

**ΠΑΝΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΤΜΗΜΑ
ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ
ΔΙΑΚΛΑΔΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ**

Πτυχιακή εργασία στο μάθημα: Γενική Ισορροπία

Επιβλέπον καθηγητής : Κ^{ος} Στρόμπλος

Φοιτήτρια : Σιστρίνη Ευαγγελία

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

	σελ
Εισαγωγή	2-3
Ι ΟΡΙΣΜΟΙ ΓΕΝΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ	4
Ι.1. Γενική Ισορροπία και Μηχανική	4
Ι.2. Γενική Ισορροπία: Περιεχόμενο και ορισμοί	4
Ι.3. Γενική Ισορροπία: Ύπαρξη, Μοναδικότητα, Σταθερότητα	6
ΙΙ. Κλασική και Νεοκλασική σχολή Γενικής Ισορροπίας	8
ΙΙ.1. Η νεοκλασική θεωρία	9
ΙΙ.1.α. Η νεοκλασική σχολή εκτενέστερα	10
1. William Stanley Jevons	10
2. Leon Walras	12
3. Gustav Cassel	15
4. Το συνέδριο της Βιέννης	16
5. Υποδείγματα Νεοκλασικής θεωρίας	18
Α. Συναρτήσεις χρησιμότητας	18
Β. Οικονομία των ανταλλαγών	20
Β.1. Ισορροπία κατά Walras	21
Β.2. Κατά Pareto Αριστοποίηση	23
Γ. Νεοκλασικό υπόδειγμα με παραγωγή	24
ΙΙΙ. Η κλασική σχολή εκτενέστερα	28
ΙV. Το μοντέλο γενικής ισορροπίας του John von Neumann	30
ΙV.1. Η αρχική εκδοχή	30
ΙV.2. Von Neumann από D. Simpson	35
ΙV.3. Von Neumann: μια γενική λύση του προβλήματος	39
ΙV. Σχετικά με το μοντέλο γενικής ισορροπίας του John von Neumann	49
V.1. Von Neumann και Piero Sraffa	49
V.2. Von Neuman και Von Charasoff	52
V.3. Von Neumann και Νεοκλασικοί	53
V.3.1. Το μοντέλο του Arrow-Debrue	55
ΙVΙ. Τελικά συμπεράσματα	56
ΙVΙΙ. Βιβλιογραφικές αναφορές	60

Εισαγωγικά

Η γενική ισορροπία είναι ένας τρόπος εξέτασης της οικονομίας στο σύνολό της. Εξετάζει τα μέρη της, εν προκειμένω τις επιμέρους αγορές της, και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των. Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται τα κύρια στοιχεία και οι εκπροσώποι της νεοκλασικής και της κλασικής θεωρίας γενικότερα. Στην συνέχεια συγκρίνονται τα διάφορα κλασικά και μη μοντέλα ισορροπίας, και εκθέτονται τα συμπεράσματα, που συνεπάγεται η σύγκρισή αυτή.

Αρχικά αναφέρονται κάποιοι ορισμοί της γενικής ισορροπίας.

Γίνεται λόγος για την ύπαρξη, τη σταθερότητα και τη μοναδικότητα της ισορροπίας. Στην συνέχεια παρουσιάζονται, οι σχολές γενικής ισορροπίας. Αναφέρονται τα βασικά χαρακτηριστικά της νεοκλασικής «οπτικής» για την γενική ισορροπία. Γίνεται αναφορά στον Jevons, στον Walras, στον Cassel και στην συζήτηση που έγινε στο συνέδριο της Βιέννης. Μέσα σ' όλα αυτά γίνεται νύξη στα σημεία στα οποία διαφοροποιείται το μοντέλο του von Neumann. Για να γίνει, ακόμα πιο αισθητή η διαφορά αυτή, παραθέτονται δύο υποδείγματα νεοκλασικής γενικής ισορροπίας, ένα υπόδειγμα των ανταλλαγών, και ένα υπόδειγμα παραγωγής.

Στην συνέχεια, παρουσιάζοντας, τους κύριους εκπροσώπους της κλασικής θεωρίας, γίνεται προσπάθεια να τονισθούν οι «συγγενικοί» δεσμοί κλασικής σχολής και von Neumann. Η ιδιαίτερη όμως, συγγένεια των υποδειγμάτων των von Charasoff και von Neumann, ωθεί στην εκτενέστερη αναφορά στον πρώτο, σε σχέση με τους υπόλοιπους κλασικούς εκπροσώπους.

Επίσης, παρουσιάζεται το μοντέλο γενικής ισορροπίας του von Neumann, στην αρχική του εκδοχή, χωρίς να παρουσιαστεί εξ' ολοκλήρου η απόδειξη του τελευταίου για την ύπαρξη λύσης. Ακόμη παρουσιάζεται και η εκδοχή του D.Simpson, η οποία περισσότερο διασαφηνίζει κάποιες από τις παραδοχές του μοντέλου. Επίσης παρουσιάζεται η εκδοχή του Γ. Σταμάτη, στην οποία παρατίθεται η λύση για κάθε δυνατό είδος τεχνικών, με διαφορετικό μάλιστα

τρόπο επίλυσης, από αυτόν του von Neumann. Η ανάλυση αυτή δίνει μια νέα «οπτική», αφού το μοντέλο γενικής ισορροπίας του von Neumann, δεν αντιμετωπίζεται πλέον σαν ένα πρόβλημα ύπαρξης γενικής ισορροπίας, αλλά περισσότερο σαν ένα πρόβλημα επιλογής της πλέον κερδοφόρας τεχνικής.

Στις επόμενες σελίδες της εργασίας γίνεται μια αντιπαραβολή, δύο πολύ σημαντικών κλασικών μοντέλων, αυτού του Sraffa και του von Neumann. Τα τελευταία, αν και εξυπηρετούν διαφορετικές σκοπιμότητες, ωστόσο έχουν αξιοσημείωτες ομοιότητες (κυρίως στον τρόπο κατασκευής τους), καθώς και πολύ σημαντικές διαφορές.

Στην προσπάθεια να τονισθεί η ομοιότητα των μοντέλων του von Charasoff και του von Neumann, διαπιστώνεται, ότι και οι δύο στα πλαίσια ενός αναπαραγωγικού συστήματος παραγωγής, χρησιμοποιούν τον ίδιο τρόπο εξεύρεσης του ποσοστού κέρδους, αν και ο von Neumann δείχνει να μην το έχει υπ' όψιν του.

Επίσης γίνεται αναφορά και στο μοντέλο του ARROW-DEBRUE ούτως ώστε να υπάρχει μια σφαιρική εικόνα περί του θέματος της γενικής ισορροπίας.

Τέλος γίνεται η σύγκριση του μοντέλου γενικής ισορροπίας, του von Neumann, με τα αντίστοιχα νεοκλασικά μοντέλα γενικής ισορροπίας της εποχής.

Ι ΟΡΙΣΜΟΙ ΓΕΝΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

I.1. Γενική Ισορροπία και Μηχανική

Ο ορίσμός που έχει δανειστεί η οικονομική επιστήμη από την μηχανική:

«Ένας σχηματισμός (configuration), λέγεται ότι βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, αν το σύστημα μπορεί να παραμείνει επ' άπειρον σ' αυτόν τον σχηματισμό, παρά τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω σε αυτό».

Κατά τον Simpson, ο ορισμός αυτός έχει δύο πολύ σημαντικά σημεία, που άπτονται άμεσα της οικονομικής επιστήμης:

πρώτον την ύπαρξη εξισορροπητικών δυνάμεων και

δεύτερον το συμπέρασμα, ότι η ισορροπία είναι μια δυναμική έννοια.

I.2. Γενική Ισορροπία: Περιεχόμενο και ορισμοί

Κατά τον H.Varian¹, σε ένα μοντέλο μερικής ισορροπίας, όλες οι τιμές των εμπορευμάτων, εκτός αυτού που εξετάζεται, θεωρούνται σταθερές. Αντίθετα σε ένα μοντέλο γενικής ισορροπίας, όλες οι τιμές μεταβάλλονται, και η ισορροπία απαιτεί να εκκαθαρίζονται όλες οι αγορές. Επομένως, η γενική ισορροπία, λαμβάνει υπ' όψιν της, όλες τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των αγορών αλλά και την λειτουργία των επιμέρους αγορών.

Στο ίδιο μήκος κύματος κινείται και ο Chacholiades². Όπως υποστηρίζει, η ανάλυση μερικής ισορροπίας, βασισμένη στον Alfred Marshall, είναι μια μέθοδος ανάλυσης με την οποία γίνεται προσπάθεια να ερμηνευθεί η ισορροπία σε μία μόνο αγορά, αγνοώντας το «περιβάλλον οικονομικό σύστημα». Προσπαθεί να ερμηνεύσει μέρος του οικονομικού συστήματος. Το συμπέρασμα κατά το οποίο, η ανάλυση ολόκληρης της οικονομίας είναι δυνατή με επιμέρους ανάλυση, με την μέθοδο της μερικής ισορροπίας των μερών αυτής (αγορών), είναι κατά τον Chacholiades, λανθασμένη. Για να

¹ Βλ. H. Varian, *Microeconomic analysis*, σελ. 314-315

² Βλ. Miltiades Chacholiades, *Μικροοικονομική II*, σελ.101-102

προσδιοριστεί η ισορροπία όλων των αγορών ταυτόχρονα, χρησιμοποιείται η ανάλυση γενικής ισορροπίας.

Μια ποιο λεπτομερή περιγραφή του, ενός μοντέλου γενικής ισορροπίας κάνει ο D.Simpson³. Βασικό γνώρισμα της θεωρίας γενικής ισορροπίας είναι η αλληλεξάρτηση τιμών και των ποσοτήτων όλων των εμπορευμάτων και όλων των συντελεστών παραγωγής σε μία οικονομία. Με την λύση ενός συστήματος γενικής ισορροπίας προσδιορίζονται ταυτόχρονα:

- Οι τιμές και οι ποσότητες των εμπορευμάτων που παράγονται από τις επιχειρήσεις
- Οι τιμές και οι ποσότητες των συντελεστών παραγωγής
- Οι ποσότητες των εμπορευμάτων που καταναλώνονται
- Οι ποσότητες των συντελεστών παραγωγής που προσφέρονται από τα νοικοκυριά

Από την άλλη μεριά, στην ανάλυση μερικής ισορροπίας, η ανάλυση περιορίζεται σε έναν μικρό αριθμό μεταβλητών και σχέσεων, οι οποίες συνήθως αντιστοιχούν σε ένα μόνο εμπόρευμα. Ταυτόχρονα οι υπόλοιπες μεταβλητές και σχέσεις απλά αγνοούνται. Η ανάλυση μερικής ισορροπίας είναι, κατά τον Simpson ένας από τους δυνατούς τρόπους απλοποίησης του συστήματος γενικής ισορροπίας. Ένας άλλος τρόπος, είναι η άθροιση των μεταβλητών, έτσι ώστε να παράγεται ένα απλό εμπόρευμα, από το σύνολο των επιχειρήσεων και να καταναλώνεται από το σύνολο των νοικοκυριών. Πρόκειται, δηλαδή, για ένα πέρασμα από το μικρο- σε μακρο-οικονομικό επίπεδο.

Στο σημείο αυτό θα ήταν χρήσιμο, να αναφερθεί το τι τελικά σημαίνει ο όρος ισορροπία (αδιάφορο αν πρόκειται για μερική η γενική). Έτσι λοιπόν ο Hansen, το 1970, ορίζει την ισορροπία ως εξής:

«εάν έχουμε ένα οικονομικό μοντέλο, το οποίο εξηγεί συγκεκριμένες μεταβλητές και εάν δεν υπάρχει τάση για να αλλάξουν αυτές, με δεδομένες τις υποθέσεις του μοντέλου, τότε το σύστημα των μεταβλητών βρίσκεται σε ισορροπία».

³ David Simpson, Θεωρία Γενικής Ισορροπίας, σελ. 7-9

Στην θεωρία γενικής ισορροπία υπάρχουν δύο σχολές⁴. Η κλασική και η νεοκλασική. Η κλασική αρχίζει από τον Adam Smith και από τον Ricardo και τον Marx καταλήγει στον W.Leontief και στον J.v.Neumann. Αντίθετα η νεοκλασική σχολή έχοντας και αυτή σαν αφετηρία τον Ricardo, από τον L.Walras καταλήγει στον Debreu.

1.3. Γενική Ισορροπία: Ύπαρξη, Μοναδικότητα, Σταθερότητα⁵

Όπως είδαμε παραπάνω την ισορροπία την χαρακτηρίζουν:

1. Η ύπαρξη εξισορροπητικών δυνάμεων
2. Η σύλληψη της σαν δυναμική έννοια, ακόμα και στην περίπτωση μιας στατικής ανάλυσης

Η ισορροπία, όντως έχει χαρακτηριστικά δυναμικής έννοιας, από την άποψη ότι, περιλαμβάνει τελικά μερικά στοιχεία της συμπεριφοράς του συστήματος σε καταστάσεις εκτός ισορροπίας. Παραδείγματος χάριν, ακόμα και στην περίπτωση της στατικής ανάλυσης, μια διαφοροποίηση ανάμεσα σε προσφορά και ζήτηση, ενεργοποιεί μια διαδικασία μεταβολής των τιμών, έτσι ώστε η προσφερόμενη ποσότητα, να ισούται με την ζητούμενη.

Κατά τον Simpson, η ισορροπία σε μια μοναδική αγορά, μπορούμε να ισχυριστούμε, ότι υπάρχει, όταν έχουμε μια ή περισσότερες μη αρνητικές τιμές στις οποίες, οι ποσότητες ,που προσφέρονται και ζητούνται, είναι ίσες και δεν είναι αρνητικές.

Καταρχήν το ερώτημα που τίθεται είναι, κατά πόσον μια κατάσταση ισορροπίας είναι εφικτή και κατά πόσον είναι δυνατόν, το σύστημα να φτάσει σε αυτήν. Ένα δεύτερο ερώτημα αποτελεί, το κατά πόσον η κατάσταση αυτή είναι σταθερή.

Πριν προχωρήσουμε, θα ήταν χρήσιμο να διασαφηνίσουμε τους όρους δυναμικό και στατικό υπόδειγμα.

Σαν **δυναμικό υπόδειγμα** ή σύστημα μπορεί να οριστεί εκείνο, στο οποίο ο χρόνος παίζει έναν βασικό ρόλο, ενώ η λύση του απεικονίζεται στην διάσταση

⁴ David Simpson, Θεωρία Γενικής Ισορροπίας, σελ. 10-11

⁵ David Simpson, Θεωρία Γενικής Ισορροπίας, σελ. 88-89, 95-99

του χρόνου. Αντίθετα το **στατικό υπόδειγμα**, συνιστά μια ειδική περίπτωση του δυναμικού υποδείγματος, υπό την έννοια, ότι οι τιμές των μεταβλητών επαναλαμβάνονται σε κάθε περίοδο.

Κατά τον Simpson, είναι απαραίτητο να αναφερθούμε στο δυναμικό υπόδειγμα, προκειμένου να εξετάσουμε το πρόβλημα της σταθερότητας στην αγορά. Συνεπώς, μια δυναμική ανάλυση πρέπει να περιλαμβάνει τρία στοιχεία⁶:

1. Τον προσδιορισμό των αρχικών συνθηκών
2. Τον προσδιορισμό της συμπεριφοράς, που διαμορφώνεται κάτω από συνθήκες ελλείψεως ισορροπίας ή του προσεγγιστικού μηχανισμού
3. Τη λύση, που μας προσδιορίζει το χρονοδιάγραμμα των κατάλληλων μεταβλητών

Η διερεύνηση των ιδιοτήτων, που χαρακτηρίζουν την σταθερότητα των νεοκλασικών συστημάτων, συνεπάγεται δυο ενδιαφέροντα συμπεράσματα

1. Κάτω από τις προϋποθέσεις του συστήματος, εκτός ισορροπίας, και τις ιδιότητες των νεοκλασικών συστημάτων γενικής ισορροπίας, η ισορροπία του δυναμικού συστήματος, είναι σταθερή τοπικά, αν όλα τα εμπορεύματα θεωρούνται αυστηρά υποκατάστατα
2. Αν ένα σύστημα ικανοποιεί το ασθενές αξίωμα της «revealed preference» συνολικά τότε θα επανέλθει στο αρχικό σημείο ισορροπίας, αν σημειωθεί οποιαδήποτε παρεμβολή.

Το βασικό συμπέρασμα, κατά τον Simpson, είναι ότι σ' ένα σύστημα νεοκλασικής ισορροπίας, αν εκπληρώνονται οι συνθήκες ισορροπίας δεύτερης τάξεως, σ' όλες τις συναρτήσεις, η κατάσταση που θα επιτευχθεί θα είναι πιθανότατα σταθερή.

Ένα επιπλέον ζήτημα, που τίθεται στα συστήματα γενικής ισορροπίας, είναι η μοναδικότητα ή μη των λύσεων των. Η τοπική μοναδικότητα στην περίπτωση της στατικής ανάλυσης είναι μια επιθυμητή κατάσταση.

Όπως προείπαμε, όταν διαπιστώνεται η ύπαρξη ισορροπίας σ' ένα σύστημα, που χαρακτηρίζεται από γενική υποκατάσταση ή από το ασθενές αξίωμα, που ισχύει για τη συνολική υπερβάλλουσα ζήτηση, τότε η κατάσταση αυτή

⁶ David Simpson, Θεωρία Γενικής Ισορροπίας

ισορροπίας είναι μοναδική. Στην κατάσταση της μοναδικής ισορροπίας με σφαιρική σταθερότητα (global stability), μπορούμε να αναφερθούμε σε σταθερότητα του συστήματος. Σε διαφορετική περίπτωση αρκούμαστε να αναφερθούμε σε τοπική σταθερότητα μιας κατάστασης ισορροπίας⁷.

Ένα σοβαρό μειονέκτημα των αποδείξεων αυτών, είναι η υιοθέτηση περιορισμών, που γενικά δεν γίνονται αποδεκτοί στην πραγματικότητα. Ένας από αυτούς είναι η υιοθέτηση well-behaved συναρτήσεων παραγωγής, που δεν αντιπροσωπεύουν ένα ευρύ φάσμα παραγωγικών διαδικασιών στον πραγματικό κόσμο.

II. ΝΕΟΚΛΑΣΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΓΕΝΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Προηγουμένως έγινε αναφορά στην ύπαρξη δύο σχολών γενικής ισορροπίας, της κλασικής και της νεοκλασικής. Σε τι διαφέρουν αυτές οι δύο σχολές;

Την κλασική γενική ισορροπία⁸ την χαρακτηρίζεται σε μικρότερο βαθμό, απ' ότι την αντίστοιχη νεοκλασική, η υποκατάσταση στην παραγωγή και την κατανάλωση. Μάλιστα η κλασική θεωρία διαθέτει ξεχωριστή θεωρία της διανομής του εισοδήματος και αγνοώντας κατά κάποιο τρόπο, τον ρόλο της ζήτησης. Η περιορισμένη υποκατάσταση αποτυπώνεται με την ύπαρξη γραμμικών σχέσεων στην παραγωγή.

Αντίθετα η νεοκλασική ανάλυση χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη υποκατάστασης και έτσι περιγράφεται με συνεχείς συναρτήσεις. Οι τιμές των συντελεστών παραγωγής, όπως και των εμπορευμάτων, προσδιορίζονται ενδογενώς στο μοντέλο. Αντίθετα με την κλασική θεωρία, η νεοκλασική χαρακτηρίζεται από προϋποθέσεις, σχετικά με την συμπεριφορά μεμονωμένων παραγωγών και καταναλωτών.

⁷ David Simpson, Θεωρία Γενικής Ισορροπίας, σελ 98

⁸ David Simpson, Θεωρία Γενικής Ισορροπίας, σελ 11

II.1. Η νεοκλασική θεωρία

Μια σύντομη παρουσίαση των απαρχών της νεοκλασικής θεωρίας κάνει ο K.Arrow στο άρθρο του «Von Neumann and the existence Theorem for General Equilibrium». Βασιζόμενοι στο τελευταίο παραθέτουμε τα παρακάτω για τη νεοκλασική σχολή.

Οι απαρχές της νεοκλασικής θεωρίας εντοπίζονται από τον Adam Smith, στον Ricardo και καταλήγουν στους συνεχιστές τους Νέο-βαλρασιανούς⁹, όπου ένας από αυτούς είναι ο ίδιος ο Arrow. Μέγιστη σημασία όμως παρουσιάζει το έργο του L.Walras (1874).

Για τον Arrow, οι κλασικοί οικονομολόγοι έχουν μια διαφορετική θεώρηση των δομών της οικονομίας. Οι τιμές προσδιορίζονται από άλλες τιμές, κάτω από τη γενική αρχή, ότι η τιμή ενός αγαθού ισούται με το μοναδιαίο κόστος του. Παρίσταται πλήρως σαν σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Σε αντίθεση με τις τιμές που οριζόταν πλήρως, οι ποσότητες δεν προσδιορίζονταν, αλλά γινόταν η υπόθεση, ότι η παραχθείσα ποσότητα, είναι ίση με την ζητούμενη.

Η εργασία (ανα)παράγεται μέσα στο σύστημα, αποτελούμενη από φαγητό και άλλα υποκαθιστώμενα αγαθά, με άλλες λέξεις από τα απαραίτητα προς το ζην. Συνεχίζοντας καταλογίζει στο κλασικό σύστημα, ότι δεν μπόρεσε να λάβει υπ' όψιν του, ανταγωνιστικές χρήσης για τον συντελεστή παραγωγής γη. Επιπροσθέτως ο ορισμός των κλασικών για την αμοιβή του κεφαλαίου ήταν, κατά τον Arrow, ιδιαίτερα αόριστος.

Συνεχίζοντας υποστηρίζει, ότι μάταια οι κλασικοί προσπάθησαν να αναπτύξουν ένα σύστημα εξισώσεων, το οποίο να ορίζεται από τις τιμές. Έτσι το 1839 ο Cournot και ο J. S. Mill το 1848, ανέπτυξαν ένα σύστημα στο οποίο οι τιμές και οι ποσότητες, οριζόταν ενδογενώς από την τεχνολογία και τη ζήτηση αντίστοιχα. Επίσης ανεξάρτητα από αυτό ανέπτυξαν και την συνάρτηση ζήτησης. Οι δύο τελευταίοι, έστω και αόριστα είχαν κατανοήσει, κατά τον Arrow, το νόημα της συνάρτησης προσφοράς.

⁹ τον όρο αυτό χρησιμοποιεί ο M.Dobb στο Θεωρίες της αξίας και της κατανομής, σελ.

Ο Walras από την άλλη, έκανε σαφές, ότι οι καμπύλες προσφοράς και ζήτησης, μετατοπίζονται, συνεπεία μεταβολής των τιμών στις άλλες αγορές. Αυτό όμως που κάνει ιδιαίτερη εντύπωση, είναι η σύλληψη του, ότι όσο περίπλοκο και αν είναι ένα μοντέλο, ο αριθμός των εξισώσεων ισούται, αν μετρηθούν κατάλληλα, με αυτόν των αγνώστων. Αυτό όμως που δεν είχε κατανοήσει, είναι κατά τον Arrow, ότι το σύστημα του (Walras) δεν είχε απαραίτητως μια λύση.

Τέλος το 1958 οι Dorfman, Samuelson και Sollow άσκησαν κριτική στην συνήθεια που υπήρχε, βάσει της οποίας μετρούνταν εξισώσεις και μεταβλητές, υποστηρίζοντας, ότι μια ισότητα μεταξύ των αριθμών των

εξισώσεων των μεταβλητών, δεν είναι ούτε αναγκαία ούτε ικανή συνθήκη για την ύπαρξη μιας λύσης για το σύστημα ισορροπίας¹⁰.

II.1.a. Η νεοκλασική σχολή εκτενέστερα

1. William Stanley Jevons

Ο πρόδρομος των νεοκλασικών οικονομολόγων δεν είναι άλλος από τον Jevons. Η θεωρία του, ήταν η ολοκλήρωση μιας «πολεμικής» της εποχής ενάντια στον Ricardo¹¹. Το 1871 ο Jevons έγραψε την Θεωρία της Πολιτικής Οικονομίας, την ίδια χρονιά δηλαδή, που γράφτηκε το Grundsätze του K. Menger. Εξάλλου το 1874, έγραψε και ο L. Walras το Eléments του. Ο ίδιος ο Jevons μάλιστα, θεωρούσε την θεωρία του επαναστατική¹². Ωστόσο, η θεωρία του για την παραγωγή και την διανομή μάλλον δείχνει να είναι κλασική, αφού τόσο ο Marshall, όσο και ο Edgeworth, δέχτηκαν ολοκληρωτικά την θεωρία του για τους μισθούς.¹³

Για τον Dobb, η ανάλυση του Jevons είχε δύο οπτικές. Καταρχήν ο Jevons έριξε την προσοχή του, όχι τόσο στην παραγωγή και στο κόστος, αλλά στη ζήτηση

¹⁰ David Simpson, Θεωρία Γενικής Ισορροπίας, σελ 86

¹¹ M. Dobb, Θεωρίες της αξίας και της κατανομής, σελ 197

¹² M. Dobb, Θεωρίες της αξίας και της κατανομής και G. Stigler, Production and Distribution Theories

¹³ G. Stigler, Production and Distribution Theories,

και στην τελική κατανάλωση, δίνοντας σημασία στην ιδιότητα, που έχουν τα εμπορεύματα, που παράγονται, να συμβάλλουν στην ικανοποίηση των επιθυμιών και των αναγκών των καταναλωτών. Με άλλα λόγια, όπως ορθά αναφέρει ο Dobb, έδωσε μια ιντιβιντουαλιστική στροφή στην οικονομική σκέψη. Αυτό το κατάφερε με την ανακάλυψη του όρου «οριακή χρησιμότητα», αποφεύγοντας να συσχετίσει την αξία χρήσης του Smith, με την ανταλλακτική αξία¹⁴. Εδώ πρέπει να τονίσουμε, ότι ο Jevons ασχολήθηκε με μικροοικονομικά μοντέλα, ψάχνοντας παράλληλα ένα τρόπο γενίκευσης των συμπερασμάτων του. Μπορούμε επομένως να πούμε, ότι ασχολήθηκε με ανάλυση μερικής ισορροπίας.

Επιπλέον ο Jevons, συσχέτισε τις οικονομικές του μεταβλητές με την αγορά. Με άλλα λόγια, σε αντίθεση με τον Marx και τον Ricardo –που πίστευαν, ότι η διανομή προηγείται χρονικά της ανταλλαγής- βρήκε ένα σύστημα ταυτόχρονου ορισμού των εισροών και εκροών, μέσω της αγοράς. Η διανομή, επομένως, διαμεσολαβείται μέσω της αγοράς, με την «μορφή παραγωγικών τιμών, για δοσμένα ενδιάμεσα αγαθά ή συντελεστές παραγωγής»¹⁵. Η άποψη αυτή, εκφράστηκε αρχικά από τον Jevons, αλλά η σαφής διατύπωσή της έγινε από τον Menger. Εδώ πρέπει να τονιστεί, ότι το σκεπτικό αυτό, είναι βασισμένο στην αντίληψη των «Αυστριακών Οικονομολόγων», ότι η προσφορά των παραγωγικών συντελεστών, είναι δοσμένη από πριν.

Επιπλέον η άποψη του Jevons, ότι η στατική μηχανική είναι η κατάλληλη αναφορά κατά την ενασχόληση με την οικονομική θεωρία, ήταν μία ακόμα ώθηση για την αλλαγή της σκοπιάς, με την οποία ως τότε εξετάζονταν τα διάφορα οικονομικά φαινόμενα. Έτσι πλέον, εξετάζονταν καταστάσεις ισορροπίας, στην περίπτωση του ανταγωνισμού. Συνεπώς η κατάσταση πλήρους ισορροπίας, ήταν εξαρχής δοσμένη. Με άλλα λόγια, υπήρχε πλήρης απασχόληση των παραγωγικών συντελεστών *a priori*¹⁶.

Επιγραμματικά, αναφέρουμε τέλος, ότι στην θεωρία κεφαλαίου, ο Jevons εισήγαγε την έννοια του σταθερού κεφαλαίου. Επιπλέον ασχολήθηκε και με την

¹⁴ αν το παρουσιάσαμε σχηματικά θα ήταν Παραγωγή, Κόστος (Προκάτοχοι του Jevons) □ οριακή χρησιμότητα, ζήτηση (Jevons) □ Υποκειμενική Θεωρία της Αξίας

¹⁵ M. Dobb, Θεωρίες της αξίας και της κατανομής, σελ 200

¹⁶ M. Dobb, Θεωρίες της αξίας και της κατανομής, σελ 203

θεωρία επιτοκίου (με νεοκλασικούς όρους, την αμοιβή του συντελεστή παραγωγής κεφάλαιο), εισάγοντας την έννοια της οριακής παραγωγικότητας. Τους μισθούς τους θεωρούσε απλά κατάλοιπο, υπό την έννοια, ότι προσδιορίζονταν τελευταίοι. Επομένως είναι χαρακτηριστικό το σχήμα του¹⁷:
ΠΡΟΪΟΝ= ΚΕΡΔΗ + ΜΙΣΘΟΙ

2 Leon Walras

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το σημαντικότερο έργο του L.Walras, ήταν το Elements of Pure Economics, το οποίο γράφτηκε το 1874.

Το Elements, ήταν έτσι δομημένο, ώστε προχωρώντας ανέβαινε σταδιακά το επίπεδο πολυπλοκότητας και γενικότητας. Έτσι, δανειζόμενοι από την παρουσίαση του New School¹⁸ για τον Walras, παρουσιάζουμε εν συντομία την θεωρία του Walras σε 8 στάδια (μέρη):

1. Ο Walras παρέχει τον ορισμό της υποκειμενικής αξίας και της μαθηματικής μεθόδου
2. Εξετάζει (ο Walras) ένα μοντέλο μιας οικονομίας των ανταλλαγών, με δύο εμπορεύματα, όπου η ζήτηση και η προσφορά εξάγονται από την μεγιστοποίηση της συνάρτησης χρησιμότητας. Επίσης γίνεται λόγος για τον auctioneer¹⁹, την διαδικασία του tâtonnement²⁰ και για την σταθερότητα της ισορροπίας.
3. Εισάγει μία οικονομία των ανταλλαγών, με πολλές αγορές (≥ 3). Πλέον μετράει άγνωστους και εξισώσεις για την εξεύρεση της ύπαρξης ισορροπίας, χρησιμοποιώντας τόσο τον «θεσμό» του auctioneer και τον μηχανισμό του tâtonnement.

¹⁷ Με το σχήμα αυτό συνέδεε τα διάφορα μερίδια προϊόντος μεταξύ τους, όπου κέρδη και μισθοί έχουν την γνωστή αντίστροφη σχέση μεταξύ τους. Μπορούμε να πούμε ότι πρόκειται για μία εξίσωση διανομής του προϊόντος, αφού προσδιόριζε πρώτα τα κέρδη και την εκροή και στην συνέχεια προσδιόριζε τους μισθούς.

¹⁸ <http://www.hesemesa>

¹⁹ Το άτομο που ανακοινώνει τις τιμές των εμπορευμάτων, που ισχύουν στην αγορά, δηλαδή ένα είδος δημοπράτη

²⁰ Πρόκειται δηλαδή, για την διαδικασία κατά την οποία ένα σύστημα φτάνει σε ισορροπία μέσω του μηχανισμού της αγοράς, μετά από την ύπαρξη σε κατάσταση εκτός ισορροπίας

4. Εξετάζει το πρόβλημα της παραγωγής²¹, στην περίπτωση ενός επιχειρηματία που δεν επιτυγχάνει κέρδη. Δείχνει ότι η ζήτηση για συντελεστές, εξάγεται, σαν μια έμμεση ζήτηση για αγαθά.
5. Εισάγει την θεωρία του κεφαλαίου του, που περιέχει την κεφαλαιοποίηση μελλοντικών κερδών και παρουσιάζει μια θεωρία αποταμίευσης και πίστωσης
6. Παρουσιάζει την *en-casse desiree* θεωρία χρήματος²², με άλλα λόγια βλέπει το χρήμα σαν μελλοντικό συντελεστή παραγωγής -και επομένως επιθυμητό- σε ένα γενικό πρόβλημα επιλογής.
7. Υιοθετεί την άποψη της ύπαρξης μιας αγοράς χωρίς ασυνέχειες²³ και μιας μεγεθυνόμενης οικονομίας
8. Ασχολείται με περιπτώσεις ατελούς ανταγωνισμού και μονοπωλίων

Κριτική στο μοντέλο γενικής ισορροπίας του L.Walras, άσκησε και ο Michio Morishima. Αν και ο Morishima, θεωρεί το μοντέλο γενικής ισορροπίας του L.Walras, αρκετά ικανοποιητικό, ωστόσο του καταλογίζει και κάποιες αδυναμίες, οι οποίες παρουσιάζονται επιγραμματικά παρακάτω:²⁴

1. Ο Walras, δεν λαμβάνει υπ' όψιν του, τον χρόνο που μεσολαβεί, από την στιγμή που εισέρχονται τα μέσα παραγωγής, σε μια διαδικασία παραγωγής, μέχρι την στιγμή, που παράγεται η εκροή. Επιπλέον, η περίοδος παραγωγής, ανάμεσα σε δύο εμπορεύματα, δύναται να είναι διαφορετική, και μάλιστα δεν πρόκειται για μια σταθερή χρονική περίοδο, αλλά αντίθετα εξαρτάται από την μέθοδο παραγωγής που χρησιμοποιείται
2. Τα κεφαλαιουχικά αγαθά, υπόκεινται σε αποσβέσεις, κατά την διάρκεια της «ζωής»²⁵ τους. Για τον Walras, όπως και στην νεοκλασική θεωρία γενικότερα, τα κεφαλαιουχικά αγαθά, έστω και αν είναι διαφορετικής ηλικίας (και κατά συνέπεια έχουν υποστεί διαφορετικό βαθμό φθοράς)

²¹ Αρχικά υποθέτει σταθερή τεχνολογία και στην συνέχεια υποθέτει την ύπαρξη εναλλακτικών τεχνικών, εισάγοντας πλέον και την θεωρία της οριακής παραγωγικότητας

²² στην παρούσα εργασία δεν θα μας απασχολήσουν ζητήματα χρήματος

²³ βλ. H. Varian *Microeconomic analysis*, ch. 21 equilibrium analysis, σελ. 393

²⁴ βλ. Michio Morishima, *Walras Economics*, ch. Time and Money Reconsidered, σελ. xxx

²⁵ δηλαδή για όσο συμμετέχουν στην παραγωγική διαδικασία

μπορούν να μετατρέπονται σε νέα κεφαλαιουχικά αγαθά²⁶. Συνεπώς τα κεφαλαιουχικά αγαθά αποσβένονται, στην πραγματικότητα, με διαφορετικό για το καθένα, ποσοστό απόσβεσης. Το ρυθμό (ποσοστό) αποσβέσεων τον θεωρεί ο Walras, σταθερό και ίσο για όλα τα εμπορεύματα.

3. Η χρήση των κεφαλαιουχικών αγαθών στην παραγωγή, μετά από μια χρονική περίοδο, παύει να είναι επικερδής, αλλά μάλλον ζημιογόνα. Έτσι όπως αναφέρει ο Morishima, η επιλογή ενός προσδόκιμου (οικονομικού) ζωής των κεφαλαιουχικών αγαθών, ανάγεται σε τελευταία ανάλυση στην επιλογή της πλέον κερδοφόρας τεχνικής.
4. Επιπλέον, ο Walras, περιγράφει την κατάσταση ύπαρξης ανταγωνισμού. Στο μοντέλο γενικής ισορροπίας του Walras, δίνεται ιδιαίτερη σημασία στην «ανεξαρτησία» του επιχειρηματία, ως προς την λήψη επιχειρηματικών και επενδυτικών του αποφάσεων. Ωστόσο, στο μοντέλο αυτό, ο επιχειρηματίας δεν επιβιώνει από την επιχειρηματική του δράση, αν δεν είναι είτε γαιοκτήμονας, είτε εργάτης, είτε βέβαια καπιταλιστής. Έτσι ο κάθε επιχειρηματίας είναι ελεύθερος, είτε να μεταβάλει την παραγωγή ενός εμπορεύματος, ώστε να επηρεάσει την τιμή του, είτε να εξέλθει από την συγκεκριμένη αγορά, στην περίπτωση όπου, το μοναδιαίο κόστος ενός εμπορεύματος, υπερβαίνει την τιμή πώλησής του.
5. Ο Morishima υποστηρίζει, ότι η ισορροπία σε ένα υπόδειγμα παραγωγής είναι μάλλον μια ιδεατή, παρά πραγματική κατάσταση. Υποστηρίζει με άλλα λόγια, ότι ποτέ δεν συμβαίνει η τιμή πώλησης ενός εμπορεύματος, να ισούται ακριβώς με το κόστος παραγωγής του²⁷. Επιπλέον είναι εξίσου αδύνατον, η ζήτηση αγαθών και παραγωγικών συντελεστών, να είναι ίση με τη προσφορά τους
6. Ένα επιπλέον ζήτημα, που θίγει ο Morishima στο μοντέλο γενικής ισορροπίας του L.Walras, είναι η αμοιβή του παραγωγικού συντελεστή «επιχειρηματικότητα», η οποία στο μοντέλο του Walras, όπως φάνηκε, είναι

²⁶ βέβαια το τελευταίο ενέχει και το πρόβλημα της υποκατάστασης στην παραγωγή των παλαιών κεφαλαιουχικών αγαθών με αντίστοιχα νέα

²⁷ βλ Michio Morishima, Walras Economics, ch. Time and Money Reconsidered, σελ xxx

ελεύθερος παραγωγικός συντελεστής, δηλαδή έχει μηδενική τιμή²⁸. Όμως αυτή η άποψη του Walras, κατά τον Morishima, έχει εγκαταλειφθεί, από τους σύγχρονους νεοκλασικούς οικονομολόγους, οι οποίοι υποστηρίζουν, ότι τα οριακά κόστη πρέπει να αυξάνονται, λόγω της αυξανόμενης δυσκολίας ελέγχου της επιχείρησης²⁹. Θεωρούν την επιχειρηματικότητα έναν σπάνιο παραγωγικό συντελεστή, και κατασκευάζουν μοντέλα με θετικά κέρδη ισορροπίας.

3. Gustav Cassel

Το 1923, ο Σουηδός οικονομολόγος, Gustav Cassel, απλοποίησε το μοντέλο του Walras³⁰. Είχε βρει έναν διαφορετικό τρόπο του ορισμού της αξίας, από την αρχή της χρησιμότητας³¹ · Την Αρχή της Σπανιότητας. Κατ' αναλογία, με τον Walras, ο Cassel κατάλαβε, ότι η ζήτηση εξαρτάται από τις τιμές, όλων των εμπορευμάτων. Παρ' όλα αυτά πήρε την συνάρτηση ζήτησης ως δεδομένη.

Υπέθεσε ότι τα εμπορεύματα παράγονταν απευθείας από τις αρχικές εισροές, με σταθερούς συντελεστές παραγωγής. Η προσφορά κάθε παραγωγικού συντελεστή θεωρούνταν δεδομένη³². Αυτό που αυξάνει τις τιμές είναι η σπανιότητα των αρχικών εισροών. Επομένως, οι ζητήσεις των παραγωγικών συντελεστών, είναι συναρτήσεις των τιμών των. Οι τιμές είναι τέτοιες, ώστε η ζήτηση των συντελεστών να ισούται με την δεδομένη προσφορά.

Όπως προείπαμε στον Walras, κατά τον Arrow, υπάρχει παραγωγή εμπορευμάτων μέσω εμπορευμάτων, αλλά και μέσω παραγωγικών συντελεστών. Αξιοσημείωτη είναι εδώ η συμβατότητα, της παραπάνω υπόθεσης, με τις κυκλικές ροές του Leontief και των υπολοίπων κλασικών³³.

²⁸ λόγω του μεγάλου αριθμού επιχειρήσεων που υπάρχουν

²⁹ Michio Morishima, Walras Economics, ch. Time and Money Reconsidered,σελ. xxx

³⁰ βλ K.Arrow «Von Neumann and the existence Theorem for General Equilibrium», στο βιβλίο John von Neumann and modern economics,M. Dore, S. Chakravarty, R. Goodwin, σελ. 16

³¹ που είχε εισάγει ο Jevons , βλ συνέχεια

³² μια ακόμα επιρροή από τον Jevons και τον Menger βλ παραπάνω

³³ βλ H. Kurz και N. Salvadori, "Classical roots of input-output analysis: A short Account of it's long Prehistory"

Η ανάλυση του Cassel³⁴, επεκτάθηκε, σε μια ισόρροπα μεγεθυνόμενη οικονομία. Υπέθεσε -ο Cassel-, ότι οι ποσότητες όλων των συντελεστών και η ζήτηση σε σταθερές τιμές, μεγεθύνονται με τον ίδιο ρυθμό, - τον ενιαίο ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος.

Αυτό αποτέλεσε, σημείο αφετηρίας, και τους Wald και J.v.Neumann, οι οποίοι αντί για ισότητες, χρησιμοποιούν ανισότητες, για τον χαρακτηρισμό της πραγματικής οικονομικής ισορροπίας. Αν η προσφορά υπερβαίνει τη ζήτηση, τότε η τιμή πρέπει να είναι μηδέν. Αντίστοιχα, αν η τιμή είναι μικρότερη από το μοναδιαίο κόστος ενός εμπορεύματος, τότε αυτό δεν παράγεται. Αναφορά στις ανισότητες, έκανε και ο Δανός Zeuthen (1932) με διαφορετική αφορμή.

Κριτική στο μοντέλο του Cassel έκαναν οι Neisser (1932) και ο von Stackelberg (1933). Η κριτική του Neisser έγκειται στο, ότι οι τιμές που λύνουν το υπόδειγμα του Cassel δεν είναι απαραίτητως μη αρνητικές. Από την άλλη μεριά, η κριτική του von Stackelberg, έχει να κάνει στο ότι αν ο αριθμός των εξισώσεων είναι μεγαλύτερος από αυτόν των μεταβλητών, τότε στο σύστημα θα υπάρχει υποκατάσταση, με άλλα λόγια εναλλακτικές διαδικασίες παραγωγής.

4.Το συνέδριο της Βιέννης

Στις αρχές της δεκαετίας του 1930, στην Βιέννη, υπήρξε ένα επιστημονικό συνέδριο γνωστό σαν Mathematical Colloquium, όπου διοργανωτής ήταν ο Karl Menger, γιος του C.Menger³⁵.

Σε αυτόν το συνέδριο συμμετείχαν πολλά γνωστά ονόματα της οικονομικής επιστήμης και των μαθηματικών. Μεταξύ αυτών, ο Schlesinger, ο Wald, ο Gödel, ο Morgenstern. Στο συνέδριο αυτό συμμετείχε και ο John von Neumann, χωρίς όμως να συμμετέχει στον κύκλο του Menger.

Αντικείμενο της επιστημονικής ενασχόλησης ήταν η συζήτηση γύρω από το κατά πόσον, το μοντέλο γενικής ισορροπίας Walras- Cassel ήταν λογικά ευσταθές³⁶.

³⁴ βλ K.Arrow «Von Neumann and the existence Theorem for General Equilibrium», στο βιβλίο John von Neumann and modern economics, M. Dore, S. Chakravarty, R. Goodwin, σελ. 17

³⁵ Βλ L.Punzo "Karl Menger's Mathematical Colloquium", στο βιβλίο John von Neumann and modern economics, M. Dore, S. Chakravarty, R. Goodwin, σελ. 29

Εντύπωση προκαλεί, ότι ανάμεσα σε όλους αυτούς βρισκόταν και ο von Neumann. Όμως κατά τον L.Punzo, ο von Neumann³⁷ και ο κύκλος του K.Menger ανήκουν στον ίδιο κύκλο σκέψης, για τρεις λόγους. Πρώτον μοιράζονται την αντίληψη, ότι τα μοντέλα γενικής ισορροπίας, πρέπει να εξετάζονται σε ανεξάρτητα μεταξύ τους μέρη και ότι πρέπει να ορίζονται με ένα ταυτόχρονο μηχανισμό εξεύρεσης ισορροπίας, τα οποία μοντέλα πρέπει να ορίζονται από αυτόν. Δεύτερον αντιλαμβάνονται την γενική ισορροπία, σαν μια μετα-θεωρία. Τρίτον δίνουν ιδιαίτερη σημασία στην εξεύρεση και απόδειξη της ύπαρξης ισορροπίας.

Δηλαδή προσπαθούσαν να κατοχυρώσουν κάποιους κανόνες για την κατασκευή οικονομικών μοντέλων.

Έτσι κατά την εξέταση του μοντέλου γενικής ισορροπίας Walras- Cassel, προέκυψαν δύο ζητήματα³⁸. Η μη ύπαρξη οικονομικά σημαντικών λύσεων ισορροπίας³⁹, για τις τιμές παραγωγής και για τις ποσότητες

Ενώ στον Cassel, οι ζητούμενες ποσότητες είναι συνάρτηση των τιμών, στον Schlesinger οι τιμές ζήτησης είναι συνάρτηση των τιμών.

Ένα από τα πιο σημαντικά συμπεράσματα του συνεδρίου της Βιέννης, είναι και η απόδειξη του Wald, για την ύπαρξη ισορροπίας. Ο Wald απέδειξε το ότι είναι δυνατόν να υπάρχει μία μοναδική λύση του συστήματος γενικής ισορροπίας. Συνέδεσε, τις εξισώσεις που προσδιορίζουν τις τιμές παραγωγής, και τις ποσότητες παραγόμενων εμπορευμάτων, σύμφωνα με την Αρχή της οριακής χρησιμότητας.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να τονιστεί και η σημαντική προσφορά του J.v.Neumann, ο οποίος εισήγαγε αυτό που έλειπε από τα έως τότε μοντέλα

³⁶ Βλ L.Punzo Karl Menger's Mathematical Colloquium στο βιβλίο John von Neumann and modern economics, ,M. Dore, S. Chakravarty, R. Goodwin, σελ. 30

³⁷ πολλοί από αυτούς, συμμετείχαν και σε άλλους «κύκλους», βλ το ίδιο σελ 29

³⁸ Κριτική στο μοντέλο του Cassel έκαναν οι Neisser (1932) και ο von Stackelberg (1933). Η κριτική του Neisser έγκειται στο, ότι οι τιμές που λύνουν το υπόδειγμα του Cassel δεν είναι απαραίτητων μη αρνητικές. Από την άλλη μεριά, η κριτική του von Stackelberg, έχει να κάνει στο ότι αν ο αριθμός των εξισώσεων είναι μεγαλύτερος από αυτόν των μεταβλητών, τότε στο σύστημα θα υπάρχει υποκατάσταση, με άλλα λόγια εναλλακτικές διαδικασίες παραγωγής.

³⁹ Με άλλα λόγια το μοντέλο να είναι εσωτερικά ασταθές, βλ I.3. Γενική Ισορροπία: Ύπαρξη, Μοναδικότητα, Σταθερότητα

γενικής ισορροπίας, την αρχή της duality⁴⁰. Ήταν με άλλα λόγια, ο πρώτος που κατάφερε να προσδιορίσει ταυτόχρονα τιμές και ποσότητες, μέσω ανεξάρτητων μεταξύ τους συστημάτων εξισώσεων⁴¹, με την χρήση ενός θεωρήματος τοπολογίας, fixed point. Επιπλέον, μια ακόμα καινοτομία του μοντέλου γενικής ισορροπίας του von Neumann είναι ο δυναμικός χαρακτήρας του μοντέλου. Στον von Neumann, ενώ το σύστημα τιμών παραμένει σταθερό, το σύστημα φυσικών ποσοτήτων μεγεθύνεται με τον ενιαίο ρυθμό μεγέθυνσης g .

Συμπερασματικά το συνέδριο της Βιέννης, πρόσφερε μια νέα οπτική στην θεωρία γενικής ισορροπίας. Πλέον ένα μοντέλο γενικής ισορροπίας αποτελούνταν, από δύο συστήματα. Ένα που συνέδεε το κόστος με τις τιμές, και ένα που συνέδεε την προσφορά με τη ζήτηση. Έγινε, έτσι, πλέον αποδεκτή η άποψη, ότι ένα σύστημα γενικής ισορροπίας – και ποιο συγκεκριμένα η λύση του- πρέπει να περιλαμβάνει μεταβλητές, τόσο των τιμών, όσο και των ποσοτήτων.

5.Υποδείγματα Νεοκλασικής Θεωρίας⁴²

A. Συναρτήσεις χρησιμότητας⁴³

Σαν X ορίζουμε το σύνολο κατανάλωσης για έναν οποιονδήποτε καταναλωτή. Μέσα σ' αυτό εμπεριέχονται, τα εφικτά για τον συγκεκριμένο καταναλωτή καλάθια εμπορευμάτων. Επομένως το X είναι ένα ημιθετικό διάνυσμα $kx1$ στο R^k . Έτσι, ο καταναλωτής αυτός έχει σαφείς προτιμήσεις ανάμεσα στα καλάθια κατανάλωσης, που ανήκουν στο X . Λόγου χάρη, όταν λέμε, ότι $x \succ y$, τότε το x

⁴⁰ Δυσική σχέση υπάρχει μεταξύ των συστημάτων τιμών και φυσικών ποσοτήτων, και των όρων «ποσοστό κέρδους», και «ρυθμού μεγέθυνσης»

⁴¹ Βλ L.Punzo Karl Menger's Mathematical Colloquium, στο βιβλίο John von Neumann and modern economics, M. Dore, S. Chakravarty, R. Goodwin, σελ. 30

⁴² Το παρόν κεφάλαιο ακολουθεί την δομή της παρουσίασης των δυο υποδειγμάτων, από το βιβλίο του H. Varian Microeconomic analysis, σελ.313-356

⁴³ Στα ακόλουθα χρησιμοποιούμε την ανάλυση του H. Varian από το βιβλίο του Microeconomic analysis, σελ.94-97

προτιμάται του y . Έτσι λοιπόν, κάθε well-behaved συνάρτηση χρησιμότητας πρέπει να έχει τις εξής ιδιότητες:

I. **Πληρότητα (complete)**

Για κάθε x και y στο X , πρέπει $x \succ y$, $x \sim y$ ή και τα δύο. Μας δίνει την πληροφορία ότι τα δύο καλάθια είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους

II. **Αντανακλαστικότητα (Reflexive)**

Για κάθε x στο X , $x \succ x$. Είναι τετριμμένη.

III. **Μεταβατικότητα (Transitive)**

Για τα x, y και z που ανήκουν στο X εάν $x \succ y$ και $y \succ z$ τότε $x \succ z$. Είναι απαραίτητη σε προβλήματα μεγιστοποίησης.

IV **Συνέχεια (Continuity)**

Για κάθε y στο X , τα σύνολα $\{x: x \succ y\}$ και $\{x: x \sim y\}$ είναι κλειστά, και τα σύνολα $\{x: x \succ y\}$ και $\{x: x \sim y\}$ κλειστά

Οι ιδιότητες I-IV μας εγγυώνται, ότι η συνάρτηση χρησιμότητας, που συνεπάγονται οι προτιμήσεις θα είναι συνεχείς.

Έτσι είμαστε σε θέση να αποφανθούμε, ότι η συμπεριφορά του καταναλωτή, μπορεί να αποτυπωθεί με μια συνάρτηση χρησιμότητας

Επιπλέον ορίζουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

V. **Weak (Monotonicity)**

Εάν $x \geq y$, τότε $x \succ y$. Λεκτικά μπορούμε να το συνοψίσουμε σαν «όσο περισσότερο τόσο το καλύτερο»

VI. **Strong (Monotonicity)**

Εάν $x \geq y$ και $x \neq y$, τότε $x \succ y$. Πράγμα που σημαίνει, ότι αν πάρουμε το ίδιο από κάθε αγαθό συν ένα μικρό μέρος παραπάνω, τότε μπορούμε να πούμε ότι βρισκόμαστε σε αυστηρά καλύτερη κατάσταση

VII. **Τοπικός μη κορεσμός**

Δοσμένων κάθε x στο X και κάθε $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει κάποιο καλάθι y στο X με $|x - y| < \epsilon$, τέτοιο ώστε $y \succ x$. Λεκτικά μπορούμε να πούμε, ότι ο καθ' ένας καταναλωτής είναι δυνατόν να βελτιώνει συνεχώς την θέση του, αν του δίδεται λίγο παραπάνω από κάποιο αγαθό.

VIII **Κυρτότητα (convexity)**

Για x, y, z στο X , τέτοια ώστε $x \succ z$ και $y \succ z$, τότε συνεπάγεται ότι: $tx + (1-t)y \succ z$, για κάθε $0 \leq t \leq 1$

IX. **Αυστηρή κυρτότητα (Strict convexity)**

Δοσμένων $x \neq y$ και z στο X , εάν $x \succ z$ και $y \succ z$, τότε $tx + (1-t)y \succ \succ z$ για κάθε $0 < t < 1$. Έτσι το σύνολο των καλαθιών, που είναι αδιάφορα μεταξύ τους ($x \sim y$), παριστώνεται από μία καμπύλη αδιαφορίας.

B. Οικονομία των ανταλλαγών

Ένα χαρακτηριστικό υπόδειγμα της Νεοκλασικής Οικονομικής είναι αυτό της οικονομίας των ανταλλαγών. Σε αυτό όλα τα άτομα είναι καταναλωτές⁴⁴. Δεν υπάρχει παραγωγή και οι καταναλωτές αρκούνται να ανταλλάσσουν μεταξύ τους το αρχικό τους απόθεμα.

Έτσι, ο κάθε καταναλωτής (n καταναλωτές στο υπόδειγμά μας) μπορεί να περιγραφεί πλήρως:

- Από τις προτιμήσεις τους, οι οποίες περιγράφονται με την συνάρτηση χρησιμότητας τους u_i
- Ορίζουμε σαν καλάθι κατανάλωσης το $k \times 1$ διάνυσμα x_i
- Ενώ σαν το $1 \times k$ διάνυσμα x , ορίζουμε το σύνολο των n καλαθιών, που ανήκουν στους καταναλωτές του υποδείγματος. Το διάνυσμα x αναφέρεται και ως κατανομή
- Όπως προείπαμε, οι καταναλωτές διαθέτουν ένα αρχικό απόθεμα εμπορευμάτων, που παρίσταται από το $k \times 1$ διάνυσμα ω_i . Όπου ω το $1 \times k$ διάνυσμα του συνόλου των n καλαθιών, που ανήκουν στους καταναλωτές του υποδείγματος

Έτσι ορίζουμε μία κατανομή σαν εφικτή όταν:

⁴⁴ Πρόκειται για ένα υπόδειγμα n καταναλωτών και k εμπορευμάτων

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \quad (1) \text{ ή ποιο αυστηρά}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i \quad (1a)'$$

- Στην συνέχεια ορίζουμε το $1 \times k$ διάνυσμα p των τιμών αγοράς των εμπορευμάτων

B.1.Ισορροπία κατά Walras

Το πρώτο βήμα είναι, η εξαγωγή της συνάρτησης ζήτησης, που ως γνωστόν βρίσκεται από το ακόλουθο πρόβλημα

$$\text{Max } u_i(x_i)$$

$$\text{s.t. } p x_i = p \omega_i$$

Η λύση του προβλήματος αυτού ως γνωστόν είναι η συνάρτηση ζήτησης του καταναλωτή i , η οποία παρίσταται ως $x_i(p, p\omega_i)$. Σε ένα υπόδειγμα των ανταλλαγών, η συνολική προσφορά είναι ίση με το αρχικό απόθεμα των καταναλωτών', δηλαδή ίση με ω_i .

Τέλος το $p x_i$ συμβολίζει την συνολική δαπάνη των καταναλωτών για καταναλωτικά αγαθά.

Είμαστε πλέον να ορίσουμε την ισορροπία κατά Walras, ως εξής:

$$\sum_{i=1}^n x_i(p_i, p\omega_i) \leq \sum_{i=1}^n \omega_i$$

Λεκτικά εκφρασμένη, η παραπάνω συνθήκη μας λέει, ότι η ποσότητα των καταναλωτικών αγαθών που καταναλώνονται, πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση, από την ποσότητα των καταναλωτικών αγαθών που προσφέρονται.

Στην συνέχεια ορίζουμε την υπερβάλλουσα ζήτηση:

$$Z(p) = \sum_{i=1}^n [x_i(p_i, p\omega_i) - \omega_i]$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής, εφόσον οι επιμέρους συναρτήσεις ζήτησης είναι και αυτές συνεχείς. Επιπλέον η συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης είναι ομογενής, ως προς τις τιμές.

Στην συνέχεια θέλουμε να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση⁴⁵:

- Εάν η $z: S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, που ικανοποιεί το νόμο του Walras, $pz \equiv 0$, τότε υπάρχει κάποιο p^* στο S^{k-1} , τέτοιο ώστε $z(p^*) \leq 0$.

Ωστόσο για την απόδειξη αυτού, πρέπει να ικανοποιούνται κάποιες παραδοχές (Facts)

- Εάν υπάρχει ισορροπία στις $k-1$ αγορές, τότε θα υπάρχει ισορροπία και στην $k^{\text{ση}}$
- Νόμος του Walras, $pz \equiv 0$, δηλαδή ότι η τιμιακή αξία της υπερβάλλουσας ζήτησης είναι ίση με 0
- Ελεύθερα αγαθά, αν η προσφορά υπερβαίνει την ζήτηση σε κάποιο αγαθό, τότε αυτό θα έχει μηδενική τιμή, με άλλα λόγια θα είναι ελεύθερο
- Επιθυμητότητα. Αν $p=0$ τότε $z(p) > 0$, ότι δηλαδή παρόλο και αν είναι μηδενική η τιμή ενός αγαθού, η υπερβάλλουσα ζήτηση του, θα είναι θετική, δηλαδή θα είναι επιθυμητό

Οι δύο παραπάνω υποθέσεις, συνεπάγονται:

- Ισότητα προσφοράς και ζήτησης, που μας λέει, ότι αν όλα τα αγαθά είναι επιθυμητά και p^* είναι ισορροπία κατά Walras τότε $z(p^*) \equiv 0$, δηλαδή η υπερβάλλουσα ζήτηση είναι ίση με μηδέν.
- Επιπλέον τυποποιούμε τις τιμές ως εξής:

$$p_i = \frac{\hat{p}_i}{\sum_{i=1}^k \hat{p}_i}. \text{ Είναι λοιπόν φανερό, ότι τα } p_i \text{ αθροίζουν στην μονάδα.}$$

- Ορίζουμε το σύνολο τιμών στο S^{k-1} σύνολο:

$$S^{k-1} = \{p \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k p_i = 1\}$$

- Απαραίτητη είναι και η χρήση του Fixed Point Theorem του Brouwer, το οποίο έχει ως εξής: «Εάν $S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση από το

⁴⁵ η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος και των παραδοχών βρίσκονται στο βιβλίο του H. Varian *Microeconomic analysis*, στην σελίδα 354-355 και έτσι είναι μάλλον περιττό να τις επαναλάβουμε εκ νέου

μοναδιαίο σύνολο στον εαυτό του, τότε υπάρχει κάποιο x στο S^{k-1} τέτοιο ώστε $x=f(x)$ »⁴⁶

B.2. Κατά Pareto Αριστοποίηση

Ένα άλλο κρίσιμο σημείο στο υπόδειγμα των ανταλλαγών, είναι και αυτό της εξεύρεσης των κατά Pareto άριστων σημείων. Αναλυτικότερα:

Μια κατανομή x είναι ασθενώς κατά Pareto άριστη, εάν δεν υπάρχει άλλη κατανομή x' , η οποία να προτιμάται αυστηρά απ' όλους τους καταναλωτές, έναντι της x . Ενώ μια εφικτή κατανομή x , τέτοια είναι ισχυρώς άριστη κατά Pareto, εάν δεν υπάρχει εφικτή κατανομή x' , τέτοια ώστε όλοι οι καταναλωτές να προτιμούν ασθενώς την x' από την x και κάποιος καταναλωτής να προτιμά αυστηρά την x' από την x ⁴⁷.

Είμαστε λοιπόν σε θέση να διατυπώσουμε τα δυο θεωρήματα κοινωνικής ευημερίας, χωρίς να χρειαστεί να τα αποδείξουμε, αφού η απόδειξη τους βρίσκεται στο βιβλίο του H. Varian.

- **Πρώτο Θεώρημα Ευημερίας**

Εάν (x,p) είναι μια ισορροπία κατά Walras, τότε η x είναι άριστη κατά Pareto. Το θεώρημα αυτό μας λέει, ότι μια κατά Pareto άριστη κατανομή και συνεπώς η ισορροπία της αγοράς, δεν είναι απαραίτητα και δίκαια, με την ηθική έννοια του όρου

- **Δεύτερο Θεώρημα Ευημερίας**

Υποθέστε ότι x^* είναι μια κατά Pareto άριστη κατανομή, στην οποία ο κάθε καταναλωτής, έχει στην κατοχή του μια θετική ποσότητα του κάθε αγαθού. Εάν υποθεθεί, ότι οι προτιμήσεις είναι κυρτές, συνεχείς και μονότονες, τότε το x^* είναι μια κατά Walras ισορροπία για τα αρχικά αποθέματα $x_i^* = \omega_i$. Αυτό το θεώρημα μας λέει, ότι μια κατά Pareto άριστη κατανομή είναι από μόνη της μια ανταγωνιστική ισορροπία.

⁴⁶ βλ. H. Varian Microeconomic analysis, σελ.319-320

⁴⁷ βλ. H. Varian Microeconomic analysis, σελ.323-424, το ίδιο ισχύει και για τα ακόλουθα δυο θεωρήματα, 326-327

Τα παραπάνω μπορούν εύκολα να αναχθούν και σε μία συνάρτηση χρησιμότητας, που αθροίζει τις χρησιμότητες, όλων των καταναλωτών, δηλαδή σε μία συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας. Συνεπώς μία κατανομή x^* , που μεγιστοποιεί την συνάρτηση χρησιμότητας, είναι και άριστη κατά Pareto.

Γ. Νεοκλασική Θεωρία:

Ισορροπία σε υπόδειγμα με παραγωγή

Για την εύρεση ισορροπίας κατά Walras και των άριστων κατά Pareto κατανομών, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία, εισάγοντας όμως την παραγωγή στον εισοδηματικό περιορισμό, στην συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης και στον ορισμό της εφικτής κατανομής. Στο παρόν υπόδειγμα έχουμε μια οικονομία με m επιχειρήσεις, n καταναλωτών και m αγαθών. Έχουμε λοιπόν αντίστοιχα για τις παραπάνω σχέσεις:

- $px_i = p\omega_i + \sum_{j=1}^m T_{ij}py_j$, όπου $y_j(p)$ διάνυσμα για τα σχέδια παραγωγής και

T_{ij} το μερίδιο των κερδών που επιχειρηματία/ καταναλωτή i στην επιχείρηση j .

- $Z(p) = X(p) - Y(p) - \omega$, όπου η υπερβάλλουσα ζήτηση ισούται με την συνολική ζήτηση $X(p)$, μείον την συνολική παραγωγή, μείον τα αρχικά αποθέματα

- $$\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^m y_j - \sum_{i=1}^n \omega_i$$

Όπως στην περίπτωση της οικονομίας των ανταλλαγών, έχουμε για μια ακόμα φορά ένα existence theorem, το οποίο έχει ως εξής:

«Εάν η $z(p)$ είναι συνεχής συνάρτηση. Ορισμένη στο σύνολο τιμών, η οποία να ικανοποιεί το νόμο του Walras⁴⁸, μπορεί να αποδειχθεί, ότι υπάρχει ένα p^* , τέτοιο ώστε $z(p^*) \leq 0$. Για να ισχύει αυτό, πρέπει, απλά το σύνολο των παραγωγικών δυνατοτήτων, να είναι κυρτό και συνεπώς η $z(p)$ να είναι συνεχής».

⁴⁸ Κάνοντας τις ίδιες υποθέσεις με το αντίστοιχο existence theorem, για την οικονομία των ανταλλαγών, βλ παραπάνω σελ 20

Το 1959 ο Debreu απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα για την γενική περίπτωση:
 «Μια ισορροπία υπάρχει σε μια οικονομία εάν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

1. Το σύνολο κατανάλωσης κάθε καταναλωτή είναι κλειστό, κυρτό και άνω φραγμένο
2. Δεν υπάρχει καλάθι (εμπορευμάτων) που να επιφέρει κορεσμό
3. Για κάθε καταναλωτή i , $i=1,2,\dots,n$ τα σύνολα $\{x_i : x_i \succ_i x_i'\}$ και $\{x_i' : x_i' \succ_i x_i\}$ είναι κλειστά
4. Κάθε καταναλωτής διατηρεί ένα δάνυσμα αρχικού αποθέματος, στο εσωτερικό του συνόλου κατανάλωσής του
5. Για κάθε καταναλωτή i , $i=1,2,\dots,n$, εάν x_i και x_i' είναι δυο καλάθια κατανάλωσης, τότε το $x_i \succ_i x_i'$ συνεπάγεται ότι $tx_i - (1-t)x_i' \succ_i x_i'$ για κάθε $t, 0 < t < 1$
6. Για κάθε επιχείρηση j , το 0 είναι ένα στοιχείο του Y_j
7. Το $Y = \sum_{j=1}^m Y_j$, είναι κλειστό και κυρτό
8. $Y \cap (-Y) \subset \{0\}$
9. $Y \supset (-R_+)$

Οι 1-5 υποθέσεις μας εξασφαλίζουν την συνέχεια (Continuity) της συνάρτησης ζήτησης (Demand correspondence). Η υπόθεση 6. μας πληροφορεί ότι είναι δυνατόν μια επιχείρηση να μην παράξει τίποτα για την υπό εξέταση περίοδο, πράγμα που εξασφαλίζει την μη ύπαρξη αρνητικών κερδών. Η συνθήκη 7. εξασφαλίζει την συνέχεια της συνάρτησης προσφοράς της επιχείρησης. Η συνθήκη 8. μας λέει ότι δεν γίνεται να παραχθεί κάποιο καθαρό προϊόν y , το οποίο να εισέλθει στην διαδικασία παραγωγής, για να παράξει τις απαραίτητες για αυτό εισροές, δηλαδή δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιούνται οι εισροές σαν εκροές και αντιστρόφως. Η συνθήκη αυτή μας εξασφαλίζει ότι το σύνολο των εφικτών κατανομών είναι φραγμένη. Τέλος η συνθήκη 9, που είναι γνωστή και σαν assumption of free disposal, μας λέει ότι είναι απολύτως εφικτό, ένα σχέδιο παραγωγής να χρησιμοποιεί όλα τα αγαθά σαν εισροές. Η συνθήκη αυτή μας εξασφαλίζει την μη ύπαρξη αρνητικών τιμών παραγωγής.

Για την ύπαρξη των άριστων κατά Pareto σημείων, ακολουθούμε την ίδια με πάνω διαδικασία.

Αυτό όμως που θα είχε ενδιαφέρον, είναι η απόδειξη ενός θεωρήματος, που είναι γνωστό, ως θεώρημα της μη υποκατάστασης, (γνωστό και ως Non-Substitution Theorem)

Οι υποθέσεις του Non-Substitution Theorem είναι οι εξής:

- Υπάρχουν n επιχειρήσεις, που παράγουν n αγαθά
- Δεν υπάρχει σύνθετη παραγωγή, και συνεπώς κάθε επιχείρηση παράγει ένα μόνο αγαθό
- Υπάρχει μόνο μια μη (ανα)παραγόμενη εισροή στην παραγωγή, δηλαδή η εργασία, την οποία συμβολίζουμε ως y_0 .
- Συμβολίζουμε το $n+1 \times 1$ διάνυσμα των τιμών με w
- Θεωρούμε, ότι τιμές ισορροπίας είναι ορισμένες σαν σχετικές τιμές
- Υποθέτουμε, ότι η εργασία είναι απαραίτητη εισροή σε κάθε μια από τις n διαδικασίες παραγωγής.
- Επομένως σε ισορροπία, w_0 (το ονομαστικό ωρομίσθιο) είναι >0 και μπορούμε να το θεωρήσουμε σαν numeraire, το θέτουμε αρχικά ίσο με $w_0=1$
- Την τεχνολογία την χαρακτηρίζουν σταθερές αποδόσεις κλίμακας. Επομένως η συνάρτηση κόστους της μπορεί να παρασταθεί με:

$C_i(w)y_i$, για $i=1,2,\dots,n$

- Επιπλέον υποθέτουμε, ότι η εργασία είναι απαραίτητος συντελεστής για την παραγωγή, ώστε η ζήτηση του συντελεστή παραγωγής εργασία, να είναι πάντα θετική

Είμαστε πλέον σε θέση, να διατυπώσουμε το θεώρημα της μη Υποκατάστασης: «Υποθέστε ότι υπάρχει μόνο μια μη (ανα)παραγόμενη εισροή, η οποία είναι απαραίτητη στην παραγωγή, ότι δεν υπάρχει σύνθετη παραγωγή και ότι την τεχνολογία την χαρακτηρίζουν σταθερές αποδόσεις κλίμακας. Υποθέτουμε ότι το (x,y,w) είναι μια κατά Walras ισορροπία, με $y_i>0$. Τότε το w είναι η μοναδική λύση στο $C_i(w)y_i$, για $i=1,2,\dots,n$ »

Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο H.Varian Microeconomic Analysis και δεν θα χρειαστεί να την αναφέρουμε στο παρόν κείμενο.

III. Η ΚΛΑΣΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΕΚΤΕΝΕΣΤΕΡΑ

Παρακάτω, και σύμφωνα με το άρθρο των Kurz και Salvadori "Classical roots of input-output analysis: A short Account of it's long Prehistory", παραθέτουμε κάποιους από τους σημαντικότερους εκπροσώπους, της κλασικής θεωρίας.

Αν και οι περισσότεροι, δεν δείχνουν, να έχουν κάποια άμεση σχέση με την θεωρία γενικής ισορροπίας, ωστόσο η συνεισφορά τους στον τρόπο οικοδόμησης μοντέλων, όπως αυτό του von Neumann, είναι ιδιαίτερα σημαντική. Παρακάτω παρουσιάζονται οι οικονομολόγοι, οι οποίοι αποτέλεσαν την αρχή της κλασική σκέψης στην γενική ισορροπία⁴⁹.

Το 1662 ο **William Petty** με το "Treatise of Taxes and Contributions" και ο **Richard Cantillon** το 1755 με το "Essair sur la nature du commerce en general", έκαναν πρώτοι λόγο για το περιεχόμενο των εννοιών της παραγωγής σαν μια κυκλική ροή, της αναπαραγωγής και του καθαρού προϊόντος.

Οι φυσιοκράτες και κυρίως ο **Francois Quensay** με το **Tableau** το 1758, επεδίωκε να αποτυπώσει όλη τη διαδικασία της παραγωγής, της διανομής και της κατανάλωσης σαν μια διαδικασία αναπαραγωγής με ανακύκλωση των εμπορευμάτων.

Κατά τους **Kurz** και **Salvadori** κύριος σκοπός του Quensay ήταν να οριοθετήσει το εισόδημα και κατ' επέκτασιν τους παράγοντες που επηρεάζουν το μέγεθός του.

Ο **Achilles- Nicolas Isnard**, ο οποίος ασκώντας κριτική στην έννοια της παραγωγικότητας, που εισήγαγε ο Quensay, έδωσε έμφαση τον ρόλο των τιμών στην διανομή του υπερβάλλοντος (καθαρού) προϊόντος.

Ο **Robert Torrens**, ήταν ο πρώτος ο οποίος εντόπισε την δυϊκή σχέση των συστημάτων των φυσικών ποσοτήτων και των τιμών, αναλύοντας την έστω και σε εμβρυακό βαθμό⁵⁰.

Ο **Karl Marx**, όπου εκτός των άλλων, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα σχήματα αναπαραγωγής του⁵¹.

⁴⁹ Στα παρακάτω για περισσότερα βλ. H.Kurz and N.Salvadori "Classical roots of input-output analysis: A short Account of it's long Prehistory", σελ 1-5

⁵⁰ Πράγμα που χρησιμοποίησε και ανέπτυξε αργότερα ο ίδιος ο von Neumann

⁵¹ τα οποία μπορούμε να πούμε ότι αποτελούν ένα πρώτο μοντέλο γενικής ισορροπίας. Βλ. Γ. Σταμάτης «Εισαγωγή στην πολιτική οικονομία», σελ 89-115

Ο **V.K. Dmitriev**, ο οποίος τυποποίησε την οπτική του Ricardo στην θεωρία των σχετικών τιμών και της διανομής του εισοδήματος

Ο **L. von Bortkiewicz**, οποίος βάσει της ανάλυσης του Dmitriev, άσκησε κριτική στον βάσει της εργασίας ορισμό τιμών από τον Marx.

Τέλος ο George von Charasoff, ο οποίος ανέλυσε την σχέση duality μεταξύ τιμών και ποσοτήτων, και (επι)νόησε την αντίστροφη του Leontief. Στον von Charasoff αναφέρεται η παρακάτω παράγραφος.

Ο **Von Charasoff** ένας από τους σημαντικότερους εκπροσώπους της κλασικής σχολής είναι και ο Georg von Charasoff, ο οποίος ασχολείται με το μαρξικό πρόβλημα του μετασχηματισμού των αξιών, σε τιμές παραγωγής. Άρθρο το οποίο θα ήταν χρήσιμο να συμβουλευτεί ο ενδιαφερόμενος για εκτενέστερη κατανόηση του μοντέλου του είναι:

« Georg von Charasoff ένας πρωτοπόρος της θεωρίας των γραμμικών συστημάτων παραγωγής » του Κ^{ου} Γ. Σταμάτη .

IV.ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΕΝΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΟΙΑΣ ΤΟΥ

JOHN von NEUMANN

IV.1. Η αρχική εκδοχή

Ο John von.Neumann (v.N) υποστηρίζει «ότι αντικείμενο της εργασίας του είναι η λύση ενός τυπικού, οικονομικού συστήματος εξισώσεων», με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Παράγονται εμπορεύματα μέσω εμπορευμάτων
2. Επιτρέπεται να υπάρχουν περισσότερες τεχνικά δυνατές διαδικασίες παραγωγής, απ' ό,τι εμπορεύματα. «Το πρόβλημα είναι μάλλον να καθορίσουμε ποιες διαδικασίες πράγματι θα χρησιμοποιούνται και ποιες όχι».

Στο μοντέλο Γενικής Ισορροπίας του von Neumann, η εμπορεύματα παράγονται μέσω m διαδικασιών παραγωγής. Τίθεται το ερώτημα, ποιές διαδικασίες θα χρησιμοποιηθούν ως κερδοφόρες, και ποιές τιμές θα προκύψουν.

Για το μοντέλο του v.N γίνονται οι υποθέσεις ότι:⁵²

- 1) Είναι δυνατόν $m > n$ και συνεπώς, το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί με τη γνωστή λύση των εξισώσεων⁵³.
- 2) Υπάρχουν σταθερές αποδόσεις κλίμακας (Σ.Α.Κ)
- 3) Οι φυσικοί συντελεστές παραγωγής, συμπεριλαμβανομένου και της εργασίας, μπορούν να εκτείνονται σε απεριόριστες ποσότητες
- 4) Οι διαδικασίες, οι οποίες παράγουν τα μισθιακά εμπορεύματα, είναι αυτές που τροφοδοτούν την κατανάλωση των εργατών
- 5) Η φθορά «κεφαλαιουχικών αγαθών» περιγράφεται, με την εισαγωγή διαφορετικών βαθμίδων φθοράς, ως ξεχωριστά εμπορεύματα⁵⁴ για κάθε μια από αυτές⁵⁵

⁵² οι υποθέσεις a-g γίνονται ρητά από τον v.N, ενώ οι h-i από τον D. G. Champernowne, ενώ οι j-k από τον D. Simpson στο βιβλίο του, *General Equilibrium Analysis*, σελ.153-154

⁵³ εδώ μπορούμε να πούμε ότι ο v.N. κάνει κάποια νύξη για σύνθετη παραγωγή

⁵⁴ Η εισαγωγή εμπορευμάτων γίνεται με την προσθήκη μιας γραμμής και μιας στήλης, στην κατά τα μισθιακά εμπορεύματα προσαυξημένη μήτρα των τεχνικών συντελεστών και στην μήτρα των εκροών

- 6) Η κάθε μια διαδικασία παραγωγής είναι διάρκειας μιας μονάδας χρόνου, ενώ διαδικασίες παραγωγής μεγαλύτερης διάρκειας, διασπώνται σε απλές διαδικασίες μοναδιαίας διάρκειας⁵⁶.
- 7) Μπορεί να υπάρξει, η ειδική περίπτωση, όπου ένα εμπόρευμα μπορεί να παραχθεί μόνο από κοινού με ορισμένα άλλα (είναι δηλαδή δυνατή η ύπαρξη σύνθετης παραγωγής).
- 8) Οι εργάτες καταναλώνουν όλο το εισόδημά τους και οι καπιταλιστές αποταμιεύουν και (επανε)επενδύουν όλο το εισόδημά τους
- 9) Υπάρχει τέλειος ανταγωνισμός, όπου μεταφράζεται στην ύπαρξη ενός ενιαίου συντελεστή επιτοκίου (ποσοστού κέρδους)
- 10) Τόσο η κατά τα μισθιακά εμπορεύματα προσαυξημένη μήτρα των εισροών σε μέσα παραγωγής, η A^{57} , όσο και η μήτρα των εκροών, η B , είναι διαστάσεων $n \times m^{58}$.
- 11) Δεν υπάρχει εξωγενής ή τελική ζήτηση

Δεδομένου ότι εμπορεύματα παράγονται μέσω εμπορευμάτων, ο $v.N$ θέλει να προσδιορίσει τις διαδικασίες που θα χρησιμοποιηθούν, την ταχύτητα με την οποία θα αυξάνεται η συνολική ποσότητα εμπορευμάτων (ρυθμός μεγέθυνσης της οικονομίας), τις τιμές που θα προκύψουν και το ύψος του επιτοκίου (ποσοστού κέρδους).

Ορίζουμε τις μήτρες A και B , διαστάσεων n (εμπορεύματα) \times m (διαδικασίες). Άγνωστοι είναι το διάνυσμα των n τιμών (p), το ποσοστό κέρδους (r) καθώς και το διάνυσμα των m επιπέδων δραστηριότητας (x) και ο ρυθμός μεγέθυνσης του συστήματος (g)

Έτσι έχουμε τις παρακάτω σχέσεις::

$$gAx \leq Bx \quad (1)$$

⁵⁵ βλ. Michio Morishima Walras Economics ch. Capital and money reconsidered

⁵⁶ , εισάγοντας, εφόσον είναι αναγκαίο ενδιάμεσα προϊόντα ως πρόσθετα αγαθά, σελ XXX

⁵⁷ σε αντίθεση με τον ορισμό γραμμών και στηλών που υιοθετεί ο $v.N$. στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε τον έως τώρα γνωστό ορισμό γραμμών- στηλών. Όπου κάθε στοιχείο a_{ij} παριστά στην ποσότητα του εμπορεύματος i που εισέρχεται άμεσα ως μέσο παραγωγής /ή και ως μισθιακό εμπόρευμα στην παραγωγή μιας μονάδας του εμπορεύματος j

⁵⁸ Όμως η ύπαρξη της κατά τα μισθιακά εμπορεύματα προσαυξημένης μήτρας των τεχνικών συντελεστών χαρακτηρίζει την ύπαρξη ενός αναπαραγωγικού συστήματος παραγωγής.

$$r_A \geq p_B \quad (2)$$

Αν θέλουμε στις παραπάνω εξισώσεις να ισχύουν αυστηρά οι ανισότητες, πρέπει να ισχύουν για την (1) και την (2), το $p=0$ και το $x=0$ αντίστοιχα. Πράγμα που σημαίνει, στην πρώτη εξίσωση, ότι αν καταναλώνονται λιγότερα εμπορεύματα από όσα παράγονται τότε $p=0$, δηλαδή τα εμπορεύματα γίνονται ελεύθερα. Ενώ στην δεύτερη αν μια διαδικασία είναι μη κερδοφόρα τότε αυτή δεν χρησιμοποιείται, δηλαδή το $x=0$.

Βλέπουμε ότι έχουμε $m+n$ εξισώσεις και $m+n+2$ αγνώστους. Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό παίρνουμε σχετικά επίπεδα δραστηριότητας και σχετικές τιμές. Μας ενδιαφέρουν δηλαδή, όπως αναφέρει και ο $v.N$, μόνο οι αναλογίες $x_1: \dots : x_m$ και $p_1: \dots : p_n$. Έτσι οι άγνωστοι μειώνονται σε $m+n$. Όμως, κατά τον $v.N$ επειδή οι (1) και (2) δεν είναι ισότητες, αλλά «μάλλον περιπλοκες ανισότητες», τίποτε δεν εγγυείται, ότι το σύστημα έχει όντως λύση, παρότι ο αριθμός των σχέσεων είναι ίσος, με αυτόν των αγνώστων.

Μάλιστα παρατηρεί μια δυϊκή συμμετρία των όρων x, g και p, r αντίστοιχα, των σχέσεων (1) και (2) καθώς και των όρων «μη χρησιμοποιούμενη διαδικασία» και ελεύθερα αγαθά αντίστοιχα.

Σκοπός του $v.N$ είναι να λύσει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

- 1) $x \geq 0$
- 2) $p \geq 0$
- 3) $\sum x_j > 0$
- 4) $\sum p_i > 0$
- 5) $gAx \leq Bx$
- 6) $r_A \geq p_B$

Διαπιστώνει όμως, ότι υπάρχουν λύσεις των (i-vi), οι οποίες είναι δυνατόν να ισχύουν για διαφορετικά $x_1: \dots : x_m$ και $p_1: \dots : p_n$. Αυτό όμως που προκαλεί εντύπωση είναι, ότι όλες τις λύσεις r και g «οφείλουν να έχουν την ίδια τιμή», δηλαδή να προσδιορίζονται μονοσήμαντα.

Στην συνέχεια ο ν.Ν. προτείνει έναν «απλό τρόπο», ώστε να προσδιορίσει αμέσως τα r και g .⁵⁹ Υποθέτει μάλιστα για λόγους απλούστευσης ότι:

Ισχύει πάντοτε το $A+B>0$, όπου $A, B \geq 0$

Συνεχίζοντας στον προσδιορισμό των r και g , υποθέτει μια υποθετική λύση x, g και p, r των (i-vi). Ο ν.Ν αποκλείοντας τις περιπτώσεις των αυστηρών ανισοτήτων στις (v) και (vi), όπου τα $x=p=0$ θα παραβίαζαν τις σχέσεις iii και iv αντίστοιχα.

Ορίζει το ποσοστό κέρδους και το ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος ως εξής:

$$g = \min_{j=1, \dots, m} \frac{\sum_{i=1}^n b_{ij} x_i}{\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j} \quad \text{(vii)}$$

$$r = \max_{i=1, \dots, m} \frac{\sum_{j=1}^n b_{ij} p_j}{\sum_{i=1}^n a_{ij} p_i} \quad \text{(viii)}$$

Είναι εμφανές, ότι η (viii) και (ix) δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{0}{0}$, η οποία συντοίς άλλοις αντιβαίνει στις (i-iv) και (vii). Με αυτόν τον τρόπο, απλοποιούνται οι παραπάνω σχέσεις ως εξής:

$$g = \frac{\sum_{j=1}^m b_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j} \quad \text{(ix)}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n b_{ij} p_i}{\sum_{i=1}^n a_{ij} p_i} \quad \text{(x)}$$

Όμως στις (viii) και (ix), τα x, p τα θεωρούμε δεδομένα. Επομένως ο ν.Ν έχει να λύσει τις (i-vi) ως προς x_j και p_i

Στην συνέχεια προχωράμε στην λύση των σχέσεων:

- $x' \geq 0$
- $p' \geq 0$
- $\sum x_j' > 0$
- $\sum p_i' > 0$

⁵⁹ είναι εμφανής η ομοιότητα του συλλογισμού του με το τέχνασμα του Von Charasoff για τον υπολογισμό του ποσοστού κέρδους πριν και ανεξάρτητα από τις τιμές.

Και επιπλέον :

$$\Phi(x, p) = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ij} x_j p_i}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j p_i}$$

Έστω πάλι ότι τα x και p , οι υποθετικές λύσεις, και x' και p' τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν όμως τις συνθήκες (i-iv) και (a-d) αντίστοιχα.

Στην συνέχεια παρατηρεί, ότι η $\Phi(x, p')$ παίρνει την ελάχιστη της τιμή ως προς P' , εάν $P' = P^*$, και ότι η $\Phi(x', p)$ παίρνει την μέγιστη της τιμή ως προς X' , εάν $X' = X^*$.

Έτσι το ζήτημα τίθεται από τον $v.N$ ως εξής:

«Ορίζουμε την (X', P') όπου το πεδίο ορισμού της φράζεται από τις a-d. Έτσι ζητούμε»: «Να βρεθεί ένα σαγμοειδές σημείο $X' = X, P' = P$, όπου δηλαδή η (X, P) παίρνει την ελάχιστη του τιμή ως προς P' και την μέγιστη της η (X', P) ως προς X' ».

Από τις (v) (v^*) και (viii) καθώς και (vi), (v^*) και (ix) προκύπτει:

$$g = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j p_i}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j p_i} = \Phi(x, p)$$

$$r = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ij} x_j p_i}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j p_i} = \Phi(x, p)$$

Επομένως για τον $v.N$: «το πρόβλημά μας μπορεί να λυθεί, εάν δηλαδή η $\Phi(x', p')$ έχει ένα σαγμοειδές σημείο $X' = X, P' = P$ ώστε $r = g = \Phi(x, p) =$ η τιμή στο σαγμοειδές σημείο».

Στην συνέχεια, και λόγω της ομογένειας της $\Phi(x', p')$ ως προς τα X' και P' , το πρόβλημα δεν αλλάζει αν αλλάξουμε την τυποποίηση των επιπέδων δραστηριότητας και των τιμών αντίστοιχα με :

$$\sum_{j=1}^m x_j = 1$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Στην συνέχεια ο $v.N$ χρησιμοποιώντας, και αποδεικνύοντας ένα λήμμα σταθερού σημείου, φτάνει και στο βασικό συμπέρασμά του, ότι υπάρχει μία

τουλάχιστον λύση των x, p, r, g , όπου τα g, r έχουν την ίδια αριθμητική τιμή. Με άλλα λόγια το ποσοστό κέρδους και ο υλικός ρυθμός μεγέθυνσης της οικονομίας είναι ίσοι και μονοσήμαντα προσδιορισμένοι για όλες τις σχετικές δυνατές διαδικασίες.

Φθάνει στο συμπέρασμα ότι ο μέγιστος (καθαρά τεχνικά δυνατός) συντελεστής μεγέθυνσης της οικονομίας είναι ίσος με τον ελάχιστο συντελεστή επιτοκίου.

IV.2. Von Neumann από D. Simpson

Μια ακόμα εκδοχή του μοντέλου γενικής ισορροπίας του John von Neumann, κάνει και ο David Simpson, στο τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου του "General Equilibrium Analysis".

Αρχικά αναφέρουμε τις υποθέσεις που κάνει για το μοντέλο γενικής ισορροπίας του John von Neumann:

- 1) Δεν υπάρχουν όρια στις εισροές των συντελεστών παραγωγής. Οι εισροές υποτίθεται ότι είναι:
 - A. είτε σε απεριόριστη προσφορά
 - B. είτε αναπαραγόμενες σε συμφωνία με την τεχνολογία που ορίζεται από το σύστημα⁶⁰.
- 2) Υπάρχει ένας διαθέσιμος αριθμός από διαδικασίες παραγωγής, και τα αγαθά εισέρχονται σε αυτές είτε σαν εισροές, είτε σαν εκροές ή και τα δυο. Επομένως μπορεί να υπάρχει και σύνθετη παραγωγή.
- 3) Δεν υπάρχει εξωγενής ή τελική ζήτηση
- 4) Υπάρχει μια ακολουθία από διακριτές χρονικές περιόδους⁶¹
- 5) Ένα μη αποσβέσιμο, μέσο παραγωγής απλά αποτελεί και εισροή και εκροή για μια ή περισσότερες διαδικασίες παραγωγής. Εάν ένα μέσο παραγωγής αποσβένεται κατά $\alpha\%$, στην παραγωγή μιας μονάδας παραγόμενου προϊόντος, τότε από την διαδικασία παραγωγής του εξέρχονται $1-\alpha\%$ μονάδες του υπό εξέταση μέσου παραγωγής.

⁶⁰ Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για την εργασία, η οποία υποτίθεται ότι είναι ένας (ανα)παραγόμενος συντελεστής παραγωγής

⁶¹ με άλλα λόγια ο χρόνος είναι μια διακριτή μεταβλητή

Στην συνέχεια ο Simpson «οικοδομεί» το μοντέλο.

Ορίζει σαν a_{ij} , την ποσότητα του εμπορεύματος i που εισέρχεται ως μέσο παραγωγής/ ή και μισθιακό εμπόρευμα στην παραγωγή μιας μονάδας παραγωγής του προϊόντος j . Ορίζει σαν k_{ij} , αλλά εμείς για συμφωνία με τα παραπάνω χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό b_{ij} , την εκροή του εμπορεύματος i από την διαδικασία παραγωγής του εμπορεύματος j . Το $i=1,2,3,\dots,n$, $j=1,2,3,\dots,m$.

Για λόγους οικονομίας χώρου αλλάζουμε την παρουσίαση του Simpson, και χρησιμοποιούμε μήτρες και διανύσματα.

Έτσι το σύστημα μας $[A, B, x]$ ορίζεται από την τεχνική $[A,B]$. Για τις A, B και για το διάνυσμα δραστηριοτήτων του συστήματος ισχύει:

$$A, B, x \geq 0$$

Όπως είπαμε το σύστημα είναι διακριτή συνάρτηση του χρόνου. Επομένως υποθέτουμε, ότι τα m επίπεδα δραστηριότητας την περίοδο t ορίζονται με το $m \times 1$ διάνυσμα:

$$x^t \geq 0$$

Δηλαδή με δεδομένες τις μήτρες A και B , ο Simpson, αναζητά τα επίπεδα δραστηριότητας του συστήματος την περίοδο t .

Ορίζει την προσφορά την περίοδο t όπου είναι:

$$Bx^t$$

Στην συνέχεια ορίζει τα εφικτά σχέδια παραγωγής την επόμενη περίοδο δηλαδή την $(t+1)$, τα οποία πρέπει να ικανοποιούν την παρακάτω συνθήκη:

$$Ax^{t+1} \leq Bx^t \quad (1)$$

, δηλαδή έχουμε ένα σύστημα ανισώσεων με n σχέσεις και m αγνώστους. Ο von Neumann μετατρέπει τις ανισότητες σε ισότητες⁶², κάνοντας μια υπόθεση, δηλαδή κάθε εμπόρευμα στο οποίο αντιστοιχεί μία σχέση στην οποία το δεξιό μέλος είναι μεγαλύτερο από το αριστερό, θα είναι υπεράριθμο και συνεπώς θα έχει μια μηδενική τιμή⁶³.

⁶² αν βέβαια φέρουμε το σύστημα σε μορφή εξισώσεων, βλ D. Simpson, General Equilibrium Analysis, σελ, 154

⁶³ με άλλα λόγια ένα εμπόρευμα το οποίο θα είναι ελεύθερο.

Η γενική ομοιότητα του συστήματος $Ax^{t+1} \leq Bx^t$, με τα άλλα κλασικά συστήματα συνεπάγεται, ότι έχει ένα δυϊκό σύστημα, και μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να μας βοηθήσει στην εξεύρεση λύσεων. Επομένως, αφού το $Ax^{t+1} \leq Bx^t$ είναι ένα σύστημα κατανομής, τότε πρέπει να περιμένουμε από το δυϊκό είναι ένα σύστημα εκτίμησης.

Ορίζεται σαν p^t το $1/x^t$ διάνυσμα των τιμών των n εμπορευμάτων την χρονική περίοδο t και σαν r το ποσοστό κέρδους της υπό εξέταση τεχνικής. Έτσι σχηματίζει το σύστημα τιμών:

$$p^t A(1+r) \geq p^{t+1} B \quad (2)$$

Η συνθήκη ισορροπίας, για το σύστημα των τιμών είναι, ότι η προεξοφλημένη απόδοση από την μοναδιαίας έντασης διαδικασία, δεν μπορεί να υπερβαίνει το μοναδιαίο κόστος της. Για να μετατραπούν οι ανισότητες σε ισότητες, γίνεται από τον von Neumann, μια ακόμα υπόθεση, ότι δηλαδή αν η αξία των εισροών για την παραγωγή μίας μονάδας εμπορεύματος (το κόστος παραγωγής συν ένα ποσοστό κέρδους επ' αυτής), υπερβαίνει την αξία των εκροών την επόμενη περίοδο, τότε η εν λόγω διαδικασία λειτουργεί με ζημία και το επίπεδο δραστηριότητάς της θα είναι ίσο με μηδέν, κατά συνέπεια δεν θα χρησιμοποιείται⁶⁴.

Στην συνέχεια ο Simpson, έχοντας υπ' όψιν του, ότι το σύστημα τιμών είναι το δυϊκό σύστημα του συστήματος των φυσικών ποσοτήτων, προχωρά στην προσπάθεια λύσης του, σχηματίζοντας ένα σύστημα από τις σχέσεις (1) και (2). Ωστόσο παρατηρεί, ότι υπάρχει παραπάνω από μια λύση του συστήματος. Έτσι χρησιμοποιεί την υπόθεση του ίδιου του von Neumann, ότι η ισορροπία είναι μια κατάσταση ισόρροπης μεγέθυνσης, στην οποία όλα τα επίπεδα δραστηριότητας, πολλαπλασιάζονται από έναν κοινό ρυθμό μεγέθυνσης, μετατρέπει το x^{t+1} σε $(1+g)x^t$.

Όπως ξέρουμε από τον ίδιο τον von Neumann, σε κατάσταση ισορροπίας, οι τιμές παραμένουν σταθερές, επομένως στην σχέση (2) το $p^{t+1} = p^t = p$

Συνεπώς η (1) γράφεται ως:

$$(1+g)Ax \leq Bx \quad (3)$$

⁶⁴ βλ D. Simpson, General Equilibrium Analysis, σελ 154- 155

Και η (2) ως:

$$p_A(1+r) \geq p_B \quad (4)$$

Το σύστημα εξισώσεων, που σχηματίζεται αποτελείται από $n+m$ σχέσεις και $n+m+2$ αγνώστους. Με άλλα λόγια παρουσιάζει δύο β.ε. , οι οποίοι μπορούν να απαλείφουν, παίρνοντας σχετικές τιμές και σχετικά επίπεδα δραστηριότητας. Επομένως το σύστημα έχει $n+m$ αγνώστους. Στο σημείο αυτό ο τονίζει ότι όταν υπάρχει ανισότητα σε μια από τις $n+m$ σχέσεις, τότε η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή- δηλαδή είτε το g είτε το r , είναι ίση με 0. Την "duality" και τις ιδιότητες που εκρέουν από αυτή, χρησιμοποίησε και ο von Neumann, για να βρει λύση στο υπό εξέταση σύστημα.

Η λύση του von Neumann ήταν, ότι εάν και εφόσον υπάρχει μια λύση, τότε το ποσοστό κέρδους (r) ισούται με τον ρυθμό μεγέθυνσης (g).

Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε, αν πολλαπλασιάσουμε το σύστημα φυσικών ποσοτήτων και το σύστημα των τιμών, με το διάνυσμα των τιμών και το διάνυσμα των επιπέδων δραστηριότητας αντίστοιχα. Οι παραπάνω συνθήκες για την ύπαρξη μόνο ισοτήτων στο σύστημα, εξασφαλίζει και εδώ ότι δεν θα υπάρχουν ανισότητες. Επομένως έχουμε :

$$(1+g)p_Ax \leq p_Bx \quad \square \quad r = \frac{p_Ax}{p_Bx} - 1 \quad (5)$$

Και:

$$p_Ax(1+r) \geq p_Bx \quad \square \quad g = \frac{p_Ax}{p_Bx} - 1 \quad (6)$$

Συνεπώς βλέπουμε, ότι η λύση που δίνει ο von Neumann, πρέπει να ικανοποιεί τον χρυσό κανόνα της συσσώρευσης⁶⁵, δηλαδή το ποσοστό κέρδους να ισούται με το ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος.

Τέλος ο Simpson κάνει μια σύντομη κριτική στις υποθέσεις του μοντέλου του von Neumann. Θεωρεί την υπόθεση της σταθερής τεχνολογίας και κατά συνέπεια και της σύνθεσης της κατανάλωσης, μη ρεαλιστικές. Όμως, όπως τονίζει και ο ίδιος αυτές οι περιπτώσεις μπορούν να ενσωματωθούν στο μοντέλο⁶⁶. Η ποιο «γενναία» προϋπόθεση, όμως δείχνει να είναι αυτή του ομοιόμορφου ρυθμού

⁶⁵ βλ H.G. Jones, Εισαγωγή στις σύγχρονες θεωρίες οικονομικής μεγέθυνσης, σελ 245-252

⁶⁶ βλ Champertowne και D. Simpson, General Equilibrium Analysis, σελ. 158

μεγέθυνσης για όλο το σύστημα, η οποία κατά τον Simpson , δεν δείχνει να επαληθεύεται εμπειρικά.

IV.3. Von Neumann: μια γενική λύση του Προβλήματος

Μια ακόμα λύση, γενική αυτή τη φορά, δίνει ο Γ. Σταμάτης, στο άρθρο του « Μια γενική λύση του μοντέλου γενικής ισορροπίας και οικονομικής μεγέθυνσης του John von Neumann για, διαχωρίσιμες ή μη διαχωρίσιμες και απλώς η πολλαπλώς διασπώμενες τεχνικές παραγωγής». Στο άρθρο αυτό⁶⁷, αποδεικνύεται ότι «...υπάρχει ένα μέγιστο ποσοστό κέρδους, το οποίο είναι ίσο με τον ως προς τις επενδύσεις μέγιστο υλικό ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος».

Έτσι τα δεδομένα του προβλήματος είναι τα εξής:

Έστω A , η κατά τα μισθιακά εμπορεύματα προσαυξημένη μήτρα των τεχνικών συντελεστών, ανά μονάδα άμεσης εργασίας και B η μήτρα των εκροών, ανά μονάδα άμεσης εργασίας⁶⁸. Και οι δύο μήτρες, είναι διαστάσεων $n \times m$, όπου $n < m$. Έτσι το υπό εξέταση σύστημα, χαρακτηρίζεται από την τεχνολογία $[A, B]$.

Επομένως το σύστημα αποτελείται από $\binom{m}{n}$ διαφορετικές τετράγωνες τεχνικές παραγωγής, οι οποίες δύνανται να παράξουν και τα n εμπορεύματα.

Στην συνέχεια ορίζονται οι τεχνικές $[A^{(d)}, B^{(d)}]$, $d \in D = \{1, 2, \dots, \binom{m}{n}\}$, όπου $A^{(d)}$ και $B^{(d)}$, η κατά τα μισθιακά εμπορεύματα $n \times n$ προσαυξημένη μήτρα των τεχνικών συντελεστών, ανά μονάδα άμεσης εργασίας και η μήτρα των εκροών, ανά μονάδα άμεσης εργασίας, αντίστοιχα. Επιπλέον, καμία από δυο αυτές μήτρες δεν έχει μηδενικές στήλες⁶⁹, δηλαδή δεν υπάρχουν εισροές χωρίς εκροές και τούμπαλιν. Επιπλέον, για την $B^{(d)}$ ισχύει, ότι καμία της γραμμή δεν είναι μηδενική,

⁶⁷ Γ. Σταμάτης, Μια γενική λύση του μοντέλου γενικής ισορροπίας και οικονομικής μεγέθυνσης του John von Neumann για, διαχωρίσιμες ή μη διαχωρίσιμες και απλώς η πολλαπλώς διασπώμενες τεχνικές παραγωγής, στο βιβλίο Κείμενα Οικονομικής θεωρίας και πολιτικής, τόμος 4^{ος}, σελ. 207-230

⁶⁸ Υποθέτουμε, ότι καμία στήλη και γραμμή της A και της B δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων γραμμών και στηλών της A και της B αντίστοιχα.

⁶⁹ $a_j \geq 0$ και $b_j \geq 0$

με άλλα λόγια, ότι δύναται να παράγει, όλα τα n δυνάμενα να παραχθούν εμπορεύματα⁷⁰. Γίνεται για μία ακόμα φορά η υπόθεση, ότι και στις $A^{(d)}$ και $B^{(d)}$ δεν υπάρχουν γραμμικώς εξαρτώμενες γραμμές και στήλες, δηλαδή οι μήτρες αυτές δεν είναι ιδιάζουσες. Επιπλέον, όλες οι τεχνικές $[A^{(d)}, B^{(d)}]$ διαφέρουν ανά δύο κατά μία διαδικασία παραγωγής.

Επιπλέον λόγω του, ότι $m > n$, δύναται να υπάρχουν και τεχνικές $[A^{(f)}, B^{(f)}]$, που διαφέρουν από κάποια άλλη τεχνική $[A^{(g)}, B^{(g)}]$, κατά μία ή περισσότερες ή όλες τις n διαδικασίες παραγωγής⁷¹

Εκτός από τις διαθέσιμες $\binom{m}{n}$, τεχνικές παραγωγής, υπάρχουν -στην περίπτωση που υπάρχουν διαχωρίσιμες⁷² ή διασπώμενες τεχνικές- και σ , έστω στο πλήθος, τεχνικές που περιλαμβάνουν τα ανεξάρτητα τμήματα των αρχικών $\binom{m}{n}$ τεχνικών.

Στην περίπτωση που είναι διασπώμενες παράγει k στον αριθμό εμπορεύματα, όπου k , $0 \leq k < n$, χρησιμοποιώντας k διαδικασίες παραγωγής. Αντίθετα, στην περίπτωση που είναι διαχωρίσιμες, παράγει k εμπορεύματα, όπου k , $0 \leq k \leq n$, χρησιμοποιώντας k διαδικασίες παραγωγής.

Συνοψίζοντας, βλέπουμε, ότι υπάρχουν $\xi = \binom{m}{n} + \sigma$ διαθέσιμες τεχνικές, οι οποίες δύνανται να παράξουν από ένα μέχρι και τα n δυνάμενα να παραχθούν εμπορεύματα.

Επιπλέον γίνεται η υπόθεση, ότι καμία διαδικασία παραγωγής δεν είναι πλήρως αυτοματοποιημένη⁷³, Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα αναπαραγωγικό εμπόρευμα. Έτσι αποκλείεται η περίπτωση ένα σύστημα να διαλύεται σε δύο ή περισσότερα, μεταξύ τους ανεξάρτητα, υποσυστήματα, τα οποία παράγουν διαφορετικά -το ένα από το άλλο- εμπορεύματα.

Επιπλέον γίνεται η υπόθεση, ότι οι τεχνικές, για τις οποίες γίνεται λόγος στο άρθρο, είναι τετράγωνες.

⁷⁰ $b_{ij} \geq 0$

⁷¹ $g, f \in D$ και $g \neq f$

⁷² Διαχωρίσιμες εννοούμε τις τεχνικές, που δύνανται να παράγει ένα ακαθάριστο προϊόν, που περιέχει όλα τα n δυνάμενα να παραχθούν εμπορεύματα, σε θετικές ποσότητες, χρησιμοποιώντας λιγότερες από τις n διαδικασίες παραγωγής.

⁷³ Δηλαδή η άμεση εργασία εισέρχεται άμεσα ή έμμεσα σε όλες τις διαδικασίες παραγωγής

Είναι δυνατόν να έχουμε, είτε τεχνικές απλής παραγωγής, είτε τεχνικές σύνθετης παραγωγής⁷⁴. Στην περίπτωση της απλής παραγωγής μπορούμε να έχουμε είτε διασπώμενες, είτε μη διασπώμενες τεχνικές παραγωγής. Αντίθετα μια τεχνική σύνθετης παραγωγής, είναι δυνατόν και αυτή να είναι διασπώμενη, ή μη διασπώμενη. Όμως στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής έχουμε 4 υποπεριπτώσεις τεχνικών. Είτε αυτές είναι μη διαχωρίσιμες και μη διασπώμενες, είτε διαχωρίσιμες και μη διασπώμενες, είτε διαχωρίσιμες και διασπώμενες, είτε μη διαχωρίσιμες και διασπώμενες.

Γίνεται επιπλέον η παραδοχή, ότι μια τεχνική γίνεται να διασπάται απλά, δηλαδή σε δύο τμήματα, είτε πολλαπλά δηλαδή τ φορές σε t+1 τμήματα.

Τελευταία υπόθεση που γίνεται είναι αυτή ότι, κάθε τεχνική είναι r₀-προσοδοφόρα. Στην περίπτωση που είναι μη διασπώμενη ή διασπώμενη, ισχύει αντίστοιχα:

$$[B^{(d)} - (1 + r_0) A^{(d)}] > 0 \text{ και}$$

$$[B^{(d)} - (1 + r_0) A^{(d)}] \geq 0$$

Βέβαια $(1 + r_0) A^{(d)} \geq 0$ $\square -1 > r_0$, όπου r₀ ένα βαθμωτό.

Για λόγους απλούστευσης δεχόμαστε, ότι $-1 < r_0 \leq 0$.

Έτσι για μη διασπώμενες και διασπώμενες τεχνικές έχουμε αντίστοιχα:

$$[B^{(d)} - A^{(d)}]^{-1} > 0 \text{ και}$$

$$[B^{(d)} - A^{(d)}]^{-1} \geq 0.$$

Στην συνέχεια ορίζεται το 1^η διάνυσμα p^v, των τιμών των n δυνάμεων να παραχθούν εμπορευμάτων, από τις ξ διαθέσιμες τεχνικές παραγωγής. Σε κάθε τεχνική αντιστοιχεί ένα μόνο διάνυσμα p^v για το οποίο ισχύει:

$$p^v \geq 0 \quad (1)$$

Επιπλέον ορίζεται το m^x1 διάνυσμα, x^v, των επιπέδων δραστηριοτήτων του συστήματος. Κάθε τέτοιο διάνυσμα έχει k θετικές και m-k μηδενικές συνιστώσες.

Με άλλα λόγια

$$x^v \geq 0 \quad (2)$$

Έτσι σε κάθε x^v αντιστοιχεί μια τεχνική παραγωγής, ενώ σε κάθε τεχνική παραγωγής αντιστοιχεί ένα διάνυσμα τιμών p^v.

⁷⁴ στο άρθρο αυτό υποτίθεται η ύπαρξη «ομαλά» συμπεριφερόμενων διασπώμενων και μη διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής

Βάσει όλων αυτών, προσδιορίζεται το ποσοστό κέρδους αφού τυποποιήσουμε, με οποιοδήποτε τρόπο τα διανύσματα των τιμών, ώστε να είναι πλήρως προσδιορισμένα, τότε βάσει της τεχνολογίας [A,B] έχουμε, για το ποσοστό κέρδους $r^v(p^v, x^v)$ της τεχνικής v ⁷⁵:

$$r^v(p^v, x^v) = \frac{p^v Bx^v}{p^v Ax^v} - 1, \text{ με } p^v, x^v \geq 0.$$

Έτσι στην συνέχεια τίθεται το πρόβλημα στην τελική του μορφή. Ποιο συγκεκριμένα, να βρεθεί εκείνη η τεχνική⁷⁶ για την οποία το $r^v(p^v, x^v)$ να είναι μέγιστο.

Στην συνέχεια ο συγγραφέας, αφού ορίσει τα:

- $\Delta x^v = \Delta x^a = x^b - x^a$
- $\Delta p^v = \Delta p^a = p^b - p^a$
- $\Delta r^v = \Delta r^a = r^b - r^a$
- $x^v = x^a, p^v = p^a, r^v = r^a$

Για λόγους συντομίας θα αναφέρουμε το αποτέλεσμα που παίρνουμε για μία μεταβολή του r^v :

$$\Delta r^a = \frac{\Delta p^a Bx^a + p^a B \Delta x^a + \Delta p^a B \Delta x^a}{p^a Ax^a + \Delta p^a Ax^a + p^a A \Delta x^a + \Delta p^a A \Delta x^a} - \frac{(1+r^a)[\Delta p^a Ax^a + p^a A \Delta x^a + \Delta p^a A \Delta x^a]}{p^a Ax^a + \Delta p^a Ax^a + p^a A \Delta x^a + \Delta p^a A \Delta x^a} \text{ Στην}$$

συνέχεια εξάγονται οι ακόλουθες συνθήκες, ώστε το r^v να είναι μέγιστο:

- $\Delta r^a \leq 0$
- Μετά από πράξεις, προκύπτει από την σχέση για την μεταβολή του r^v :

$$p^a [B - (1+r^a)A] \Delta x^a + \Delta p^a [B - (1+r^a)A] x^a + \Delta p^a [B - (1+r^a)A] \Delta x^a \leq 0$$

Η συνθήκη αυτή όμως, έχει και ένα οικονομικό νόημα. Έτσι, για να είναι το ποσοστό κέρδους της τεχνικής v , μέγιστο, πρέπει τα υπερκέρδη που δημιουργούνται από μια μεταβολή Δx^a , και αντίστοιχα από μια μεταβολή Δp^v , - από την μετάβαση από την μια τεχνική σε μία άλλη- πρέπει να είναι μικρότερα η ίσα του μηδενός.

⁷⁵ αφού έχουμε ξ διαφορετικές τεχνικές παραγωγής, επομένως έχουμε και ξ διαφορετικές τιμές για το p^v , οι οποίες δεν είναι απαραίτητο να είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Με άλλα λόγια το $r^v(p^v, x^v)$ είναι, σε τελευταία ανάλυση, διακριτή συνάρτηση του x^v

⁷⁶ δηλαδή ψάχνουμε εκείνο το x^v και εκείνες τις k από τις m διαθέσιμες διαδικασίες παραγωγής, οι οποίες συνεπάγονται το μέγιστο ποσοστό κέρδους

Στην συνέχεια, και βάσει των ορισμών για τις μεταβολές των Δx^v και Δr^v , παίρνουμε, αφού συμβολίσουμε ως $C \equiv [B - (1+r^v)A]$, την ακόλουθη συνθήκη:

$$p^\beta Cx^\beta \leq p^\alpha Cx^\alpha$$

και για $p^\beta Cx^\alpha = 0$ η⁷⁷:

$$p^\beta Cx^\beta \leq p^\beta Cx^\alpha$$

Στην συνέχεια, αφού προσδιορίστηκαν οι συνθήκες με τις οποίες το ποσοστό κέρδους είναι για μία τεχνική, είναι μέγιστο, εξετάζεται και το ζήτημα του προσδιορισμού του υλικού ρυθμού μεγέθυνσης του συστήματος.

Ορίζεται⁷⁸ πλέον το x^* $m \times 1$ διάνυσμα των επιπέδων δραστηριοτήτων του συστήματος. Το διάνυσμα αυτό έχει k θετικές συνιστώσες και $m-k$ μηδενικές. Δηλαδή τα μηδενικά στοιχεία στο διάνυσμα δραστηριοτήτων είναι αυτά που αποκλείουν τις $m-k$ διαδικασίες παραγωγής, που δεν μεγιστοποιούν το ποσοστό κέρδους, και κατά συνέπεια δεν χρησιμοποιούνται. Έτσι αν στις μήτρες A και B αποκλειστούν οι διαδικασίες παραγωγής, που αντιστοιχούν σε μηδενικές συνιστώσες του διανύσματος x^* , προκύπτουν οι $k \times k$ μήτρες A^* και B^* . Επιπλέον ορίζεται, το διάνυσμα x $k \times 1$ διάνυσμα των επιπέδων δραστηριότητας που αντιστοιχούν στην μεγιστοποιούσα το ποσοστό κέρδους τεχνική, $[A^*, B^*]$. Ομοίως ορίζουμε και το $1 \times k$ p διάνυσμα των τιμών⁷⁹ που αντιστοιχεί στην τεχνική $[A^*, B^*]$. Το οποίο είναι θετικό, δηλαδή

$$p > 0$$

Συνεπώς για το ποσοστό κέρδους r^* ισχύει:

$$r^*(p, x) = \frac{pB^*x}{pA^*x} - 1$$

Συνεπάγεται ότι:

$$p^*[B^* - (1+r^*)A^*]x = 0$$

και επειδή το x είναι μη προσδιορισμένο και θετικό ισχύει:

$$p^*[B^* - (1+r^*)A^*] = 0 \quad 80$$

⁷⁷ η απόδειξη αυτού βρίσκεται στο υπό εξέταση άρθρο, και έτσι θα ήταν περιττό να αναφερθούμε σε αυτήν

⁷⁸ τα σύμβολα x και p είναι διαφορετικά διανύσματα από αυτά που εμφανίστηκαν στην αρχή του κεφαλαίου

⁷⁹ το οποίο είναι πλήρως προσδιορισμένο, εξαιρείται ενός βαθμωτού

⁸⁰ πρόκειται δηλαδή για το γνωστό μας σύστημα τιμών

Στην συνέχεια γίνεται η υπόθεση, ότι στην τεχνική $[A^*, B^*]$ αντιστοιχεί ένας ενιαίος για τα k πράγματι παραχθέντα εμπορεύματα, ενιαίος υλικός ρυθμός μεγέθυνσης μ^* , ο οποίος να είναι ίσος με τον μέγιστο ρυθμό μεγέθυνσης. Επομένως:

$$r^* = \mu^*$$

Σχηματίζεται το σύστημα φυσικών ποσοτήτων:

$$B^*x = (1 + \mu) A^*$$

Θεωρείται ότι $(B^* - A^*)^{-1} > 0$

Και για το σύστημα τιμών παίρνουμε ότι:

$$p(I - r^*H^*) = 0, \text{ όπου } H^* = A^*(B^* - A^*)^{-1} (\geq 0)$$

Αντίστοιχα παίρνουμε για το σύστημα των φυσικών ποσοτήτων:

$$(I - \mu^*Z^*) = 0, \text{ όπου } Z^* = B^* - A^* (\geq 0)$$

Όμως το p και το x είναι αριστερό και δεξί ιδιοδιάνυσμα της μήτρας H^* και Z^* αντίστοιχα.

Συνεπώς⁸¹:

$$r^* = \frac{1}{\lambda_{H^*}} > 0$$

και

$$\mu^* = \frac{1}{\lambda_{Z^*}} > 0$$

Άρα υπάρχει λύση στο σύστημα του ν.Ν. , όταν $r^* = \mu^*$. Όμως, όπως αναφέρεται παραπάνω, είναι δυνατόν να υπάρχουν παραπάνω από μία μεγιστοποιούσες το ποσοστό κέρδους τεχνικές. Συνεπώς υπάρχουν παραπάνω από ένα αντίστοιχα x^* , τα οποία μεγιστοποιούν το ποσοστό κέρδους. Το σύστημα που περιγράφεται είναι πρότυπο, αφού εισροές, εκροές και υπερπροϊόν, έχουν την ίδια σύνθεση, και πρότυπο λόγο ίσο με μ^* , πράγμα που φαίνεται από το σύστημα φυσικών ποσοτήτων⁸².

⁸¹ όπου λ_{H^*} και λ_{Z^*} οι μέγιστες ιδιοτιμές των μητρών H^* και Z^* αντίστοιχα

⁸² είναι σαφής η ομοιότητα του με το σύστημα του Charasoff και μάλιστα είναι όμοιος ο τρόπος προσδιορισμού του ποσοστού κέρδους.

Στην συνέχεια το άρθρο, πραγματεύεται το πρόβλημα του ν.Ν. σαν πρόβλημα ελαχιστοποίησης-μεγιστοποίησης⁸³. Η τελευταία μέθοδος, όμως δεν είναι η κατάλληλη για την πραγμάτευση του προβλήματος αυτού.⁸⁴ Η πραγμάτευση του, δεν θα παρουσιαστεί στο παρόν κείμενο, αφού μπορεί εύκολα να βρεθεί στο πρωτότυπο άρθρο. Αρκούμαστε να αναφέρουμε, ότι στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης-μεγιστοποίησης, δεν αναζητούμε τον μέγιστο υλικό ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος, αλλά τον μέγιστο ονομαστικό ρυθμό μεγέθυνσης. Δηλαδή για να είναι πλήρης ο παραπάνω τρόπος επίλυσης, και να απαντάει στο πρόβλημα του ν.Ν., πρέπει επιπλέον να αποδείξει κάποιος, ότι ο μέγιστος υλικός ρυθμός μεγέθυνσης ισούται με τον μέγιστο ονομαστικό ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος. Τέλος για να υπάρχει λύση, στο πρότυπο αυτό σύστημα, πρέπει επιπλέον να ισχύει εκτός του $r^* = \mu^*$ και $p = p^* > 0$ και $x = x^* > 0$

Στην συνέχεια στο άρθρο, δύνεται η λύση του συστήματος, στις περιπτώσεις:

- διασπώμενων και μη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής
- μη διαχωρίσιμων και μη διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής
- διαχωρίσιμων και μη διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής
- διαχωρίσιμων και διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής
- μη διαχωρίσιμων και διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής

Έτσι, θα αναφερθούμε στη λύση για κάθε δυνατό είδος τεχνικών. Υποθέτοντας,

ότι πλέον υπάρχουν $\xi = \binom{m}{n}$ διαφορετικές τετράγωνες τεχνικές παραγωγής, οι

οποίες δύνανται να παράξουν και τα n εμπορεύματα. Αναλυτικότερα η τεχνολογία του συστήματος αποτελείται από⁸⁵:

- $\zeta, \zeta \geq 0$ το πλήθος διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}]$

⁸³ Μεγιστοποιείται το ποσοστό κέρδους ($r^v = \frac{p^v Bx^v}{p^v Ax^v} - 1$), ως προς x^v και ο ονομαστικός

ρυθμός οικονομικής μεγέθυνσης $r^v = \frac{p^v Bx^v}{p^v Ax^v} - 1$, ως προς p^v

⁸⁴ Η λύση του προβλήματος σαν πρόβλημα μεγιστοποίησης-μεγιστοποίησης, προϋποθέτει, ότι το ποσοστό κέρδους είναι συνεχής συνάρτηση

⁸⁵ Γ. Σταμάτης, Μια γενική λύση του μοντέλου γενικής ισορροπίας και οικονομικής μεγέθυνσης του John von Neumann για, διαχωρίσιμες ή μη διαχωρίσιμες και απλώς ή πολλαπλώς διασπώμενες τεχνικές παραγωγής, στο βιβλίο Κείμενα Οικονομικής θεωρίας και πολιτικής, τόμος 4ος, σελ. 231-232

- $\eta, \eta \geq 0$ το πλήθος διαχωρίσιμων μη διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(\beta)}, B^{(\beta)}]$
- $\theta, \theta \geq 0$ το πλήθος διαχωρίσιμων απλά διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(\gamma)}, B^{(\gamma)}]$
- $\iota, \iota \geq 0$ το πλήθος μη διαχωρίσιμων απλά διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(\delta)}, B^{(\delta)}]$
- $\kappa, \kappa \geq 0$ το πλήθος διπλά διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(\epsilon)}, B^{(\epsilon)}]$

όπου

$$\zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa = \xi$$

Στην περίπτωση λοιπόν, που υπάρχει λύση στο πρόβλημα του ν.Ν. και η τεχνολογία χαρακτηρίζεται, από την ύπαρξη και των 5 ειδών τεχνικών, έχουμε για το r^* και το μ^* :

$$r^* = \mu^* = \min[\lambda_{H^{(a)}}, \lambda_{H^{(b)}}, \lambda_{H^{(\gamma)}}, \lambda_{H^{(\delta)}}, \lambda_{H^{(\epsilon)}}] = \min[\lambda_{Z^{(a)}}, \lambda_{Z^{(b)}}, \lambda_{Z^{(\gamma)}}, \lambda_{Z^{(\delta)}}, \lambda_{Z^{(\epsilon)}}]$$

Επομένως, η λύση στο μοντέλο του ν.Ν. –όταν βέβαια αυτή υπάρχει-, θα είναι, για κάθε είδος τεχνικών, μια εκ των πέντε, αντίστοιχα που αναφέρθηκαν στην παραπάνω σχέση.

Στο σημείο αυτό, ολοκληρώνοντας θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε επιγραμματικά και μερικά από τα συμπεράσματα του ίδιου του συγγραφέα, όπως παρουσιάζονται στο εν λόγω άρθρο:

1. Το πρόβλημα του ν.Ν. είναι μάλλον ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης, παρά ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης-μεγιστοποίησης
2. Μηδενικές τιμές πράγματι παραχθέντων εμπορευμάτων ενέχουν πάντα τυχαίες λύσεις. Αφού, όπως προείπαμε, για να υπάρχει λύση πρέπει να ισχύει $p = p^* > 0$
3. Η προσέγγιση του προβλήματος, σαν πρόβλημα ελαχιστοποίησης-μεγιστοποίησης, δεν απαντά στο ερώτημα του ν.Ν., αφού προσδιορίζει, όχι τον υλικό ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος, αλλά τον ονομαστικό ρυθμό μεγέθυνσης. Τίποτα όμως δεν μπορεί να μας εγγυηθεί, ότι οι ρυθμοί αυτοί είναι μεταξύ τους ίσοι.
4. Σε αντίθεση με το μοντέλο του ν.Ν., στο υπό εξέταση άρθρο σε συγκεκριμένες συνθήκες είναι δυνατόν να μην υπάρχει ισορροπία

5. Ένα άλλο ζήτημα που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι αυτό των μηδενικών τιμών εμπορευμάτων. Η ύπαρξη όμως μηδενικών τιμών είναι δυνατή στην περίπτωση διασπώμενων ή διαχωρίσιμων τεχνικών παραγωγής, όπου η μεγιστοποιούσα το ποσοστό κέρδους τεχνική, παράγει ναι μεν τα η εμπορεύματα, χρησιμοποιώντας, όμως λιγότερες από η διαδικασίες παραγωγής. Πρόκειται δηλαδή για μια «πυχαιά» λύση. Το τελευταίο διαφωτίζει περισσότερο και το προηγούμενο (το δεύτερο δηλαδή) συμπέρασμα. Οι μηδενικές τιμές των εμπορευμάτων όμως, σχετίζονται με τον όρο «ελεύθερα αγαθά». Όμως τα ελεύθερα αγαθά, είναι συνήθως μη παραγόμενα εμπορεύματα, στα οποία συνήθως η προσφορά τους εκτείνεται είτε σε απεριόριστες είτε σε μεγαλύτερες από τις αναγκαίες ποσότητες. Το τελευταίο όμως, αντιβαίνει στο κύριο χαρακτηριστικό του υπό εξέταση συστήματος, δηλαδή στο ότι όλα τα εμπορεύματα είναι (ανα)παραγόμενα. Άρα το γεγονός, ότι στο μοντέλο του ν.Ν. υπάρχουν εμπορεύματα τα οποία δύναται να παραχθούν και πράγματι παράγονται, αλλά ωστόσο έχουν μηδενικές τιμές, οφείλεται στην αξίωσή να υπάρχει ένα ενιαίο για όλα τα εμπορεύματα ποσοστό κέρδους. Επομένως η ύπαρξη μηδενικών τιμών είναι αποτέλεσμα της μαθηματικής πραγμάτευσης του ζητήματος, και δεν χρήζει οικονομικής ερμηνείας στο παρόν υπόδειγμα.
6. Το σύστημα ,που προκύπτει από το μοντέλο του ν.Ν. ,είναι ένα πρότυπο σύστημα, το οποίο αποτελεί μάλλον μαθηματική συνθήκη για την ύπαρξη ενός μέγιστου υλικού ρυθμού μεγέθυνσης, για όλα τα παραγόμενα εμπορεύματα. Ενώ δεν υπάρχει κανένας λόγος, τα απαραίτητα για την παραγωγή εμπορεύματα, δηλαδή η ζήτηση στην περίπτωση μας, να έχει την σύνθεση ενός πρότυπου εμπορεύματος. Πρόκειται, εν ολίγοις, για «μια χωρίς οικονομικό νόημα μαθηματική συνθήκη».
7. Τέλος στο σύστημα του ν.Ν. ,η συνήθης αξίωση για την ύπαρξη μιας μοναδικής λύσης, στο σύστημα γενικής ισορροπίας δείχνει να μην ικανοποιείται. Αυτό γίνεται ξεκάθαρο, αν αναλογιστούμε το γεγονός, ότι δύνανται να υπάρχουν παραπάνω από μια μεγιστοποιούσες το

ποσοστό κέρδους και τον υλικό ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος, τεχνικές.

8. Τέλος, όταν οι υπό εξέταση τεχνικές είναι πολυδιασπόμενες, τότε στο μοντέλο του v.N., όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός διασπασιμότητας του συστήματος, τόσο μικρότερος είναι ο αριθμός των πράγματι παραχθέντων εμπορευμάτων σε σχέση με τα δυνάμενα να παραχθούν εμπορεύματα.

Συμπερασματικά, το άρθρο « Μια γενική λύση του μοντέλου γενικής ισορροπίας και οικονομικής μεγέθυνσης του John von Neumann για, διαχωρίσιμες ή μη διαχωρίσιμες και απλώς ή πολλαπλώς διασπώμενες τεχνικές παραγωγής», προσδίδει μια νέα οπτική στο μοντέλο του v.N.. Αποδεικνύει την ύπαρξη ενός μέγιστου ποσοστού κέρδους, όχι με την χρήση ενός Fixed Point Theorem, αλλά με την εξέταση γραμμικών συστημάτων παραγωγής, που ανταποκρίνονται σ' όλες τις δυνατές περιπτώσεις⁸⁶. Επιπλέον θέτει το πρόβλημα, όχι σαν ένα κοινό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, δηλαδή ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης-μεγιστοποίησης, αλλά σαν ένα πρόβλημα επιλογής της πλέον κερδοφόρας τεχνικής⁸⁷. Επιπλέον ασχολείται και με το πρόβλημα της ύπαρξης μηδενικών τιμών εμπορευμάτων. Τέλος αποδεικνύει, ότι πέρα από την περίπτωση ύπαρξης παραπάνω του ενός σημείων ισορροπίας, είναι δυνατή και η μη ύπαρξη αυτής.

⁸⁶ με την χρήση των θεωρημάτων Perron Frobenius για διασπώμενες και μη διασπώμενες μήτρες

⁸⁷ το οποίο δεν αρκείται στην πραγμάτευση των μαθηματικών συνθηκών ύπαρξης της ισορροπίας, αλλά ασχολείται και με τα συνεπαγόμενα οικονομικά ζητήματα που ανακύπτουν

V.ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΕΝΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΤΟΥ JOHN VON NEUMANN.

V.1.Von Neumann και Piero Sraffa

Ανάμεσα στα δύο μοντέλα -αυτό του von Neumann και αυτό του Sraffa- παρόλο που εξετάζουν διαφορετικές καταστάσεις, δείχνουν να έχουν αρκετές ομοιότητες. Μάλιστα τα δυο αυτά μοντέλα επηρέασαν σημαντικά την έως τώρα «κλασική» σκέψη. Παρακάτω σε συντομία αναφέρουμε τις ομοιότητες και τις διαφορές τους.

Ο von Neumann κάνει την υπόθεση ύπαρξης μιας οικονομίας, που χαρακτηρίζεται από σταθερές αποδόσεις κλίμακας. Αντίθετα ο Sraffa ασχολείται με την οικοδόμηση ενός μοντέλου, το οποίο δεν επηρεάζεται από μεταβολές στις αποδόσεις κλίμακας.

Στον von Neumann, οι εργαζόμενοι παίρνουν ως μισθό στην αρχή της περιόδου τα απαραίτητα προς το ζην. Στον Sraffa από την άλλη μεριά, αν και αρχικά γίνεται η υπόθεση, ότι οι μισθοί προκαταβάλλονται, στην συνέχεια η υπόθεση αυτή εγκαταλείπεται⁸⁸. Στην συνέχεια υποθέτει, ότι οι εργάτες λαμβάνουν σαν πληρωμή, ένα μέρος του προσφερόμενου προϊόντος (δηλαδή του καθαρού⁸⁹). Σε αντίθεση με τον von Neumann, στο μοντέλο του Sraffa, μια αλλαγή των σχετικών τιμών, μπορεί να έχει αντίκτυπο, στο διάνυσμα κατανάλωσης των εργατών (στους πραγματικούς μισθούς). Όμως ανάμεσα στα δύο μοντέλα υπάρχει μια σημαντική ομοιότητα. Και οι δύο θέτουν εξωγενώς μια από τις δύο μεταβλητές της κατανομής του εισοδήματος, εν προκειμένω το πραγματικό ωρομίσθιο. Μια ακόμα ομοιότητα, είναι ότι και οι δύο –σε αντίθεση με τους νεοκλασικούς- δεν δέχονται σαν εξωγενώς δεδομένα τα αρχικά αποθέματα, των παραγωγικών συντελεστών.

⁸⁸ Βλ Kurz & Salvadori, Sraffa and von Neumann, στο Review of Political Economy, volume 13, November 2, 2001, σελ, 163

⁸⁹ βλ Γ. Σταμάτης, Θεωρία της αξίας και της υπεραξίας, σελ 97

Και οι δύο, εξετάζουν, το ζήτημα του σταθερού κεφαλαίου, σε ένα πλαίσιο σύνθετης παραγωγής. Αυτό το σκεπτικό μπορεί κανείς να το εντοπίσει κανείς στον Robert Torrens⁹⁰, στον David Ricardo, στον Malthus και στον Marx.

Στον von Neumann, όπως αναφέραμε και παραπάνω, διαφορετικές βαθμίδες φθοράς του κεφαλαίου, εισάγονται σαν ξεχωριστό εμπόρευμα στην μήτρα των εισροών σε μέσα παραγωγής και μισθιακά εμπορεύματα⁹¹. Ο Sraffa από την άλλη μεριά, εισάγει μια δική του μέθοδο, η οποία επιτρέπει να εξακριβώσει κανείς το ποσό που δαπανάται ετησίως, για την αμοιβή και την φθορά του κεφαλαίου. Δύναται επιπλέον να εξακριβώσει κανείς ποια από τα συμπεράσματα που ελέχθησαν, αναφέρονται στη θεωρία του κεφαλαίου⁹².

Στον von Neumann, υιοθετείται ο ρόλος των «ελεύθερων αγαθών»⁹³, ενώ στον Sraffa δεν γίνεται αναφορά σε αυτά. Στον Sraffa, δεν υπάρχουν ανισότητες και ορθογώνιες τεχνικές, όπως στον von Neumann, αλλά ισότητες και τετράγωνες τεχνικές παραγωγής.

Ο Sraffa, σε συμφωνία με τους κλασικούς, εξετάζει στην περίπτωση της απλής παραγωγής – και ως ένα σημείο της σύνθετης- την θεωρία της αξίας και της διανομής. Αρχικά εξετάζει τις μαθηματικές ιδιότητες ενός δοσμένου συστήματος παραγωγής και στην συνέχεια εξετάζει μια προς μια τις εναλλακτικές διαδικασίες παραγωγής⁹⁴. Αυτήν την μέθοδο οι Kurz και Salvadori, την ονομάζουν «έμμεση». Αντίθετα ο von Neumann, δεν εξετάζει τις μαθηματικές ιδιότητες μιας δοσμένης τεχνικής. Ανάγει δηλαδή το πρόβλημα στην επιλογή μιας τεχνικής, απ' όλες τις δυνατές εναλλακτικές διαδικασίες. Την μέθοδο αυτή ο Kurz και ο Salvadori την ονομάζουν «άμεση».

Στον Sraffa, στην περίπτωση της απλής παραγωγής, είναι αδύνατον να εμφανιστούν αρνητικές τιμές, εξαιτίας της δυνατότητας του ονομαστικού ωρομισθίου να κινείται μεταξύ του μηδέν και της μέγιστης τιμής του. Μόνο στην

⁹⁰ Βλ Kurz & Salvadori, Sraffa and von Neumann, στο Review of Political Economy, volume 13, November 2, 2001, σελ, 164-165

⁹¹ δηλαδή με την εισαγωγή μιας γραμμής και μιας στήλης για κάθε μια από αυτές, στην μήτρα των εισροών σε μέσα παραγωγής και μισθιακά εμπορεύματα

⁹² Βλ Kurz & Salvadori, Sraffa and von Neumann, στο Review of Political Economy, volume 13, November 2, 2001, σελ, 165

⁹³ το ίδιο, , σελ, 165-166

⁹⁴ δεχόμενος, με άλλα λόγια, την περίπτωση ύπαρξης σύνθετης παραγωγής

περίπτωση της σύνθετης παραγωγής, δέχεται την πιθανότητα ύπαρξης αρνητικής τιμής για ένα από τα σύνθετα, παραγόμενα εμπορεύματα.

Ο von Neumann, υποθέτει ότι οι φυσικοί συντελεστές παραγωγής, μπορούν να εκτείνονται σε απεριόριστες ποσότητες. Σε αντίθεση με την εργασία θεωρεί τους υπόλοιπους φυσικούς συντελεστές ως ελεύθερα αγαθά, σε συμφωνία με τους προγενέστερους κλασικούς. Η εργασία αμείβεται με ένα συγκεκριμένο καλάθι εμπορευμάτων⁹⁵, ανεξάρτητα από τον βαθμό απασχόλησης. Ο Sraffa δέχεται και αυτός την υπόθεση, ότι ενώσω οι φυσικοί συντελεστές παραγωγής, όπως η γη και τα αποθέματα μεταλλευμάτων, ενώσω δεν είναι σπάνια, ο ιδιοκτήτης τους δεν λαμβάνει αμοιβή, για την συμμετοχή τους στην παραγωγική διαδικασία.

Λόγο για την σχέση των μοντέλων Sraffa και von Neumann, κάνει και ο Sukhamoy Chakravarty στο άρθρο του :«John von Neumann's Model of an Expanding Economy: An essay in Interpretation»⁹⁶.

Ένα κοινό σημείο, είναι η κλασική σκοπιά την οποία υιοθετούν και οι δύο. Ο Sraffa, ασχολείται με προβλήματα διανομής εισοδήματος, που αρχικά είχαν εμφανιστεί στο έργο του Ricardo, δίνοντας μια λύση στα τελευταία, με το πρότυπό του εμπόρευμα.

Θεωρεί την γη, ως μη (ανα)παραγόμενη εισροή. Το ζητούμενο του, είναι να βρει την σχέση μεταξύ ποσοστού κέρδους, μισθών και γαιοπροσόδου. Το σημαντικό της θεωρίας, που εξάγεται από το μοντέλο του Sraffa -κατά τον Chakravarty-, δεν είναι το τυπικό του εμπόρευμα, αλλά η οικοδόμηση ενός μοντέλου, το οποίο περιέχει όχι μόνο (ανα)παραγόμενο κεφάλαιο αλλά και σταθερό.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι ένα πολύ σημαντικό κοινό στοιχείο, είναι η ύπαρξη κυκλικών διαδικασιών παραγωγής. Όμως σε αντίθεση με τον von Neumann, ο Sraffa δεν κάνει κάποια προσπάθεια να σχετίσει την μεγέθυνση με την διανομή του εισοδήματος. Αντίθετα ο von Neumann τα συνδέει, με έναν τρόπο, που ο Chakravarty τον χαρακτηρίζει πολύ κλασικό και μάλλον μαρξιστικό⁹⁷. Πιστεύει

⁹⁵ βλ προϋπόθεση d. για το μοντέλο του von Neumann

⁹⁶Sukhamoy Chakravarty, John von Neumann's Model of an Expanding Economy: An essay in Interpretation, στο βιβλίο John von Neumann and modern economics, M. Dore, S. Chakravarty, R. Goodwin, σελ. 69-82

⁹⁷ Sukhamoy Chakravarty, John von Neumann's Model of an Expanding Economy: An essay in Interpretation, στο βιβλίο John von Neumann and modern economics, M. Dore, S. Chakravarty, R. Goodwin, σελ. 75

μάλιστα, ότι το μοντέλο του von Neumann, μας ωθεί να προχωρήσουμε την σκέψη μας πέρα από τα ερωτήματα που θέτει ο Sraffa⁹⁸.

Το μοντέλο του von Neumann επιτρέπει την δυνατότητα υιοθέτησης διαφορετικής αποταμιευτικής συμπεριφοράς μεταξύ καπιταλιστών και εργατών, πράγμα που σε μεγάλο βαθμό κατά τον Chakravarty, χαρακτηρίζει τον καπιταλισμό.

Επιπλέον, η δυνατότητα ύπαρξης καινοτομιών κατά την διαδικασία της μεγέθυνσης, στον von Neumann –αντίθετα με τον Sraffa, όπου δύσκολα μπορεί να «επιτραπεί» μια τέτοια υπόθεση-.

Τέλος η μέθοδος του von Neumann, δείχνει να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε εφαρμογές σχεδιασμού, κατάλληλες για κεντρικά σχεδιαζόμενες οικονομίες.

V.2 Von Neuman και Von Charasoff

Εδώ θα προσπαθήσουμε να τονίσουμε τις διαφορές ανάμεσα στην θεωρία τιμών που εξάγεται από το άρθρο του v.N, και σε αυτή που συνεπάγεται το άρθρο του Charasoff.

Τόσο ο v.N όσο και ο v.Ch, κάνουν την υπόθεση, ότι παράγονται εμπορεύματα μέσω εμπορευμάτων, με σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

Και οι δύο περιγράφουν την εργασία, ως παραγόμενο εμπόρευμα. Δέχονται, με άλλα λόγια, την ύπαρξη ενός αναπαραγωγικού συστήματος παραγωγής.

Ωστόσο, ενώ ο v.Ch εξετάζει την περίπτωση απλής παραγωγής, ο v.N. δέχεται και την πιθανότητα ύπαρξης σύνθετης παραγωγής. Μία ακόμα διαφορά είναι ότι ο v.N δεν κάνει λόγο για εξωγενή (τελική) ζήτηση, αφού όπως είδαμε ισχύει: $gAx \leq Bx$. Αντίθετα ο v.Ch υποθέτει την ύπαρξη καθαρού προϊόντος (το οποίο από την θεωρία των εισροών- εκροών μπορούμε να το συνδέσουμε με την τελική ζήτηση). Επομένως ισχύει : $X=AX+Y$

Μία ακόμα κοινή παραδοχή στα δύο μοντέλα είναι η ομοιογένεια μεταξύ εισροών-εκροών. Δηλαδή τόσο στον v.N όσο και στον v.Ch, εισροές και

⁹⁸ το ίδιο

εκροές έχουν την ίδια σύνθεση. Επομένως μιλάμε και στις δύο περιπτώσεις για ένα πρότυπο αναπαραγωγικό σύστημα.

Και από τα δύο μοντέλα μπορούμε να εξάγουμε μια θεωρία τιμών, η οποία έχει σε αυτά αρκετά κοινά στοιχεία.

Αυτό που κάνει εντύπωση είναι η διάσταση στους σκοπούς των εργασιών των δύο. Ο v.N ασχολείται με τις συνθήκες ύπαρξης ισορροπίας καταρχήν, και στην συνέχεια τις ιδιότητες που τις διέπουν. Αντίθετα ο v.Ch ασχολείται με το μαρξικό πρόβλημα του μετασχηματισμού των αξιών, σε τιμές παραγωγής⁹⁹. Και οι δύο μάλιστα δέχονται την ύπαρξη ημιθετικών (μη αρνητικών) διανυσμάτων τιμών, ή με άλλα λόγια την ύπαρξη free goods –παρότι ο Charasoff δεν κάνει λόγο για αυτά-.

Αυτό όμως που προκαλεί εντύπωση, είναι η ομοιότητα ανάμεσα στους δύο, στην μέθοδο προσδιορισμού του ποσοστού κέρδους, πριν και ανεξάρτητα από τις τιμές. Και οι δύο, λόγω της κοινής σύνθεσης εισροών-εκροών, ορίζουν το ποσοστό κέρδους, σαν το λόγο της αξίας των καθαρών εκροών προς αυτήν των εισροών, υιοθετώντας μάλιστα, μια υποθετική λύση για τα διανύσματα, των επιπέδων δραστηριότητας και των τιμών. Απαιτούν μάλιστα αξιωματικά να υπάρχει ένα ενιαίο ποσοστό κέρδους και να ορίζεται μονοσήμαντα.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι τα δυο κείμενα, τα οποία δεν δείχνουν να σχετίζονται μεταξύ τους, έχουν αξιοσημείωτες ομοιότητες, παρότι το μεν του v.N είναι κατεξοχήν μαθηματικό κείμενο, ενώ αυτό του v.Ch ένα κείμενο μαρξικής οικονομικής προβληματικής.

V.3 Von Neumann και Νεοκλασικοί

Το μοντέλο γενικής ισορροπίας του Von Neumann, ανήκει αναμφισβήτητα στην κλασική σχολή της γενικής ισορροπίας.

Σε αυτό γίνεται η παραδοχή, ότι τα εμπορεύματα παράγονται μέσω εμπορευμάτων. Δεν υπάρχουν αρχικά αποθέματα σε μέσα παραγωγής ή σε μισθιακά εμπορεύματα, τα οποία χρησιμοποιούνται από το σύστημα. Αντίθετα έχουν παραχθεί από το ίδιο το σύστημα σε κάποια προηγούμενη περίοδο. Το

⁹⁹ ο V.Ch εργάζεται στα πλαίσια ενός αριθμητικού παραδείγματος, ενώ ο V.N. με την κατασκευή ενός θεωρητικού οικονομικού μοντέλου

τελευταίο, δίνει μια ακόμα ιδιότητα στο μοντέλο του von Neumann, η οποία έλειπε από τα προηγούμενα νεοκλασικά μοντέλα γενικής ισορροπίας, δηλαδή την δυνατότητα μεγέθυνσης. Αποτελεί δηλαδή ένα δυναμικό σύστημα.

Επιπλέον ο von Neumann, σε αντίθεση με τους νεοκλασικούς προκατόχους του, δεν αρχίζει την ανάλυση του, από μια δοσμένη κατάσταση ισορροπίας, όπου στην συνέχεια αναζητά τις ιδιότητες που την διέπουν. Αντίθετα, εάν και εφόσον υπάρχει μια κατάσταση ισορροπίας, εξετάζει τις ιδιότητες που την διέπουν¹⁰⁰.

Η κύρια αδυναμία, που ανέκαθεν καταλογιζόταν στην κλασική οικονομική θεωρία γενικότερα, ήταν αυτή της έλλειψης της δυνατότητας υποκατάστασης στην παραγωγή και στην κατανάλωση. Το πρόβλημα αυτό ο von Neumann, το ξεπέρασε, υποθέτοντας την ύπαρξη εναλλακτικών διαδικασιών παραγωγής. Συμπεριέλαβε επιπροσθέτως την δυνατότητα ύπαρξης σύνθετης παραγωγής. Όλα αυτά σε ένα πλαίσιο, που όλοι οι παραγωγικοί συντελεστές, συμπεριλαμβανομένου της γης αλλά και της εργασίας, αναπαράγονταν μέσα στο υπό εξέταση σύστημα. Με άλλα λόγια, στο αναπαραγωγικό αυτό σύστημα, η γή και η εργασία, μπορούσαν να εκτείνονται σε απεριόριστες ποσότητες, εξαρτώμενες μόνο από τα σχετικά επίπεδα δραστηριότητας¹⁰¹.

Το τελευταίο αποτελεί και την «αχίλλειο πτέρνα» του μοντέλου γενικής ισορροπίας του von Neumann, αφού εκεί κυρίως εστιάστηκε η κριτική για το μοντέλο αυτό. Επιπλέον αφορμές κριτικής, αποτέλεσαν η κατάσταση ύπαρξης τέλειου ανταγωνισμού, η κατανάλωση από τους εργάτες όλου τους του εισοδήματος και η αποταμίευση, από την άλλη μεριά, όλου του διαθέσιμου εισοδήματος των καπιταλιστών. Τέλος οι παραδοχές του, ότι οι εργάτες περιορίζονται στα αναγκαία ως προς το ζην, όσον αφορά τον μισθό τους και ότι επικρατεί ένας ενιαίος για όλες τις διαδικασίες υλικός ρυθμός μεγέθυνσης του συστήματος, δείχνουν να είναι εξαιρετικά απλοποιητικές σε σχέση με την πραγματικότητα.

¹⁰⁰ Βλ Champnowne

¹⁰¹ Βλ Champnowne

Αναφορά στο μοντέλο Arrow Debreu:

Οι οικονομολόγοι Kenneth Arrow και Gerard Debreu οι οποίοι έχουν πάρει βραβείο Νόμπελ εξέτασαν την δυναμική όλου του οικονομικού συστήματος και μπόρεσαν να αποδείξουν την ύπαρξη της πολύπλοκης ισορροπίας της αγοράς στην οποία δεν υπάρχει υπερβάλουσα ζήτηση ή προσφορά.

Ο Arrow κέρδησε την αρχική του φήμη από το θεώρημα της μη ύπαρξης πιθανότητας ψηφίσματος. Στο συγκεκριμένο θεώρημα μας επισημάνει ότι στις περιπτώσεις τις οποίες οι άνθρωποι αλλάζουν γνώμη και τελικά ψηφίζουν τους προϊόν νηκίτες το αποτέλεσμα δεν αλλάζει, επίσης αν ορισμένοι επιλέγουν την τρίτη εναλλακτική επιλογή αυτό δεν επηρεάζει την θέση των άλλων υποψηφίων. Πολλές προσπάθειες έγιναν για να σωθεί η βασική θεωρία ψηφίσματος αλλάζοντας τα αξιώματα του Arrow.

Ο Arrow είμαι αυτός που συνέφερε στην θεωρία της ανάλυσης κινδύνου. Η άποψή του είναι ότι το μοντέλο της γενικής ισορροπίας πρέπει να περιλαμβάνει εμπορεύματα τα οποία θα διανεμηθούν μόνο σε συγκεκριμένα μέρη του κόσμου. Έτσι για παράδειγμα πρέπει συγκεκριμενοποιήσει μια ζήτηση για καινούριο είδος τζαμιού αν υπάρχει τυφώνας στην Γεωργία. Προφανώς μπορεί να υπάρχουν πολλές πιθανές πόλης του κόσμου. Η γενική ισορροπία ορίζει την τιμή στην κάθε αγορά έτσι ώστε να τοποθετήσει προϊόντα και κίνδυνο στην καλύτερη δυνατή θέση.

Ο Arrow ασχολήθηκε επίσης με αποδύγη κινδύνου, ιστορική οικονομική και άλλα θέματα σε περιβάλλον αβεβαιότητας.

Σε συνεργασία με τον Gerard Debreu ο Arrow δημιούργησαν το 1954 την συγχρόνος αποδεκτή φόρμουλα του μοντέλου γενικής ισορροπίας. Αργότερα ο Debreu έκδοσε το *The Theory of Value*. Η θεωρία τους ήταν γενικής εκδοχής σχεδιασμένη να δώσει ευκολότερη εξήγηση στην είδη υπάρχουσα ισορροπία που είχε επιτευχθεί. Για να φτάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα χρησιμοποίησαν την θεωρία συγκεκριμένου σημείου.

Το μοντέλο τους υποθέτει ότι :

- 1) Η παραγωγή δεν είναι διασπόμενη,
- 2) Δεν υπάρχει παραγωγή αν δεν υπάρχουν εισαγόμενα προϊόντα στην οικονομία,
- 3) Δεν μπορεί να παραχθούν αρχικά προϊόντα από τα παραγόμενα προϊόντα της οικονομίας.
- 4) Οι καταναλωτές έχουν καλά ορισμένες και συνηθισμένες προτιμήσεις.
- 5) Ο αριθμός των υπηρεσιών που μπορούν να έχουν στην διάθεσή τους είναι περιορισμένος.

Η θεωρία των Arrow-Debreu απόδειξε ότι η οικονομία λειτουργεί έτσι ώστε αποφασίζει ποιά προϊόντα πρέπει να παράγει και αντίστοιχα τι χρήματα πρέπει να διαθέσει με τρόπο αόρατου χεριού όπως είπε και ο Adam Smith.

VI. Τελικά συμπεράσματα

Το σύστημα, που περιγράφεται από το μοντέλο γενικής ισορροπίας του von Neumann, είναι ένα αναπαραγωγικό σύστημα παραγωγής. Είναι ένα σύστημα, που περιγράφει κυκλικές ροές, περιγράφει με άλλα λόγια την περίπτωση, όπου εμπορεύματα παράγονται μέσω εμπορευμάτων. Όλοι οι χρησιμοποιούμενοι παραγωγικοί συντελεστές σε αυτό, μπορούν να εκτείνονται σε απεριόριστες ποσότητες. Εξαρτώνται, δηλαδή, μόνο από τα επίπεδα δραστηριότητας του συστήματος. Επιπλέον δεν υπάρχουν αρχικά αποθέματα εμπορευμάτων. Η μελέτη αφορά την περίπτωση του τέλει ανταγωνισμού, και δεν λαμβάνει υπ' όψιν του περιπτώσεις ατελούς ανταγωνισμού και μονοπωλίων.

Το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό του μοντέλου γενικής ισορροπίας του von Neumann, είναι ο δυναμικός χαρακτήρας που έχει. Ενώ οι τιμές παραμένουν σταθερές, οι εντακτικότητες του συστήματος και κατ' επέκτασιν το ίδιο το σύστημα, μεγεθύνονται με έναν ενιαίο σταθερό ρυθμό g . Το τελευταίο αποτελεί και την σημαντικότερη του καινοτομία. Έτσι λοιπόν, το μοντέλο γενικής ισορροπίας του von Neumann, αποτυπώνεται στην διάσταση του χρόνου.

Από όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε, ότι το γενικής ισορροπίας του von Neumann ανήκει πέρα από κάθε αμφιβολία στην κλασική σχολή.

Αξιοσημείωτη όμως ομοιότητα έχει το μοντέλο γενικής ισορροπίας του von Neumann, με αυτό του von Charasoff. Πέρα από το ότι και οι δύο περιγράφουν την εργασία σαν μια (ανα)παραγόμενη εισροή και οι δύο υποθέτουν τον ίδιο λόγο εξεύρεσης του ενιαίου ποσοστού κέρδους του συστήματος. Ποιο τεχνικά ειπωμένο, και οι δύο δέχονται, ότι εισροές και εκροές έχουν την ίδια σύνθεση.

Το μοντέλο γενικής ισορροπίας, του von Neumann, έρχεται σε αντίθεση με τα νεοκλασικά μοντέλα, και ιδίως με αυτό του Walras. Ο δυναμικός χαρακτήρας του μοντέλου γενικής ισορροπίας και οι, κλασικής προέλευσης, κυκλικές ροές, χωρίς την ύπαρξη μη αναπαραγόμενων συντελεστών παραγωγής, το διαφοροποιούν σε σχέση με μοντέλα γενικής ισορροπίας, όπως αυτό του Walras.

Το μοντέλο γενικής ισορροπίας του von Neumann, παρ' όλη την φαινομενική του ομοιότητα με αυτό του Cassel¹⁰², δεν δείχνει να σχετίζεται με αυτό. Σε αντίθεση με τον Cassel, στον von Neumann, υπάρχουν εναλλακτικές διαδικασίες παραγωγής, και κατά συνέπεια ανισώσεις στο σύστημα εξισώσεων του. Στον von Neumann, δεν γίνεται διάκριση μεταξύ τεχνικών συντελεστών και καταναλωτικών εμπορευμάτων, σε αντίθεση με τον Cassel, όπου η διάκριση αυτή είναι εμφανής. Επιπλέον στον von Neumann η χρήση των ανισώσεων, συνεπάγεται την ύπαρξη ενός μηχανισμού, ο οποίος επαναφέρει το σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας, μετά από οποιαδήποτε παρέκκλιση του συστήματος, από την τροχιά ισόρροπης μεγέθυνσης¹⁰³.

Όμως το μοντέλο γενικής ισορροπίας έχει και κάποια σημεία τα οποία χρήζουν κριτικής. Οι υποθέσεις που κάνει ο von Neumann, για την ύπαρξη ενός ενιαίου ρυθμού μεγέθυνσης του συστήματος καθώς και για την σταθερή κατανάλωση των εργατών, δείχνουν να είναι εξωπραγματικές και σε αυτές επικεντρώνεται η κριτική του μοντέλου γενικής ισορροπίας του von Neumann.

¹⁰² αφού και οι δύο αντιμετωπίζουν την τελική ζήτηση ως δεδομένη. Αυτό αποτέλεσε και το σημείο εκκίνησης των Wald και von Neumann

¹⁰³ αφού όπως είδαμε, όταν το μοναδιαίο κόστος ενός εμπορεύματος υπερβαίνει την τιμή παραγωγής του, τότε η διαδικασία που το παράγει δεν χρησιμοποιείται ως μη κερδοφόρα.

Ένα ακόμα ζήτημα είναι κατά πόσον το μοντέλο «γενικής ισορροπίας» του von Neumann, είναι ένα μοντέλο γενικής ισορροπίας ή μάλλον ένα μοντέλο επιλογής της πλέον κερδοφόρας τεχνικής. Έτσι βασιζόμενοι στην εκδοχή του Γ. Σταμάτη για το μοντέλο γενικής ισορροπίας του von Neumann, στο άρθρο του «Μια γενική λύση του μοντέλου γενικής ισορροπίας και οικονομικής μεγέθυνσης του John von Neumann για, διαχωρίσιμες ή μη διαχωρίσιμες, μη διασπώμενες και απλώς ή πολλαπλώς διασπώμενες γραμμικές τεχνικές παραγωγής», είμαστε σε θέση να αναδιατυπώσουμε το μοντέλο του von Neumann σαν ένα μοντέλο επιλογής της πλέον κερδοφόρας τεχνικής παραγωγής. Το τελευταίο, δείχνει να επιβεβαιώνεται, αν μάλιστα σκεφτούμε, ότι το ζητούμενο στην ανάλυση είναι, η εξεύρεση εκείνου του x^* , και κατ' επέκτασιν εκείνης της τεχνικής, η οποία μεγιστοποιεί το ποσοστό κέρδους και κατά συνέπεια τον υλικό ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος. Με άλλα λόγια, επιλέγουμε ποιες διαδικασίες παραγωγής και σε ποια εντατικότητα, θα χρησιμοποιηθούν, ώστε το ποσοστό κέρδους να είναι μέγιστο και ίσο με τον υλικό ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος. Δηλαδή στην πραγματικότητα δεν εξετάζουμε πλέον, τις τιμές παραγωγής όπου προσφορά και ζήτηση ταυτίζονται, αλλά εκείνες τις οικονομικά σημαντικές τιμές παραγωγής, οι οποίες μεγιστοποιούν το ποσοστό κέρδους και προκύπτουν από μια συγκεκριμένη – μεγιστοποιούσα το ποσοστό κέρδους- τεχνική παραγωγής.

Τέλος εξετάζουμε, ποια η σχέση των μοντέλων του Sraffa και του μοντέλο γενικής ισορροπίας του von Neumann. Παρόλο, που ο Sraffa εξετάζει την περίπτωση ενός well-behaved συστήματος παραγωγής¹⁰⁴, στο οποίο, υπάρχουν τόσο (ανα)παραγόμενοι συντελεστές παραγωγής, όσο και μη (ανα)παραγόμενοι συντελεστές παραγωγής¹⁰⁵. Ωστόσο, αξιοσημείωτη είναι η ομοιότητα τους, ως προς τον τρόπο προσδιορισμού των τιμών παραγωγής, οι οποίες προσδιορίζονται από την χρησιμοποιούμενη τεχνική, αλλά και από την κατανομή του εισοδήματος¹⁰⁶. Με άλλα λόγια οι τιμές παραγωγής, εξαρτώνται

¹⁰⁴ δηλαδή, ενός συστήματος απλής παραγωγής ή ενός συστήματος σύνθετης παραγωγής, το οποίο εμφανίζει τις ιδιότητες ενός συστήματος απλής παραγωγής

¹⁰⁵ δηλαδή το σύστημα τιμών παραγωγής είναι της μορφής $p = pA(1+r) + w\{$

¹⁰⁶ η αξιοσημείωτη αυτή ομοιότητά τους, οφείλεται στην κλασική τους αντίληψη, ως προς την παραγωγή εμπορευμάτων μέσω εμπορευμάτων

από την μήτρα A και από εκ των μεταβλητών κατανομής του εισοδήματος, δηλαδή μια εκ των r και w (όπου στην περίπτωση του von Neumann το w είναι εξωγενώς δεδομένο και μάλιστα λόγω της ύπαρξης ενός αναπαραγωγικού συστήματος, εμπεριέχεται στην \bar{A})¹⁰⁷. Με άλλα λόγια, αυτό που συνεπάγονται τα μοντέλα του Sraffa και von Neumann, είναι μια εκ διαμέτρου αντίθετη περίπτωση, από αυτή που συνεπάγεται το Non-Substitution Theorem¹⁰⁸.

¹⁰⁷ Η λύση για το σύστημα τιμών στην περίπτωση του Sraffa, δίδεται από:

$p = w\{[I - A(1+r)]^{-1}$, ενώ στην περίπτωση του von Neumann από το: $p[I - \bar{A}(1+r)] = 0$

¹⁰⁸ σύμφωνα με το Non-Substitution Theorem, η τιμή ενός εμπορεύματος εξαρτάται μόνο από τις τεχνολογικές μεταβλητές του συστήματος και όχι από την διανομή του εισοδήματος.

Βιβλιογραφικές αναφορές

A. Ξενόγλωσση

- i. M. Dore, S. Chakravarty, R. Goodwin, John von Neumann and modern economics, Clarendon Press, Oxford, 1989
- ii. D. Simpson, General Equilibrium Analysis, An introductionm Basil Blackwell, Oxford1975
- iii. G. Stigler, Production and Distribution Theories
- iv. H. Varian, Microeconomic analysis, Third Edition, W.W. Norton & Company, New York, London,1992
- v. H. Kurz & N. Salvadori, "Classical roots of input-output analysis: A short Account of it's long Prehistory"
- vi. H.Kurz & N.Salvadori, Sraffa and von Neumann, στο Review of Political Economy, volume 13, November 2, 2001
- vii. Michio Morishima, Walras Economics,
- viii. Charles E. Staley "A History of Economic Thought From Aristotle to Arrow

Β. Ελληνική

- i. Miltiades Chacholiades, Μικροοικονομική ΙΙ, Εκδόσεις Κριτική, 1990
- ii. Champernowne
- iii. M. Dobb, Θεωρίες της αξίας και της κατανομής, από τον Άνταμ Σμίθ μέχρι σήμερα, Ιδεολογία και Οικονομική Θεωρία, Gutenberg, 1976
- iv. H.G. Jones, Εισαγωγή στις σύγχρονες θεωρίες οικονομικής μεγέθυνσης, Εκδόσεις Κριτική, 1993
- v. David Simpson, Θεωρία Γενικής Ισορροπίας, Τεύχος Β, Εκδόσεις Παπαζήση, 1984
- vi. Von Neumann
- vii. Γ. Σταμάτης, Εισαγωγή στην πολιτική οικονομία, β' έκδοση, Εκδόσεις Ελληνικά γράμματα, 1997
- viii. Γ. Σταμάτης, Θεωρία της Αξίας και της υπεραξίας, Εκδόσεις Ελληνικά γράμματα, 1998
- ix. Γ. Σταμάτης, Κείμενα Οικονομικής Θεωρίας και πολιτικής, τόμος 4^{ος}, Εκδόσεις Κριτική, 1996
- x. Γ. Σταμάτης, Προβλήματα θεωρίας γραμμικών συστημάτων παραγωγής, Τόμος 1^{ος}: Βασικά ζητήματα, 2^η έκδοση, Εκδόσεις Κριτική, 1995

