ΑΙ ΒΙΩΤΙΚΑΙ ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΤΩΝ ΕΡΓΑΤΙΚΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΕΝ ΕΛΛΑΔΙ ΚΑΙ Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ENGEL

ΥΠΟ

ΠΕΡΙΚΛΕΟΥΣ ΡΕΔΙΑΔΟΥ

Ἡ προσπάθεια διὰ τὴν μελέτην τῶν βιωτικῶν συνθηκῶν τῶν ἐργατικῶν τάξεων, μολονότι συνδεομένη παλαιότατα μὲ τὸ ὄνομα τοῦ Eden, ἐν τούτοις μόλις ἀπὸ τοῦ Le Play (Les ouvries européens, Paris, 1855), καὶ τοῦ Ducpatieux (Budgets économiques des classes ouvrières en Belgique, 1855), ἀποδώσαντος εἰς αὐτὴν χαρακτῆρα μᾶλλον δημόσιον, ἔλαβε τὴν γνωστὴν μορφὴν δημογραφικῆς ἐρεύνης, τὴν λεγομένην τῶν «μονογραφιῶν τῶν οἰκογενειῶν», ἔνθα συλλέγονται αἱ καθ' ὡρισμένην χρονικὴν περίοδον κατ' εἶδος καὶ ποσότητα δαπάναι ἀριθμοῦ τινος οἰκογενειῶν ἐκπροσωπευτικῶν διαφόρων ἐργατικῶν τάξεων καὶ μελετῶνται ταῦτα ἀπὸ κοινωνικῆς ἰδιαίτατα ἀπόψεως.

Ἡ κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους ἰδίως ἀνεπτυχθεῖσα ὀξύτης τῶν κοινωνικῶν φαινομένων προώθησεν ἔτι τὰς δημογραφικὰς ταύτας μελέτας καὶ ἐγενίκευσεν αὐτάς, οὕτως ὥστε αὗται σήμερον ἀποτελοῦν σπουδαῖον μέσον διὰ τὴν ἁπανταχοῦ διερεύνησιν τῶν βιωτικῶν συνθηκῶν τῶν ἐργατικῶν κυρίως τάξεων.

Τοιαύτη δημογραφικὴ προσπάθεια ἐσημειώθη ἐν Ἑλλάδι τὸ πρῶτον μόνον τῷ 1923 δι' ἐρεύνης ὀφειλομένης εἰς τὴν φιλεργίαν τοῦ τμηματάρχου τῆς Στατιστικῆς παρὰ τῇ Ἐθν. Τραπέζῃ κ. Ν. Πράτσικα (Ἔρευνα ἐπὶ τῆς ἀκριβείας τῆς ζωῆς, Ἀθῆναι 1924), ἐπαναληφθείσης δὲ τῷ 1926)27 (ἴδ. Ἔρευνα ἐπὶ τῆς ἀκριβείας τῆς ζωῆς, Ἀθῆναι 1927). Λόγῳ ὅμως τοῦ περιωρισμένου τῆς ἐρεύνης ὅσον ἀφορᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐρευνηθεισῶν οἰκογενειῶν (μόνον 17 τῷ 1923, καὶ 55 τῷ 1926), καὶ τὸ εἶδος τῆς ἐργασίας ἥτις ἠρευνήθη, ἡ ἔρευνα ἐκείνη, μολονότι ἀπετέλει ἐπιστημονικὴν πρόοδον, μόνον ἐνδεικτικὴν σημασίαν ἠδύνατο νὰ ἔχῃ.

Ἐν τούτοις ἡ Γενικὴ Στατιστικὴ Ὑπηρεσία τοῦ Κράτους διαβλέπουσα τὴν ἔλλειψιν παρ' ἡμῖν τοιαύτης δημογραφικῆς ἐρεύνης ὅπως στηρίξῃ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ τιμαρίθμου, ὠργάνωσε καὶ διεξήγαγε τῷ 1930 εὐρυτάτην τοιαύτην ἔρευναν (1). Ἡ ἀφθονία τῶν στατιστικῶν

1) Ἡ ἔρευνα διεξήχθη ὑπὸ τὴν ἀνωτέραν ἐποπτείαν τοῦ διευθυντοῦ τῆς Γεν. Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας κ. Ι. Μιχαλοπούλου καὶ τὴν ἐπιμέλειαν τοῦ τμηματάρχου κ. Ι. Ἀργυράκη.

στοιχείων ἅτινα συνήχθησαν ἐκεῖθεν παρέσχε διὰ πρώτην φορὰν ἐν Ἑλλάδι πολύτιμον ὑλικὸν διὰ τὴν ἔρευναν τῶν συνθηκῶν τῆς ζωῆς τῆς παρ' ἡμῖν ἐργατικῆς τάξεως καὶ διαφόρων σχετικῶν κοινωνικοοικονομικῶν φαινομένων.

Ὁ ἄξιος παντὸς ἐπαίνου τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον διεξήχθη ἡ ἐκ φύσεως καὶ ἀπὸ ψυχολογικῆς ἰδίως ἀπόψεως δυσχερεστάτη αὕτη ἔρευνα, ἕνεκα τῆς καχυποψίας ἰδίως τῆς τάξεως ἔνθα διεξήχθη, ἡ ἀξιόλογος, παρὰ ταῦτα, τῷ ὄντι ἔκτασις ἣν ἔλαβεν αὕτη, ἀφοῦ παρετηρήθησαν 509 ἐργατικαὶ οἰκογένειαι (οὐχὶ δὲ γεωργικαὶ) ποικίλων ἐπαγγελμάτων, ἐκφορτωταί, γαιανθρακεργάται, ἐργάται οἰκοδομῶν, καπνεργάται, ἀρτεργάται, ἐλαιοχρωματισταί, ἠλεκτροτεχνῖται, τροχιοδρομικοί, τυπογράφοι, μυλεργάται, ἐργάται θαλάσσης, ἀχθοφόροι, ἰδιωτικοὶ ὑπάλληλοι κ.λ.π.), ἡ μεγάλη χρονικὴ διάρκεια τῆς ἐρεύνης, καταστάσης ἐτησίας, ἡ χωρογραφικὴ εὐρύτης ἣν ἔσχεν αὕτη, ἀφοῦ ἐξετάθη εἰς 28 ἐν ὅλῳ πόλεις τῆς Ἑλλάδος ὧν ὁ πληθυσμὸς ὁμοῦ λαμβανόμενος ἀντιπροσωπεύει τὸ 1)4 περίπου τοῦ ὅλου πληθυσμοῦ τῆς χώρας, ἡ ἐπιμέλεια τοῦ ἐλέγχου (ἐκ τῶν 509 δελτίων μόνον 473 ἐκρίθησαν ἄξια ἐμπιστοσύνης), ἀποτελοῦν ἀληθῶς τίτλον τιμῆς διὰ τὴν ἑλληνικὴν Στατιστικὴν Ὑπηρεσίαν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναμφισβητήτως πρέπει νὰ παρασχεθοῦν τὰ μέσα ὅπως τὸ ταχύτερον ταξινομήσῃ, ἐπεξεργασθῇ καὶ δημοσιεύσῃ πλῆρες τὸ πολύτιμον στατιστικὸν ἔργον της, ἀφοῦ παρὰ πᾶσαν ἐναντιότητα διεξήγαγε τόσον ἀθορύβως ἔργον στατιστικὸν πρωτοφανὲς διὰ τὸν ὄγκον καὶ τὴν πληρότητα διὰ τὴν Ἑλλάδα (1).

Ὁ γερμανὸς στατιστικὸς Ernst Engel μελετῶν τὰς μονογραφίας τῶν οἰκογενειῶν ἃς κατώρθωσαν νὰ συλλέξουν ὁ Le Play καὶ ὁ Ducpatieux κατώρθωσε νὰ διατυπώσῃ τὸν γνωστὸν ὑπὸ τὸ ὄνομά του νόμον καθ' ὃν «ἐφ' ὅσον πτωχοτέρα εἶνε οἰκογένειά τις, τόσῳ μεῖζον εἶνε τὸ μέρος τῶν ὁλικῶν ἐξόδων της τὸ ὁποῖον ἐξοδεύει διὰ τὴν διατροφήν της» (Engel, Die Lebenskosten belgischer Airbeiten—familien, 1895 καὶ f, 8—9). Ἡ μαθηματικὴ ἐν τούτοις σχέσις εἰς ἣν ἐφάνη εἰς τὸν Engel ὑπείκουσα ἡ δαπάνη διὰ τὴν διατροφὴν ἐν σχέσει πρὸς τὴν ὁλικὴν δαπάνην συντηρήσεως, καθ' ἣν τὸ ὕψος τοῖς ἑκατὸν τῶν ἐξόδων τῆς διατροφῆς αὐξάνει ἐλαττουμένης τῆς ὁλικῆς δαπάνης κατὰ γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐτέθη παρ' αὐτοῦ τοῦ Engel ἐν ἀμφιβόλῳ, ὁμολογήσαντος τὴν δυσχέρειαν τῆς ὑπαγωγῆς τοῦ φαινομένου τούτου εἰς μαθηματικὴν ἔκφρασιν.

Ἡ ἐφηρμοσμένη Στατιστικὴ ἐν τούτοις δέχεται ὡρισμένους τύπους παρεμβολικῶν καμπύλων ὡς προσιδιάζοντας μᾶλλον διὰ τὴν διατύπωσιν τῶν νόμων οὓς ἀκολουθοῦν τὰ δημογραφικά, οἰκονομικά, βιολογικὰ κλπ. φαινόμενα. Τοιαύτη καμπύλη εἶνε ἡ ὑπερβολική:

---

(1) Ἐν Ἑλβετίᾳ ἡ ἔρευνα τῷ 1923 περιέλαβε 323 οἰκογενείας, ἐν Ἀγγλίᾳ τῷ 1922 οἰκογενείας 352, ἐν Αὐστραλίᾳ 392 κ.λ.π. Ὁ συγκριτικῶς πρὸς τὸν πληθυσμὸν ἡμῶν μέγα ἐρευνηθεὶς παρ' ἡμῖν ἀριθμὸς οἰκογενειῶν ἀποτελεῖ τὸ μέτρον τῆς ἐμπιστοσύνης ἧς εἶναι ἀξία ἡ ἔρευνα αὕτη.

(1) $$y = Ax^{a}$$
ἥτις λογαριθμικῶς γράφεται :
(1)′ $$\lambda o\gamma y = \lambda o\gamma A - a\ \lambda o\gamma x$$

Τῆς καμπύλης ταύτης (1)′ παριστώσης εὐθεῖαν, ἡ ἐφαρμογή της προφανῶς προσιδιάζει εἰς τὰς σειρὰς τῶν φαινομένων ἐκείνων, ἔνθα οἱ λογάριθμοι τῶν x καὶ τῶν y αὐξάνουν κατὰ σταθερὸν πρὸς ἀλλήλους λόγον, ἡ δὲ ἐπαλήθευσις τῆς ἰδιότητος ταύτης εἶνε ἐπαρκὴς ὅπως χαρακτηρίσῃ τὸ πρόσφορον τῆς καμπύλης ταύτης πρὸς τοῦτο.

Ἐὰν κληθῇ K ἡ συνολικὴ ἀνὰ οἰκογένειαν δαπάνη, x ἡ ἀντίστοιχος πρὸς διατροφὴν δαπάνη, Μλογ K καὶ Μλογx αἱ μέσαι τιμαὶ τῶν λογαρίθμων, Δλογ K καὶ Δλογx αἱ ἀπὸ τῆς μέσης διαφοραὶ ἑνὸς ἑκάστου τῶν λογαρίθμων K καὶ x, θὰ ἔχωμεν :

$$\Delta\lambda o\gamma x = \lambda o\gamma x - M\lambda o\gamma x$$

καὶ παρομοίως, ἂν αὐξανομένου τοῦ K αὐξάνῃ καὶ τὸ x,

$$\Delta\lambda o\gamma K = \lambda o\gamma K - M\lambda o\gamma K$$

Ἐπειδὴ δὲ μεταξὺ τῶν αὐξήσεων τούτων καθ' ὑπόθεσιν ὑπάρχει σταθερὰ σχέσις, δηλαδὴ

$$\Delta\lambda o\gamma x = a\,\Delta\lambda o\gamma K$$

ὁπότε

(2) $$a = \frac{\Delta\lambda o\gamma x}{\Delta\lambda o\gamma K}$$

θὰ ἔχωμεν

$$\lambda o\gamma x = a\ (\lambda o\gamma K - M\lambda o\gamma K + M\lambda o\gamma x)$$

καὶ τιθεμένου

(3) $$M\lambda o\gamma K - aM\lambda o\gamma x = \lambda o\gamma A$$

λαμβάνομεν

$$\lambda o\gamma x = \lambda o\gamma A + a\lambda o\gamma K$$

ἢ

$$\lambda o\gamma x = \lambda o\gamma A - a\lambda o\gamma K$$

ἂν αὐξανομένου τοῦ K ἐλαττοῦται τὸ x [1].

Ἑτέρα καμπύλη προσιδιάζουσα ὁμοίως εἰς τὴν ἔρευναν τοιούτων δημογραφικῶν φαινομένων εἶνε ἡ λογαριθμική

(4) $$y = a + a\lambda o\gamma x$$

Ἐὰν κληθῇ Mx ἡ μέση τιμὴ τῶν x καὶ Δx τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ ταύτης θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν διαφορῶν ἑκάστης u, θὰ ἔχωμεν

$$\Delta x = x - Mx$$

1) Ἡ δευτέρα αὕτη καμπύλη ἐκφράζει τὸν γνωστὸν νόμον τοῦ Pareto τῆς κατανομῆς τῶν εἰσοδημάτων (Cours d' Écon. Pol. II, σ. 299) ὅστις κατόπιν περαιτέρω ἀναλύσεως λαμβάνει τὴν γενικωτέραν, ἀλλὰ καὶ θεωρητικὴν μορφὴν

$$y = Ax^{-a}e^{-bx}$$

καὶ τῇ βοηθείᾳ τῶν αὐτῶν ὡς ἄνω συμβόλων,

$$\Delta\lambda o\gamma K \quad \lambda o\gamma K - M\lambda o\gamma K$$

ὅθεν, τῶν λογαρίθμων τῶν K μεταβαλλομένων καθ' ὑπόθεσιν ἀναλόγως τοῖς x

$$\frac{\Delta x}{\Delta\lambda o\gamma K} = \frac{x - Mx}{\lambda o\gamma K - M\lambda o\gamma K}$$

καὶ τιθεμένου

$$\frac{\Delta x}{\Delta\lambda o\gamma K} = a \tag{5}$$

καὶ

$$\beta = \frac{\Delta x}{\Delta\lambda o\gamma K} M\lambda o\gamma K = aM\lambda o\gamma K \tag{6}$$

λαμβάνομεν

$$u = \beta + a\lambda o\gamma K$$

Παρεκτὸς τῶν καμπύλων τούτων θὰ ἠδύνατο γενικώτερον νὰ δοκιμασθῇ καὶ ἡ παρεμβολικὴ παραβολὴ $\nu^{ου}$ βαθμοῦ.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_\nu x^\nu$$

Ἡ ἐφαρμογὴ θὰ ἠδύνατο νὰ διευκολυνθῇ διὰ τῶν πινάκων τοῦ Pareto (Tables pour faciliter l' application de la méthode les moindes-carrès) ἢ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Lorenz (Über Näherung -Parabeln hohen Grade, «Metron», 1933 vol X, No 4,61), ἂν αἱ δεύτεραι διαφοραὶ τῶν λογαρίθμων ἦσαν σταθεραὶ καὶ ἂν δὲν ἦσαν ἐκ τῆς φύσεώς των αἱ παρατηρήσεις αὗται μειωμένης ἀκριβείας. Διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα εἰς τὰς ἄλλας δύο ἐκφράσεις αἵτινες λόγῳ τῆς ἁπλότητός των παρέχουν ἀμεσωτέραν εἰκόνα τοῦ φαινομένου.

Ὁ ἰταλὸς καθηγητὴς del Vecchio (Relazioni fra entrata e consumo 1912), ἐν τῇ προσπαθείᾳ του ὅπως ἐξεύρῃ ἐπαρκῆ μαθηματικὴν ἔκφρασιν τοῦ νόμου τοῦ Engel, συνήγαγεν ἐξ ἐπαληθεύσεως πληθύος ὁλοκλήρου μονογραφιῶν γερμανικῶν, ἀγγλικῶν, δανικῶν κλπ. ὅτι ἡ δαπάνη, διὰ τὴν διατροφὴν μεταβάλλεται σὺν τῷ λογαρίθμῳ τῆς ὁλικῆς δαπάνης ὡς ἐπίσης καὶ σὺν τῷ λογαρίθμῳ τοῦ εἰσοδήματο, καὶ ἑπομένως κατέληξεν εἰς τὴν γνώμην ὅτι διὰ τὴν σπουδὴν τοῦ φαινομένου τούτου προσιδιάζει ἡ λογαριθμικὴ καμπύλη (4).

Ἐν τούτοις τὰ δεδομένα μονογραφιῶν τινῶν ἐκ τῶν ὑπὸ τοῦ del Vecchio ἀναφερομένων, φαίνονται ἐξ ἴσου ἀκολουθοῦντα καὶ τὴν ὑπερβολικὴν ἔκφρασιν (!). Οὕτω τὰ δεδόμενα τῆς γερμανικῆς στατιστικῆς τοῦ 1907 δηλαδὴ ἡ ἐτησία ὁλικὴ δαπάνη καὶ ἐκείνη τῆς διατροφῆς (del Vecchio, τ. ἔ. Ταν. XXXVIII) φερόμενα λογαριθμικῶς ἐπὶ ὀρθογωνίων συντεταγμένων παρέχουν γραμμὴν τὰ μάλιστα προσεγγίζουσαν πρὸς εὐθεῖαν, ἐπίσης δὲ καὶ ἐκεῖνα τῆς ἀγγλικῆς στατιστικῆς τοῦ 1905, μεταξὺ ἑβδομαδιαίας δαπάνης διατροφῆς καὶ εἰσοδήματος (del Vecchio τ. ἔ. Ταν. XIII) φαίνονται ὁμοίως εἰς εὐθεῖαν ἀπολήγοντα.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι, ἐφ' ὅσον ἐνταῦθα ἀποσκοποῦμεν εἰς τὴν ἔρευναν τῆς μᾶλλον προσιδιαζούσης εἰς τὰς ἑλληνικὰς βιωτικὰς συνθήκας μαθηματικῆς ἐκφράσεως τοῦ νόμου τοῦ Engel, προσήκει ὅπως ἐλεγχθῇ ποίαν ἐκ τῶν ἀνωτέρω θεωρηθησῶν καμπύλων, τὴν ὑπερβολικὴν δηλαδὴ ἢ τὴν λογαριθμικήν, ἀκολουθεῖ ἐν Ἑλλάδι ἡ μαθηματικὴ αὕτη ἔκφρασις τοῦ νόμου τοῦ Engel.

Ἡ Γεν. Στατ. Ὑπηρεσία κατόπιν τῆς ἀνωτέρω ἀναφερθείσης δημογραφικῆς ἐρεύνης, ἠδυνήθη νὰ παράσχῃ ἡμῖν τὸν κάτωθι πίνακα

Εἰσόδημα μηνιαῖον ἀνὰ οἰκογένειαν	Μηνιαία δαπάνη συνολική	Ἀριθ. Οἰκογ.	Διατροφή	Ἱματισμ.	Κατοικία (ἐνοίκιον)	φωτισμός θέρμανσις καθαριότ.	Διάφορα
μέχρι 1500	2184,94	85	1248,65	224,16	185,—	184,49	332,64
1500-2500	2703,13	242	1577,91	279,23	251,—	229,45	365,52
2500-3500	3016,63	81	1735,79	321,01	328,90	228,16	402,97
3500-4500	3813,08	38	2183,32	396,75	430,84	277,45	524,74
4500-5500	3658,15	29	2566,59	555,23	728,76	349,99	457,[illegible]8

Εἶνε ἄξιον προσοχῆς, ὅτι διὰ τὰς δύο πτωχοτέρας τάξεις εἰσόδημα μέχρι 1500 δρ. καὶ 1500—2500 δρ. τὸ σύνολον τῶν δαπανῶν ὑπερβαίνει τὸ ἀντίστοιχον εἰσόδημα, ἡ δὲ ἀνωμαλία αὕτη δὲν φαίνεται νὰ εἶνε ἀπότοκος τοῦ τρόπου τοῦ ὑπολογισμοῦ [1], ἀλλὰ κατὰ τὴν γνώμην τῆς Στατιστ. Ὑπηρεσίας, ὀφείλεται εἰς τὴν πιθανότητα ὅτι τὸ πλεῖστον τῶν ἐν λόγῳ οἰκογενειῶν ἐκάλυψαν τὸ κατὰ μῆνα ἔλλειμμα διὰ πιστώσεων, εἴτε δι' ἐκτάκτων ἀπολαβῶν τὰς ὁποίας ἐν τούτοις παρέλειπον νὰ δηλώσουν ἵνα περιληφθοῦν καὶ αὗται εἰς τὸ εἰσόδημά των.

Προκειμένου ἑπομένως νὰ ζητηθῇ ἡ παρεμβολικὴ καμπύλη εἶνε προφανὲς ὅτι ἡ συνολικὴ δαπάνη δέον νὰ θεωρηθῇ ἡ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μερικῶν δαπανῶν συναγομένη, καθόσον εἰς τὸ εἰσόδημα τοῦτο, ἀνεξαρτήτως τῆς προελεύσεώς του ἀντιστοιχοῦν πράγματι αἱ μερικαὶ αὗται δαπάναι.

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ πίνακος τούτου κατηρτίσαμεν τὸν ὄπισθεν πίνακα·

Παρατηρητέον ἐν πρώτοις ὅτι ἐκ συγκρίσεως τῶν μεταβολῶν τῶν λογαρίθμων τοῦ K πρὸς τὰς μεταβολὰς τοῦ λογαρίθμου τοῦ x καὶ τὰς μεταβολὰς αὐτοῦ τοῦ x, οὐδὲν ἐκ τῶν ὡς ἄνω χαρακτηριστικῶν προτιμήσεως τοῦ τύπου (1) ἢ τοῦ τύπου (4) εὐκρινῶς συνάγεται, δι' ὃ καὶ εἴμεθα ἠναγκασμένοι διὰ

1) Ὁ πίναξ οὗτος ὑπελογίσθη βάσει τῆς μέσης κατὰ κατηγορίαν καταναλωθείσης ποσότητος ἑκάστου εἴδους. Ἂν ἐξευρίσκετο ὡς πηλίκον διαιρέσεως τῶν ἐξόδων διὰ τοῦ πληθυσμοῦ κατὰ κατηγορίαν οἰκογενειῶν ὁ διαφορὰ θὰ ἦτο ἐλαχίστη, ἀλλὰ τοὐναντίον μέγας θὰ ἦτο ὁ ἀπαντηθησόμενος πρὸς τοῦτο χρόνος.

συγκριτικῆς ἐφαρμογῆς νὰ ἐξεύρωμεν τὴν μᾶλλον προσιδιάζουσαν ἔκφρασιν.

Μηνιαία δαπάνη συνολικὴ Κ	λογ Κ	Δ λογ Κ	Μηνιαία δαπάνη διατροφῆς x	Δ x	λογ Κ	Δ λογ x
9184,94	3,33942	−0,16064	1258,6	−606,0	3,09989	−0,15736
2703.13	3,43187	−0.06819	1577.9	−286,5	3,19808	−0.05911
2016,63	3,47952	−0.02054	1735,8	−128,6	3,23948	−0,01771
3813,08	3,58128	+0.98122	2183,3	+338,9	3,33911	+0,08192
4658,15	3,66821	+0,16815	2566,6	+702,2	3,40937	+0,15208
	17,50830	−0,24937	9322 2	−1021,1	16,28593	−0,23410
	ΜλογΚ=	+0.24937	Μx	+1021,1	Μλογ x	+0.23412
	$=\frac{17,50030}{5}=$	ΔλογΚ=	$\frac{9322,2}{5}=$	Δx=	$=\frac{16,28593}{5}=$	Δ λογ x —
	=3,50006	0.24937	=1864,4	1021,1	3,25719	−0,23411

Προκειμένου ἤδη νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (1) ἔχομεν

$$\alpha = \frac{\Delta\ \lambda o\gamma.\ x}{\Delta\ \lambda o\gamma.\ K} = \frac{0{,}23412}{0{,}24937} = 0{,}939$$

καὶ

$$\Lambda o\gamma.\ x - M\ \lambda o\gamma.\ x = \alpha\ (\lambda o\gamma.\ K - M\ \lambda o\gamma.\ K)$$

ὅθεν

$$\Lambda o\gamma.\ x = 3{,}25719 + 0{,}939\ (\lambda o\gamma.\ K - 3{,}50006)$$

ἤτοι

$$\Lambda o\gamma.\ x = -0{,}02987 + 0{,}939\ \lambda o\gamma.\ K \tag{7}$$

ἔνθα

$$\Lambda o\gamma.\ A = -0{,}02987\quad \frac{1}{A} = 1{,}0713$$

Ἡ παρεμβολικὴ ἐξίσωσις ἑπομένως καθίσταται

$$x = \frac{K^{0{,}939}}{1{,}0713}$$

Προκειμένου νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (4) ἔχομεν

$$\alpha = \frac{\Delta\ x}{\Delta\ \lambda o\gamma.K} = \frac{1021{,}1}{0{,}24937} = 4095$$

καὶ

$$x = M\ x = \beta\ (\lambda o\gamma.\ K - M\ \lambda o\gamma\ K)$$

ὅθεν

$$x = 1864{,}4 + 4095\ (\lambda o\gamma.\ K - M\ \lambda o\gamma.\ K)$$

ἤτοι

(8) $x = -12468{,}1 + 4095 \text{ λογ. } K$

ἔνθα

$a = -12468{,}1$

Ἐὰν ἤδη ἐπαληθεύσωμεν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις (7) καὶ (8) διὰ τὰς δεδομένας τιμὰς τοῦ K ἔχομεν

Μηνιαία δαπάνη Συνολική K	Μηνιαῖαι δαπάναι διατροφῆς				
	Μετρηθεῖσαι	Τύπου (7)	Διαφ.	Τύπου (8)	Διαφ.
2184,94	1258,6	1276	+17	1207	−53
2703,13	1577,9	1558	−20	1585	+ 7
3016,63	1735,8	1728	− 7	1780	+44
3813,08	2183,3	2152	−31	2196	+13
4658,15	2566,6	2598	+31	2553	−14

Ἐκ παραβολῆς τῶν διαφορῶν συνάγεται ὅτι διὰ τὴν μελέτην τῶν βιωτικῶν συνθηκῶν τῶν ἑλληνικῶν ἐργατικῶν τάξεων προσιδιάζει μᾶλλον διὰ τὴν δαπάνην διατροφῆς συναρτήσει τῆς ὁλικῆς δαπάνης οὐχὶ ἡ λογαριθμικὴ ἔκφρασις (8) ἣν ὁ καθηγητὴς del Vecchrio προέτεινεν ὡς γενικῶς ἰσχύουσαν, ἀλλὰ μᾶλλον ὡς ὑπερβολικὴ (7), δηλαδὴ ἡ

$$x = \frac{K^{0{,}939}}{1{,}0713}$$

διότι αἱ δι' αὐτῆς ὑπολογιζόμεναι τιμαὶ τῆς x παρέχουν μικροτέρας διαφορὰς ἀπὸ τῶν μετρηθεισῶν x, ἐν σχέσει πρὸς τὰς διὰ τοῦ τύπου (8) εὑρισκομένας, καὶ τοῦτο ἀνεξαρτήτως τῶν τυχαίων σφαλμάτων ἅτινα πιθανὸν νὰ περικλείουν αἱ στατιστικαὶ παρατηρήσεις. Ἡ καμπύλη καὶ ἡ παρεμβολικὴ γραμμὴ φαίνονται ἐν τῷ διαγράμματι I, ἡ ἰδία δὲ καμπύλη καὶ ἡ παρεμβολικὴ εὐθεῖα λογαριθμικῶς λαμβανόμεναι φαίνονται ἐν τῇ Διαγρ. II.

Ἐπειδὴ ὅμως διὰ τὰς μείζονας τιμὰς τοῦ K αἱ ὑπὸ τοῦ τύπου (8) παρεχόμεναι διαφοραὶ εἶνε ἀρνητικαί, ἐνῷ αἱ ὑπὸ τοῦ τύπου (7) εἶνε θετικαί, καθίσταται πιθανὸν ὅτι εἰς τὰς μείζονας τῶν 4658,15 ὁλικὰς δαπάνας ἡ καμπύλη αὕτη παρέχει μείζονας τιμὰς τοῦ x, ἐνῷ κοινῶς εἶνε αἰσθητὸν ὅτι ἡ δαπάνη τῆς διατροφῆς μᾶλλον θὰ ἐλαττοῦται συγκριτικῶς αὐξανομένης τῆς συνολικῆς καταναλώσεως. Ἐντεῦθεν συνάγεται τὸ ἐνδόσιμον ὅτι, καθ' ἣν περίπτωσιν ἡ καμπύλη πρόκειται νὰ ἐπεκταθῇ ἐπὶ μειζόνων τοῦ 4658,15 συνολικῶν καταναλώσεων, ἡ καμπύλη (8) πιθανὸν ἀπεικονίζει πληρέστερον τὸ φαινόμενον.

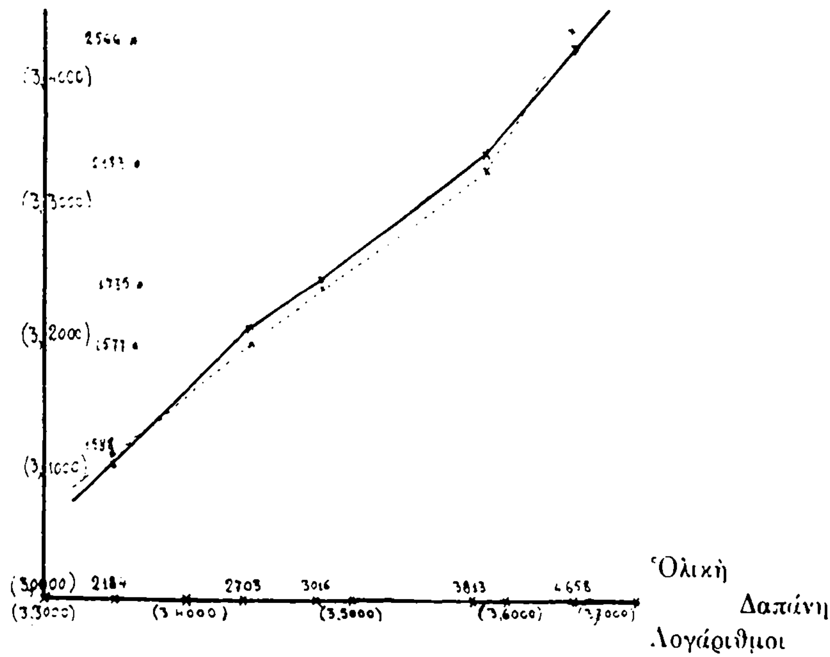
* * *

Τὰς αὐτὰς παλαιοτέρας δημογραφικὰς ἐρεύνας χρησιμοποιῶν ὁ del Vecchio εὑρίσκει ὅτι ἐκτὸς τῶν δαπανῶν διατροφῆς, καὶ ἐκεῖναι ἱματισμοῦ καὶ ἐκεῖναι κατοικίαι ἀκολουθοῦν τὴν ἄλλην λογαριθμικὴν ἔκφρασιν (4).

Διάγραμμα I.

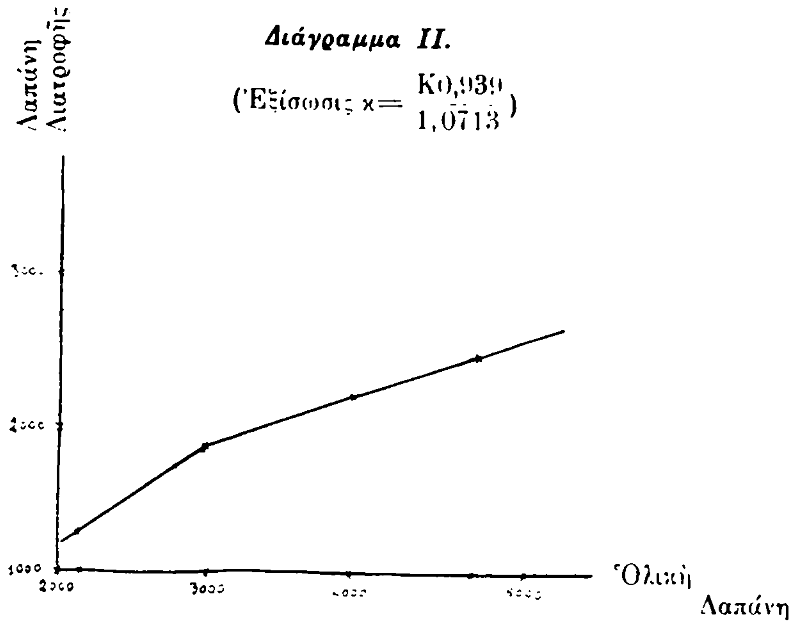
Καμπύλη καὶ εὐθεῖα (λογαριθμικῶς)

(Ἐξίσωσις $λογ.\ κ = 0{,}02987 + 0{,}939\ λογ.\ Κ$)



Διάγραμμα II.

(Ἐξίσωσις $κ = \frac{K^{0{,}939}}{1{,}0713}$)



Παρόμοιος ὡς ἄνω ὑπολογισμὸς διὰ τὰς δαπάνας διὰ τὸν ἱματισμὸν (Κατηγ. β') περιέχει κατὰ μὲν τὴν ὑπερβολικὴν σχέσιν τὴν ἐξίσωσιν

(9) Λογ. $x = -1{,}44551 + 1{,}139$ λογ. K

κατὰ δὲ τὴν λογαριθμικὴν

(10) $x = -3026{,}9 + 966{,}3\ K$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων κατηρτίσθη ὁ ἑπόμενος ἐπαληθευτικὸς πίναξ.

Μηνιαία συνολική δαπάνη K	Μηνιαία δαπάνη ἱματισμοῦ				
	μετρηθεῖσα x	Τύπου (9)	Διαφ.	Τύπου (10)	Διαφ.
2184,9	224,1	228	+ 4	209,9	−14,2
2703,1	279,2	291	+12	287,8	+ 8,6
3016,6	321,0	329	+ 8	333,6	+12,6
3813,1	396,2	430	+34	433,7	+37,5
4658,1	555,2	528	−27	517,2	−38,0

Τοῦ ὑπερβολικοῦ τύπου παρέχοντες μικροτέρας διαφορὰς συνάγομεν ὅτι διὰ τὴν διατύπωσιν μαθηματικῶς τῆς σχέσεως τῆς πρὸς ἱματισμὸν δαπάνης καὶ τῆς ὁλικῆς ὑπὸ τὰς ἐν Ἑλλάδι συνθήκας τῶν ἐργατικῶν τάξεων προσιδιάζει παρομοίως ἡ ὑπερβολικὴ ἔκφρασις

$$x = \frac{K^{1,139}}{27{,}896}$$

Καθ' ὅμοιον ὡς ἄνω τρόπον ὑπολογιζομένη ὡς ὑπερβολικὴ ἐξίσωσις δίδει προκειμένου περὶ τῆς κατοικίας (Κατηγ. γ')

(11) λογ. $x = -3{,}43168 + 1{,}705$ λογ. K

ἡ δὲ λογαριθμικὴ

(12) $x = -5085{,}6 + 1563$ λογ. K

ὁ δὲ σχετικὸς πίναξ ἔχει ὡς ἑξῆς:

Μηνιαία συνολική δαπάνη K	Μηνιαία δαπάνη κατοικίας				
	Μετρηθεῖσα	Τύπου (11)	Διαφ.	Τύπου (12)	Διαφ.
2184,9	185,—	183	− 2	134,2	−51
2703,1	251,—	264	+ 7	268,3	+17
3016,6	328,—	324	− 4	352,8	+25
3813,1	430,8	472	+31	511,9	+81
4658,1	728,8	665	−64	647,7	−81

Ἐντεῦθεν καταφαίνεται προφανὴς ἡ ὑπεροχὴ τῆς ὑπερβολικῆς καμπύλης $x = \frac{K^{1,705}}{2702}$ τοὐλάχιστον διὰ τὰς ἐν Ἑλλάδι βιωτικὰς συνθήκας ὅπως ἐκφράσῃ τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς δαπάνης διὰ τὸ ἐνοίκιον καὶ τῆς συνολικῆς παρὰ τὴν ὑπὸ τοῦ del Vecchio ὑποστηριχθεῖσαν γενικότητα τῆς ἰσχύος πρὸς τοῦτο τῆς λογαριθμικῆς σχέσεως.

Προκειμένου ἤδη περὶ τῆς δαπάνης διὰ φωτισμὸν θέρμανσιν, καθαριότητα (Κατηγ. δ) καθ' ὅμοιον τρόπον ἔχομεν τὴν ὑπερβολικὴν ἐξίσωσιν

(13) $\lambda o\gamma\, x \quad 0{,}30607-6{,}771\ \lambda o\gamma\, K$

ὡς λογαριθμικὴν δὲ

(14) $x \quad -1422{,}6+479\ \lambda o\gamma\, K$

Ὁ ἑπόμενος πίναξ παρέχει τὰς διαφορὰς μεταξὺ τῶν μετρηθεισῶν δαπανῶν καὶ τῶν ἐκ τῶν τύπων (13) καὶ (14) συναγομένων.

Συνολικὴ δαπάνη μηνιαία K	Μηνιαία δαπάνη φωτισμοῦ καὶ θερμάνσεως				
	Μετρηθεῖσα	Τύπου (13)	Διαφ.	Τύπου (14)	Διαφ.
2184,94	184,5	185	— 0	177	— 7
2703,13	229,5	219	—10	221	— 8
3016,63	228,2	238	+10	244	+16
3813, 1	277,5	285	+ 7	293	+16
4658, 1	350,0	333	+17	335	—15

Ἐντεῦθεν φαίνεται ὅτι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τῆς δαπάνης διὰ τὸν φωτισμὸν κλπ. (Κατηγ. δ) προσιδιάζει μᾶλλον ἡ ὑπερβολικὴ μορφή.

Ἀπομένει ἡ τελευταία κατηγορία τῶν διαφόρων δαπανῶν δι' ἣν ὅμοιος ὑπολογισμὸς παρέχει ὑπὸ μὲν τὴν ὑπερβολικὴν μορφὴν τὴν ἐξίσωσιν.

(15) $\lambda o\gamma\, x = 0{,}47216+0{,}612\ \lambda o\gamma\, K$

ὑπὸ δὲ τὴν λογαριθμικὴν τὴν ἐξίσωσιν

(16) $x=1690+602\ \lambda o\gamma\, K$

Τὰ δὲ συγκριτικὰ ἀποτελέσματα φαίνονται εἰς τὸν ἑπόμενον ἐπαληθευτικὸν πίνακα.

Συνολικὴ μηνιαία δαπάνη K	Μηνιαία δαπάνη διὰ διάφορα ἔξοδα				
	Μετρηθεῖσα	Τύπου (15)	Διαφ.	Τύπου (16)	Διαφ.
2184,9	332,0	328	— 4	327	— 5
2703,1	366,0	374	+ 8	375	+ 9
3016,6	403,0	400	— 3	404	+ 1
3813,1	525,0	461	—64	565	+40
4658,1	458,0	521	+63	515	+57

Ἐντεῦθεν φαίνεται ὅτι ἡ διὰ τὰ διάφορα μὴ εἰς τὰς ἄλλας κατηγορίας περιλαμβανόμενα ἔξοδα δαπάνης συνδέεται μὲ τὴν ὁλικὴν δαπάνην διὰ τῆς λογαριθμικῆς μᾶλλον σχέσεως καίτοι αἱ διαφοραὶ μεταξὺ τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν δύο σχέσεων εἶνε ἀρκούντως μικραί, ὥστε δεδομένου ὅτι αἱ δαπάναι τῶν ἄλλων κατηγοριῶν ἀκολουθοῦν τὴν ὑπερβολικὴν σχέσιν, θὰ ἠδύνατο τις νὰ δεχθῇ ταύτην, χάριν ὁμοιομορφίας καὶ στὰς διαφόρους δαπάνας τῆς κατηγορίας αὐτῆς, δηλαδὴ τὴν ἔκφρασιν

$$x=2{,}966\ K^{0{,}612}$$

Συμπεραίνομεν ἐντεῦθεν γενικῶς ὅτι α) διὰ τὴν μελέτην τῶν βιωτικῶν συνθηκῶν τῶν ἐν Ἑλλάδι ἐργατικῶν τάξεων προσιδιάζει γενικῶς ἡ ὑπερβολικὴ σχέσις β) ἑκάστη τῶν κατὰ κατηγορίαν δαπανῶν συνδέεται πρὸς τὴν συνολικὴν δαπάνην διὰ τῆς ὑπερβολικῆς σχέσεως

$$y = Ax^{\varkappa}$$

ἥτις ἐπὶ λογαριθμικοῦ διαγράμματος παριστᾶ εὐθείαν, γ) ὁ νόμος τοῦ Engel ἐπαληθεύεται καὶ ἐν Ἑλλάδι, ἀλλ᾽ ἡ μαθηματική του διατύπωσις δὲν ἀκολουθεῖ τὴν ὑπὸ τοῦ del Vecchio προταθεῖσαν, ὡς γενικῶς ἑρμηνεύουσαν τὸν νόμον τοῦτον λογαριθμικὴν σχέσιν

$$y = a + b \text{ λογ } x$$

ἀλλὰ τὴν ὑπερβολικὴν

$$\text{λογ } \varkappa = -0{,}02987 + 0{,}989 \text{ K}$$

Ὅτι δ᾽ ἐπαληθεύεται πράγματι ὑπὸ τὴν μορφὴν ταύτην ὁ νόμος τοῦ Engel ἐν Ἑλλάδι συνάγεται ἐκ διαφορίσεως τῆς ἀνωτέρω ὑπερβολικῆς ἐκφράσεως ὁπότε λαμβάνομεν

$$d\varkappa = 0{,}939 \frac{u}{K} dK$$

Ἡ σχέσις αὕτη ἂν ἀπὸ τῶν ἀπειριστῶν μεταφερθῶμεν προσεγγιζόντως εἰς τὰς ὡρισμένας διαφορὰς παρέχει

$$(17) \qquad \Delta\varkappa = 0{,}939 \frac{u}{K} \Delta K$$

ἥτις, τοῦ $\frac{u}{K}$ ὄντος πάντοτε μικροτέρου τῆς μονάδος, δεικνύει ὅτι, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Engel, αὐξανομένης τῆς συνολικῆς δαπάνης κατὰ ΔK, ἡ πρὸς διατροφὴν δαπάνη δὲν αὐξάνει ἀναλόγως ἀλλὰ κατὰ ποσὸν Δu ὅπερ εἶνε πάντοτε οὐσιωδῶς μικρότερον τοῦ ΔK.

Ἡ σχέσις αὕτη (17) ἀποτελεῖ τὴν διὰ τὰς ἐν Ἑλλάδι ἐργατικὰς τάξεις μαθηματικὴν διατύπωσιν τοῦ νόμου τοῦ Engel.