ὅποιον, ὅταν ἡ προσφερομένη ποσότης ἰσοῦται πρὸς τὴν ζητούμενην τῆς ἰδίας περιόδου καὶ συνεπῶς

$$(3) x_t = y_t,$$

δίδει

$$(4) \beta p_t + \delta p_{t-1} = \alpha - \gamma$$

ἥτοι

$$(5) p_t = \frac{\alpha - \gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} p_{t-1}.$$

Ἡ ἐξίσωσις (5) δεικνύει ποία ἡ συνάρτησις τῆς τιμῆς τῆς περιόδου t μετὰ τῆς τιμῆς τῆς περιόδου $t-1$, ὑπὸ τὴν προ-

1. Leontief, ἐνθ' ἄνωτ. σελ. 670. Ὁ Samuelson, ἐνθ. ἄνωτέρω, *Econometrica*, σελ. 104 χρησιμοποιεῖ διὰ τὴν ἐξίσωσιν τῆς προσφορᾶς τὴν μορφήν $q_t = S(P_{t-1})$ καὶ τῆς ζήτησεως $q_t = D(P_t, \alpha)$ ὅπου q = ποσότης καὶ P = τιμή. Τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς μετατρέπει εἰς γραμμικὰς ἀποκλίσεις ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας. Ἡμεῖς προετιμήσαμεν ἐξ ἀρχῆς νὰ θεωρήσωμεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις εἶναι γραμμικαί.

ὑπόθεσιν ὅτι εἰς ἐκάστην περίοδον τ ἰσχύουν αἱ ἐξισώσεις (1), (2) καὶ (3).

Ἡ τιμὴ ἰσορροπίας π θὰ εἶναι ἐκείνη, ἥ τιμὴ ἣτις ἐπαναλαμβάνει ἑαυτὴν διὰ μέσου τοῦ χρόνου. Θέτοντες λοιπὸν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) ἀντὶ π_{τ} καὶ $\pi_{\tau-1}$, τὸ σύμβολον π καὶ λύοντες, λαμβάνομεν ὡς τὴν τιμὴν ἰσορροπίας, τὴν ἰδίαν ὡς εἰς προηγούμενα κεφάλαια (ἐξισώσεις 5β τοῦ 2ου κεφαλαίου).

$$(6) \quad \bar{\pi} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta}$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (5) λαμβάνομεν

$$(7) \quad \pi_{\tau} = A \left(-\frac{\delta}{\beta} \right)^{\tau} + \bar{\pi}$$

ὅπου τὸ A καθορίζεται δοθείσης τῆς ἀρχικῆς τιμῆς. Οὕτως ἐὰν ἡ ἀρχικὴ τιμὴ κατὰ χρόνον 0 εἶναι π_0 , θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (7)

$$(8) \quad A + \bar{\pi} = \pi_0$$

καὶ συνεπῶς ἡ (7) ἀποβαίνει

$$(9) \quad \pi_{\tau} = (\pi_0 - \bar{\pi}) \left(-\frac{\delta}{\beta} \right)^{\tau} + \bar{\pi}$$

Διὰ νὰ ὑπάρξῃ σταθερότης τῆς ἰσορροπίας θὰ πρέπη ἐφόσον $\tau \rightarrow \infty$,

$$\pi \rightarrow \bar{\pi}$$

Τοῦτο προϋποθέτει ὅτι

$$(10) \quad \frac{\delta}{\beta} < 1$$

ἢ ὅτι

$$(11) \quad \delta < \beta$$

Ἐὰν

(12) $\delta > \beta$, ἡ ἰσορροπία θὰ εἶναι ἀσταθὴς ὑπὸ τὴν ἐννοιαν τὴν ἤδη ἐκτεθεῖσαν. Αἱ ἀποκλίσεις δηλαδὴ ἀπὸ τῆς τιμῆς ἰσορροπίας θὰ τείνουν ὀξυνόμεναι διὰ μέσου τοῦ χρόνου.

Ἐὰν τέλος

(13) $\delta = \beta$ ἡ τιμὴ θὰ κυμαίνεται μεταξύ δύο ἄκρων τιμῶν ἴσων, ἀφ' ἑνὸς μὲν πρὸς τὴν ἀρχικὴν τιμὴν π_0 , ἀφ' ἑτέρου δὲ πρὸς τὴν τιμὴν

$$(14) \pi_1 = 2\pi - \pi_0.$$

Τὸ γεγονός ὅτι τὸ κλάσμα $-\frac{\delta}{\beta}$ εἶναι ἀρνητικὸν δὲν ἔχει ἐπιρροὴν ἐπὶ τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας. Ἡ ἀρνητικότητα ὅμως αὕτη δημιουργεῖ τὰς συγκλινούσας ἢ ἀποκλινούσας διακυμάνσεις περὶ τοῦ σημείου ἰσορροπίας.

Τὰ ἀποτελέσματα δύνανται νὰ δειχθοῦν καὶ γραφικῶς. Εἰς τὰς γραφικὰς παραστάσεις 11α, 11β καὶ 11γ ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως DD' χαράσσεται βάσει τῆς ἐξισώσεως (1), ἡ δὲ καμπύλη τῆς προσφορᾶς SS' χαράσσεται βάσει τῆς ἐξισώσεως (2). Οὕτως, ἐνῶ ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως δεικνύει τὴν ζητούμενην ποσότητα μιᾶς περιόδου δοθείσης τῆς τιμῆς τῆς ἰδίας περιόδου, ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς δεικνύει τὴν κατὰ τὴν προσεχῆ περίοδον προσφερομένην ποσότητα δοθείσης τῆς τιμῆς τῆς παρούσης περιόδου.

Ἐστὶν ἔτι ἡ τιμὴ τῆς παρούσης περιόδου εἶναι π_0 . Θὰ ἦτο δυνατόν νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι κατὰ τὴν περίοδον τὴν προηγηθεῖσαν ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως dd' διήρχετο διὰ τοῦ σημείου α εἰς ὃ ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ π_0 ἀλλ' ὅτι κατὰ τὴν παρούσαν περίοδον ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως μετατοπίσθη πρὸς τὰ ἀριστερά, καὶ ἡ νέα τιμὴ ἰσορροπίας εἶναι π . Ἐρωτᾶται συνεπῶς ἐὰν πράγματι ἡ παλαιὰ τιμὴ π_0 θὰ δυνηθῇ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ὕψος τῆς νέας τιμῆς π ; Ὡς καὶ εἰς τὸ ἀναλυτικὸν μέρος τοῦ παρόντος κεφαλαίου, διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

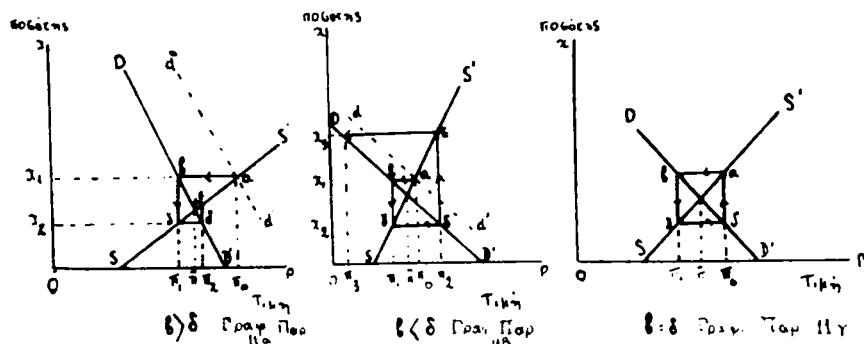
ι) Περίπτωσις σταθερᾶς ἰσορροπίας (Γραφ. παρ. 11α).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τιμῆς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς. Εὐνόητον εἶναι ὅτι ἐὰν ὡς τετμημένην ἐλαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῆς ποσότητος, θὰ ἔπρεπεν ἡ καμ-

πύλη, τῆς ζητήσεως νὰ ἔχη πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον μικροτέραν κλίσιν ἢ ἡ χαμπύλη τῆς προσφορᾶς ¹.

Ἐὰν ἐπομένως ἡ τιμὴ ᾖ το π_0 κατὰ τὴν παροῦσαν περίοδον, κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον θὰ παρήγето ποσότης ἴση πρὸς x_1 ἥτις καὶ θὰ ἐπωλεῖτο πρὸς τιμὴν π_1 . Δοθείσης τῆς τιμῆς π_1 θὰ παρήγето κατὰ τὴν μεθεπομένην περίοδον ποσότης ἴση πρὸς x_2 ἥτις καὶ θὰ διετίθετο εἰς τιμὴν π_2 . Ὡς φαίνεται, ἡ νέα τιμὴ π_2 εὐρίσκεται καὶ αὐτὴ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς τιμῆς ἰσορροπίας ἀλλὰ πλησιέστερον πρὸς αὐτὴν ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν τιμὴν π_0 .

Ἐὰν συνεπῶς (15) $\Delta = \pi_2 - \pi_0$ ὅπου $\pi_0 > \bar{\pi}$, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν ² $\Delta < 0$, καὶ ἡ τιμὴ διὰ μέσου τοῦ



χρόνου θὰ κυμαίνεται περίξ τοῦ σημείου ἰσορροπίας διαρκῶς πλησιάζουσα τοῦτο ³.

ii) Περίπτωσις ἀσταθοῦς ἰσορροπίας (Γραφ. παρ. 11β).

1. Τοῦτο βεβαίως μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ χαμπύλη τῆς προσφορᾶς παρουσιάζει θετικὴν κλίσιν. Πρβλ. Samuelson, ἐνθ' ἄνωτ., Econometrica, 1941, σελ. 104.

2. Ὁ Leontief, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 672 καὶ ἐφ., χρησιμοποιεῖ τὴν διαφορὰν μεταξύ ποσοτήτων $D = q_2 - q_0$ (ὅπου q_2 ἡ ποσότης κατὰ τὴν δευτέραν περίοδον καὶ q_0 κατὰ τὴν ἀρχικὴν) διὰ νὰ κρίνῃ ἂν ἡ ἰσορροπία προσεγγίζεται ἢ ὅχι.

3. Δοθείσης τῆς γδ ἔχομεν $\beta\gamma > \epsilon\delta$, ἥτοι ἡ ἐλαστικότης τῆς χαμπύλης τῆς ζητήσεως εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἐλαστικότητος τῆς χαμπύλης τῆς προσφορᾶς ὅταν ἡ ἰσορροπία εἶναι σταθερά. Πρβλ. καὶ M. Ezekiel, ἐνθ' ἄνωτ. (ἐν Readings in Business Cycle Theory), σελ. 432.

«ΑΡΧΕΙΟΝ» Δ. Ε. Καλιτσυνάκη : Τόμος 39ος (1959), Τεύχ. 8'.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τιμῆς εἶναι μικροτέρα τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς πρὸς τὸν ἴδιον ἄξονα. Εὐνόητον καὶ πάλιν εἶναι ὅτι, ἐὰν αἱ κλίσεις ἐμετροῦντο πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ποσότητος, θὰ εὐρίσκατο τὸ ἀντίστροπον ὡς ἡ προϋπόθεσις ἀσταθοῦς ἰσορροπίας.

Τιμὴ π_0 κατὰ τὴν παροῦσαν περίοδον προκαλεῖ τὴν δημιουργίαν ποσότητος x_1 κατὰ τὴν ἐπομένην καὶ ἄρα τιμὴν π_1 ἥτις μὲ τὴν σειρὰν τῆς ὁδηγεῖ εἰς ποσότητες x_2 καὶ τιμὴν π_2 . Ἀλλὰ τὴν

$$(16) \Delta = \pi_2 - \pi_0 > 0 \text{ ὅπου } \pi_0 > \bar{\pi}$$

καὶ συνεπῶς $\pi_2 > \pi_0 > \bar{\pi}$. Ἡ τιμὴ βαίνει συνεχῶς ἀποκλίνουσα ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας ἐνῶ ταυτοχρόνως κυμαίνεται πέραξ τῆς.

iii) Περίπτωσις ἀορίστου ἰσορροπίας (Γραφ. παρ. 11γ).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ κλίσεις τῶν δύο καμπυλῶν προσφορᾶς καὶ ζητήσεως εἶναι ἴσαι. Συνεπῶς

(17) $\Delta = \pi_2 - \pi_0 = 0$ καὶ ἡ τιμὴ θὰ κυμαίνεται πέραξ τῶν δύο τιμῶν π_0 καὶ π_1 , ὅπου¹

$$(14) \pi_1 = 2\bar{\pi} - \pi_0.$$

β) Ἡ θεωρία ὅταν ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς ἔχῃ ἀνηττικήν κλίσιν².

Ἔστω ὅτι ἀντὶ τῆς ἐξισώσεως (2) ἔχομεν

(2α) $y_t = \gamma - \delta\pi_{t-1}$, τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (3) ἰσχυροῦσθων.

Ἡ τιμὴ ἰσορροπίας θὰ εἶναι τὴν

$$(6α) \pi = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta}$$

1. Ἐφόσον ἐκ τῆς Γραφ. παρ. 11γ: (1) $\pi_1 = \bar{\pi} - (\bar{\pi} - \pi_1)$ καὶ, ἐφόσον $T\bar{\pi}$ ἡ κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $T\gamma\delta$,

(2) $\bar{\pi} - \pi_1 = \pi_0 - \bar{\pi}$

καὶ

(3) $\pi_1 = 2\bar{\pi} - \pi_0$.

2. Πρβλ. Samuelson, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 104-105. R. M. Goodwin, «Dynamical coupling with especial reference to markets having production lags», *Econometrica*, 1947, τόμ. 15, σελ. 187.

καὶ ἀντὶ τῆς (9) θὰ ἔχωμεν τὴν

$$(9a) \quad \pi_1 = (\pi_0 - \pi) \left(\frac{\delta}{\beta} \right)^{\tau} + \pi$$

Αἱ προϋποθέσεις τῆς ἰσορροπίας ἐξακολουθοῦν οὕτω νὰ εἶναι αἱ ἴδιαι ὡς εἰς τὸ προηγούμενον ὑπόθεμα. ἔτσι

$$(11) \quad \beta > \delta.$$

Ἄλλ' εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς (9a) τὸ κλάσμα εἶναι πάντοτε θετικόν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι πλέον ἢ τιμῇ, ὅταν ἀποκλίνη ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας τῆς δὲν θὰ κυμαίνεται περὶ τῆς ἰσορροπίας, προσεγγίζουσα ἢ ἀπομακρυνομένη ἀπὸ αὐτῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἀπόκλισις ἢ προσέγγισις πρὸς τὴν τιμὴν ἰσορροπίας θὰ γίνηται συνεχῶς πρὸς μίαν κατεύθυνσιν. Ἀλλὰς λάβουσαν, ἐὰν μὲν ἰκανοποιῇται ἡ ἀνισότης (11) καὶ ἡ τιμὴ ὑπερέχη τῆς τιμῆς ἰσορροπίας, συνεχῶς διὰ μέσου τοῦ χρόνου θὰ ἐλαττωταὶ πλησιάζουσα αὐτήν· ἐὰν ἡ τιμὴ ὑπολείπηται τῆς τιμῆς ἰσορροπίας, θὰ βαίνει διαρκῶς ἀύξανόμενη μέχρις ὅτου φθάσῃ εἰς τὴν τιμὴν ἰσορροπίας. Ἐὰν ἀντιθέτως ἔχωμεν

(12) $\beta < \delta$, ἡ ἰσορροπία θὰ εἶναι ἀσταθὴς καὶ τιμὴ ἀνωτέρα τῆς τιμῆς ἰσορροπίας θὰ βαίνει διαρκῶς ἀύξανόμενη, καὶ ἀντιστρόφως.

Τὰ ἀποτελέσματα τῶν περιπτώσεων τῶν ἐξισώσεων (11) καὶ (12) δεικνύονται γραφικῶς, τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν $\delta = \beta$ μὴ παρουσιαζούσης ἐνδιαφέρον. καθότι αὕτη σημαίνει πλήρη ταύτισιν τῆς καμπύλης προσφορᾶς μετὰ τῆς καμπύλης ζητήσεως.

ι) Περίπτωσις σταθερᾶς ἰσορροπίας (Γραφ. παρ. 12a).

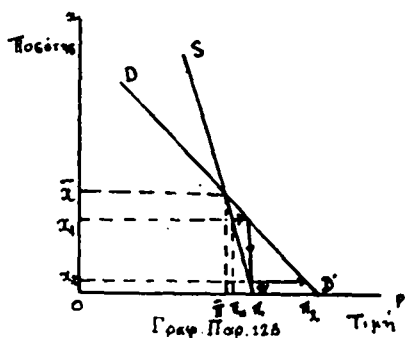
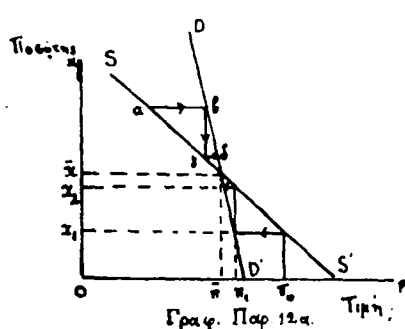
Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα ἡ κλίσις τῆς καμπύλης ζητήσεως β εἶναι μεγαλύτερα τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης προσφορᾶς δ , ἐφόσον ἀμφότεροι αἱ κλίσεις λαμβάνονται πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τιμῆς. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς συναντᾷ τὸν ἄξονα τῆς τιμῆς δεξιότερα ἢ ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως, ὡς ἀκριβῶς εὗρομεν ὅτι θὰ πρέπη νὰ συμβαίνει διὰ νὰ ὑπάρξῃ σταθερὰ ἰσορροπία κατὰ τὸ πρότυπον τοῦ Walras.

Δοθείσης συνεπῶς τῆς τιμῆς π_0 ὅπου $\pi_0 > \bar{\pi}$ ἡ ποσότης κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον θὰ εἶναι x_1 , καὶ ἡ τιμὴ π_1 , τοιαύτη ὥστε $\bar{\pi} < \pi_1 < \pi_0$. Κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον ἡ ποσότης x_2 θὰ πλησιάσῃ ἀκόμη περισσότερο τὴν ποσότητα ἰσορροπίας καὶ ἡ τιμὴ π_2 θὰ εἶναι ἀκόμη πλησιεστέρα πρὸς τὴν $\bar{\pi}$ κ.ο.κ.

Ἐὰν ἀντιθέτως λάβωμεν $\pi_0 < \bar{\pi}$, ἡ πορεία ἀπὸ καμπύλης εἰς καμπύλην θὰ λάβῃ τὴν φορὰν αβγδ καὶ ἡ τιμὴ θὰ πλησιάσῃ συνεχῶς αὐξανόμενη, τὴν $\bar{\pi}$.

(υ) Περίπτωσις ἀσταθοῦς ἰσορροπίας (Γραφ. παρ. 12β).

Ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως πρὸς τὸν ἄξονα τῆς



τιμῆς εἶναι μικροτέρα ἢ ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς ὡς ἀκριβῶς συμβαίνει καὶ ἐπὶ τῆς περιπτώσεως ἀσταθοῦς ἰσορροπίας τοῦ προτύπου τοῦ Walras.

Ἐὰν ἡ τιμὴ $\pi_0 > \bar{\pi}$, ἡ ποσότης κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον θὰ εἶναι x_1 δίδουσα τιμὴν π_1 τοιαύτην ὥστε

$$\pi_1 > \pi_0 > \bar{\pi} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ἡ τιμὴ βαίνει συνεχῶς ἀποκλίνουσα ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας. Παρομοίως ἐὰν $\pi_0 < \bar{\pi}$, ἡ τιμὴ θὰ βαίνει συνεχῶς περαιτέρω ἐλαττουμένη.

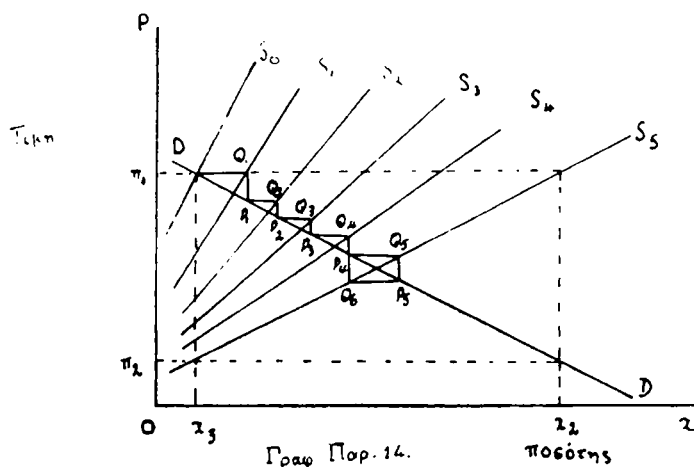
γ) Ἡ θεωρία εἰς τὴν περίπτωσιν μὴ γραμμικῶν συστημάτων.

Ἡ θεωρία τοῦ ἱστοῦ ἀράχνης δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν δὲν ἡθέλομεν χρησιμοποιήσῃ γραμμικὰς ἐξ.

μείων τῆς ἰσορροπίας. Καὶ τέλος ὅταν ἡ ἀρχικὴ τιμὴ εἶναι α' θὰ παρατηρηθῇ συνεχῆς διακύμανσις μεταξὺ δύο σταθερῶν σημείων.

δ) Ἡ μετατόπισις τῶν καμπυλῶν προσφορᾶς καὶ ζητήσεως καὶ ἡ θεωρία τοῦ «ἰστοῦ ἀράχνης». ¹

Μέχρι τῆς στιγμῆς ὑπετέθη ὅτι καθ' ὅλον τὸ χρονικὸν διάστημα καθ' ὃ ἡ τιμὴ καὶ ἡ ποσότης συγκλίνουν πρὸς τὴν ἰσορροπίαν ἢ ἀποκλίνουν αὐτῆς δὲν λαμβάνουν χώραν μετατοπίσεις τῶν καμπυλῶν προσφορᾶς ἢ ζητήσεως, πρᾶγμα ὅπερ ἐν τῇ πράξει ἀσφαλῶς θὰ συμβῇ, λόγω μεταβολῆς τῶν ἄλλων παραγόντων



πλὴν τῆς τιμῆς, τῶν ἐπηρεαζόντων τὴν ζήτησιν καὶ προσφορᾶν. Ἡ τοιαύτη μετατόπισις τῶν καμπυλῶν θὰ ἡδύνατο νὰ δειχθῇ διὰ τῆς μεταβολῆς τῶν παραμέτρων τῶν ἐξισώσεών μας (1) καὶ (2).

Οὕτως εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν ² 14, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι

1. Πρβλ. Goodwin, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 188 ἐφ., Buchanan, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 79 ἐφ., Hooton, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 69-80.

2. Ἡ γραφικὴ αὕτη παράστασις ἐλήφθη ἐκ τοῦ ἄρθρου τοῦ Buchanan, ἐνθ' ἄνωτ. σελ. 79, καὶ διὰ τοῦτο διετηρήθη ἡ ἀρχικὴ τῆς μορφή, καθ' ἣν ἐπὶ τῆς τετμημένης μετρεῖται ἡ ποσότης.

ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς μετατοπίζεται ἀμέσως ἀπὸ τῆς S_0 εἰς τὴν S_5 θὰ ἔχωμεν ὡς νέον σημεῖον ἰσορροπίας τὴν διασταύρωσιν τῆς S_5 καὶ τῆς DD. Ἡ ἀρχικὴ τιμὴ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὸ μέχρι τοῦδε σημεῖον ἰσορροπίας π_1 , θὰ δώσῃ ὡς ποσότητα τῆς ἐπομένης περιόδου x_2 καὶ τιμὴν π_2 καὶ ἡ τιμὴ π_2 θὰ δώσῃ ὡς τὴν ποσότητα τῆς τρίτης περιόδου x_3 μὲ τιμὴν πάλιν π_1 . Αἱ σχετικαὶ κλίσεις τῶν καμπυλῶν S_5 καὶ DD εἶναι συνεπῶς τοιαῦται ὥστε νὰ λαμβάνωμεν τὴν περίπτωσιν τῆς διηνεκοῦς διακυμάνσεως περὶ τῆς τιμῆς καὶ τῆς ποσότητος ἰσορροπίας.

Εἶναι δυνατόν ὅμως νὰ ὑποθεθῇ, ὅτι ἡ μετατόπισις τῆς καμπύλης προσφορᾶς μεταξὺ S_0 καὶ S_5 γίνεται εἰς διαδοχικὰς φάσεις καὶ ὅτι διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν S_5 μετατοπίζεται διαδοχικῶς εἰς τὰς θέσεις S_1, S_2, S_3, S_4 . Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς ἡ μετατόπισις τῆς S_0 εἰς τὴν θέσιν τῆς S_1 θὰ δώσῃ κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον ποσότητα ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ σημεῖον Q_1 καὶ τιμὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ σημεῖον P_1 . Κατὰ τὴν ἀμέσως ἐπομένην περίοδον, ἐὰν ἔμενεν ἀμετάθετος ἡ καμπύλη προσφορᾶς εἰς τὴν θέσιν S_1 , θὰ ἔπρεπεν ἀπὸ τοῦ P_1 νὰ κινηθῶμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ πρὸς εὐρεσιν τῆς ποσότητος τῆς περιόδου. Ἀλλ' ἡ πρὸς τὰ δεξιὰ μετατόπισις τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς εἰς τὴν θέσιν S_2 , μᾶς ἀναγκάζει νὰ κινηθῶμεν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ οὕτως εὐρίσκομεν ποσότητα ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς Q_2 καὶ τιμὴν πρὸς P_2 . Ὡς φαίνεται ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως, αἱ διαδοχικαὶ μετατοπίσεις τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς προσεγγίζουν τὴν τιμὴν μέχρι τοῦ σημείου τοῦ εἰς P_4 ἀντιστοιχοῦντος.

Δοθείσης τῆς τιμῆς P_4 θέλει παραχθῇ κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον ποσότης ἀντιστοιχοῦσα πρὸς Q_5 καὶ ἡ τιμὴ τῆς περιόδου θὰ εἶναι P_5 κ.ο.κ. Τὸ ὀρθογώνιον συνεπῶς τὸ ὅποιον περιγράφει τὴν διηνεκὴ διακύμανσιν εἶναι τώρα πολὺ μικρότερον ἐκείνου ὅπερ ἐλήφθη διὰ τῆς ἀπ' εὐθείας μετατοπίσεως τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς ἀπὸ τῆς θέσεως S_0 εἰς τὴν θέσιν S_5 . Ἐν γένει δέ, ὅσον περισσότερον βαθμιαία εἶναι ἡ μετάβασις ἀπὸ τῆς μιᾶς θέσεως εἰς τὴν ἄλλην καὶ εἰδικώτερον ὅσον πλησιεστέρα ἡ θέσις τῆς S_4 πρὸς τὴν S_5 , τόσοον μικρότεραι θὰ εἶναι αἱ διακυμάνσεις.

Ἄλλ' ἡ μετατόπισις τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς δύναται ἐπίσης νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ νὰ ἐξηγηθῇ πῶς δύναται νὰ τεθῇ τέρμα εἰς τὴν ἀστάθειαν τῆς ἰσορροπίας ὡς περιγράφεται ὑπὸ τῆς Γραφικῆς παραστάσεως 11β.

Ἡ παραγωγὴ ἔστω τῆς ποσότητος x_1 κατὰ τὴν πρώτην περίοδον γίνεται ἐπειδὴ οἱ παραγωγοὶ ἐπίστευον ὅτι θὰ ἰσχύσῃ ἡ τιμὴ π_0 . Ἄντ' αὐτοῦ κατὰ τὴν πρώτην περίοδον ἡ τιμὴ, ὡς εἶδομεν, ἥτις θὰ ἰσχύσῃ (Γραφικὴ παράστασις 11β) εἶναι $\pi_1 < \pi_0$. Οἱ παραγωγοὶ συνεπῶς ζημιοῦνται κατὰ τὴν πρώτην περίοδον

$$(\alpha) x_1 (\pi_0 - \pi_1)$$

ἐνῶ κατὰ τὴν προηγουμένην περίοδον οὐδὲν ἐκέρδισαν ἢ ἐζημιώθησαν ἐκ τοῦ λόγου τούτου, ἐφόσον ἡ π_0 ἦτο ἡ τιμὴ ἰσορροπίας. Ἀντιθέτως, κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον παράγεται ἡ ποσότης x_2 , ἥτις πωλεῖται εἰς τιμὴν π_2 ἀντὶ τῆς τιμῆς π_1 εἰς τὴν ὁποίαν ἔλπιζον νὰ τὴν διαθέσουν οἱ παραγωγοί. Καὶ ἐπειδὴ $\pi_2 > \pi_1$, οἱ παραγωγοὶ κερδίζουν

$$(\beta) x_2 (\pi_2 - \pi_1)$$

Κατὰ τὴν περίοδον 3 παράγεται ἡ ποσότης x_3 , ἥτις, ὡς φαίνεται καὶ ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως 11β, ὄχι μόνον εἶναι μεγαλύτερα τῆς x_2 ἀλλὰ πωλεῖται πρὸς ζημίαν τῶν παραγωγῶν εἰς τιμὴν π_3 κατωτέραν τῆς π_2 ἣν ἀνέμενον. Δημιουργοῦν συνεπῶς ζημίαν ἴσην πρὸς

$$(\gamma) x_3 (\pi_2 - \pi_3)$$

Ἄλλ' ὡς φαίνεται ἐκ τῆς (11β) οὐχὶ μόνον $x_3 > x_2$ ἀλλ' ἐπίσης

$$\pi_2 - \pi_3 > \pi_0 - \pi_1$$

Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι, ὡς ἡ ζημία τῆς πρώτης περιόδου δὲν ἐξουδετεροῦται ὑπὸ οὐδενὸς κέρδους τῆς ἀρχικῆς περιόδου, καθ' ὅμοιον τρόπον τὸ κέρδος τῆς δευτέρας περιόδου πλέον ἢ ἐξανεμίζεται ἐκ τῶν μεγαλύτερων ζημιῶν τῶν παραγωγῶν κατὰ τὴν τρίτην περίοδον. Οὕτως εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀσταθοῦς ἰσορροπίας «αἱ συνολικαὶ ζημίαι θὰ ὑπερέχουν πάντοτε τῶν συνολικῶν κερδῶν διὰ κάθε ζευγὸς περιόδων»¹. Ἄλλ' αἱ συνεχεῖς

1. Buchanan, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 71.

αὐταὶ ζημίαι ἀναγκάζουν ὠρισμένους παραγωγοὺς νὰ παραιτη-
θοῦν τῆς παραγωγῆς. Τοῦτο θὰ εἶχεν ὡς συνέπειαν τὴν κλίσιν
τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς SS' πρὸς τὰ δεξιὰ, καὶ θὰ ἐσή-
μαινεν ὅτι εἰς μίαν ὠρισμένην τιμὴν θὰ προσεφέρετο μικροτέρα
ποσότης ἢ πρότερον, ἥτοι μὲ ἄλλας λέξεις ὅτι ἡ καμπύλη τῆς
ζητήσεως θὰ ἀπέβαινε περισσότερο ἀνελαστική. Ἀλλ' ὡς εἴ-
δομεν, μόλις ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς ἀποβῇ μικρο-
τέρα τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως ἢ σταθερότης
τῆς ἰσορροπίας θὰ ἀποκατασταθῇ καὶ ἡ τιμὴ θὰ λάβῃ κατεύθυν-
σιν πρὸς τὴν ἰσορροπίαν.

Παρομοίως μετατοπίσεις τῆς καμπύλης προσφορᾶς καὶ τῆς
καμπύλης ζητήσεως ἐξετάζει καὶ ὁ Hooton¹ διὰ νὰ ἀποδείξῃ
ὅτι αἱ περιπτώσεις ἀποκλινούσης ἢ διηνεκοῦς διακυμάνσεως δὲν
δύνανται νὰ συνεχισθῶσιν ἐπὶ πολὺ. Αἱ συνεχῶς εὐρυνόμεναι
διακυμάνσεις τῆς τιμῆς, ἐὰν ἤθελον πράγματι παρατηρηθῇ τοι-
αῦται, θὰ αὐξήσουν τὸν ἐπιχειρηματικὸν κίνδυνον τοῦ παραγωγοῦ
μὲ τὴν συνέπειαν ὅτι οὗτος δὲν θὰ εἶναι πλέον διατεθειμένος νὰ
προβῇ εἰς τὴν παραγωγὴν ἐκείνην εἰς ἣν θὰ πρὸέβαινεν ἐὰν δὲν
ὑπῆρχεν ὁ ηὔξημένος ἐπιχειρηματικὸς κίνδυνος. Ἡ ἐλαστικότης
τῆς προσφορᾶς συνεπῶς, ἐξ αἰτίας τῶν διακυμάνσεων μειοῦται
καὶ ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς
τιμῆς θὰ ἐλαττωθῇ ἐπίσης.

Ἀλλὰ ταυτοχρόνως αἱ διακυμάνσεις θὰ ἐνθαρρύνουν τὴν
κερδοσκοπίαν εἰς τὰ ἀποθέματα τοῦ ἀγαθοῦ εἰς τρόπον ὥστε «θὰ
ζητῆται μεγαλυτέρα ποσότης τοῦ νεοπαραχθέντος ἀγαθοῦ εἰς
χαμηλοτέρας τιμὰς καὶ μικροτέρα εἰς ὑψηλοτέρας»². Ἡ ἐλα-
στικότης τῆς ζητήσεως θὰ παρουσιάσῃ συνεπῶς αὐξήσιν καὶ πα-
ρομοίως ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως πρὸς τὸν ἄξονα
τῆς τιμῆς θὰ αὐξηθῇ.

Ἀλλ' ὡς ἀνωτέρω ἐτονίσθη, ἅπαξ ἡ κλίσις τῆς καμπύλης
τῆς ζητήσεως ἀποβῇ μεγαλυτέρα τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης.

1. Hooton, ἐνθ' ἀνωτ., σελ. 69-80.

2. Ἐνθ' ἀνωτ., σελ. 77.

τῆς προσφορᾶς ἢ σταθερότης τῆς ἰσορροπίας θὰ ἀποκατασταθῇ καὶ ὁ ἴστος ἀράχνης θὰ μετατραπῇ εἰς συγκλίνοντα. «Τὸ ἀποτέλεσμα οὗτω τοῦ ἐπιχειρηματικοῦ κινδύνου καὶ τῆς κερδοσκοπίας εἶναι ὅτι τείνουν νὰ μεταβάλλουν συνεχεῖς καὶ ἀποκλίνοντας ἰστούς εἰς συγκλίνοντας καὶ νὰ κάμουν τοὺς συγκλίνοντας ἰστούς νὰ συγκλίνουν ἔτι ταχύτερον»¹.

4. ΕἰΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΟΛΙΓΟΠΩΛΙΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΟΣ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ I. ΔΥΟ ΠΩΛΗΤΑΙ

α) Εἰσαγωγικαὶ παρατηρήσεις.

Σκοπὸς τοῦ παρόντος κεφαλαίου εἶναι νὰ ἐφαρμόσῃ τὴν δυναμικὴν ἀνάλυσιν ἐπὶ δύο ὀλιγοπωλιακῶν προτύπων μὲ τὸν σκοπὸν νὰ ἐξηγήσῃ τὴν σταθερότητα ἥτις ἐπικρατεῖ εἰς ὠρισμένους καταστάσεις ὀλιγοπωλίου².

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ὀλιγοπωλιακὴ ὁμάς ἀπαρτίζεται ἀπὸ δύο πωλητὰς ἐνὸς ὁμοιογενοῦς ἀγαθοῦ πωλουμένου εἰς μίαν ἐνιαίαν (ex post) τιμὴν καθ' οἴναδῆποτε στιγμὴν.

Ἄλλ' ἕκαστος ὀλιγοπωλητὴς μὴ γνωρίζων ἐπακριβῶς τὴν ποσότητα τοῦ ἀντιπάλου κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον προβαίνει εἰς προβλέψεις περὶ ταύτης καὶ συνεπῶς καὶ περὶ τῆς ἀγοραίας τιμῆς. Ὑπάρχουν συνεπῶς δύο προσδοκώμεναι (ex ante) τιμαὶ εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστης περιόδου.

Θὰ ὑποθέσωμεν δύο τύπους ὀλιγοπωλιακῆς συμπεριφορᾶς :

α) Ἐκαστος πωλητὴς ὑποθέτει ὅτι ὁ ἀντίπαλός του θὰ ἐξακολουθήσῃ νὰ παράγῃ καὶ κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον ποσότητα ἴσην πρὸς τὴν παραχθεῖσαν κατὰ τὴν παροῦσαν περίοδον.

1. Hooton. ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 77.

2. Περιγραφὴν ἄλλων δυναμικῶν προτύπων ὀλιγοπωλίου πρβλ. εἰς A. Smithies καὶ L. J. Savage, «A dynamic problem in duopoly», *Econometrica*, 1940, σελ. 130-143. E. Schneider «Eine dynamische Theorie des Angebots Dyopols» ἐν *Archiv für Mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung*, 1942, σελ. 72-92.

β) Ἐκαστος πωλητῆς ὑποθέτει ὅτι ἡ ποσότης τοῦ ἀντιπάλου θὰ μεταβληθῇ κατὰ ποσοστὸν τι κατὰ τὴν προσεχῆ περίοδον ἐν σχέσει πρὸς τὴν ποσότητα τῆς παρούσης περιόδου.

β) *Πρῶτον Πρότυπον.*

Ἐκαστος πωλητῆς προβλέπει ὅτι ἡ ποσότης τοῦ ἀντιπάλου θὰ παραμείνῃ ἀμετάβλητος.

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις τῆς ζήτησεως

$$(1) \pi_1 = \alpha - \beta (x_1 + y_1)$$

ὅπου π_1 ἡ ex post ἀγοραία τιμὴ κατὰ χρόνον τ , x_1 ἡ ὑπὸ τοῦ πρώτου πωλητοῦ A προσφερομένη ποσότης κατὰ τὴν περίοδον τ , καὶ y_1 ἡ ποσότης ἡ προσφερομένη ὑπὸ τοῦ δευτέρου πωλητοῦ. Ὑποτίθεται ἐν γένει ὅτι τὰ μεγέθη y_1 , x_1 καὶ π_1 εἶναι μεγαλύτερα ἢ ἴσα πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ὅτι τὸ β εἶναι θετικόν. Ἡ μορφή τῆς συναρτήσεως ἀγοραίας τιμῆς καὶ ὀλικῆς ποσότητος ὑποτίθεται γνωστὴ εἰς ἀμφοτέρους τοὺς πωλητὰς καὶ περαιτέρω ὑποτίθεται ὅτι ἡ παρ' ἐκάστου πωλητοῦ προσφερομένη ποσότης πράγματι καὶ πωλεῖται κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς περιόδου.

Περαιτέρω ἔστω ἡ ἐξίσωσις τῶν ὀλικῶν δαπανῶν τοῦ πρώτου πωλητοῦ κατὰ τὴν περίοδον τ

$$(2) {}_1\Delta_1 = \gamma_1 x_1 + \zeta_1$$

ὅπου γ_1 καὶ ζ_1 εἶναι σταθεραὶ ποσότητες θετικάι.

Ἐστω ἐπίσης ἡ ἐξίσωσις τῶν ὀλικῶν δαπανῶν τοῦ δευτέρου πωλητοῦ κατὰ τὴν περίοδον :

$$(3) {}_2\Delta_1 = \gamma_2 y_1 + \zeta_2$$

ὅπου ἐπίσης γ_2 καὶ ζ_2 εἶναι ποσότητες σταθεραὶ καὶ θετικάι.

Ἐκαστος πωλητῆς, ὡς ἐλέγχθη, προβαίνει εἰς κάποιαν πρόβλεψιν περὶ τῆς ἀγοραίας τιμῆς, διὰ νὰ ὑπολογίσῃ τὰ ἔσοδά του ἐκ τῆς διαθέσεως τοῦ ἀγαθοῦ κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον. Ἡ πρόβλεψις τῆς τιμῆς ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς προβλέψεως περὶ τῆς ποσότητος τοῦ ἀντιπάλου κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον.

Ἐστω ἡ ex ante ἀγοραία τιμὴ τοῦ πρώτου πωλητοῦ

$$(4) {}_1\pi_1^* = \alpha - \beta (x_1 + y_1^*)$$

καὶ ἡ τοῦ δευτέρου

$$(5) \quad {}_2\pi^*_\tau = \alpha - \beta (x^*_\tau + y_\tau)$$

όπου y^*_τ είναι ἡ ποσότης τὴν ὁποίαν ὁ πρῶτος πωλητὴς ἀναμένει ὅτι ὁ δεύτερος θὰ προσφέρει κατὰ τὴν περίοδον τ καὶ x^*_τ ἡ ποσότης τὴν ὁποίαν ὁ δεύτερος πωλητὴς ἀναμένει ὅτι ὁ πρῶτος θὰ προσφέρει κατὰ τὴν ἰδίαν περίοδον.

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὴν χρησιμοποιουμένην εἰς τὸ πρῶτον τοῦτο πρότυπον

$$(6) \quad \begin{aligned} y^*_\tau &= y_{\tau-1} \text{ καὶ} \\ x^*_\tau &= x_{\tau-1} \end{aligned}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ (5) τὰς τιμὰς τοῦ y^*_τ καὶ x^*_τ λαμβάνομεν

$$(4\alpha) \quad {}_1\pi^*_\tau = \alpha - \beta (x_\tau + y_{\tau-1})$$

καὶ

$$(5\alpha) \quad {}_2\pi^*_\tau = \alpha - \beta (x_{\tau-1} + y_\tau)$$

Τὰ ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀναμενόμενα συνολικὰ ἔσοδα εἶναι τὸ γινόμενον τῆς ποσότητος ἣν σκοπεύει νὰ διαθέσῃ ἐπὶ τὴν προσδοκωμένην τιμὴν ἥτοι :

$$(7) \quad {}_1E^*_\tau = x_\tau [\alpha - \beta (x_\tau + y_{\tau-1})]$$

καὶ τὰ ὑπὸ τοῦ δευτέρου προσδοκώμενα συνολικὰ ἔσοδα εἶναι ὁμοίως :

$$(8) \quad {}_2E^*_\tau = y_\tau [\alpha - \beta (x_{\tau-1} + y_\tau)]$$

Ὁ πρῶτος πωλητὴς ἐπιδιώκων τὸ μέγιστον κέρδος θὰ ἐπιτύχῃ τοῦτο ὅταν ¹ :

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial x_\tau} \left[{}_1E^*_\tau - {}_1\Delta_\tau \right] = 0$$

1. Αἱ ἐξισώσεις (9) καὶ (10) ἂν καὶ ἀποτελοῦν ἀπαραιτήτους προϋποθέσεις μεγιστοποιήσεως τοῦ καθαροῦ κέρδους ἐκάστου πωλητοῦ, ὑπὸ αὐστηρῶς μαθηματικὴν ἐποψιν, δὲν ἀρκοῦν διὰ τὴν ἀπόδειξιν ὅτι ἐπιτυγχάνεται ἡ μεγιστοποίησις. Πάντας διὰ τοὺς σκοποὺς τῆς μελέτης αὐτῆς αἱ (9) καὶ (10) ἀρκοῦν.

καὶ ὁμοίως ὁ δευτέρος πωλητὴς θὰ ἐπιτύχῃ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος ὅταν :

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial y_{\tau}} \left[{}_1E_{\tau}^* - {}_2\Delta_{\tau} \right] = 0$$

Ἡ λύσις τῶν (9) καὶ (10) δίδει τὸ σύστημα ¹:

$$(11) \quad \begin{aligned} \alpha - 2\beta x_{\tau} - \beta y_{\tau-1} - \gamma_1 &= 0 \\ \alpha - \beta x_{\tau-1} - 2\beta y_{\tau} - \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τούτου δίδει

$$(12) \quad 4x_{\tau} - x_{\tau-2} = \frac{\alpha - 2\gamma_1 + \gamma_2}{\beta}$$

$$(13) \quad 4y_{\tau} - y_{\tau-2} = -\frac{\alpha + \gamma_1 - 2\gamma_2}{\beta}$$

Ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων (12) καὶ (13) δίδει ἀντιστοίχως :

$$(14) \quad x_{\tau} = A_1 \left(\frac{1}{2} \right)^{\tau} + B_1 \left(-\frac{1}{2} \right)^{\tau} + \frac{\alpha - 2\gamma_1 + \gamma_2}{3\beta}$$

καὶ

$$(15) \quad y_{\tau} = A_2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\tau} + B_2 \left(-\frac{1}{2} \right)^{\tau} + \frac{\alpha + \gamma_1 - 2\gamma_2}{3\beta}$$

ὅπου A_i , B_i ($i=1,2$) δύνανται νὰ εὑρεθοῦν ὅταν δοθῶσιν αἱ ἀρχικαὶ ἀξίαι.

Εἶναι ἐμφανές, ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (14) καὶ (15) καὶ ἐκ τοῦ

1. Πράγματι ὡς καταφαίνεται καὶ ἐκ τοῦ συστήματος (11), δοθέντος τοῦ $y_{\tau-1}$,

$$\frac{d^2}{dx_{\tau}^2} ({}_1E_{\tau}^* - {}_1\Delta_{\tau}) = -2\beta < 0,$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις (9) ὁδηγεῖ εἰς τὴν μεγιστοποίησιν τῶν κερδῶν τοῦ πρώτου ὀλιγοπωλητοῦ. Τὸ αὐτὸ δύναται νὰ δειχθῇ καὶ περὶ τῆς ἐξισώσεως (10) διὰ τὸν δευτέρον πωλητήν.

γεγονότος ὅτι $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$, ὅτι ἡ ἰσορροπία ἀμφοτέρων τῶν x καὶ y εἶναι σταθερά. ὁθέντος ὅτι, ἐνῶ τὸ τ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον,

$$(14\alpha) \quad \text{τὸ } x_{\tau} \text{ τείνει πρὸς τὸ } \bar{x} = \frac{\alpha - 2\gamma_1 + \gamma_2}{3\beta}$$

καὶ

$$(15\alpha) \quad \text{τὸ } y_{\tau} \text{ τείνει πρὸς τὸ } \bar{y} = \frac{\alpha + \gamma_1 - 2\gamma_2}{3\beta}$$

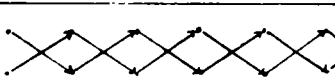
Ἡ πορεία τῶν ποσοτήτων πρὸς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα ἰσορροπίας των δύναται νὰ δειχθῇ γραφικῶς. Ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (11) δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν

$$(16) \quad x_{\tau} = \frac{\alpha - \gamma_1}{2\beta} - \frac{y_{\tau-1}}{2}$$

καὶ ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ ἰδίου συστήματος δύναται νὰ γραφῇ ὡς :

$$(17) \quad y_{\tau} = \frac{\alpha - \gamma_2}{2\beta} - \frac{x_{\tau-1}}{2}$$

Ἡ ἐξίσωσις (16) ἐκφράζει τὸ γεγονός ὅτι ἡ ποσότης x ἢ ὁ A πωλητὴς θὰ ἀποφασίσῃ νὰ προσφέρῃ κατὰ μίαν περίοδον ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν παραγωγὴν τοῦ ἀντιπάλου του κατὰ τὴν προηγούμενην περίοδον καὶ τὸ ἴδιον γεγονός δεικνύεται διὰ τὸν δεύτερον πωλητὴν ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (17). Τοῦτο δύνανται νὰ δειχθῇ ὑπὸ τοῦ ἐπομένου διαγράμματος εἰς τὸ ὁποῖον τὸ βέλος σημαίνει «ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς ποσότητος» :

Ποσοτήτες	Χρόνος τ							
	0	1	2	3	4	5	$\rightarrow$	∞
Ποσότης A πωλητοῦ (x_{τ})								
Ποσότης B πωλητοῦ (y_{τ})								

Εἰς τὸ Πιν. 15

Ἐκ τοῦ διαγράμματος τούτου φαίνεται ὅτι ἡ ποσότης x κατὰ χρόνον $\tau=0$ ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς y κατὰ χρόνον $\tau=1$ καὶ ὅτι ἡ y κατὰ $\tau=1$ ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς x κατὰ χρόνον $\tau=2$. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον

ἢ y_0 ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς x_1 καὶ αὕτη ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς y κατὰ χρόνον $\tau=2$ κ.ο.κ. Ὑφίστανται οὕτω δύο χωριστὰ ρεύματα ἀντιδράσεων. ὁμοια ἄλλ' οὐδόλως ταυτιζόμενα, ἕκαστον τῶν ὑπορίων ἄρχεται ἀπὸ μίαν τῶν δύο ἀρχικῶν ἀξιών, ἥτοι τῆς ποσότητος τοῦ x κατὰ χρόνον $\tau=0$ καὶ τῆς ποσότητος τοῦ y κατὰ τὸν ἴδιον χρόνον. Τὸ γεγονός τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας περὶ τῆς ὑπάρξεως καθυστερήσεως (lag) δύο περιόδων. Ἐὰν ὑπεθέτομεν καθυστέρησιν μιᾶς περιόδου θὰ εἶχομεν ἐν μόνον ρεῦμα ἀντιδράσεων.

Εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν ὑπ' ἀριθ. 16 ὑποθέτομεν ὅτι ὅλοι οἱ ἄξονες εἶναι θετικοί. Εἰς τὸ τμήμα πρὸς τὰ ἄνω καὶ δεξιὰ κατεσκευάσαμεν τὴν καμπύλην AB ἥτις δεικνύει τὴν θὰ παραγῆγην ὁ δεύτερος πωλητὴς κατὰ τὴν περίοδον τ δοθείσης τῆς παραγῶγης τοῦ πρώτου πωλητοῦ κατὰ τὴν προηγουμένην περίοδον. Πρὸς τοῦτο ἐχρησιμοποιήσαμεν τὴν ἐξίσωσιν (17) ὑποθέτοντες ὅτι $\alpha=20$, $\beta=2$, καὶ $\gamma_2=2$ ὅποτε ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀποβαίνει

$$(17\alpha) \quad y_{\tau} = 4,5 - \frac{x_{\tau-1}}{2}$$

Εἰς τὸ τμήμα πρὸς τὰ κάτω καὶ δεξιὰ κατεσκευάσθη ἡ $\Gamma\Delta$ ἥτις δεικνύει τὴν ποσότητα ἥτις θέλει παραχθῆ ὑπὸ τοῦ πρώτου πωλητοῦ κατὰ τὴν περίοδον $\tau+1$, δοθείσης τῆς ποσότητος τοῦ δευτέρου κατὰ τὴν περίοδον τ . Πρὸς τοῦτο ἐχρησιμοποιήθη ἡ ἐξίσωσις (16) ἥτις, διὰ τὰς ἀξίας $\alpha=20$, $\beta=2$ καὶ $\gamma_1=1$ ἀποβαίνει :

$$(16\alpha) \quad x_{\tau+1} = 4,75 - \frac{y_{\tau}}{2}$$

Εἰς τὸ τμήμα πρὸς τὰ κάτω καὶ ἀριστερὰ ἐσύρσαμεν, χρησιμοποιοῦντες καὶ πάλιν τὴν ἐξίσωσιν (17α) τὴν γραμμὴν EZ ἥτις δεικνύει τὴν ποσότητα ἣν ὁ δεύτερος πωλητὴς θέλει προσφέρει κατὰ τὴν περίοδον $\tau+2$ δοθείσης τῆς ποσότητος x τοῦ πρώτου πωλητοῦ κατὰ τὴν περίοδον $\tau+1$. Τελικῶς ἡ γραμμὴ HΘ κατασκευασθεῖσα ἐκ τῆς ἐξισώσεως (16α), δεικνύει τὴν ποσότητα τοῦ πρώτου πωλητοῦ κατὰ τὴν περίοδον $\tau+3$ δοθείσης τῆς ποσότητος τοῦ δευτέρου κατὰ τὴν προηγούμενην περίοδον. Κατα-

θέλει παραγάγει κατὰ τὴν περίοδον τ δοθείσης τῆς ποσότητος τοῦ δευτέρου κατὰ τὴν $\tau-1$.

Ἡ γραφικὴ παράστασις 16 δύναται νὰ δείξῃ τὴν τάσιν πρὸς ἰσορροπίαν. Ἐκαστον ρεῦμα ἀντιδράσεων ἐν ἰσορροπία ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς ποσότητας ἐν ἰσορροπία ὡς δίδονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων (14α) καὶ (15α) καὶ αἵτινες, διὰ τὰς χορηγοποιηθεῖσας ἀριθμητικὰς τιμὰς, ἀνέρχονται διὰ μὲν τὸ x εἰς $3\frac{1}{3}$, διὰ δὲ τὸ y εἰς $2\frac{5}{6}$. Αἱ ἀξίαι αὗται ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὸ ὀρθογώνιον WXYZ. Κινούμενοι κατὰ μῆκος τῆς WXYZ εὐρίσκωμεν ὅτι αἱ ἀξίαι τῆς x καὶ τῆς y πάντοτε ἐπαναλαμβάνονται. Ἐὼν ἡμῶς ἀρχίσωμεν ἀπὸ οἰονδήποτε σημείου x ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ ὀρθογωνίου, καὶ κινηθῶμεν κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὴν ΓΔ καὶ ἐκεῖθεν πρὸς τὴν EZ κ.ο.κ., ἡ πορεία μας πολὺ συντόμως θὰ τείνῃ νὰ ταυτισθῇ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον WXYZ. Τὸ ρεῦμα συνεπῶς τὸ πηγάζον ἐκ τῆς ἀρχικῆς ἀξίας τοῦ x τείνει διὰ μέσου τοῦ χρόνου πρὸς ἰσορροπίαν καὶ τὸ αὐτὸ δύναται νὰ δευχθῇ διὰ τὸ ρεῦμα τὸ ἐκπηγάζον ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν ἀξίαν τοῦ y .

γ) Ἡ σημασία τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας διὰ τὴν θεωρίαν τοῦ ὀλιγοπωλίου.

Τρεῖς εἶναι αἱ κυριώτεραι ὑποθέσεις αἱ γενόμεναι μέχρι τοῦδε :

α) Ἐκαστος πωλητὴς γνωρίζει τὴν μορφήν τῆς συναρτήσεως τῆς ζητήσεως ἥτις ὑπετέθη ὅτι ἔτο γραμμικῆς μορφῆς. Τὸ ἐὰν ᾖ, ὅχι ἢ καμπύλη τῆς ζητήσεως δύναται νὰ καθορισθῇ εἶναι ζήτημα ἀφορῶν τὴν ἐπιστήμην τῆς ἀναλύσεως τῆς ἀγορᾶς (market research) καὶ ζήτημα ἀναπτύξεως τῆς οἰκονομετρίας. Ὡς πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τῆς γραμμικότητος τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως εἶναι γνωστὸν ὅτι μεταξὺ βραχέων διαστημάτων μία συνεχῆς καμπύλη δύναται νὰ παρασταθῇ γραφικῶς καὶ κατὰ προσέγγισιν ὑπὸ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς.

β) Ἐκαστος πωλητὴς ὑποθέτει ὅτι δύναται νὰ διαθέσῃ ὅλην τὴν ποσότητα τὴν ὑποίαν ἀποφασίζει νὰ προσφέρῃ εἰς τὴν ἀγοράν. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἄλλης, «APXEION» Δ. Ε. Καλιτσούνακη, Τόμος 39ος (1959), Τεύχ. Β'.

ἦτοι ὅτι ὑπάρχει μία δεδομένη, ἔντασις διαφημίσεως ἣτις θὰ κάμῃ τὴν ἀγορὰν νὰ ἀπορροφήσῃ *ceteris paribus* μίαν ὠρισμένην ποσότητα τοῦ ἀγαθοῦ. Ἡ συζήτησις ὁμῶς τῶν συνεπειῶν τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς δὲν ἐμπίπτει εἰς τοὺς σκοποὺς τοῦ παρόντος ἔργου.

γ) Ἡ σπουδαιότερα ὑπόθεσις ἡ ὁποία ἐγένετο εἶναι ὅτι εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστης περιόδου ὁ πωλητὴς ὑποθέτει ὅτι ἡ ποσότης τοῦ ἀνταγωνιστοῦ του θὰ παραμείνῃ ἀμετάβλητος κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον. Ὑπάρχουν δύο ἐρωτήματα : Εἶναι ἡ ὑπόθεσις αὕτῃ ρεαλιστικὴ μὲ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἀντικατοπτρίζει μίαν ὠρισμένην στάσιν καὶ διάθεσιν ἀπὸ μέρους τῶν ἐπιχειρηματιῶν ὅταν λαμβάνουν ἀποφάσεις; Καὶ δεύτερον, ὁδηγεῖ ἡ ὑπόθεσις αὕτη εἰς ρεαλιστικὰ ἀποτελέσματα;

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ συντηρητισμὸς ἀποτελεῖ πάχιον χαρακτηριστικὸν ἑνὸς μεγάλου τμήματος τοῦ κόσμου τῶν ἐπιχειρήσεων. Ἡ προσπάθεια τῆς περικοπῆς κατὰ τὸ δυνατόν ἀπὸ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ τελικοῦ ἀποτελέσματος κερδῶν μὴ πραγματοποιηθέντων εἰσέτι, ὅσον πιθανὰ καὶ ἂν εἶναι ταῦτα, καὶ ἡ ταυτόχρονος συμπερίληψις ὅλων τῶν πιθανῶν ζημιῶν θεωροῦνται ὡς βάσεις τῆς καλῆς διαχειρίσεως. Προβλέψεις καὶ κρατήσεις διὰ γεγονότα μειωτικὰ τοῦ τελικοῦ ἀποτελέσματος ἀποτελοῦν πάχιον χαρακτηριστικὸν τῆς λογιστικῆς πάσης ἐπιχειρήσεως. Καὶ ἡ ἀποτίμησις τῶν μενόντων ἐμπορευμάτων εἰς τὴν χαμηλοτέραν τῶν δύο τιμῶν, κόστους καὶ τρεχούσης, τὸν ἴδιον σκοπὸν ἐπιδιώκει νὰ ἐξυπηρετήσῃ. Τὸ ἴδιον πνεῦμα θὰ κάμῃ τοὺς ὀλιγοπωλητὰς πολὺ διστακτικοὺς εἰς τὴν λήψιν μέτρων ἅτινα δυνατόν νὰ προκαλέσουν ἄμεσα ἀντίποινα ἀπὸ μέρους τῶν ἀντιπάλων των. Πόλεμος τιμῶν ἀποκλείεται, ἐκτὸς ἂν ὁ πωλητὴς αἰσθητῶς ὑπερέχῃ τοῦ ἀντιπάλου του. Ὑπὸ ὁμαλὰς συνθήκας οἱ πωληταὶ ἐπιδιώκοντες τὴν εἰρηνικὴν συνύπαρξιν σταθεροποιοῦν τὴν τιμὴν καὶ προβαίνουν μόνον εἰς μεταβολὰς τῶν πωλουμένων ποσοτήτων διὰ μεθόδων συναγωνισμοῦ ἄλλων ἀπὸ τὴν μεταβολὴν τῆς τιμῆς τοῦ προϊόντος των.

Αἱ διαφημιστικαὶ ἐκστρατεῖαι συνεπῶς, τὰς ὁποίας ἀνα-

λαμβάνει ἐκάστη ἐπιχείρησις, ἀποσκοποῦν εἰς τὴν προσαρμογὴν τῶν πωλήσεων τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς ἐκεῖνο τὸ ἐπίπεδον εἰς τὸ ὁποῖον πιστεύεται ὅτι θὰ ἐπιτευχθοῦν τὰ μέγιστα κέρδη. Ἡ ἐπιχείρησις ὅμως, ἥτις σχεδιάζει μίαν διαφημιστικὴν ἐκστρατείαν ἐν μιᾷ σχεδὸν κεκορεσμένη ἀγορᾷ, θὰ ὑπολογίσῃ, ὅτι θὰ ἀπαιτηθῇ χρονικὸν τι διάστημα πρὸ τοῦ ὃ ἀντιπάλου τῆς δυνηθῶν νὰ ἀπαντήσουν. Ἡ περίοδος αὕτη δυνατόν νὰ εἶναι μακρὰ ἢ βραχεῖα· τὸ σπουδαῖον γεγονός εἶναι ὅτι ἡ πρώτη ἐπιχείρησις ὑπολογίζει ὅτι θὰ προηγήται κατὰ ἐν βῆμα τῶν ἀντιπάλων τῆς. Ἀλλὰ διὰ τὸ ὑπολογισμόν τῆς καμπύλης τῶν πιθανῶν ἐσόδων τῆς ἐπιχειρήσεως ἀπαιτεῖται ὑπολογισμὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀντιπάλων πωληθσομένης ποσότητος. Ἡ ἐπιχείρησις δυνατόν βεβαίως νὰ ὑποθέσῃ ὅτι κατὰ τὸ διάστημα καθ' ὃ προηγείται τῶν ἀντιπάλων τῆς καὶ πωλήσεις τῶν θὰ ἐλαττωθῶν ἢ θὰ παραμείνουν σταθεραί. Ἡ τελευταία πιθανότης εἶναι ἡ χειρότερα τῶν δύο καὶ ἡ ἐπιχειρήσις, ἐν τῇ συντηρητικότητί τῆς, μᾶλλον θὰ ὑποθέσῃ, ὅτι ἡ ποσότης τῶν ἀντιπάλων θὰ μείνῃ ἀμετάβλητος.

Ὑπάρχει ὅμως καὶ μία σπουδαιότερα ἄποψις τοῦ θέματος. Ὡς φαίνεται ἐκ τῆς χρησιμοποιηθείσης γραφικῆς παραστάσεως καὶ τῶν χρησιμοποιηθεισῶν δυναμικῶν ἐξισώσεων, ἀκόμη καὶ ἐὰν ὑποθέσωμεν ἀρχικὰς ἀξίας μακρὰν τῶν ἀξιῶν ἰσορροπίας καὶ πάλιν ἐντὸς ἐνὸς πολὺ μικροῦ ἀριθμοῦ περιόδων, θὰ εὑρεθῶμεν πολὺ πλησίον τῶν ἀξιῶν ἰσορροπίας. Ὁ πωλητής, συνεπῶς, ὅστις βλέπει ὅτι ἐὰν ἐπιμένῃ ἐπὶ δύο ἢ τρεῖς περιόδους θὰ ἐπιτύχῃ πολὺ καλὰς προβλέψεις περὶ τῆς ποσότητος τοῦ ἀντιπάλου του, δὲν θὰ σπεύσῃ νὰ μεταβάλλῃ τὴν βάσιν τῆς προβλέψεώς του. Τὸ ἐπιχείρημα τοῦτο ἐνισχύεται ὑπὸ τοῦ γεγονότος ὅτι εἰς τὴν πραγματικότητι μετατοπίσεις ἀπὸ τοῦ σημείου ἰσορροπίας δὲν ἀπέχουν συνήθως πολὺ ἀπὸ τοῦτο. Μία διαφημιστικὴ ἐκστρατεία, ὅταν ἡ ὀλιγοπωλιακὴ ἀγορὰ εἶναι σχεδὸν κεκορεσμένη, δὲν δύναται νὰ μετατοπίσῃ τὸν συνδυασμὸν τῶν ποσοτήτων τῶν πωλητῶν μακρὰν τοῦ σημείου ἰσορροπίας. Ἡ ἀπόκλισις συνεπῶς μεταξύ τῶν προσδοκιῶν τοῦ πωλητοῦ καὶ τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν πράγματι λαμβανομένων θὰ εἶναι πολὺ μικρὰ καὶ ἐπομένως ἀπὸ τῆς

Ἡ ἀντικατάστασις τῶν νέων ἀξιῶν τῆς y^* καὶ x^* εἰς τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ (5) καὶ ἡ ἐπίλυσίς των κατὰ τὴν διαδικασίαν τὴν ἀκολουθηθεῖσαν εἰς τὸ πρῶτον πρότυπον ὁδηγοῦν εἰς τὸ σύστημα

$$(18) \quad \begin{aligned} \alpha - 2\beta x_\tau - z\beta y_{\tau-1} - \gamma_1 &= 0 \\ \alpha - n\beta x_{\tau-1} - 2\beta y_\tau - \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τούτου δίδει

$$(19) \quad 4 x_\tau - znx_{\tau-2} = \frac{(2-z)\alpha - 2\gamma_1 + z\gamma_2}{\beta}$$

καὶ

$$(20) \quad 4 y_\tau - zny_{\tau-2} = \frac{(2-n)\alpha + n\gamma_1 - 2\gamma_2}{\beta}$$

Αἱ λύσεις τῶν (19) καὶ (20) δίδουν ἀντιστοίχως

$$(21) \quad x_\tau = A_1 \left[\sqrt{\frac{z\eta}{4}} \right]^\tau + B_1 \left[-\sqrt{\frac{z\eta}{4}} \right]^\tau + \frac{(2-z)\alpha - 2\gamma_1 + z\gamma_2}{\beta(4-z\eta)}$$

$$(22) \quad y_\tau = A_2 \left[\sqrt{\frac{z\eta}{4}} \right]^\tau + B_2 \left[-\sqrt{\frac{z\eta}{4}} \right]^\tau + \frac{(2-n)\alpha + n\gamma_1 - 2\gamma_2}{\beta(4-z\eta)}$$

ὅπου $A_i, B_i, (i=1,2)$ δύνανται νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ τὰς ἀρχικὰς ἀξίας.

Καταφαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (21) καὶ (22) ὅτι αὗται ἀποτελοῦν γενικωτέρας μορφᾶς τοῦ πρώτου προτύπου. Διότι ἐὰν ὑποθέτομεν ὅτι $\varphi = 0$ καὶ $\varepsilon = 0$, θὰ εἴχομεν $z = 1$ καὶ $n = 1$ καὶ αἱ ἐξισώσεις (21) καὶ (22) θὰ μετεβάλλοντο ἀντιστοίχως εἰς τὰς ἐξισώσεις (14) καὶ (15).

Ἡ εἰσαγωγή ὁμως εἰς τὸ πρότυπον τῶν z καὶ n θὰ καταστήσῃ τὸ σύστημα ἀσταθὲς ὅταν $zn > 4$.

Ἡ προϋπόθεσις ἰσορροπίας σταθερᾶς εἶναι συνεπῶς

$$(23) \quad 4 > zn$$

ὁπότε

τὸ x , θὰ τείνη πρὸς

$$(24) \quad \bar{x} = \frac{(2-z)\alpha - 2\gamma_1 + z\gamma_2}{\beta(4-zn)}$$

καὶ τὸ y , θὰ τείνη πρὸς

$$(25) \quad y = \frac{(2-n)\alpha + n\gamma_1 - 2\gamma_2}{\beta(4-zn)}$$

Ἐφόσον ἡ ἀνισότης (23) ἰσχύη, ὁ παρονομαστής τῶν (24) καὶ (25) θὰ εἶναι θετικός. Πρὸς λήψιν θετικῆς λύσεως ἀπαιτεῖται

$$(26) \quad (2-z)\alpha - 2\gamma_1 + z\gamma_2 > 0$$

καὶ

$$(27) \quad (2-n)\alpha + n\gamma_1 - 2\gamma_2 > 0$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως καθ' ἣν $4 < zn$ ὑπάρχει ἀστάθεια ἰσορροπίας. Διὰ τὰ ληφθούσιν θετικάς ἀξίας ἰσορροπίας οἱ ἀριθμηταὶ ἀμφοτέρων τῶν (24) καὶ (25) θὰ πρέπη τώρα νὰ εἶναι ἀρνητικοί.

Ἐν τέλει ὑπάρχει ἡ περίπτωσις καθ' ἣν $zn = 4$ καὶ ὅπου ὁ παρονομαστής τῶν (24) καὶ (25) εἶναι μηδέν. Διακρίνομεν δύο ὑποπερίπτωσεις :

α) Ἡ πρώτη ὑποπερίπτωσις εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν οἱ ἀριθμηταὶ ἀμφοτέρων τῶν ἐξισώσεων (24) καὶ (25) εἶναι μηδέν. Τοῦτο θὰ συμβῇ διὰν

$$(28) \quad (2-z)\alpha - 2\gamma_1 + z\gamma_2 = 0$$

$$\text{καὶ συνεπῶς } z = \frac{2(\alpha - \gamma_1)}{\alpha - \gamma_2}$$

καὶ

$$(29) \quad (2-n)\alpha + n\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0$$

$$\text{καὶ συνεπῶς } n = \frac{2(\alpha - \gamma_2)}{\alpha - \gamma_1}$$

Ὡς φαίνεται ἀμέσως τὸ γινόμενον τῶν (28) καὶ (29) δίδει $zn = 4$. Ἡ ἰσορροπία θὰ εἶναι ἀσταθῆς ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἀμφότεραι αἱ ἀξίαι τῶν x καὶ y θὰ κυμαίνωνται δίχην ἐκκρεμοῦς μεταξὺ δύο σημείων καὶ θὰ εἶναι ἀκαθόριστος ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ὑπάρχει ἀπειρία ἀξιῶν αἵτινες εἶναι δυνατὰ διὰ τὸ $\bar{x}$ καὶ $\bar{y}$.

β) Ἡ δευτέρα ὑποπερίπτωσις εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν ἀφ' ἑνὸς

ἔχομεν $zn = 4$ ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου δὲν ἰσχύουν αἱ ἐξισώσεις (28) καὶ (29). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἴτε θὰ ἔπρεπε νὰ ἔχωμεν

$$(30) \quad z > \frac{2(\alpha - \gamma_1)}{\alpha - \gamma_2} \quad \text{καὶ} \quad n < \frac{2(\alpha - \gamma_2)}{\alpha - \gamma_1}$$

εἴτε τὰς ἀνιθέτους ἀνισότητας.

Ἡ ἰσορροπία καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἦτο ἀσταθὴς καὶ ἀόριστος. Ἀλλ' ἐὰν δεχθῶμεν ἥτις δὲν δύνανται νὰ γίνουν δεκταὶ ἀρνητικαὶ ἀξίαι καὶ ὑποκαταστήσωμεν τυχὸν τοιαύτας ὑπὸ τῆς ποσότητος μηδέν. θὰ εὕρωμεν ὅτι θάπτεον ἢ βράδιον ὁ ἕτερος τῶν ὀλιγοπωλητῶν θὰ ἀναγκασθῇ νὰ ἐγκαταλείψῃ τὴν ἀγοράν.

Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν πορείαν τῶν ἀξιῶν καὶ τὴν προσέγγισιν ἢ ἀπομάκρυνσιν των διὰ μέσου τοῦ χρόνου ἀπὸ τοῦ σημείου ἰσορροπίας.

Οὕτως ἐκ τοῦ συστήματος (18) θὰ ἔχωμεν τώρα τὰς ἀκολουθοῦς ἐξισώσεις:

$$(31) \quad x_t = \frac{\alpha - \gamma_1}{2\beta} - \frac{zy_{t-1}}{2}$$

$$(32) \quad y_t = \frac{\alpha - \gamma_2}{2\beta} - \frac{nx_{t-1}}{2}$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $\alpha = 20$, $\beta = 2$, $\gamma_1 = 4$ καὶ $\gamma_2 = 2$ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν διαφόρους γραφικὰς παραστάσεις δίδοντες διαφόρους τιμὰς εἰς τὸ z καὶ n .

Οὕτω δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ δεύτερος πωλητὴς ὑποθέτει ὅτι ὁ πρῶτος θὰ διπλασιάσῃ τὰς πωλήσεις του κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον καὶ συνεπῶς $n = 2$, ἐνῶ ταυτοχρόνως ὁ πρῶτος ὑποθέτει ὅτι ὁ δεύτερος θὰ αὐξήσῃ τὰς πωλήσεις του κατὰ 50% καὶ συνεπῶς $z = 1,5$. Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς αἱ ἐξισώσεις (31) καὶ (32) ἀποβαίνουν

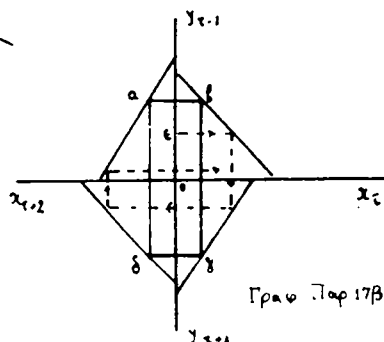
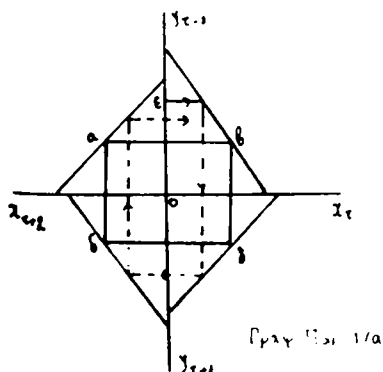
$$(31\alpha) \quad x_t = 4 - \frac{1,5 y_{t-1}}{2}$$

καὶ

$$(32\alpha) \quad y_t = 4,5 - x_{t-1}$$

Βάσει τῶν ἐξισώσεων τούτων κατασκευάζομεν τὴν γραφικὴν παράστασιν (17α) ὅπου ἡ ἰσορροπία παρίσταται ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου αβγδ καὶ ὅπου ἐὰν ἀρχίσωμεν ἀπὸ οἰονδήποτε σημείου ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς αβγδ καὶ ἀκολουθήσωμεν συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα, τὴν πορείαν τῶν ἀξιῶν διὰ μέσου τοῦ χρόνου, θὰ ἴδωμεν ὅτι συντόμως τείνουν νὰ ταυτισθῶσι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον αβγδ. Ἡ ἰσορροπία εἶναι ἐπομένως σταθερά, ὡς ἄλλως τε ἀποδεικνύεται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι $zn = 3 < 4$ εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν.

Ἐὰν ὁμως ὑποθέσωμεν $z = 2$ καὶ $n = 3$ θὰ ἔχωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν (17β). Αἱ ποσότητες ἰσορροπίας ὡς εὕρι-



σκονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων (24) καὶ (25) εἶναι τώρα $x = 1$ καὶ $\bar{y} = 3$. Ὡς δύναται ὁμως νὰ παρατηρηθῇ ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως (17β), οἰαδήποτε παρέκκλισις ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου αβγδ, ὅπερ ἀντιπροσωπεύει τώρα τὰς ποσότητας ἰσορροπίας, ὁδηγεῖ εἰς ἀντιδράσεις αἵτινες περαιτέρω ἀπομακρύνουν τὰς ποσότητας ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς ἰσορροπίας των. Ἡ ἰσορροπία εἶναι ἐπομένως ἀσταθής.

Τελικῶς ἡ παράστασις (18α) κατοπτρίζει τὴν περίπτωσιν τὴν διδομένην ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων (28) καὶ (29), ὅπου κατὰ τὰ

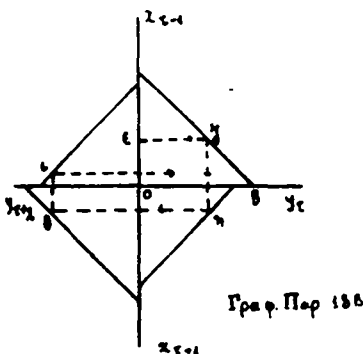
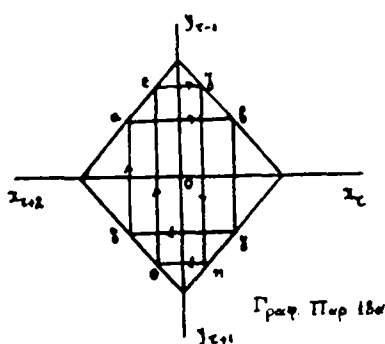
ἀριθμητικὰ μας δεδομένα $z = \frac{16}{9}$ καὶ $n = \frac{9}{4}$. Τὸ σχῆμα αβγδ

εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι ρόμβος καὶ οἰονδήποτε τετράπλευρον ἐγγραφόμενον εἰς αὐτόν, ὅπερ ἔχει τὰς πλευράς του παραλλή-

λους πρὸς τοὺς ἄξονας τοῦ ρόμβου, εἶναι ὀρθογώνιον. Ὑπάρχει συνεπῶς ἄπειρος ἀριθμὸς ποσοτήτων ἰσορροπίας δι' ἕκαστον ρεῦμα ἀντιδράσεων.

Τὸ σχῆμα (18β), ἱκανοποιοῦν τὰς ἀνισότητας (30) καὶ ὅπου καθ' ὑπόθεσιν $z = 2$ καὶ $n = 2$ δεικνύει ὅτι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι δὲν εἶναι δυναταὶ ἀρνητικαὶ ποσότητες, θὰ ὑπάρχῃ τάσις διὰ μὲν τὸ $\underline{x}$ νὰ ἐξαφανισθῇ, διὰ δὲ τὸ $\underline{y}$ νὰ γίνῃ ἴσον πρὸς ΟΒ.

Ἀπεδείχθη οὕτως ὅτι καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἕκα-



στος πωλητῆς ὑποθέτει ὅτι ὁ ἀντίπαλός του θὰ αὐξήσῃ τὴν προσφερομένην ποσότητα καὶ πάλιν ἐντὸς εὐρυτάτων ὁρίων — καὶ συγκεκριμένως ἐφόσον $zn < 4$ — εἶναι σταθερὰ ἡ ἰσορροπία.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἀμφότεροι οἱ πωληταὶ πιστεύουν ὅτι ὁ ἀντίπαλός των δὲν θὰ αὐξήσῃ ἀλλ' ἀντιθέτως θὰ ἐλαττώσῃ τὴν ποσότητά του κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον κατὰ ἓν ὠρισμένον ποσοστὸν, θὰ ἔχωμεν καὶ πάλιν πάντοτε σταθερότητα ἰσορροπίας.

Διότι ἂν καὶ τὰ ποσοστὰ $\frac{\varphi}{100}$ καὶ $\frac{\varepsilon}{100}$ τῶν ἐξισώσεων (6α)

καὶ (6β) εἶναι τώρα ἀρνητικά, δὲν εἶναι δυνατόν ἑκατέρου τούτων νὰ εἶναι ἡ ἀπόλυτος ἀξία μεγαλυτέρα τῆς μονάδος διότι τοῦτο θὰ ἐσήμαινεν ὅτι ὁ πωλητῆς πιστεύει ὅτι ὁ ἀντίπαλός του θὰ παραγάγῃ ἀρνητικὴν ποσότητα, ὅπερ εἶναι ἀπαράδεκτον. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς

$$(33) \quad z = 1 - \frac{\varphi}{100} < 1$$

καὶ

$$(34) \quad n = 1 - \frac{\varepsilon}{100} < 1$$

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτῇ,
 $zn < 1$

καὶ ἡ ἀνισότης (23) ἱκανοποιεῖται. Ἡ ἰσορροπία εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πάντοτε σταθερά.

Ἐὰν ἀντιθέτως ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ εἷς τῶν πωλητῶν ἐνεργεῖ ἐν τῇ πίστει ὅτι ὁ ἀντίπαλός του θὰ ἐλαττώσῃ τὴν ποσότητά του, ἐνῶ ὁ ἄλλος πιστεύει ὅτι ὁ πρῶτος θὰ αὐξήσῃ τὴν ἰδικήν του, θὰ ἔχωμεν, ἔστω,

$$(35) \quad z < 1 \quad \text{καὶ} \quad n > 1$$

καὶ τὰ ὅρια ἐντὸς τῶν ὑποίων ὑπάρχει πιθανότης νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ σταθερότης τῆς ἰσορροπίας εἶναι πολὺ μεγαλύτερα παρὰ ἐὰν ἀμφότεροι ἐπίστευον εἰς αὐξήσιν τῆς ποσότητος τοῦ ἀνιπάλου, ὥς ἦτο ἡ πρώτη ἐξετασθεῖσα περίπτωσις τοῦ δευτέρου προτύπου.

5. ΕΠΙ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΟΛΙΓΟΠΩΛΙΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΟΣ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

II. ΤΡΕΙΣ ΠΩΛΗΤΑΙ

Ἀπεδείχθη οὕτως ὅτι ὑποθέσεις ἐκάστου πωλητοῦ περὶ τῆς ποσότητος τοῦ ἀντιπάλου, αἵτινες δύνανται νὰ θεωρηθοῦν κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἥττον ρεαλιστικαί, θὰ ὀδηγήσουν κατὰ πᾶσαν πιθανότητα εἰς σταθερότητα τῆς ἰσορροπίας ὅταν ὑπάρχουν δύο πωληταί.

Σκοπεύομεν τώρα νὰ δείξωμεν ὅτι καὶ ὑπὸ τὴν ἀπλουστέραν ὑπόθεσιν ἡ ὁποία ἐγένεν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, ἦτοι τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἕκαστος πωλητῆς ὑποθέτει ὅτι ἡ ποσότης τοῦ ἀντιπάλου θέλει παραμείνῃ ἀμετάβλητος τὴν ἐπομένην περίοδον, δὲν θὰ ὑπάρξῃ σταθερότης ἰσορροπίας ὅταν, ἀντὶ δύο, ἔχωμεν τρεῖς πωλητάς.

Ἐστω τώρα ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ζητήσεως εἶναι

$$(1) \pi_t = \alpha - \beta (x_t + y_t + u_t)$$

ὅπου π_t ἡ ex post ἀγοραία τιμὴ κατὰ χρόνον t , x_t , y_t καὶ u_t αἱ ὑπὸ τοῦ πρώτου, δευτέρου καὶ τρίτου πωλητοῦ ἀντιστοίχως προσφερόμεναι ποσότητες κατὰ τὸν ἴδιον χρόνον t καὶ ὅπου α καὶ β εἶναι θετικαὶ παράμετροι.

Ἐστω περαιτέρω ὅτι ἐπιπροσθέτως πρὸς τὰς ὀλικὰς δαπάνας τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου πωλητοῦ αἵτινες δίδονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) τοῦ 4ου κεφαλαίου, ἔχωμεν διὰ τὰς δαπάνας τοῦ τρίτου πωλητοῦ

$$(2) {}_3\Delta_t = \gamma_3 x_t + \zeta_3$$

εἰς τρόπον ὥστε αἱ ὀριακαὶ δαπάναι τῶν τριῶν πωλητῶν εἶναι ἀντιστοίχως γ_1 , γ_2 καὶ γ_3 .

Ἡ ex ante ἀγοραία τιμὴ ἐκάστου τῶν πωλητῶν στηρίζεται εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι αἱ ὑπὸ τῶν ἄλλων δύο προσφερόμεναι ποσότητες θὰ παραμείνουν κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον ὡς εἶχον κατὰ τὴν παροῦσαν. Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς ἀντὶ τῶν ἐξισώσεων (4α) καὶ (5α) τοῦ κεφαλαίου 4 θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχους ex ante τιμὰς τῶν τριῶν πωλητῶν κατὰ χρόνον t .

$$(3) {}_1\pi_t^* = \alpha - \beta (x_t + y_{t-1} + u_{t-1})$$

$$(4) {}_2\pi_t^* = \alpha - \beta (x_{t-1} + y_t + u_{t-1})$$

$$(5) {}_3\pi_t^* = \alpha - \beta (x_{t-1} + y_{t-1} + u_t)$$

Οἱ πωληταὶ θὰ ἐπιτύχουν κατὰ τὰ ἤδη λεχθέντα, τὸ μέγιστον δυνατόν προσδοκώμενον κέρδος ὅταν, ἀντιστοίχως :

$$(6) \frac{\partial}{\partial x_t} ({}_1\pi_t^* x_t - {}_1\Delta_t) = 0$$

$$(7) \frac{\partial}{\partial y_t} ({}_2\pi_t^* y_t - {}_2\Delta_t) = 0$$

$$(8) \frac{\partial}{\partial u_t} ({}_3\pi_t^* u_t - {}_3\Delta_t) = 0$$

Ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων (6) — (8) δίδει τὸ σύστημα :

$$\alpha - 2\beta x_{\tau} - \beta y_{\tau-1} - \beta x_{\tau-1} - \gamma_1 = 0$$

$$(9) \quad \alpha - \beta x_{\tau-1} - 2\beta y_{\tau} - \beta x_{\tau-1} - \gamma_2 = 0$$

$$\alpha - \beta x_{\tau-1} - \beta y_{\tau-1} - 2\beta x_{\tau} - \gamma_3 = 0$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος (9) δίδει

$$(10) \quad 4\beta x_{\tau} + 2\beta x_{\tau-1} - 2\beta x_{\tau-2} = \alpha - 3\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

$$(11) \quad 4\beta y_{\tau} + 2\beta y_{\tau-1} - 2\beta y_{\tau-2} = \alpha - 3\gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_3$$

$$(12) \quad 4\beta x_{\tau} + 2\beta x_{\tau-1} - 2\beta x_{\tau-2} = \alpha - 3\gamma_3 + \gamma_1 + \gamma_2$$

Ἡ λύσις τῶν (10), (11) καὶ (12) δίδει ἀντιστοίχως

$$(13) \quad x_{\tau} = A_1 \left(\frac{1}{2} \right)^{\tau} + B_1 (-1)^{\tau} + \bar{x}$$

$$(14) \quad y_{\tau} = A_2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\tau} + B_2 (-1)^{\tau} + \bar{y}$$

$$(15) \quad x_{\tau} = A_3 \left(\frac{1}{2} \right)^{\tau} + B_3 (-1)^{\tau} + \bar{x}$$

ὅπου A_i, B_i ($i = 1, 2, 3$) δύνανται νὰ εὑρεθοῦν ὅταν δοθῶσιν αἱ ἀρχικαὶ ἀξίαι καὶ ὅπου $\bar{x}, \bar{y}$, καὶ $\bar{x}$, αἱ ἀντιστοιχοῦν τιμαὶ ἰσορροπίας, ἔχουν τὴν μορφήν :

$$(16) \quad \bar{x} = \frac{\alpha - 3\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{4\beta}$$

$$(17) \quad \bar{y} = \frac{\alpha - 3\gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_3}{4\beta}$$

$$(18) \quad \bar{x} = \frac{\alpha - 3\gamma_3 + \gamma_1 + \gamma_2}{4\beta}$$

Ὡς εἶναι προφανὲς ἐκ τῶν ἐξισώσεων (13) — (15), ἐφόσον ὁ χρόνος τ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, αἱ ποσότητες x_{τ}, y_{τ} καὶ x_{τ} τείνουν ἀντιστοίχως πρὸς $B_1 (-1)^{\tau} + \bar{x}$, $B_2 (-1)^{\tau} + \bar{y}$ καὶ $B_3 (-1)^{\tau} + \bar{x}$. Οὕτως εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις θὰ ὑπάρξῃ τάσις πρὸς συνεχῇ διακύμασιν τῆς τιμῆς μεταξύ δύο ἁκρων ἀξιῶν καὶ ἡ ἰσορροπία δὲν θὰ εἶναι σταθερά.

6. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΟΣ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ
ΥΠΟ ΚΑΘΕΣΤΩΣ ΜΟΝΟΠΩΛΙΑΣ¹

α) 'Η στατική θεωρία τῆς μονοπωλιακῆς τιμῆς.

Ἐστω ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ζήτησεως εἶναι

(1) $\pi = \alpha - \beta x$ ἢ ἐὰν ληφθῇ ἡ τιμὴ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή,

$$(1a) \ x = \frac{\alpha - \pi}{\beta}$$

ὅπου x ἡ ποσότης, π ἡ τιμὴ καὶ α καὶ β θετικαὶ παράμετροι.

Ἐστω περαιτέρω, κατὰ τὰ λεχθέντα ἐν τῷ κεφαλαίῳ περὶ τῆς σταθερότητος τῆς ὀλιγοπωλιακῆς τιμῆς, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῶν ὀλικῶν δαπανῶν παραγωγῆς τοῦ μονοπωλητοῦ εἶναι

$$(2) \ \Delta = \gamma x + \zeta$$

ὅπου γ καὶ ζ εἶναι ποσότητες θετικάι.

Τα ὀλικά E ἔσοδα τοῦ μονοπωλητοῦ εἶναι συνεπῶς

$$(3) \ E = \pi x = \alpha x - \beta x^2$$

καὶ ἄρα τὰ συνολικά καθαρά ἔσοδα εἶναι :

$$(4) \ E - \Delta = \alpha x - \beta x^2 - \gamma x - \zeta.$$

Ὁ μονοπωλητῆς ἐπιδιώκων τὰ μέγιστα δυνατὰ κέρδη, θὰ ἐπιτύχῃ ταῦτα ὅταν

$$(5) \ \frac{d}{dx} (E - \Delta) = 0$$

1. Πρβλ. ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου : C. F. Roos, «A mathematical theory of price and production fluctuations and economic crises» ἐν Journal of Political Economy, 1930, σελ. 502-513. Τοῦ ἰδίου, «A mathematical theory of Competition», American Journal of Mathematics, 1925. G. C. Evans, «The Dynamics of monopoly», American Mathematical Monthly, τόμ. 31, 1924. Τοῦ ἰδίου «Mémorial des Sciences mathématiques-Stabilité et Dynamique de la production dans l'Economie Politique» (1932), σελ. 2-6. Τοῦ ἰδίου «Mathematical Introduction to Economics» (1930), σελ. 36 καὶ ἐφ. G. Tintner, «Monopoly over time», Econometrica, 1937, σελ. 160-170. Τοῦ ἰδίου «The maximisation of utility over time», Econometrica, 1934, σελ. 144-158.

καὶ συνεπῶς ὅταν¹

$$(6) \quad \alpha - 2\beta x - \gamma = 0$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (6) ὡς πρὸς x , εὐρίσκουμεν ὡς τὴν ποσότητα ἰσορροπίας

$$(7) \quad x = \frac{\alpha - \gamma}{2\beta}$$

Ἡ τιμὴ τοῦ $\bar{x}$ ἀντικαθιστωμένη, εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) δίδει τιμὴν ἰσορροπίας

$$(8) \quad \bar{\pi} = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Αἱ ἀξίας τοῦ x καὶ π , ὡς δίδονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων (7) καὶ (8) ἀποτελοῦν ἀξίας ἰσορροπίας ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ὁ μονοπωλητὴς εὐρίσκων εἰς αὐτάς τὸ μέγιστον κέρδος οὐδὲν κίνητρον ἔχει νὰ τὰς μεταβάλλῃ, ἐφόσον δὲν μεταβάλλονται αἱ συνθῆκαι αἵτινες ὠδήγησαν εἰς αὐτάς.

Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν ἡ ἰσορροπία εἶναι σταθερὰ διότι ὁ μονοπωλητὴς, κυρίαρχος ὢν τῆς ἀγορᾶς, πιέζει τὴν ποσότητα ἢ τὴν τιμὴν πρὸς τὸ εἰς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας ἀντιστοιχοῦν ὕψος.

1. Ἡ ἐξίσωσις (6) δύναται καὶ νὰ γραφῇ ὡς

$$\alpha - 2\beta x = \gamma.$$

Ἀλλὰ $\alpha - 2\beta x = \frac{dE}{dx}$, πρόκειται δηλ. περὶ τῶν ὀριακῶν ἐσόδων, ἐνῶ

$\gamma = \frac{d\Delta}{dx}$ πρόκειται περὶ τῆς ὀριακῆς δαπάνης.

Ὡς ἐτονίσθη καὶ προηγουμένως, μόνη ἡ ἐξίσωσις (6) δὲν ἀποτελεῖ, ὑπὸ αὐστηράν μαθηματικὴν ἐποψίν, ἀρκετὴν ἀπόδειξιν τῆς μεγιστοποιήσεως ἀλλὰ διὰ τοὺς σκοποὺς τοῦ παρόντος ἀρκεῖ. Πάντως, ὡς φαίνεται εὐκόλως,

$\frac{d^2}{dx^2} (E - \Delta) = -2\beta < 0$ καὶ ἡ ἀξία τοῦ x ὡς δίδεται ὑπὸ τῆς (6) πράγματι ἀποδεικνύεται ὅτι μεγιστοποιεῖ τὰ καθαρὰ κέρδη τοῦ μονοπωλητοῦ.

β) Συμβολή εις τὴν δυναμικὴν θεωρίαν τῆς μονοπωλιακῆς τιμῆς.

Τὸ πρόβλημα ὅμως θὰ εἶναι διάφορον ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι ἡ τιμὴ περιπτώσεως τῆς ἐξισώσεως (1) ἢ (1α), ἡ ζητούμενη ποσότης ἐξαρτᾶται ὅχι μόνον ἀπὸ τὴν ἐκάστοτε ἰσχύουσαν τιμὴν ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὴν ποσὴν τῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς κατὰ τὸ παρελθόν. Δύναται δηλαδὴ νὰ ὑποθεθῇ ὅτι ἡ ἐξέλιξις τῶν τιμῶν μέχρι σήμερον ἐπηρεάζει τὰς ἀντιδράσεις τῶν ἀγοραστῶν. Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς ὁ πωλητὴς θὰ ἔχῃ ἐν σημεῖον ἰσορροπίας ὅπου τὰ κέρδη του εἶναι μέγιστα καθ' ἐκάστην περίοδον. Ἀλλ' ἡ διὰ μέσου τοῦ χρόνου ἐξέλιξις τῆς ζητούμενης ποσότητος βάσει τῆς ἐξελιξέως τῶν τιμῶν θὰ μεταβάλλῃ τὰ δεδομένα ἐπὶ τῶν ὑποίων ὁ πωλητὴς εὖρε τὸ μέγιστον κέρδος κατὰ μίαν περίοδον καὶ κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον θὰ πρέπῃ ἐκ νέου νὰ ὑπολογίσῃ τὴν τιμὴν ἢ τὴν ποσότητα, ἥτις θὰ τοῦ δώσῃ τὰ μέγιστα κέρδη διὰ τὴν περίοδον. Τὸ πρόβλημα τῆς ἰσορροπίας, ὡς ἐλέχθη καὶ εἰς τὰ προηγούμενα κεφάλαια, διακρίνεται: α) εἰς τὸ ἐὰν ὑφίσταται τοιαύτη τιμὴ (ἢ ποσότης) ἡ ὑποία, ἐὰν κατορθωθῇ νὰ ἐπιτευχθῇ, θὰ ἐπαναλαμβάνηται διὰ μέσου τοῦ χρόνου ἔστω καὶ ἂν ἡ ζήτησις λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν τὴν ἐξέλιξιν τῶν τιμῶν, καὶ β) ἐὰν πράγματι ἡ μονοπωλιακὴ τιμὴ (ἢ ποσότης) ἀποκλίνασα τῆς ἰσορροπίας τείνῃ διὰ μέσου τοῦ χρόνου νὰ προσεγγίσῃ τὴν ἐν λόγῳ τιμὴν ἢ ποσότητα ἰσορροπίας.

Πρέπει συνεπῶς νὰ τονισθῇ ὅτι ἐνταῦθα, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὀλιγοπωλιακῆς τιμῆς, ἡ ἐκάστοτε τιμὴ ἥτις τοῦ ἀποδίδει τὰ μέγιστα κέρδη ἀποτελεῖ διὰ τὸν μονοπωλητὴν τιμὴν ἰσορροπίας ἀλλ' ἰσορροπίας προσωρινῆς. Ἀπὸ τῆς ἐννοίας αὐτῆς πρέπει νὰ διακριθῇ ἡ ἐννοία ἐκείνης τῆς ἰσορροπίας, ἥτις ἐὰν ἐπιτευχθῇ τείνει νὰ ἐπαναλαμβάνηται διὰ μέσου τοῦ χρόνου, καὶ πρὸς τὴν ὁποίαν ἡ τάσις ἢ ἡ ἀπόκλισις τῆς τιμῆς καθορίζει ἐὰν ὑπάρχῃ ἢ ὅχι σταθερότης ἰσορροπίας.

Εἰς τὸ ἐξεταζόμενον πρότυπον ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἐπίδρασις τῆς ἐξελιξέως τῶν τιμῶν ἐπὶ τῆς ζητούμενης ποσότητος περιο-

ρίζεται μόνον¹ εἰς τὴν ἐπίδρασιν τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ τὸ ποσὸν μεταβολῆς τῆς τιμῆς τῆς παρούσης περιόδου ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν τιμὴν τῆς προηγούμενης περιόδου.

Ἐστω συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις τῆς ζήτησεως

$$(9) \quad x_t = \alpha - \pi_t + \delta (\pi_t - \pi_{t-1})$$

ὅπου x ἡ ποσότης, π ἡ τιμή, α θετικὴ παράμετρος καὶ $\pi_t - \pi_{t-1}$ ἡ διαφορὰ μεταξύ τῆς τιμῆς τῆς παρούσης περιόδου καὶ τῆς προηγούμενης. Παρομοίως ὑποτίθεται ὅτι $\delta > 0$ καὶ ὅτι αὐξητικὴ τάσις τῶν τιμῶν ἐκδηλουμένη ὑπὸ τῆς σχέσεως $\pi_t > \pi_{t-1}$, ἀποτελεῖ ἐνισχυτικὸν παράγοντα τῆς ζητούμενης ποσότητος. Ἀντιθέτως πτωτικὴ τάσις τῶν τιμῶν ἀποτελεῖ παράγοντα ἐπιδρῶντα μειωτικῶς ἐπὶ τῆς ζητούμενης ποσότητος.

Τὰ ὀλικά ἔσοδα τοῦ μονοπωλητοῦ θὰ εἶναι τώρα

$$(10) \quad E_t = \pi_t x_t$$

καὶ ἐφόσον ἐκ τῆς (9) ἔχομεν

$$(9a) \quad \pi_t = \frac{\alpha - x_t - \delta \pi_{t-1}}{1 - \delta}$$

ἡ (10) μεταβάλλεται εἰς

$$(10a) \quad E_t = \frac{\alpha x_t - x_t^2 - \delta x_t \pi_{t-1}}{1 - \delta}$$

Ὁ πωλητὴς θὰ ἐπιτύχῃ τὰ μέγιστα κέρδη, ὅταν²

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial x_t} (E_t - \Delta \tau) = 0$$

ἤτοι ὅταν

$$(11a) \quad \frac{\alpha - 2x_t - \delta \pi_{t-1}}{1 - \delta} - \gamma = 0$$

1. Θὰ ἦτο δυνατόν βεβαίως νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τιμὴ περιόδου τινὸς ἐπηρεάζει οὐχὶ μόνον τὴν ἐπομένην περίοδον ἀλλὰ σειράν περιόδων. Θὰ ἐπρόκειτο τότε περὶ περιπτώσεως «κατανεμημένων καθυστερήσεων» (distributed lags) ἐπὶ τῆς ὁποίας πρβλ. F. Alt, «Distributed Lags», *Econometrica*, 1942 σελ. 113-128. T.C. Koopmans, «Distributed lags in dynamic Economics», αὐτόθι, 1941, σελ. 128-134.

2. Ἄνκαι ὡς καὶ ἀνωτέρω ἀνεφέρθη ἡ (11) δὲν ἀποτελεῖ, ἐν αὐστηρᾷ μαθηματικῇ ἐννοίᾳ, ἀρκετὴν ἀπόδειξιν τῆς μεγιστοποιήσεως, διὰ τοὺς σκοποὺς τοῦ παρόντος ἀρκεῖ.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (11α) τὴν ἀξίαν τῆς x , ὡς δίδεται ὑπὸ τῆς (9) λαμβάνομεν

$$(12) \quad 2\pi_r + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) \pi_{r-1} = \frac{\gamma - \gamma\delta + \alpha}{1-\delta}$$

Ἡ τιμὴ ἰσορροπίας, ἥτις ἐὰν ἐπιτευχθῇ θὰ ἐπαναλαμβάνεται, εἶναι συνεπῶς :

$$(13) \quad \bar{\pi} = \frac{\gamma - \gamma\delta + \alpha}{2-\delta}$$

Ἐὰν συνεπῶς $\delta=0$ (καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ παρελθούσα τιμὴ οὐδεμίαν ἐπίδρασιν ἔχει) θὰ λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν (8) τῆς στατικῆς θεωρίας

$$\pi = \frac{\gamma + \alpha}{2}$$

Ἡ λύσις τῆς ἐξίσωσεως (12) δίδει

$$(14) \quad \pi_r = A \left[-\frac{\delta}{2-2\delta} \right]^r + \bar{\pi}$$

καὶ ἐὰν π_0 εἶναι ἡ ἀρχικὴ τιμὴ εἰς χρόνον $t=0$, λαμβάνομεν :

$$(14a) \quad \pi_r = (\pi_0 - \bar{\pi}) \left[-\frac{\delta}{2-2\delta} \right]^r + \bar{\pi}$$

Κατὰ τὰ λεγθέντα συνεπῶς θὰ ὑπάρξῃ σταθερότης ἰσορροπίας μόνον ὅταν

$$(15) \quad \frac{\delta}{2-2\delta} \left\langle 1 \text{ ἐφόσον } 2 \right\rangle 2\delta$$

$\bar{\eta}$

$$(15a) \quad \delta \left\langle \frac{2}{3} \left\langle 1 \right. \right.$$

Ἐὰν ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης (15) ἡ μονοπωλιακὴ τιμὴ θὰ πλησιάζῃ κυμαινομένη τὴν τιμὴν ἰσορροπίας.

Τὴν πορείαν πρὸς τὴν ἀπὸ τὴν ἰσορροπίαν δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν γραφικῶς χρησιμοποιοῦντες παραλλαγὴν τῆς γραφικῆς μεθόδου ἣν ἐχρησιμοποίησαμεν εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας τοῦ ὀλιγοπωλίου.

Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν (12) ἥτις δεικνύει τὴν σχέσιν μεταξὺ τιμῆς τῆς προηγουμένης περιόδου καὶ τῆς παρούσης. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ γραφῇ, ὥς :

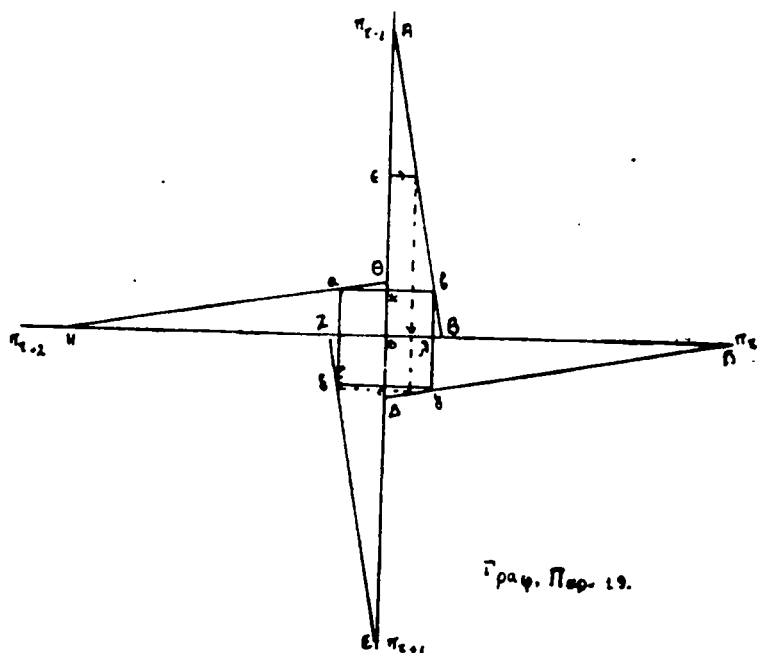
$$(16) \pi_r = \frac{\gamma - \gamma\delta + \alpha}{2(1 - \delta)} - \frac{\delta}{2 - 2\delta} \pi_{r-1}$$

Ἐστω ὅτι $\alpha = 40$, $\gamma = 2$ καὶ ἔστω περαιτέρω ὅτι

$$(15\beta) \delta = \frac{1}{4} < \frac{2}{3} \quad \text{εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐκπληροῦται ἡ ἀνισότης (15α).}$$

Ὑπὸ τὰς ὑποθέσεις αὐτὰς ἡ ἐξίσωσις (16) ἀποβαίνει

$$(17) \pi_r = \frac{166}{6} - \frac{1}{6} \pi_{r-1}.$$



Σύρομεν τὰς δύο καθέτους, κατὰ τὰ ἥδη λεγθέντα, καὶ εἰς τὸ τμήμα πρὸς τὰ ἄνω καὶ δεξιὰ κατασκευάζομεν τὴν γραμμὴν AB, βάσει τῆς ἐξισώσεως (17), ἥτις καὶ δεικνύει ποία θὰ εἶναι

ἡ τιμὴ κατὰ τὴν περίοδον τ δοθείσης τῆς τιμῆς τῆς προηγουμένης περιόδου. Καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ χρησιμοποιοῦντες τὴν ἰδίαν¹ ἐξίσωσιν (17) σύρομεν τὴν γραμμὴν ΓΔ ἣτις δεικνύει ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ κατὰ τὴν περίοδον $\tau + 1$ δοθείσης τῆς τιμῆς κατὰ τὴν περίοδον τ . Κατὰ τὰ ἤδη λεχθέντα σύρομεν καὶ τὰς γραμμὰς EZ καὶ ΗΘ.

Ἡ ἰσορροπία παρίσταται εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν ὑπὸ τοῦ τετραγώνου αβγδ. Δοθείσης τῆς τιμῆς Οκ κατὰ τὴν περίοδον $\tau - 1$ λαμβάνομεν τιμὴν Ολ = Οκ κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον. Ὡς φαίνεται ἀμέσως, ἐὰν ἀρχίσωμεν ἀπὸ οἰανδήποτε τιμὴν Οε καὶ κινηθῶμεν ἀπὸ καμπύλης εἰς καμπύλην, κατὰ τὸν εἰς τὸ περὶ ὀλιγοπωλίου κεφάλαιον ὑποδειχθέντα τρόπον, πολὺ συντόμως θὰ εὕρωμεν ὅτι ἡ πορεία τῆς τιμῆς διὰ μέσου τοῦ χρόνου τείνει νὰ ταυτισθῇ πρὸς τὸ τετράγωνον αβγδ. Ἡ ἰσορροπία εἶναι συνεπῶς σταθερά.

Ἐὰν ἀντιθέτως λάβωμεν ἀξίαν τοῦ δ τοιαύτην ὥστε

$$(18) \quad 1 > \delta > \frac{2}{3}$$

αἱ καμπύλαι ΑΒ, ΓΔ, EZ καὶ ΗΘ θὰ ἔχουν τοιαύτην κλίσιν ὥστε οἰανδήποτε ἀρχικὴ τιμὴ θὰ παρουσιάσῃ διὰ μέσου τοῦ χρόνου διακυμάνσεις διαρκῶς εὐρυνομένας καὶ ἀπομακρυνόμενας τοῦ εἰς τὴν ἰσορροπίαν ἀντιστοιχοῦντος τετραγώνου.

Μέχρι τῆς στιγμῆς τὸ γεγονός ὅτι τὸ κλάσμα $-\frac{\delta}{2-2\delta}$ τῆς

1. Ἡ ἐξίσωσις (17) δύναται κατὰ τὰ γνωστὰ νὰ λάβῃ οἰανδήποτε τῶν μορφῶν :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{166}{6} - \frac{1}{6} \pi_0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \pi_\tau &= \frac{166}{6} - \frac{1}{6} \pi_{\tau-1} \\ \pi_{\tau+1} &= \frac{166}{6} - \frac{1}{6} \pi_\tau \end{aligned}$$

(14α) ἦτο ἀρνητικόν, ἐσήμαινεν ὅτι ἡ προσέγγισις ἢ ἀπόκλισις ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας ἐγίνετο διὰ διακυμάνσεων.

Ἐὰν ὁμῶς ὑποθέσωμεν ὅτι

$$(19) \delta > 1$$

τὸ κλάσμα τοῦτο γίνεται θετικόν, ἡ (14α) μεταβάλλεται εἰς

$$(14\beta) \pi_1 = (\pi_0 - \bar{\pi}) \left[\frac{\delta}{2\delta - 2} \right]^2 + \bar{\pi} :$$

καὶ ἡ προσέγγισις ἢ ἀπόκλισις παρουσιάζεται συνεχής.

Ἡ σταθερότης τῆς ἰσορροπίας ἀπαιτεῖ τώρα :

$$(20) \frac{\delta}{2\delta - 2} < 1 \quad \bar{\pi}_1$$

$$(20\alpha) \delta > 2$$

Ἀλλὰ ὅταν ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης (20α) ὁ παρονομαστής τῆς τιμῆς ἰσορροπίας π (ἐξίσωσις 13) ἀποβαίνει ἀρνητικός. Καὶ ἐπειδὴ μόνον ἐὰν καὶ ὁ ἀριθμητὴς τῆς $\bar{\pi}$ εἶναι ἀρνητικὸς θὰ ἔχωμεν θετικὴν τιμὴν ἰσορροπίας, τοῦτο θὰ ἀπῆρτει ὥστε

$$(21) \frac{\alpha + \gamma}{\gamma} < \delta$$

ἢ μὲ τὰ ἀριθμητικά μας δεδομένα θὰ ἀπῆρτειτο

$$(21\alpha) 21 < \delta$$

Ὡς πλέον πιθανὴ συνεπῶς παρουσιάζεται ἐνταῦθα ἡ περίπτωση

$$(22) 2 > \delta > 1$$

καθ' ἣν ἡ μὲν ἰσορροπία εἶναι ἀσταθής, ἡ δὲ ἀπόκλισις ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας παρουσιάζεται συνεχής.

7. ΤΕΛΙΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Ἐν τοῖς ἀνωτέρω ἐξητάσθη τὸ πρόβλημα τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας τῆς ἀγοράας τιμῆς καὶ ποσότητος ὑπὸ ὠρισμέναις μορφᾷς ἀγορᾶς καὶ ὑπὸ ὠρισμένας ὑποθέσεις.

Ἄλλ' εὐνόητον εἶναι ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας δὲν δύναται νὰ ἐξαγληθῇ. Θὰ ἦτο δυνατόν νὰ δημιουργηθῶν πολυπλοκώτερα πρότυπα περιλαμβάνοντα ἴσως καθυστερήσεις πέραν τῆς μιᾶς περιόδου¹, ἢ πρότυπα τὰ ὅποια θὰ συνέδεον τὴν ὑψωσιν ἢ πτωσιν τῆς τιμῆς μὲ τὸ ἐὰν τὰ ἀποθέματα εἰς χεῖρας τῶν πωλητῶν κατὰ τὴν προηγηθεῖσαν περίοδον παρουσίασαν πτωσιν ἢ ἀνοδον εἴτε ἀπολύτως εἴτε ἐν συγκρίσει πρὸς μίαν δοθεῖσαν ποσότητα ἀποθέματος².

Ἡ προσέγγις πάντως θὰ εἶναι πάντοτε ἡ αὐτή. Πρῶτον ἡ ἐξέτασις ἐὰν πράγματι ὑπάρχῃ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας καὶ δεύτερον ἡ ἐξέτασις ἐὰν δοθείσης ἀποκλίσεως τινος ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου, ὑπάρχῃ τάσις προσεγγίσεώς του εἴτε ἀσυμπτωτικῶς εἴτε διὰ μέσου σμικρνομένων διακυμάνσεων.

Ἡ ἰδία μέθοδος ἀναλύσεως ἔχει ἐφαρμοσθῇ καὶ ἐπὶ τῆς ἐξετάσεως μακροοικονομικῶν προβλημάτων³. Εἰδικώτερον ἡ νεω-

1. Ἡ ἀκόμη πρότυπα γενικῆς ἰσορροπίας. Ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου πρβλ. J. R. Hicks, «Value and Capital». (1948). Samuelson, ἐνθ' ἄνωτ., σελ. 269 καὶ ἐφ. Lange, «Price Flexibility and Employment», (1944), σελ. 91-101. L.A. Metzler, «Stability of Multiple Markets: The Hicks conditions», *Econometrica*, 1945, σελ. 277-292. Reder, ἐνθ' ἄνωτ. σελ. 116 καὶ ἐφ.

2. Πρβλ. L.A. Metzler, «The Nature and Stability of Inventory Cycles», *Review of Economic Statistics*, 1941, σελ. 113-119.

3. Πρβλ. A. Smithies, «Process Analysis and Equilibrium Analysis», *Econometrica*, 1942, σελ. 26-38. J. Marschak, «Identity and Stability in Economics: A Survey», αὐτόθι 1942, σελ. 61-74. O. Lange, «The Theory of the Multiplier», αὐτόθι, 1943 σελ. 227-245. E. Domar, «Capital Expansion, Rate of Growth and Employment», *Econometrica*, 1946, σελ. 137-148. Τοῦ ἰδίου, «Essays in the Theory of Economic Growth», (1957), F. Machlup, «Period Analysis and Multiplier Theory» ἐν *Quarterly Journal of Economics*, 1939, σελ. 1-27.

τέρᾳ θεωρίᾳ περὶ οἰκονομικῶν διακυμάνσεων, τὰς βασικὰς ἰδέας τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας. ὡς ἐχρησιμοποιήθησαν ἄνω-τέρω, χρησιμοποιεῖ ἄνκαι βεβαίως καὶ μεταβληταὶ εἶναι εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς διάφοροι¹.

1. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρονται: M. Kalecki, «A macrodynamic theory of business cycles», *Econometrica*, 1935, σελ. 327-344. Τοῦ ἰδίου, «A theory of the Business Cycle», *Review of Economic Studies*, τόμ. IV, 1936-1937, σελ. 77. Τοῦ ἰδίου «Essays in the theory of Economic Fluctuations» (1939). E. Lundberg, «Studies in the theory of economic expansion» (1937). J. Tinbergen, «Annual Survey: Quantitative Business Cycle Theory», *Econometrica*, 1935, σελ. 241-308. R. F. Harrod, «The Trade cycle: an essay» (1936). Τοῦ ἰδίου, «An essay in dynamic theory», *Economic Journal*, 1939, σελ. 14-33. Τοῦ ἰδίου, «Towards a Dynamic Economics» (1948) καὶ «Economic Essays» (1952). P. A. Samuelson, «Interactions between the Multiplier analysis and the principle of acceleration», *Review of Economic Statistics*, 1939, σελ. 75-78. J. R. Hicks, «A contribution to the Theory of the Trade Cycle» (1950).

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

	Σελίς
1. <i>Ἡ ἔννοια τῆς Σταθερότητος τῆς Ἴσορροπίας</i>	141
2. <i>Ἡ ταχύτης πρόσσρμογῆς καὶ ἡ σταθερότης τῆς ἰσορροπίας</i>	148
α) Τὸ πρότυπον τῆς ὑπερβαλλούσης προσφορᾶς ἢ ζητήσεως	148
β) Ἡ δυναμικὴ ἀπεικόνισις τῆς πορείας τῆς τιμῆς.....	156
γ) Τὸ πρότυπον τῆς ὑπερβαλλούσης τιμῆς ζητήσεως ἢ τιμῆς προσφορᾶς	163
3. <i>Ἡ θεωρία τοῦ Ἰστοῦ Ἀράχνης καὶ ἡ σταθερότης τῆς Ἴσορροπίας</i>	169
α) Ἡ θεωρία ἐπὶ γραμμικῶν συστημάτων μὲ θετικὴν κλίσιν τῆς καμπύλης προσφορᾶς.....	169
β) Ἡ θεωρία ὅταν ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς ἔχῃ ἀρνητικὴν κλίσιν	174
γ) Ἡ θεωρία εἰς τὴν περίπτωσιν μὴ γραμμικῶν συστημάτων....	176
δ) Ἡ μετατόπισις τῶν καμπυλῶν προσφορᾶς καὶ ζητήσεως καὶ ἡ θεωρία τοῦ ἴστοῦ Ἀράχνης	178
4. <i>Ἐπὶ τῆς Δυναμικῆς Θεωρίας τοῦ Ὀλιγοπωλίου καὶ τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας. I. Δύο πωληταί</i>	182
α) Εἰσαγωγικαὶ Παρατηρήσεις.	182
β) Πρῶτον Πρότυπον. Ἐκαστος πωλητῆς προβλέπει ὅτι ἡ ποσότης τοῦ ἀντιπάλου θὰ παραμείνῃ ἀμετάβλητος.....	183
γ) Ἡ σημασία τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας διὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Ὀλιγοπωλίου	189
δ) Δεύτερον Πρότυπον. Ἐκαστος πωλητῆς προβλέπει ὅτι ἡ ποσότης τοῦ ἀντιπάλου θὰ μεταβληθῇ.....	192
5. <i>Ἐπὶ τῆς Δυναμικῆς Θεωρίας τοῦ Ὀλιγοπωλίου καὶ τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας. II. Τρεῖς πωληταί</i>	199
6. <i>Τὸ πρόβλημα τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας ὑπὸ καθεστῶς μονοπωλίου</i>	202
α) Ἡ στατικὴ θεωρία τῆς μονοπωλιακῆς τιμῆς.....	202
β) Συμβολὴ εἰς τὴν δυναμικὴν θεωρίαν τῆς μονοπωλιακῆς τιμῆς.	204
7. <i>Τελικαὶ Παρατηρήσεις</i>	210