ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΕΣΩΝ ΕΝ ΤΗι ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗι

ΥΠΟ

Κ. Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

1. *Εἰσαγωγή.*

Σκοπὸς πρωτεύων τῆς τεχνικῆς στατιστικῆς τίθεται, κατὰ τὸν A. Niceforo, ἡ ἀναγωγὴ τῶν πολυπληθῶν μαζῶν τῶν παρατηρήσεων, αἵτινες ἐγένοντο ἐπὶ τῶν συγχρόνων ἢ διαδοχικῶν ἐκδηλώσεων τοῦ αὐτοῦ φαινομένου, εἰς μικρὸν ἀριθμὸν παραστατικῶν τιμῶν ἢ ἄλλως στατιστικῶν σταθερῶν, ἐπὶ σκοπῷ ὅπως, αὗται συνοψίσωσιν ἀφ' ἑνὸς τὴν ἔκτασιν καὶ τὴν ἔντασιν τῶν μεταβολῶν τούτων, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅπως εὐκολύνωσιν τὴν ἀνακάλυψιν καὶ διαμόρφωσιν τοῦ ὑπὸ τὰς ποσοτικὰς ἐκδηλώσεις κεκρυμένου ἐμπειρικοῦ νόμου, ὅστις ἰθύνει τὰς καθόλου, τοῦ φαινομένου, ἐκδηλώσεις εἴτε ἐν τῷ χρόνῳ εἴτε ἐν τῷ διαστήματι, παρὰ τήν, ἐνίοτε, φαινομένην ἀνωμαλίαν αὐτῶν.

Πρὸς πραγμάτωσιν ὅμως τοῦ σκοποῦ τούτου ἐπιπροσθεῖται κώλυμα δυσυπέρβλητον κατὰ τὴν τεχνικὴν στατιστικὴν διασκόπησιν τῶν ποσοτικῶν ἐκδηλώσεων τῶν καθόλου οἰκονομικῶν, κοινωνικῶν καὶ δημογραφικῶν φαινομένων, καθ' ὅσον εἰς ταῦτα εἶναι ἀνέφικτος ὁ πειραματισμός, ὡς προκειμένου περὶ τῶν φυσικῶν φαινομένων. Ἡ στατιστικὴ ὅθεν ὑποτύπωσις παρέχει μόνον τὰς ποσοτικὰς ἐκδηλώσεις τῶν φαινομένων ὡς αὗται διεμορφώθησαν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ποικιλωνύμων αἰτιῶν. Ἐκ τῶν αἰτιῶν τούτων ἄλλαι μὲν εἶναι μόνιμοι ἢ ἐλάχιστα μεταβληταί, ἄλλαι δέ, τοὐναντίον, ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς ἀνθρωπίνης πρωτοβουλίας, ἐν τῇ γενικωτέρᾳ ἐννοίᾳ. Εἰς διάθεσιν ἡμῶν εὑρίσκεται διὰ τῆς στατιστικῆς ὑποτυπώσεως, κατὰ ταῦτα, ἡ ποσοτικὴ ἐκδήλωσις τοῦ φαινομένου, ἥτις ἀπαρτίζει τὴν κοινὴν συνισταμένην τοῦ ἀποτελέσματος τῶν ἐπιδρασασῶν αἰτιῶν ἐπὶ τούτου, χωρὶς ὅμως καὶ διὰ ταύτης νὰ καθίσταται ἐφικτὸς ὁ διαφορισμὸς τῆς ἐντάσεως καὶ ἐκτάσεως ἑκάστης τῶν μερικῶν συνιστωσῶν.

Ἑπομένως διὰ τοῦ καθορισμοῦ τῶν στατιστικῶν σταθερῶν ἐπιδιώκεται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ ὑποκατάστασις τοῦ ἀριθμητικοῦ πίνακος τῆς στατιστικῆς ὑποτυπώσεως, ὃν ἀδυνατεῖ νὰ συγκρατήσῃ ὁ ἀνθρώπινος νοῦς, ἂν μάλιστα εἶναι λίαν ἐκτεταμένος, καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ διαπίστωσις τῆς κεντρικῆς τάσεως τοῦ ὑπ' ὄψει φαινομένου.

Κατ' ἀκολουθίαν ὁ καθορισμὸς τῶν στατιστικῶν σταθερῶν ἀποτελεῖ εἶδος μνημοτεχνικοῦ κανόνος, ἐφαρμοζομένου εἰς ἀριθμητικὰ δεδομένα, τὰς ποσοτικὰς ἐκδηλώσεις τοῦ ὑπ' ὄψει φαινομένου.

'Εκ τῶν σταθερῶν τούτων, αἱ τῆς κεντρικῆς τάσεως, σταθεραὶ εἶναι αἱ κατέχουσαι τὴν πρωτεύουσαν θέσιν ἐν τῇ στατιστικῇ ἀναλύσει, καθ' ὅσον δὲν ἀποτελοῦσιν ἁπλῆν μόνον συνθετικὴν ἀναπαράστασιν τῆς δεδομένης σειρᾶς τῶν μετρήσεων. Αἱ σταθεραὶ αὗται, οἱ διάφοροι δηλ. μέσοι—μέσος ἀριθμητικός, μέσος γεωμετρικός, μέσος ἁρμονικὸς κλπ.—εἰκονίζουσι τὴν κεντρικὴν τάσιν τοῦ ὑπ' ὄψει φαινομένου, καθ' ὅσον ὡς ἔλεγεν ὁ Lexis, τύπος τις ἐμπειρικὸς οὐδὲν νεώτερον προσθέτει, ἐπειδὴ ἀποτελεῖ μᾶλλον ἢ ἧττον κατάλληλον συμπύκνωσιν τῶν παρατηρηθέντων ἀριθμῶν· οὐχ ἧττον ὅμως ὅταν προτιθέμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὑφίστανται εἷς ἢ πλείονες ἀριθμοί, μεταξὺ μεγάλου ἀριθμοῦ παρατηρηθέντων ἀριθμῶν, πέριξ ὧν συγκεντροῦνται, κατὰ τύπον ὡρισμένον a priori οἱ λοιποὶ ἀριθμοί, τότε τὸ τοιοῦτον θὰ ἀποτελῇ ἓν βῆμα πέραν τοῦ ἁπλοῦ ἐμπειρισμοῦ· Ὡς εἰκὸς δὲν θὰ ἔχῃ δημιουργηθῇ νόμος, ἀλλὰ θὰ ἔχῃ ἁπλοποιηθῇ τὸ πολυσύνθετον τῶν φαινομένων, καθ' ὅσον ταῦτα θὰ ἐξετάζωνται ἐπὶ βάσει εὐλογοφανῶν ὑποθέσεων καὶ ἐξ ἀπόψεων λογικῶν».

Καθ' ὅλας δὲ τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς αἱ θετικαὶ ἐπιδράσεις καὶ αἱ ἀρνητικαὶ τοιαῦται εἶναι ἴσης δυνατότητος, πολυάριθμοι δέ, ἐνῷ ἡ μέση τούτων ἔντασις μετρουμένη διὰ τοῦ ἀποτελέσματος αὐτῶν ἐπὶ μεταβλητοῦ λόγου (πηλίκου) παραμένει ἴση, οἱ διαπιστωθέντες λόγοι, λαμβανόμενοι εἰς μέγαν ἀριθμόν, θὰ ταχθῶσι περὶ τὸν μέσον αὐτῶν, κατὰ τὸν ἐκθετικὸν τύπον· τοῦτο δὲ θὰ συμβαίνῃ καὶ ὅταν ὑφίσταται περιωρισμένος ἀριθμὸς λόγων.

Ὁ τοιοῦτος χαρακτὴρ τοῦ μέσου οὐδὲν τὸ μυστηριῶδες ἐνέχει, καθ' ὅσον παριστᾷ τὴν συντετμημένην σύνοψιν ἐνίων γεγονότων καὶ σχέσεων.

Διὰ πάντα ταῦτα ὁ Jullin ὁρίζει τοὺς μέσους «ὡς τὴν ἔκφρασιν τῆς κανονικῆς ποσοτικῆς καταστάσεως ὡρισμένου φαινομένου».

Ἑπομένως οἱ μέσοι ἔχουσι περιγραφικὸν χαρακτῆρα περιοριζόμενον εἰς τὰς ἀριθμητικὰς σχέσεις τοῦ πεδίου τῶν παρατηρήσεων, χωρὶς νὰ ἀντανακλῶσι τὴν ἐπίδρασιν ἀναγκαστικῆς αἰτίας. Ἡ κανονικὴ κατάστασις ἔχει μεγάλην σημασίαν ἐν τῷ ὁρισμῷ, καθ' ὅσον λαμβάνει ὑπ' ὄψει αὐτῆς τὴν ἐπίδρασιν τῆς ἐκθετικῆς κατανομῆς τῶν μεταβλητῶν πέριξ τοῦ μέσου αὐτῶν.

Οἱ μέσοι ὡς εἶναι φανερὸν ἀποτελοῦσι τὸ ἐξαγόμενον μιᾶς προσεγγίσεως, δι' ὃ καὶ προϋποθέτουσι τὸν λογισμὸν αὐτῶν γενόμενον ὑπὸ τὰς μᾶλλον αὐστηρὰς συνθήκας ἀκριβείας.

Ὁ λογισμὸς τοῦ μέσου πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ σκοποῦ αὐτοῦ δέον

1ον. Νὰ ἑδράζεται ἐφ' ὅλων τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως, καθ' ὅσον ἄλλως δὲν θὰ ἀποτελῇ τὸ χαρακτηριστικὸν τῆς ἀληθοῦς κατανομῆς τῆς μεταβλητῆς.

2ον. Νὰ ἐπιτελῆται εὐκόλως καὶ ταχέως, ἄνευ δηλ. πολυπλόκων ὑπολογισμῶν.

Ὅσον ἀφορᾷ νῦν τὴν ἔννοιαν τοῦ μέσου, αὕτη εἶναι διπλῆ

1ον Μαθηματικὴ καὶ

2ον Στατιστική

Μαθηματικῶς ὁ μέσος, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, εἶναι ἡ πιθανωτέρα τιμὴ σειρᾶς μετρήσεων, ἃς δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὡς συνεπαγομένας σφάλματα οἱαδήποτε, ἔστω καὶ ἐλάχιστα.

Ὑπὸ τὴν ἄποψιν τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων, οὗτος συγκλίνει, ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν πρὸς σύγκρισιν στοιχείων αὐξάνει, πρὸς εἰδικήν τινα τιμήν, σταθεράν, ἐξαρτωμένην ἐκ τοῦ νόμου τῆς εἰδικῆς πιθανότητος ἑκάστου εἴδους μεγέθους. Καίπερ δέ, δὲν ἐκφράζει τὴν ἀπόλυτον ἀλήθειαν, οὐχ' ἧττον ὅμως ἀποτελεῖ τὴν ἐντελεστέραν ταύτης ἔκφρασιν, λαμβανομένης ὑπ' ὄψει τῆς ἀτελείας τόσον τῶν ἀνθρωπίνων αἰσθήσεων ὅσον καὶ τῶν χρησιμοποιουμένων μέσων (ὀργάνων, ἐργαλείων) κατὰ τὰς ἐρεύνας καὶ μετρήσεις.

Στατιστικῶς ὁ μέσος ἔχει ἔννοιαν καθαρῶς συνθετικὴν ὡς ἐκ τῆς τάσεως τῆς ἀνθρωπίνης φύσεως πρὸς ἑνοποίησιν εἰς μίαν καὶ μόνην σύνθεσιν, μᾶλλον ἢ ἧττον, καταληπτὴν τῶν διαφόρων ποσοτικῶν ἐντυπώσεων, ἃς δύναται αὕτη νὰ ἔχῃ ἐπὶ τῶν διαφόρων ἀντικειμένων.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ στατιστικαὶ συναρτήσεις σχηματίζουσι σύνολόν τι εἰς ὃ τείνουσι νὰ ταὐτισθῶσι πολυάριθμα δεδομένα, ὁ μέσος ἀποτελεῖ εἶδος κοινοῦ μέτρου, ἰδανικὴν ἔκφρασιν, ἥτις βραχυλογικῶς συνοψίζει ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος καὶ ἑπομένως οἱ μέσοι ὡς ἀποστολὴν ἔχουσι τὴν ἀναπαράστασιν ἑνὸς συνθέτου συνόλου δι' ἐλαχίστου ἀριθμοῦ σταθερῶν.

Οἱ μέσοι διαστέλλονται πρὸς τούτοις εἰς μέσους ὑποκειμενικοὺς ἢ ἰδανικοὺς καὶ εἰς μέσους πραγματικοὺς ἢ ἀντικειμενικούς, χωρὶς ὅμως ἡ διαίρεσις αὕτη νὰ ἔχῃ γίνῃ διεθνῶς ἀποδεκτή.

Ἀντικειμενικὸς μέσος εἶναι ὁ προκύπτων ἐκ διαφόρων μετρήσεων ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀντικειμένου. Οὕτω ἡ σειρὰ τῶν μεγεθῶν, ἐξ ὧν ὁ μέσος οὗτος, ἀπαρτίζεται ἐκ μεγεθῶν σχεδὸν τῶν αὐτῶν, ἅτινα πάντοτε ἀναφέρονται εἰς τὸ αὐτὸ ἀντικείμενον καὶ ὧν αἱ μεταβολαὶ ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν ἐλαχίστων σφαλμάτων ἅτινα δημιουργοῦνται κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν παρατηρήσεων ἢ τῶν ἐλαφρῶν τροποποιήσεων αἵτινες ἐπέρχονται διαρκούσης αὐτῆς ταύτης τῆς παρατηρήσεως εἰς τὸ μετρούμενον ἀντικείμενον.

Κλασσικὸν παράδειγμα ἀποτελεῖ ἡ μέτρησις προτύπου μεταλλικῆς ῥάβδου.

Αἱ μετρήσεις, ἐξ ὧν ὁ ἀντικειμενικὸς μέσος λαμβάνεται, ὀφείλουσι τὸ ἄνισον τούτων εἰς τὴν ἀνακρίβειαν αὐτῶν, καθ' ὅσον αὗται ἀναγκαίως συνέχονται μεταξύ των διὰ νόμου συνεχείας τοιούτου ὥστε νὰ δεχόμεθα ὅτι, ἂν δὲν ὑφίσταται σταθερὰ αἰτία σφάλματος, ὑφίσταται ἡ αὐτὴ πιθανότης δημιουργίας θετικῶν σφαλμάτων ἀφ' ἑνός, ἀρνητικῶν σφαλμάτων ἀφ' ἑτέρου, ὅτε ἡ καμπύλη τῆς πιθανότητος τῶν σφαλμάτων λαμβάνει μορφὴν συμμετρικὴν ὡς πρὸς τὴν μεγίστην αὐτῆς τεταγμένην ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς σφάλμα μηδὲν δηλ. εἰς σφάλμα ἔχον μείζονα πιθανότητα ἐμφανίσεως.

Ὑποκειμενικὸς μέσος εἶναι ὁ προκύπτων ἐκ μετρήσεων γινομένων ἐπὶ πλειόνων ὁμογενῶν ἀντικειμένων καὶ οὐχὶ ἐφ' ἑνὸς καὶ μόνον· εἶναι δὲ ὁ κατ' ἐξοχὴν μέσος ὅστις χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν στατιστικήν.

Μεταξὺ τῶν δύο μέσων ὑφίστανται σημαντικαὶ διαφοραί, καθ' ὅσον ὁ ἀντικειμενικὸς μέσος προϋποθέτει ὅτι οὐδεμία τροποποίησις οὐσιώδης ἐπέρχεται, διαρκούσης τῆς μετρήσεως, εἰς τὸ μετρούμενον ἀντικείμενον. Ἑπομένως αἱ διάφοροι μετρήσεις, παραλλάσσουσι μεταξύ των μόνον κατὰ τὸν βαθμὸν τῆς ἀκριβείας ἥτις κατ' αὐτὰς ἐπετεύχθη. Ὅσον ἀφορᾷ τὸν ὑποκειμενικὸν μέσον, τὰ ὁμογενῆ ἀντικείμενα εἶναι πάντα διάφορα ἀλλήλων, τῶν διαστάσεων τούτων ὑποτιθεμένων γνωστῶν μετὰ πάσης δυνατῆς ἀκριβείας καὶ ἐπειδὴ ἡ ἔκφρασις τούτου ἀπαρτίζει τὸ κοινὸν μέτρον τούτων, οὐδένα πραγματικὸν χαρακτῆρα παριστᾷ, ἀλλὰ ἀναδέχεται, οἱονεί, ἀποστολὴν καθαρῶς συνθετικὴν καὶ ἀναπαραστατικὴν τῶν δεδομένων.

Ἐκτὸς ὅμως τῶν ἄνω ὁ ὑποκειμενικὸς μέσος οὐδόλως ἐμφαίνει τὴν βαρύτητα τοῦ σφάλματος ὅπερ προέρχεται εἴτε ἐκ τοῦ παρατηρητοῦ εἴτε ἐκ τοῦ χρησιμοποιηθέντος ὀργάνου μετρήσεως, τοῦθ' ὅπερ γίνεται ἀμέσως ἀντιληπτὸν διὰ τοῦ λογισμοῦ τοῦ ἀντικειμενικοῦ μέσου.

Πράγματι τὰ χρησιμοποιούμενα ὄργανα μετρήσεως οὐδέποτε λειτουργοῦσι ἀψόγως καὶ τελείως, δι' ὃ καὶ τὰ περὶ τὸν μέσον σφάλματα, τὰ εἰς τὴν αἰτίαν ταύτην ὀφειλόμενα σφάλματα ἢ τὰ προερχόμενα ἐκ τοῦ παρατηρητοῦ ὅστις, καθ' ὅλας τὰς μετρήσεις, δὲν κατέβαλεν προσοχὴν ἴσην. Ἐν τῇ τελευταίᾳ περιπτώσει ταῦτα παρέχουσι τὸν συντελεστὴν τοῦ προσωπικοῦ σφάλματος. Πλειστάκις ὅμως συμβαίνει αἱ δύο αἰτίαι τῶν σφαλμάτων νὰ συνυπάρχωσι νὰ συνδιάζωνται καὶ πρὸς ἄλλας τοιαύτας.

Ἑτέρα διαφορὰ χαρακτηριστικὴ τῶν δύο εἰδῶν τῶν μέσων εἶναι ἡ ὀφειλομένη εἰς τὴν μορφὴν τῆς καμπύλης ἥτις χρησιμοποιεῖται πρὸς ἀναπαράστασιν τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων τῆς σειρᾶς ἐξ ἧς προέκυψαν.

Ὁ ἀντικειμενικὸς μέσος προέρχεται ἐκ σειρᾶς, ἧς τὸ ἀνάπτυγμα ἀκολουθεῖ ἐγγύτατα τὴν καμπύλην τῶν σφαλμάτων (Gauss), καθ' ὅσον οἱ ὅροι ταύτης δύνανται νὰ θεωρηθῶσι ὡς ἐμπειρικαὶ τιμαὶ ἐνέχουσαι σφάλματα μᾶλλον ἢ ἧττον μεγάλα, ὅτε κατὰ τὴν ἄποψιν ταύτην προσεγγίζομεν πρὸς τὴν θεωρίαν τοῦ Gauss, τῶν σφαλμάτων κατανεμομένων κατὰ τὴν μαθηματικὴν θεωρίαν καὶ συμμόρφως πρὸς τὴν λογικὴν καὶ τὴν πεῖραν ἤτοι ὅτι τὰ μικρὰ σφάλματα εἶναι μᾶλλον πολυάριθμα ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ μεγάλα τοιαῦτα. Ἐξ οὗ ἡ κατανομὴ τῆς σειρᾶς, ἐξ ἧς ὁ ἀντικειμενικὸς μέσος, εἶναι μᾶλλον συμμετρική, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς σειράς, ἐξ ὧν ὁ ὑποκειμενικὸς μέσος, αἵτινες στεροῦνται συμμετρίας περὶ τὸν μέσον.

2. Μέσος ἀριθμητικός.

Ἡ ἁπλουστέρα τῶν σταθερῶν τῆς κεντρικῆς τάσεως εἶναι ὁ μέσος ἀριθμητικὸς ὅστις εἶναι καὶ ἡ πιθανωτέρα τιμὴ ἢ μᾶλλον ἡ περισσότερον προσεγγίζουσα πρὸς τὴν ἄγνωστον ἀληθῆ τοιαύτην, σειρᾶς τινος μετρήσεων [1].

Ἐὰν δοθῶσιν αἱ ποσότητες $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ ὁ μέσος τούτων θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\bar{\chi} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_\nu}{\nu} = \frac{\Sigma X}{\nu}$

Αἱ χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες τοῦ μέσου τοῦ μέσου εἶναι οἱ ἑξῆς δύο:

1ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπὸ τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ ἀποκλίσεων ν ποσοτήτων εἶναι μηδέν [2].

2ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων ν ποσοτήτων εἶναι ἐλάχιστον, ὅταν αὗται λογίζωνται ἀπὸ τοῦ μέσου των ἀριθμητικοῦ [3].

Ἐπὶ τῶν ἄνω δύο ἰδιοτήτων στηριζόμενοι, δυνάμεθα ἐμμέσως νὰ προσδιορίζωμεν τὸν μέσον ἀριθμητικόν, καθ' ὅσον ἂν τεθῇ

$$di = \chi i - Z \quad \text{ἢ} \quad \chi i = di + Z, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu$$

ὅπου Ζ μέγεθός τι αὐθαιρέτως ληφθὲν ὡς μέσος, θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως

$$\Sigma\chi i = \Sigma di + \nu Z \quad \text{ἢ} \quad \bar{\chi} = \frac{\Sigma\chi i}{\nu} = Z + \frac{\Sigma di}{\nu}$$

1) Πράγματι ἂν μέγεθός τι μετρηθὲν ν φορὰς παρέσχεν ὡς ἀποτέλεσμα τῶν μετρήσεων τούτων ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_\nu$, ἂν τότε ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ μεγέθους κληθῇ $\bar{\chi}$, ἑκάστη τῶν μετρήσεων θὰ ἐμφανίζῃ ὡς πρὸς ταύτην τὴν ἀπόκλισιν (διαφοράν) $d_1 = \chi_1 - \bar{\chi}$, $d_2 = \chi_2 - \bar{\chi}, \ldots \ldots d_\nu = \chi_\nu - \bar{\chi}$

Καθ' ἀκολουθίαν, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τούτων εἶναι $\Sigma d_i^2 = \Sigma(\chi_i - \bar{\chi})^2$, $i = 1, 2, \ldots \nu$ καὶ θὰ καθίσταται ἐλάχιστον μετὰ τῆς πρώτης αὐτοῦ παραγώγου, μηδενιζομένης, ἤτοι

διὰ $\Sigma(\chi_i - \bar{\chi}) = 0$ ἢ $\Sigma\chi_i = \nu\bar{\chi}$. Συνεπῶς $\bar{\chi} = \frac{\Sigma\chi_i}{\nu}$

Κατ' ἀκολουθίαν τῶν ἄνω, ἡ πιθανωτέρα τιμὴ τῆς σειρᾶς τῶν μετρήσεων εἶναι ὁ μέσος ἀριθμητικὸς τούτων, ὅστις ἐπὶ πλέον παριστᾷ τὴν τετμημένην τοῦ κέντρου βάρους τῶν ἐπὶ ἄξονος κατανεμημένων σημείων χi, ($i = 1, 2, \ldots \nu$), μὲ μάζας ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὴν μονάδα.

2) Πράγματι, $\Sigma di = \Sigma\chi i - \Sigma\bar{\chi} = \Sigma\chi i - \nu\bar{\chi}$, καθ' ὅσον ὁ $\bar{\chi}$ εἶναι σταθερός, ἀλλὰ $\bar{\chi} = \frac{\Sigma\chi i}{\nu}$, ἢ $\nu\bar{\chi} = \Sigma\chi i$, ὅθεν $\Sigma di = \Sigma\chi i - \Sigma\chi i = 0$.

3) Πράγματι καλέσωμεν d_i τὰς ἀποκλίσεις $\chi i - Z$, λογιζομένας ἀπὸ τοῦ Ζ, ὡς μέσου, διαφόρου ὅμως τοῦ πραγματικοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ $\bar{\chi}$.

Πρέπει νὰ ἔχωμεν $\Sigma di^2 = \Sigma(\chi i - Z)^2$ ἐλάχιστον, ἀλλὰ τὸ ἐλάχιστον τοῦτο ὑφίσταται μετὰ τῆς πρώτης παραγώγου μηδενιζομένης. Ὄντως $\Sigma(\chi i - Z) = 0$ ἢ $\Sigma\chi i = \nu Z$ ἢ $Z = \frac{\Sigma\chi i}{\nu}$. Συνεπῶς ἵνα Σdi^2 εἶναι ἐλάχιστον δέον ὅπως $Z = \bar{\chi}$, δηλ. ὅταν ὁ αὐθαιρέτως ὡς μέσος ληφθεὶς Ζ συμπίπτει μετὰ τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ $\bar{\chi}$.

ὅπου ὁ μέσος τῶν ἀπὸ Ζ ἀποκλίσεων $\frac{\Sigma di}{\nu}$, ἔσται μηδέν, μόνον ἂν $Z=\bar{\chi}$.

'Εκ τοῦ ἄνω τύπου ἕπεται ὅτι ὡς δοκιμαστικὸς μέσος Ζ δύναται νὰ ληφθῇ οἱοσδήποτε, καθ' ὅσον ὁ πραγματικὸς μέσος θὰ εὑρεθῇ τῇ προσθήκῃ τοῦ συνορθωτικοῦ ὅρου $\frac{\Sigma di}{\nu}$.

Ὁ μέσος ἀριθμητικὸς ὅστις λογίζεται διὰ τοῦ τύπου $\bar{\chi}=\frac{\Sigma \chi i}{\nu}$ ἢ $\bar{\chi}=Z+\frac{\Sigma di}{\nu}$ καλεῖται ἁπλοῦς, διότι λογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει μόνον τῶν διαφόρων τιμῶν τῆς χi $(i=1, 2, \ldots \nu)$, χωρὶς νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψει καὶ αἱ συχνότητες ἐμφανίσεως ἑκάστης ἐξ αὐτῆς.

'Εὰν ἤδη δίδεται ἡ στατιστικὴ συνάρτησις $Mi=\sigma(\chi i)$, ὁ καθορισμὸς τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ γίνεται διὰ παρεμβολῆς ὡς κάτωθι:

Πράγματι, διὰ τῆς στατιστικῆς ὑποτυπώσεως δίδονται αἱ διάφοροι τῆς μεταβλητῆς τιμαὶ $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_\nu$ καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι συχνότητες ἐμφανίσεως τούτων $\sigma(\chi_1), \sigma(\chi_2) \ldots, \sigma(\chi_\nu)$.

Πρὸς ἁπλούστευσιν τῆς ἐμπειρικῆς συναρτήσεως $\Psi i=\sigma(\chi i)$ τάσσονται αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς κατὰ τάξεις (ὁμάδας), οὕτως ὥστε νὰ ἐπαληθεύωσι τὴν διπλῆν ἀνισότητα $\chi i-\frac{\Delta\chi}{2}<\chi<\chi i+\frac{\Delta\chi}{2}$, ὅπου $\Delta\chi$ εἶναι τὸ εὖρος τοῦ διαστήματος ἑκάστης τάξεως, σταθερὸν διὰ πάσας τὰς τάξεις· ἐν ἄλλαις λέξεσιν αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς τάσσονται κατὰ κλιμάκια εὔρους σταθεροῦ, ἤτοι αἱ τάξεις τῶν κλιμακίων βαίνουσι κατὰ πρόοδον ἀριθμητικὴν λόγου $\Delta\chi$.

Οὐχ ἧττον ἐντὸς τοῦ διαστήματος $\Delta\chi$ τοῦ κλιμακίου $\chi_i-\Delta\chi/_2, \chi_i+\Delta\chi/_2$ ἡ ἀντίστοιχος συχνότης $\sigma(\chi i)$, καίπερ μὴ κατανεμομένη ὁμοιομόρφως ἐν αὐτῷ, θεωρεῖται, κατὰ πλάσμα, ἐν τούτοις ὡς ὁμοιομόρφως κατανεμομένη καὶ δὴ ὡς συγκεντρουμένη περὶ τὴν κεντρικὴν τιμὴν αὐτοῦ, ἥτις δίδεται ὑπὸ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἀκραίων τιμῶν τοῦ κλιμακίου.

Ἂν τὴν κεντρικὴν τιμήν, κατὰ ταῦτα, παραστήσωμεν διὰ Xi, ὁ μέσος ἀριθμητικὸς τῆς κατανομῆς $\psi_i=\sigma(\chi i)$, καθ' ὁρισμὸν θὰ δίδεται ὑπὸ

(1) $$\bar{\chi}=\frac{\Sigma\,\psi i\,Xi}{\Sigma\,\psi i}=\frac{\Sigma Xi\sigma(\chi i)}{\Sigma\,\sigma(\chi i)}=\frac{\Sigma Xi\sigma(\chi i)}{N},$$ ὅπου $N=\Sigma\sigma(\chi i)$ τὸ πλῆθος τῶν συχνοτήτων.

Ὁ ἄνω τύπος καλεῖται τύπος τοῦ μέσου βαρυκεντρικοῦ ἀριθμητικοῦ, καθ' ὅσον ἐν τῷ λογισμῷ τούτου αἱ διάφοροι τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς λαμβάνονται μετὰ συντελεστοῦ ἐνδιαφέροντος ἢ βάρους ἴσου πρὸς τὴν ἀντίστοιχον αὐτῶν συχνότητα. Οὗτος παριστᾷ τὴν τετμημένην τοῦ κέντρου βάρους τῆς κατανομῆς ἐπὶ ἄξονος, τῶν σημείων χi ἐχόντων μάζας ἀντιστοίχως τὰς $\sigma(\chi i)$, διὰ $i=1,2,\ldots\nu$.

Ἐπειδὴ νῦν $p(\chi i) = \frac{\sigma(\chi i)}{\Sigma\sigma(\chi i)} = \frac{\sigma(\chi i)}{N}$ παριστᾷ τὴν ἐμπειρικήν, ἐκ τῶν ὑστέρων ἢ στατιστικήν, πιθανότητα ἣν ἔχει ἐπὶ N παρατηρήσεων νὰ ἐμφανισθῇ ἡ χi, ἀκριβῶς $\sigma(\chi_i)$ φοράς, ὁ τύπος τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ δύναται νὰ γραφῇ [1] καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\bar{\chi} = \Sigma p(\chi_i)\,\sigma(\chi_i), \text{ ἐπειδὴ } \Sigma p(\chi_i) = 1.$$

Ὁ τύπος (1) καίπερ ἁπλούστατος σπανίως χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν λογισμὸν τοῦ μέσου δεδομένης κατανομῆς· ἀντ' αὐτοῦ συνήθως ὅμως χρησιμοποιεῖται ὁ κάτωθι

$$\bar{\chi} = Z + \frac{\Delta\chi\ \Sigma\lambda_i\,\sigma(\chi_i)}{N},\quad N = \Sigma\sigma(\chi_i),$$

τὸ πλῆθος τῶν συχνοτήτων ὅστις ἀπαιτεῖ ὀλιγώτερον χρόνον ἀφ' ἑνὸς καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐλαττώνει τὰ δυνάμενα νὰ παρεισδύσωσιν ἐν τῷ λογισμῷ τοῦ μέσου σφάλματος.

Πράγματι, ἐπειδὴ χ_i παριστᾷ τὸν κεντρικὸν ὅρον τῆς τάξεως, τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, i, ἐξ ἄλλου δὲ αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς ἔχουσι ταχθῇ κατὰ πρόοδον ἀριθμητικὴν λόγου Δχ, δύναται νὰ τεθῇ

$$\chi_i = \chi_1 + i\,\Delta\chi \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots \nu$$

ἂν δὲ ὡς ἀρχὴ ληφθῇ αὐθαιρέτως τὸ Z, τότε $\chi_i = Z + \lambda_i\,\Delta\chi$, $i = 1, 2, \ldots \nu$ καὶ ἐνεργοῦντες ἀλλαγὴν τῆς μεταβλητῆς λαμβάνομεν

$$\lambda_i = \frac{\chi_i - Z}{\Delta\chi}$$

(2) ἥτις παριστᾷ τὴν ἀπόκλισιν τῆς χ_i ἀπὸ τῆς αὐθαιρέτου ἀρχῆς Z, εἰς μονάδας τάξεως διαστήματος.

Ἐὰν ὅθεν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς $\chi_i = Z + \lambda_i\,\Delta\chi$, $i = 1, 2, \ldots\ldots \nu$ ἐπὶ $\sigma(\chi_i)$ καὶ ἀθροίσωμεν εἶτα τὰς προκυπτούσας σχέσεις διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ i, λαμβάνομεν

$\Sigma\chi_i\,\sigma(\chi_i) = Z\,\Sigma\sigma(\chi_i) + \Delta\chi\,\Sigma\lambda_i\,\sigma(\chi_i)$, ἐξ ἧς πορίζόμεθα

$$\bar{\chi} = \frac{\Sigma\chi_i\,\sigma(\chi_i)}{N} = Z + \frac{\Delta\chi\ \Sigma\lambda_i\,\sigma(\chi_i)}{N},\quad N = \Sigma\sigma(\chi_i)$$

Ἐν τῇ πρακτικῇ εἴθισται νὰ λαμβάνηται ὡς αὐθαίρετος μέσος Z, ὁ κεντρικὸς ὅρος τῶν τιμῶν τῆς τάξεως τῆς μεταβλητῆς, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς

1) Πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι, ἂν ἦτο γνωστὴ ἡ πιθανότης $\varrho(\chi)$ συναρτήσει τοῦ χ, διὰ τὰς μεταξὺ α καὶ β τιμὰς αὐτῆς, τότε ὁ μέσος θὰ ἐδίδετο ὑπὸ

$$\bar{\chi} = \int_\alpha^\beta \chi\cdot\varrho(\chi)d\chi : \int_\alpha^\beta \varrho(\chi)d\chi = \int_\alpha^\beta \varrho(\chi)\,d\chi$$

ὅπου α καὶ β, κατωτάτη καὶ ἀνωτάτη τιμὴ τῆς χ. Οὐχ ἧττον ἐπειδὴ τοῦτο δὲν συμβαίνει, διότι ἡ σ(χi) ἀποτελεῖ συνάρτησιν ἐμπειρικὴν ἀσυνεχῆ ὁ τύπος $\bar{\chi} = \Sigma p(\chi i)\,\sigma(\chi i)$ ἀπαρτίζει τὴν προσεγγίζουσαν ἔκφρασιν τοῦ μέσου τῆς δοθείσης κατανομῆς.

τὴν μείζονα ὁμάδα συχνοτήτων καὶ ἀκολούθως διὰ τοῦ τύπου (2) νὰ λογίζωνται αἱ ἀπὸ τούτου ἀποκλίσεις τῶν κεντρικῶν ὅρων τῶν λοιπῶν τάξεων τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς. Ὁ τύπος (2) τῆς ἀλλαγῆς τῆς μεταβλητῆς ἀνάγει τὰς τιμὰς ταύτης εἰς μονάδας τάξεως διαστήματος καὶ συνεπῶς διὰ τούτου, λόγῳ τῶν μικρῶν, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, τιμῶν τῆς λ_i ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ $\bar{\chi}$ ἁπλουστεύεται κατὰ πολύ.

Ἡ μέθοδος αὕτη ἐλαττώνει τὰς δυσκολίας, ὡς εἰκός, τοῦ ὑπολογισμοῦ ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς x_i βαίνουσι κατὰ πρόοδον ἀριθμητικὴν λόγου $\Delta\chi > 1$. Ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς δὲν ἀκολουθῶσι σταθερὸν νόμον αὐξήσεως, τότε αἱ ἀποκλίσεις λ_i λογίζονται διὰ τοῦ τύπου $\lambda_i = x_i - Z$, ἀλλὰ κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῆς λ_i δὲν εἶναι ἀριθμοὶ μικροί, ὡς εἰς τὴν προγενεστέραν περίπτωσιν.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ μέσος ἀριθμητικὸς (ἁπλοῦς ἢ βαρυκεντρικὸς) ἔχει τὰς διαστάσεις τῆς μεταβλητῆς x_i καὶ ἀποτελεῖ ἁ π λ ῆ ν ἀ φ α ί ρ ε σ ι ν, οὐδόλως ἀπαντῶν εἰς τὴν πραγματικότητα ἢ σπανίως καὶ ὅλως συμπτωματικῶς. Ἐν τούτοις ἔχει τὸ πλεονέτημα νὰ δίδῃ πολ)ζόμενος ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν συχνοτήτων, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ μέρους γινομένων τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἐπὶ τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς ταύτην συχνότητας.

Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος ταύτης στηρίζεται ἡ ἄλλη ἰδιότης τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ νὰ δύναται δηλ. νὰ λογισθῇ ὁ μέσος ἀριθμητικὸς δύο ἢ πλειόνων ὁμοειδῶν στατιστικῶν συναρτήσεων ἄνευ καθορισμοῦ τῆς συνισταμένης συναρτήσεως τούτων, ἐπὶ βάσει μόνον τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ ἑκάστης συνιστώσης συναρτήσεως καὶ τοῦ ὁλικοῦ πλήθους τῶν συχνοτήτων αὐτῆς.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ὁ μέσος τῆς συνισταμένης συναρτήσεως θὰ δίδεται ὑπὸ $\bar{\chi}N = \bar{\chi}_1 N_1 + \bar{\chi}_2 N_2 + \ldots\ldots$, ὅπου $N_1, N_2, \ldots\ldots$ τὸ πλῆθος συχνοτήτων τῆς πρώτης, δευτέρας, $\ldots\ldots$ στατιστικῆς συναρτήσεως, $\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \ldots\ldots$ ὁ μέσος ἀριθμητικὸς ἑκάτεραι τούτων, $\bar{\chi}$ ὁ μέσος τῆς συνισταμένης σειρᾶς καὶ $N = N_1 + N_2 + \ldots\ldots$, τὸ πλῆθος συχνοτήτων τῆς συνισταμένης σειρᾶς.

Συμβολικῶς ὁ μέσος τῆς συνισταμένης συναρτήσεως, ν μερικῶν τοιούτων θὰ δίδεται ὑπὸ $\bar{\chi} = \frac{1}{N}\Sigma\, \bar{x}_i N_i$ ὅπου N_i αἱ συχνότητες ἑκάστης μερικῆς συνιστώσης συναρτήσεως, $\bar{x}_i$, ὁμοίως, ὁ μέσος τούτων (διὰ $i = 1, 2, \ldots\ldots \nu$) καὶ $N = \Sigma N_i$, τὸ πλῆθος τῶν συχνοτήτων τῆς συνισταμένης συναρτήσεως.

3. *Μέσος Γεωμετρικός*.

Καθ' ὁρισμόν, ὁ μ. γεωμ. ν. ποσοτήτων ἰσοῦται πρὸς τὴν νυοστὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου αὐτῶν ἤτοι θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\Gamma = \sqrt[\nu]{\chi_1 \chi_2 \ldots\ldots x_\nu} = \sqrt[\nu]{\Pi\, x_i} \qquad (3) \quad i = 1, 2, \ldots\ldots \nu$$

τοῦ Π παριστῶντος τὸ γινόμενον ὁμοίων, τῶν ὧν προτάσσεται, ποσοτήτων. Ὁ ἄνω τύπος χρησιμοποιουμένων, τῶν λογαρίθμων γράφεται:

$$\text{λογ. } \Gamma = \frac{\text{λογ. } \chi_1 + \text{λογ. } \chi_2 + \ldots \text{λογ. } x_i}{\nu} = \frac{1}{\nu} \Sigma \text{ λογ. } x_i \quad (4), i = 1,2,\ldots\nu$$

ἤτοι ὁ λογάριθμος τοῦ μέσου γεωμετρικοῦ ν ποσοτήτων ἰσοῦται πρὸς τὸν μέσον ἀριθμητικὸν τῶν λογαρίθμων τῶν ποσοτήτων τούτων.

Ὁ μέσος γεωμετρικὸς ἀπολαύει τῶν ἑξῆς ἰδιοτήτων.

1ον. Τὸ γινόμενον τῶν ἀποκλίσεων ν ποσοτήτων ἀπὸ τοῦ μέσου γεωμετρικοῦ τούτων ἰσοῦται τῇ μονάδι ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν ἀποκλίσεων τούτων ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν (1).

2ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν λογαρίθμων τῶν ἀποκλίσεων ν ποσοτήτων εἶναι ἐλάχιστον, ὅταν αὗται λογίζωνται ἀπὸ τοῦ μέσου των γεωμετρικοῦ (2).

Οἱ τύποι (3) καὶ (4) καλοῦνται τοῦ ἁπλοῦ μέσου τοῦ γεωμετρικοῦ. Ἐὰν νῦν ἔχῃ δοθῇ ἡ στατιστικὴ συνάρτησις $\nu_i = \sigma(x_i)$, τῆς κατανομῆς ταύτης ὁ μέσος γεωμετρικὸς καθ' ὁρισμὸν θὰ δίδεται ὑπὸ

$$\text{λογ. } \Gamma = \frac{\sigma(x_1)\text{ λογ. } \chi_1 + \sigma(\chi_2)\text{ λογ. } \chi_2 + \ldots}{\Sigma\, \sigma(x_i)} = \frac{\Sigma\sigma(x_i)\text{λογ } x_i}{\Sigma\,\sigma(x_i)} = \frac{\Sigma\sigma(x_i)\text{λογ } x_i}{N}$$

ὅπου $N = \Sigma\sigma(x_i)$, τὸ πλῆθος τῶν συχνοτήτων τῆς δοθείσης κατανομῆς, καὶ θὰ παριστᾷ τὴν τετμημένην τοῦ κέντρου βαρύτητος τῶν σημείων λογ. x_i κατανεμομένων ἐπὶ ἄξονος, καὶ ἐχόντων μάζας ἀντιστοίχως τὰς $\sigma(x_i)$ (διὰ $i = 1, 2, \ldots \nu$).

Ὁ ἄνω τύπος καλεῖται δ' τοῦ μέσου βαρυκεντρικοῦ γεωμετρικοῦ, δι' ὃν λόγον καὶ ὁ μέσος βαρυκεντρικὸς ἀριθμητικός.

Ὁ μέσος γεωμετρικὸς χρησιμοποιεῖται κυρίως ἐν τῷ λογισμῷ τῶν τιμαρίθμων καθ' ὅσον ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ μὴν ὑπερβάλῃ τὴν τυχοῦσαν αὐ-

---

1) Πράγματι, καλοῦμεν γεωμετρικὴν ἀπόκλισιν, τὴν $\zeta_i = \frac{X_i}{\Gamma}$ ἑπομένως κατὰ τὴν ἰδιότητα I, θὰ ἔχωμεν

$\Sigma\text{λογ}\zeta = \Sigma\text{λογ}\chi_i - \Sigma\text{λογ}\Gamma = \Sigma\text{λογ}\chi_i - \nu\text{λογ}\Gamma$, διὰ $i = 1, 2, \ldots \nu$

ἀλλὰ $\nu\text{λογ}\Gamma = \Sigma\text{λογ}\chi_i$, ὅθεν

$\Sigma\text{λογ}\zeta_i = \Sigma\text{λογ}\chi - \Sigma\text{λογ}\chi_i = O$ ἢ

$\Pi\zeta_i = 1$, διότι ὁ λογάριθμος τοῦ O εἶναι ἡ 1.

2) Πράγματι, δέον νὰ ἔχωμεν $\Sigma\text{λογ}\zeta_i^2 = \Sigma(\text{λογ}\chi_i - \text{λογ}Z)^2$ ἐλάχιστον, ἀλλὰ τὸ ἐλάχιστον τοῦτο ὑφίσταται μετὰ τῆς παραγώγου τῆς ἐκφράσεως ταύτης μηδενιζομένης, ἤτοι ὅταν $\Sigma\text{λογ}\chi_i - \Sigma\text{λογ}Z = o$ ἢ $\text{λογ}Z = \frac{\Sigma\text{λογ}\chi_i}{\nu}$ δηλ. ὅταν Z συμπίπτῃ πρὸς τὸν μ. γεωμετρικὸν Γ.

ξησιν τῶν τιμῶν εἰς βάρος τῶν τιμῶν ἐκείνων αἵτινες ὑπέστησαν πτῶσιν, ἐκτὸς δὲ τούτου διότι ἐπιτρέπει τὴν ἀλλαγὴν τῆς βάσεως δι' ἁπλῆς διαιρέσεως (1).

Ὁ S. Jevons ἐπέστησε πρῶτος τὴν προσοχὴν τῶν εἰδικῶν ἐπὶ τῆς πρώτης ἰδιότητος διὰ τῆς ἐκθέσεως τοῦ παραδόξου τῶν δύο ἐμπορευμάτων. Καθ' ὅσον ἂν ἡ τιμὴ ἐμπορεύματός τινος Α αὐξήσῃ κατὰ 100 %, ὁ τιμάριθμος τούτου ἀνάγεται εἰς 200 %. Ἐὰν δὲ ταὐτοχρόνως ἄλλου τινος Β μειωθῇ κατὰ 50 %, ὁ τιμάριθμος τοῦ τελευταίου ἀνάγεται εἰς 50 % τότε κατὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ θὰ ἔχωμεν $\frac{200\% + 50\%}{2} = 125\%$ κατὰ δὲ τὴν περίπτωσιν τοῦ μέσου γεωμετρικοῦ $\sqrt{200\%\ 50\%} = 100\%$.

Οὕτω κατὰ μὲν τὸν μέσον ἀρηθμιτικὸν ἡ γενικὴ στάθμη τῶν τιμῶν ηὐξήθη κατὰ 25 %, κατὰ δὲ τὸν μέσον γεωμετρικὸν αὕτη παρέμειιεν ἀμετάβλητος.

Ὁ S. Jevons προσέθετεν μάλιστα ὅτι «εἰς ὅλους τοὺς ὑπολογισμοὺς οἵτινες ἀποβλέπουσιν εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ Quantum τῆς κοινωνικῆς προόδου, δέον νὰ χρησιμομοιῆται ὁ μέσος γεωμετρικός, διότι ἂν οἱαδήποτε ποσότης (γαιάνθραχος π. χ.) ηὐξήθη ἐντὸς 100 ἐτῶν κατὰ 100 % θὰ ἦτο σφάλμα νὰ λογίζεται ὅτι εἰς τὸ τέλος ἑκάστης δεκαετηρίδος ἡ ἀρχικὴ ποσότης ηὐξήθη κατὰ 10 %, διότι τοῦτο εἰς τὸ τέλος τῆς ἑκατονταετίας θὰ ἦγεν εἰς αὔξησιν 159 %, ἐνῷ ὁ ἀληθὴς μέσος θὰ ἦτο $\sqrt[10]{\frac{200\%}{100\%}} = \sqrt[10]{2} = 1,071$ περίπου ἤτοι, 7,1 % ἀνὰ 10ετίαν.

Ἐφαρμογὴν ἡ τελευταία ἄποψις τοῦ Jevons εὑρίσκει ἐν τῷ καθορισμῷ τοῦ μέσου ποσοστοῦ τῆς ἐτησίας αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ, μεταξὺ δύο ἐποχῶν, καθ' ἃς ὁ πληθυσμὸς εἶναι γνωστὸς διὰ τῆς ἀπογραφῆς, χρησιμοποιουμένου πρὸς τοῦτο τοῦ τύπου τοῦ ἀνατοκισμοῦ, ἐνῷ ὁ πληθυσμὸς θεωρεῖται ὡς κεφάλαιον αὐξάνον ἐτησίως κατὰ i % δηλ. τοῦ

$$\Pi_t = \Pi_0 (1+i)^t \text{ ἢ } i = \sqrt[t]{\frac{\Pi_t}{\Pi_0}} - 1$$

---

1) Ἴδε Κ. Ἀθανασιάδου, Περὶ τιμαρίθμων ἢ οἰκ. Δεικτῶν 1936, σελὶς 30 καὶ ἑφεξῆς.

ὅπου Π_0 Π_t ὁ πληθυσμὸς κατὰ τὰ ἔτη μηδὲν (ἀπογραφῆς) καὶ t, t τὸ χρονικὸν διάστημα, εἰς ἔτη, ὅπερ χωρίζει τὰς δύο ἀπογραφὰς τοῦ πληθυσμοῦ [1].

Ὅσον ἀφορᾷ νῦν τὰς περιπτώσεις χρησιμοποιήσεως ἀντιστοίχως τοῦ μέσου γεωμετρικοῦ καὶ τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ, θὰ πρέπῃ νὰ τονίσωμεν ὅτι ὁ μ. ἀριθμητικὸς χρησιμοποιεῖται ὅταν αἱ ἀποκλίσεις τῶν δεδομένων ἀπὸ τοῦ μέσου των, κατ' ἀπόλυτον τιμὴν λαμβανόμεναι εἶναι μικραί, ἂν τοὐναντίον εἶναι μεγάλαι τότε δέον νὰ χρησιμοποιῆται ὁ μέσος γεωμετρικός, δηλ. ὁ μὲν μέσος ἀριθμητικὸς χρησιμοποιεῖται ἂν ἡ σειρὰ εἶναι στατική, ὁ δὲ μέσος γεωμετρικὸς ἂν εἶναι δυναμική.

Ὁ μέσος γεωμετρικὸς ἐπειδὴ ἔχει τὸ πλεονέκτημα νὰ δίδῃ ὑψούμενος εἰς τὴν ν δύναμιν τὸ γινόμενον τῶν δεδομένων ἐξ οὗ προέκυψεν, διὰ τοῦτο εἶναι δυνατὸς ὁ καθορισμὸς τοῦ μέσου γεωμετρικοῦ Γ συνισταμένης τινὸς σειρᾶς, συναρτήσει τοῦ μ. γεωμετρικοῦ ἀφ' ἑνὸς καὶ τοῦ πλήθους συχνοτήτων ἀφ' ἑτέρου, ἑκάστης συνιστώσης σειρᾶς δηλ.

$N \text{λογ}\, \Gamma = N_1 \text{λογ}\, \Gamma_1 + N_2 \text{λογ}\, \Gamma_2 + \ldots$, ὅπου $N = N_1 + N_2 + \ldots$ τὸ πλῆθος τῶν συχνοτήτων τῶν συνιστωσῶν σειρῶν, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ ὁ μέσος γεωμετρικὸς ἑκάστης τούτων ἢ καὶ συμβολικῶς

$$\text{λογ}\, \Gamma = \frac{1}{N} \Sigma N_i \text{ λογ}\, \Gamma_i \quad , i = 1, 2, \ldots \nu$$

4. Μέσος ἁρμονικός.

Καθ' ὁρισμόν, ὁ ἀντίστροφος τοῦ μέσου ἁρμονικοῦ ν ποσοτήτων ἰσοῦται πρὸς τὸν μέσον ἀριθμητικὸν τῶν ἀντιστρόφων τῶν ποσοτήτων τού-

---

1) Ὁ ἄνω τύπος ὑποθέτει τὸ i σταθερὸν κατ' ἔτος, οὐχ ἧττον δυνάμεθα νὰ δείξωμεν ὅτι ὁ πληθυσμὸς Πν δέον νὰ εἶναι ἐκθετικὴ συνάρτησις τοῦ χρόνου, ἐὰν ἡ αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ ἐπιτελεῖται συνεχῶς (κατὰ τὴν ἄποψιν τοῦ Euler). Πράγματι ἔστω dΠ ἡ διαφορικὴ αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ Π κατὰ τὸ ἀπειροστὸν διάστημα τοῦ χρόνου dt καὶ ἐπὶ περιοδικῇ αὐξήσει ι. Ἂν νῦν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ στοιχειώδης αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ εἶναι ἀνάλογος τοῦ στοιχειώδους χρόνου, τοῦ ι καὶ τοῦ ἀρχικοῦ πληθυσμοῦ, τοῦθ' ὅπερ δύναται νὰ συμβαίνῃ μόνον ὅταν **οὐδὲν ἐμπόδιον ἠθικὸν ἢ οἰκονομικὸν παρακωλύει τὴν αὔξησιν τοῦ πληθυσμοῦ**, τότε $d\Pi = i\,\Pi\, dt$ ἢ $\frac{d\Pi}{\Pi} = i dt$ ἢ $\log\frac{\Pi_\nu}{\Pi_0} = \int i dt$

ἐὰν ι σταθερόν, $\Pi_\nu = \Pi_0 e^{it}$ ὅπου e ἡ βάσις τῶν Νεπερείων λογαρίθμων. Ἵνα δὲ κατὰ τὴν ἄποψιν τοῦ Μάλθου ὁ πληθυσμὸς διπλασιάζεται ἀνὰ 25 ἔτη, δέον νὰ ἔχωμεν $\Pi_\nu\ 2\ \Pi^0$, t=25, τότε δὲ $2\,\Pi_0 = \Pi_0 e^{i \cdot 25}$ ἢ $i = \frac{\text{λογ}2}{\text{λογ}\, e . 25} = 2{,}77\ \%$ δηλ. ὁ πληθυσμὸς πρέπει νὰ αὐξάνῃ κατὰ 2,77 % ἀνὰ πᾶν ἔτος, ὅτε ὄντως οὗτος θὰ βαίνῃ, διὰ μέσου τοῦ χρόνου, ὡς πρόοδος γεωμετρική, λόγου 1,0277. Τὸν τύπον $\Pi_\nu = \Pi_0 e^{it}$ χρησιμοποιεῖ ἡ Γ. Στατιστικὴ Ὑπηρεσία διὰ τὸν ἀναδρομικὸν ὑπολογισμὸν τοῦ Ἑλλ. πληθυσμοῦ. (1/λογe=2,3025850929...).

των, ἤτοι $\frac{1}{A}=\frac{1}{N}\Sigma\frac{1}{\chi_i}=\frac{1}{N}\left[\frac{1}{\chi_1}+\frac{1}{\chi_2}+\ .\ .\ .\ .\ +\frac{1}{\chi_\nu}\right]$

$(i=1, 2, \ldots \nu)$ καλεῖται δὲ ἁ π λ ο ῦ ς μ έ σ ο ς ἁ ρ μ ο ν ι κ ό ς. ὁ μέσος ἁρμονικὸς κέκτηται τῶν ἑξῆς ἰδιοτήτων.

1ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποκλίσεων ν ποσοτήτων ἀπὸ τοῦ μέσου των ἁρμονικοῦ εἶναι μηδέν (1).

2ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἁρμονικῶν ἀποκλίσεων ν ποσοτήτων εἶναι ἐλάχιστον, ὅταν αὗται λογίζονται ἀπὸ τοῦ μέσου των ἁρμονικοῦ (2).

Ἐὰν ἔχῃ δοθῇ ἡ στατιστικὴ συνάρτησις $\psi_i=\sigma(\chi_i)$ ὁ μέσος ἁρμονικὸς τῆς κατανομῆς, καθ' ὁρισμόν, θὰ δίδεται ὑπὸ

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{N}\Sigma\frac{\sigma(\chi_i)}{\chi_i}\quad,\qquad i=1,2,\ldots\nu,\ \Sigma\sigma(\chi_i)=N$$

ἢ

$$A=\frac{N}{\Sigma\,\sigma(\chi_i)}$$

Ἡ χρησιμότης τοῦ μέσου ἁρμονικοῦ καταφαίνεται εἰς τὸ ἐμπόριον κυρίως, διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἑκάστοτε ἀγοραστικῆς ἱκανότητος τοῦ νομίσματος.

Ὄντως, ἂν διαθέτωμεν κατά τινα ἐποχὴν τὸ ποσὸν Π=10.000 νομ. μονάδων καὶ ἡ τιμὴ μονάδος ἐμπορεύματός τινος Α εἶναι 100, διὰ τοῦ ποσοῦ Π ἀγοράζομεν 100 μονάδες τοῦ ἐμπορεύματος Α. Ἐὰν ἡ τιμὴ μονάδος τούτου αὐξηθῇ εἰς 150 ν. μονάδες κατ' ἀρχάς, εἶτα δὲ εἰς 200, κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ ἀγοράζωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ πάντοτε πο-

---

1) Πράγματι, ἡ ἁρμονικὴ ἀπόκλισις ὁρίζεται ὑπὸ τῆς $\frac{1}{\chi_i}-\frac{1}{A}=E_i$, ὅθεν

$$\Sigma\varepsilon_i=\Sigma\frac{1}{\chi_i}-\Sigma\frac{1}{A}=\Sigma\frac{1}{\chi_i}-\frac{N}{A},\quad \text{ἀλλὰ}\quad \frac{N}{A}=\Sigma\frac{1}{\chi_i},\quad \text{ὅθεν}$$

$$\Sigma\varepsilon_i=\Sigma\frac{1}{\chi_i}-\Sigma\frac{1}{\chi_i}=0$$

2) Πράγματι, ἵνα $\Sigma\varepsilon_i^2=\Sigma\left(\frac{1}{\chi_i}-\frac{1}{Z}\right)^2$ εἶναι ἐλάχιστον, πρέπει ἡ παράγωγος τῆς ἐκφράσεως ταύτης νὰ μηδενίζεται, τῆς Ζ οὔσης ποσότητός τινος ληφθείσης αὐθαιρέτως ὡς μέσης ἁρμονικῆς τῶν δεδομένων ν ποσοτήτων.

Ὄντως ἔχομεν $\Sigma\left(\frac{1}{\chi_i}-\frac{1}{Z}\right)=0$ ἢ $\Sigma\frac{1}{\chi_i}=\frac{N}{Z}$ ἢ $\frac{1}{Z}=\frac{1}{N}\Sigma\frac{1}{\chi_i}$

δηλ. ἵνα τοῦτο συμβαίνῃ δέον ὅπως Ζ=Α ἤτοι ἡ Ζ νὰ εἶναι ὁ μέσος ἁρμονικός.

σοῦ Π=10.000, 66,66, . . . μονάδας, καὶ κατὰ τὴν δευτέραν 50 μονάδας τοῦ ἀγαθοῦ Α ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὸν ἑξῆς πίνακα:

Τιμὴ μονάδος	100	150	200
Ἀγοραζόμεναι μονάδες	100	66,66...	50

Ἀλλὰ εἰς τὴν μέσην τῶν τιμῶν 100 καὶ 200 δηλ 150, δὲν ἀντιστοιχεῖ ἡ μέση τῶν ποσοτήτων $\frac{100+50}{2} = 75$, ἀλλὰ 66,66 . . . . , ὄντως αἱ 66,66 . . . μονάδες εἶναι ὁ μέσος ἁρμονικὸς τῶν ποσοτήτων 100 καὶ 50 δηλ. $66{,}66\ldots = \frac{2.50.100}{100+50}$

Κατὰ ταῦτα εἰς τὴν μέσην τῶν τιμῶν ἀντιστοιχεῖ ἡ μέση ἁρμονικὴ τῶν ποσοτήτων.

Εἰς τὸ χρηματιστήριον τοῦ ΛΟΝΔΙΝΟΥ αἱ τιμαὶ τῶν ξένων συναλλαγμάτων σημειοῦνται διὰ τῆς ἰσοτίμου ποσότητος τούτων πρὸς 1 £. Ἂν εἰς σειρὰν ἡμερῶν ἡ δραχμὴ ἐσημειοῦτο πρὸς 505, 507, 518, ὁ μέσος ἀριθμητικὸς τούτων εἶναι 510, τοῦθ' ὅπερ σημαίνει ὅτι ὁ μέσος ἁρμονικὸς τῆς δραχμῆς κατὰ τὰς ἡμέρας ταύτας ἦτο τὸ 1/510 τῆς £.

Ὁ μέσος ἁρμονικὸς χρησιμοποιεῖται ἰδίᾳ ὅταν τὰ ὑπ' ὄψιν μεγέθη εἶναι ἀνεπίδεκτα προσθέσεως, διότι τότε ὁ μ. ἀριθμητικὸς οὐδεμίαν ἔννοιαν θὰ εἶχε (1).

Δι' ὅ,τι ἀφορᾷ νῦν τὰς ἀποκλίσεις, ἀριθμητικήν, γεωμετρικήν, ἁρμονικήν, θὰ πρέπει νὰ σημειώσωμεν τὸ ἐνδιαφέρον τούτων ὑπὸ τὴν ἄποψιν τῆς ἀμέσου φορολογίας.

Πράγματι, ἡ ἀριθμητικὴ ἀπόκλισις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ἔννοιαν τοῦ προσωπικοῦ φόρου ὅστις εἶναι ἴσος διὰ πάντας καὶ συνεπῶς εἰς τοῦτον ἡ ἀριθμητικὴ ἀπόκλισις παραμένει σταθερὰ δηλ. $\chi - Z =$ σταθερᾷ, ὅπου Z ἡ πρὸ τῆς φορολογίας περιουσία καὶ χ τὸ μετὰ τὴν φορολογίαν ἀπομένον ποσὸν αὐτῆς.

Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόκλισις $\frac{\chi}{Z}$, σταθερὰ οὖσα, ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἀνα-

---

1) Πράγματι, ἂν ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο πόλεων Α καὶ Β εἶναι δεδομένη καὶ κατὰ τὴν μετάβασιν ἐκ τῆς Α εἰς Β, ἡ ταχύτης τοῦ μεταφορικοῦ μέσου ἦτο 80 χιλ. κατὰ δὲ τὴν ἐπιστοφὴν ἐκ τῆς Β εἰς Α, 60 χιλ. ἡ μέση ταχύτης μεταβάσεως καὶ ἐπιστροφῆς δὲν εἶναι ἡ (60+80) : 2=70 χιλ. ἀλλὰ 68,57 χιλ. καθ' ὥραν, καθ' ὅσον ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις εἶναι S μεταξὺ Α καὶ Β ἀπῃτήθη κατὰ τὴν μετάβασιν χρόνος $\chi_1 = \frac{S}{80}$, καὶ κατὰ τὴν ἐπιστροφὴν $\chi_2 = \frac{S}{60}$ συνεπῶς ἐν ὅλῳ $\chi_1 + \chi_2 = S\left(\frac{1}{80} + \frac{1}{60}\right)$ ἀλλὰ ἡ μέση ταχύτης εἶναι $\frac{2S}{\chi_1 + \chi_2}$, ὅθεν θὰ δίδηται ὑπὸ $\frac{S}{S\left[\frac{1}{80} + \frac{1}{60}\right]} = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{60}} = \frac{2.60.80}{60+80} = 68{,}57$ χ. δηλ. ὑπὸ τοῦ μέσου ἁρμονικοῦ τῶν ἐπὶ μέρους ταχυτήτων.

λογικὴν φορολογίαν καὶ τέλος ἡ ἁρμονικὴ ἀπόκλισις σταθερὰ οὖσα, $\frac{I}{\chi}-\frac{I}{Z}$, ἄγει εἴς τι σύστημα προοδευτικῆς φορολογίας.

5. Σχέσεις μεταξὺ τῶν τριῶν μέσων.

1ον. Ὁ μέσος ἀριθμητικὸς ν ποσοτήτων εἶναι μείζων τοῦ μέσου αὐτοῦ γεωμετρικοῦ, ὅστις πάλιν εἶναι μείζων τοῦ μέσου των ἁρμονικοῦ (1).

2ον. Ὁ μέσος γεωμετρικὸς τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ δύο ποσοτήτων ἐπὶ τὸν μέσον ἁρμονικὸν τούτων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν μέσον γεωμετρικὸν τῶν δύο ποσοτήτων. Ἡ τελευταία αὕτη σχέσις δὲν ἰσχύει διὰ πλείονας τῶν δύο ποσότητας (2).

6. Λοιποὶ μέσοι κεντρικῆς τάσεως.

'Εκτὸς τῶν ἄνω ὑφίστανται οἱ

1) μέσος τετραγωνικὸς $\bar{\tau} = \sqrt{\frac{\chi_1^2+\chi_2^2+\dots+\chi_\nu^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{\Sigma\chi_i^2}{\nu}}, i = 1, 2,\dots\nu$

2) μέσος κυβικὸς $\mu = \sqrt[3]{\frac{\chi_1^3+\chi_2^3+\dots+\chi_\nu^3}{\nu}} = \sqrt[3]{\frac{\Sigma\chi_i^3}{\nu}}, i=1, 2,\dots\nu$

3) μέσος ἀντιαρμονικὸς $\alpha = \frac{\chi_1^2+\chi_2^2+\dots+\chi_\nu^2}{\chi_1+\chi_2+\dots+\chi_\nu} = \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\chi}}$ κ.λ.π.

Οὐχ' ἧττον ὅμως οὗτοι οὐδόλως χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν στατιστικήν.

---

1) Πράγματι, $\bar{\chi} = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\Gamma = \sqrt{\alpha\beta}$, ὅθεν $\bar{\chi}^2 - \Gamma^2 = \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} - \alpha\beta = \frac{(\alpha-\beta)^2}{4}$ ἐπειδὴ δὲ τὸ β μέλος εἶναι πάντοτε ἀριθμὸς θετικός, θὰ ἔχωμεν ἐπίσης $\bar{\chi}^2 > \Gamma^2$.

'Ομοίως, ἔχομεν $A = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ καὶ ἂν θέσωμεν $\sqrt{\alpha} > \sqrt{\beta}$ θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς $(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2 > 0$ ἢ $\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta} > 0$ ἢ $\alpha+\beta > 2\sqrt{\alpha\beta}$ ἢ $\sqrt{\alpha\beta}\,(\alpha+\beta) > 2\alpha\beta$ ἢ τέλος $\sqrt{\alpha\beta} > \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ δηλ. $\Gamma > A$ ὅθεν καὶ $\bar{\chi} > \Gamma > A$.

2) Πράγματι, ἐπειδὴ $\bar{\chi} = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $A = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{\bar{\chi}\,A} = \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}} = \sqrt{\alpha\beta} = \Gamma \text{ ἤτοι } \Gamma = \sqrt{\bar{\chi}\,A}$$

7. Σταθεραὶ θέσεως.

Ἐκτὸς τῶν θεωρηθεισῶν ἄχρι τοῦδε σταθερῶν τῆς κεντρικῆς τάσεως, ὑφίστανται καὶ αἱ λεγόμεναι σταθεραὶ θέσεως, ὧν ὁ λογισμὸς ἐξαρτᾶται ἐκ μόνης τῆς γνώσεως τοῦ ὁλικοῦ πλήθους τῶν συχνοτήτων ἀφ' ἑνὸς καὶ τῶν ἐπὶ μέρους συχνοτήτων τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, ὡρισμένης ὅμως περιοχῆς τοῦ πεδίου τῶν μεταβολῶν αὐτῆς, δηλ. πρὸς καθορισμὸν τούτων δὲν ἀπαιτεῖται ἡ ἐντελὴς γνῶσις τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης μέχρι τῆς μεγίστης, ἐν τῇ δοθείσῃ κατανομῇ, ὡς προκειμένου περὶ τῶν σταθερῶν τάσεως, ἀλλὰ ἐνίων, ἐντὸς δεδομένης περιοχῆς τῶν μεταβολῶν αὐτῆς. Τοιαῦται σταθεραὶ θέσεις εἶναι ἡ διάμεσος, τὰ τεταρτημόρια, τὰ δεκατημόρια καὶ ὁ τύπος ἢ σημεῖον μεγίστης πυκνότητος ἢ καὶ κυριαρχοῦν σημεῖον.

8. Διάμεσος.

Δεδομένης σειρᾶς ν ποσοτήτων τεταγμένων κατ' αὔξουσαν φυσικὴν τάξιν μεγέθους ἡ διάμεσος τούτων εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ποσότητας ἥτις διαιρεῖ τὴν σειρὰν εἰς δύο ὁμάδας ἰσοπληθεῖς, δεδομένων ποσοτήτων.

Ἐὰν νῦν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς εἶναι ἀριθμὸς περιττὸς ($\nu = 2\mu + 1$) ἡ διάμεσος ἔσται ὁ κεντρικὸς ὅρος τῆς σειρᾶς, διότι τούτου θὰ προηγοῦνται τόσοι ὅροι, ὅσοι καὶ θὰ ἕπωνται. Ἐὰν νῦν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος ($\nu = 2\mu$) δὲν θὰ ὑφίσταται εἷς κεντρικὸς ὅρος ἀντιστοιχῶν εἰς ἑαυτόν, ἀλλὰ δύο τοιοῦτοι, καὶ συνεπῶς ἡ διάμεσος θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν μεγεθῶν αὐτῶν.

Τῶν στατιστικῶν συναρτήσεων $\psi_i = \sigma(x_i)$ ἡ διάμεσος καθορίζεται διὰ παρεμβολῆς εἴτε λογιστικῶς εἴτε γραφικῶς.

Πρὸς τοῦτο δέον, προγενεστέρως, συναρτήσει τῆς σειρᾶς τῶν συχνοτήτων νὰ καθορισθῇ ἡ ἀθροιστικὴ ἢ σωρεῖτις σειρὰ $\Phi(x_i) = \sum_1^i \sigma(x_\kappa)\,\Delta\chi$ ἥτις γραφικῶς παριστωμένη ἔχει μορφὴν σιγμοειδῆ (πεπλατυσμένου S) καὶ εἰς ἣν τὸ $\Delta\chi$ παριστᾷ ἁπλῶς τὴν μονάδα τάξεως διαστήματος, ἤτοι $\Delta\chi = 1$. Ἡ γραφικὴ ἀναπαράστασις τῆς $\Phi(x_i)$ εἰδικώτερον καλεῖται Στατιστικὴ ἀψίς.

Ἡ σωρεῖτις σειρὰ $\Phi(x_i) = \sum_1^i \sigma(x_\kappa)\,\Delta\chi$ ἐμφαίνει ὅτι ὑφίστανται ἐν ὅλῳ

$\Phi(x_i) = [\sigma(\chi_1) + \sigma(\chi_2) + \dots + \sigma(x_i)]\,\Delta\chi$ συχνότητες ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς μικροτέρας τοῦ μείζονος ὁρίου $x_i + \frac{\Delta\chi}{2}$ τῆς τάξεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς.

Κατ' ἀκολουθίαν, ἐπειδὴ ἡ διάμεσος θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς ἥτις μερίζει δίχα τὸ σύνολον τῶν συχνοτήτων $N = \Sigma\,\sigma(x_i)$, ἡ θέσις ταύτης θὰ δίδεται ὑπὸ $\frac{N}{2}$, οὐχ' ἧττον τὸ $\frac{N}{2}$ θὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ $\Phi(x_i)$ καὶ $\Phi(x_{i+1})$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας γραμμῆς τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων $M_1(\chi_1, \psi_1)$, $M_2(\chi_2, \psi_2)$ ὅπου

$$\chi_1 = x_i + \frac{\Delta\chi}{2},\quad \psi_1 = \Phi(x_i),\quad \chi_2 = x_i + 1 + \frac{\Delta\chi}{2},\quad \psi_2 = \Phi(x_i + 1)$$

θὰ δίδεται ὑπὸ $\frac{\psi - \psi_1}{\psi_1 - \psi_2} = \frac{\chi - \chi_1}{\chi_1 - \chi_2}$ ἢ $\chi = \chi_1 + \frac{(\chi_1 - \chi_2)}{(\psi_1 - \psi_2)}(\psi - \psi_1)$

ἀλλὰ $\psi = \frac{N}{2}$, ὅθεν $\chi = \Delta_\mu = \chi_i + \frac{\Delta\chi}{2} + \frac{\Delta\chi}{\sigma(x_i + 1)}\left[\frac{N}{2} - \Phi(x_i)\right]$

ἢ $\Delta_\mu = x_i + 1 - \frac{\Delta\chi}{2} + \frac{\Delta\chi}{\sigma(x_i + 1)}\left[\frac{N}{2} - \Phi(x_i)\right]$, διότι $x_i + \frac{\Delta\chi}{2} = x_i + 1 - \frac{\Delta\chi}{2}$

ἢ τέλος καὶ ἁπλούστερον $\Delta_\mu = \lambda_i + \frac{\Delta\chi}{\sigma(x_i+1)}\left[\frac{N}{2} - \Phi(x_i)\right]$

ὅπου λ_i τὸ μείζων ὅριον τῆς τάξεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς $\Phi(x_i)$.

Ὁ ἄνω τύπος δύναται καὶ ἄλλως νὰ προκύψῃ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς θεωρίας τῶν διαφορῶν (1).

---

1) Πράγματι, ἂν ἐνεργήσωμεν ἀλλαγὴν τῆς μεταβλητῆς, θέτοντες $\lambda_i = \chi_i + \frac{\Delta\chi}{2}$ τότε ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῆς $\chi_i + \frac{\Delta\chi}{2}$ βαίνουσι κατὰ πρόοδον ἀριθμητικὴν λόγου $\Delta\chi$, κατὰ συνέπειαν θὰ βαίνωσιν ὁμοίως καὶ αἱ τῆς λ_i εἰς μονάδας τάξεως διαστήματος· δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὅθεν $\lambda_i = \lambda_0 + \Delta\chi \cdot \chi$ ἢ $\chi = \frac{\lambda_i - \lambda_0}{\Delta\chi}$, ὅπου λ_0 τιμή τις τῆς λ_i ὡρισμένη, ληφθεῖσα αὐθαιρέτως ὡς ἀρχή.

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\psi_0 = \Phi(\chi_1)$, $\psi_1 = \Phi(\chi_2)$, ... καὶ $\psi_\chi = \frac{N}{2}$, τότε

$$\psi_\chi = (1+\Delta)^\chi \psi_0 = \psi_0 + \chi\,\Delta\psi_0 + \frac{\chi(\chi-1)}{2!}\Delta^2\psi_0 + \dots \text{ ἢ}$$

$$\psi_0 + \chi\,\Delta\psi_0 + \frac{\chi(\chi-1)}{2!}\Delta^2\psi_0 + \dots - \frac{N}{2} = 0$$

ἥτις λυομένη ὡς πρὸς χ παρέχει τὴν τιμὴν τῆς διαμέσου εἰς μονάδος τάξεως διαστήματος. Ἐξυπακούεται ὅτι ὡς ῥίζα θὰ ληφθῇ ἡ μικροτέρα θετικὴ τοιαύτη. Ἂν νῦν ἀρκεσθῶμεν εἰς τὴν πρώτην τοῦ χ δύναμιν ἔχομεν

$$\chi = \frac{1}{\Delta\psi_0}\left[\frac{N}{2} - \psi_0\right],\quad \text{ἀλλὰ } \chi = \frac{\lambda_i - \lambda_0}{\Delta\chi}$$

ὅθεν
$$\lambda_i = \lambda_0 + \frac{\Delta\chi}{\Delta\psi_0}\left[\frac{N}{2} - \Phi(\chi_1)\right]$$

καὶ $\lambda_0 = \chi_1 + \frac{\Delta\chi}{2}$, $\Delta\psi_0 = \Phi(\chi_2) - \Phi(\chi_1) = \sigma(\chi_1) + \sigma(\chi_2) - \sigma(\chi_1) = \sigma(\chi_2)$

Ἡ χρησιμότης τῆς Διαμέσου ἔγκειται κυρίως, διότι δὲν λαμβάνει ὑπ' ὄψει τὰς μεταβολὰς τῶν ἀκραίων τιμῶν τῆς μεταβλητῆς (ἐλαχίστης καὶ μεγίστης αὐτῆς τιμῆς) καθ' ὅσον ὁ λογισμὸς ταύτης ὑποθέτει ἁπλῶς γνῶσιν μόνον τοῦ συνόλου τῶν παρατηρήσεων, ἐλάχιστα δὲ ἐπηρεάζει τὴν τιμὴν αὐτῆς ἡ παράλειψις τούτων, τοῦθ' ὅπερ ὅμως δὲν δύναται νὰ λεχθῇ προκειμένου περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν σταθερῶν τῆς τάσεως.

Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς Διαμέσου εἰς τὴν ἔρευναν τῆς κατανομῆς τῶν μισθῶν ἢ τῶν εἰσοδημάτων παρέχει μεγάλας ὑπηρεσίας, καθ' ὅσον προκειμένου περὶ τῶν μικρῶν εἰσοδημάτων, τὸ πολυπληθὲς οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ ἀσταθὲς αὐτῶν γίνεται ἀφορμὴ νὰ μὴ καθίσταται ἐπακριβῶς γνωστὸν τὸ εἰσόδημα τοῦ μεγαλυτέρου πλήθους τῶν εἰσοδηματιῶν. Ἡ γνῶσις τοῦ μέσου εἰσοδήματος, ἁπλῆ ἀφαίρεσις οὖσα, οὐδὲν ἐμφαίνει, ἐνῷ ἡ γνῶσις τοῦ Διαμέσου τοιούτου καθιστᾷ φανερόν, ποῖον τὸ εἰσόδημα τοῦ ἡμίσεως τοὐλάχιστον τῶν εἰσοδηματιῶν.

Ἡ ὑψηλὴ τιμὴ τῆς διαμέσου δηλοῖ ὅτι τὸ εἰσόδημα τῶν 50 °/₀ τῶν εἰσοδηματιῶν εἶναι ὑψηλόν, ἐνῷ ἐκ τῆς ὑψηλῆς τιμῆς τοῦ μέσου εἰσοδήματος, οὐδὲν τὸ σαφὲς συνάγεται, διότι διὰ τὴν διαμόρφωσιν αὐτοῦ, πιθανόν, νὰ συνετέλεσεν ἐλάχιστος ἀριθμὸς εἰσοδηματιῶν ἐχόντων ὑπερβολικὸν εἰσόδημα, ἐνῷ τῆς μεγάλης μάζης τῶν ἐσοδηματιῶν, τὰ εἰσοδήματα νὰ ἦσαν χαμηλά. Τοῦτ' αὐτὸ δύναται νὰ λεχθῇ προκειμένου περὶ τῆς κατανομῆς τῶν ἡμερομισθίων. Ὑψηλὸν διάμεσον ἡμερομίσθιον συνεπάγεται ὡς συμπέρασμα ὅτι οἱ ἡμίσεις τοὐλάχιστον τῶν ἐργατῶν λαμβάνουσιν ἡμερομίσθιον μεῖζων τούτου καὶ οἱ λοιποὶ μικρότερον αὐτοῦ, ἐνῷ τὸ μέσον ἡμερομίσθιον οὐδεμίαν ἔννοιαν ἄλλην ἔχει ἐκτὸς τῆς ἁπλῆς ἀφαιρέσεως.

Ἐὰν ἡ σειρὰ τῶν δεδομένων ἀπαρτίζεται ἐξ ἀριθμῶν ἀναλόγων—εἰς τόσον τοῖς °/₀ ἢ μέσων—, ἡ χρῆσις τῆς διαμέσου ἀποκλείεται, διότι τὰ ἀντιστοιχοῦντα βάρη, εἰς ἕκαστον δεδομένον, εἶναι διάφορα ἀλλήλων.

Ἡ μὴ χρησιμοποίησις τῆς διαμέσου ἐπεκτείνεται καὶ ἐπὶ τῶν ἀναλόγων ἀριθμῶν οἵτινες προέκυψαν ἐκ διαφόρων φαινομένων ἀναφερομένων εἰς διαφόρους ἐποχάς.

Ἡ χρῆσις τῆς διαμέσου, τοὐναντίον, ἐπιτρέπεται ἐπὶ τῶν ἀναλόγων ἀριθμῶν, ἐφ' ὅσον οὗτοι προέκυψαν ἔκ τινος συνόλου ὁμογενῶν δεδομένων, καθ' ὅσον τότε οἱ ἀνάλογοι ἀριθμοὶ διατηροῦσι τὴν ἔννοιαν τῶν ἀπολύτων, ἐξ' ὧν προέκυψαν.

Κατ' ἀκολουθίαν ἡ διάμεσος χρησιμοποιεῖται ἰδιαίτατα εἰς σειρὰς συχνοτήτων δηλ. εἰς ἐκείνας εἰς ἃς τὰ ἀτομικὰ δεδομένα περιλαμβάνονται

$$\lambda = \chi_1 + \frac{\Delta\chi}{\sigma(\chi_2)}\left[\frac{N}{2}\quad \Phi\ (\chi_1)\right] \quad \text{καὶ γενικῶς}$$

$$\Delta_\mu = \chi_i + \frac{\Delta\chi}{2} + \frac{\Delta\chi}{\sigma(\chi_i+1)}\left[\frac{N}{2} - \Phi(\chi_i)\right]$$

δηλ. ὁ προγενεστέρως εὑρεθεὶς τύπος.

μεταξὺ ἀριθμοῦ τινος τάξεων, εὔρους διαστήματος σταθεροῦ, τῶν μονάδων τῆς σειρᾶς (τιμῶν μεταβλητῆς) τεταγμένων κατ' αὔξουσαν τάξιν.

Τὰ μὲν πλεονεκτήματα τῆς Διαμέσου εἶναι :

1ον. Ὅτι διὰ παρεμβολῆς λογίζεται ἀκριβῶς.

2ον. Ἡ ταχύτης καὶ ἡ εὐκολία τοῦ ὑπολογισμοῦ ταύτης.

Τὰ δὲ μειονεκτήματα τῆς Διαμέσου εἶναι ὅτι :

1ον. Πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων, δὲν ἀνασυνιστᾷ τὴν σειρὰν ἐξ ἧς προῆλθεν.

2ον. Ὡς ἐκ τοῦ ἄνω μειονεκτήματος, δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ πρόσθεσις δύο διαμέσων σχετικῶν πρὸς δύο σειρὰς διακεκριμένας, καθ' ὅσον δὲν προκύπτει τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον ὅπερ δίδει ἡ συνισταμένη σειρά, ἐκ τῶν δεδομένων ἑκάστης τῶν μερικῶν σειρῶν.

Γενικῶς ὁ Λογισμὸς τῆς Διαμέσου γίνεται ἐφ' ὅσον αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς δύνανται νὰ ταχθῶσι κατὰ τὴν τάξιν τοῦ μεγέθους των.

Ἐξυπακούεται ὅτι ἡ διάμεσος ἔχει τὰς διαστάσεις τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς. Γενικὸν δὲ τῆς διαμέσου πλεονέκτημα εἶναι ὅτι αὕτη λογίζεται ἐπὶ κατανομῶν ἀσχέτως ἂν εἶναι κλεισταὶ ἢ ἀνοικταὶ τουτέστιν ἂν ἔχωσιν ἔλασσον ὅριον τῆς πρώτης τάξεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καὶ μεῖζον τῆς ἐσχάτης ἢ ὄχι, ἐνῷ τὸ τοιοῦτον εἶναι ἀδύνατον διὰ τὰς σταθερὰς τῆς κεντρικῆς τάσεως.

Θ. Τεταρτημόρια - Δεκατημόρια.

Πρῶτον τεταρτημόριον καλεῖται τὸ μέγεθος K_1 τοῦ ὅρου τῆς σειρᾶς, ὅπερ καταλαμβάνει τὸ πρῶτον τέταρτον ταύτης—ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς ἥτις μερίζει τὴν σειρὰν εἰς 25 °/₀ καὶ 75 °/₀. Τρίτον τεταρτημόριον εἶναι τὸ μέγεθος K_3 τὸ καταλαμβάνον τὸ τελευταῖον τέταρτον τῆς σειρᾶς ἤτοι τὸ μερίζον τὴν σειρὰν εἰς 75 °/₀ καὶ 25 °/₀, τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς τεταγμένων πάντοτε κατ' αὔξουσαν τάξιν.

Ἡ θέσις τοῦ πρώτου τεταρτημορίου K_1 δίδεται ὑπὸ $\frac{N}{4}$, ὅπου N τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς. Ὁμοίως, ἡ θέσις τοῦ τρίτου τεταρτημορίου K_3 δίδεται ὑπὸ $\frac{N3}{4}$, τοῦ δευτέρου K_2 συμπίπτοντος μὲ τὴν διάμεσον.

Ὁ λογισμὸς τῶν τεταρτημορίων τῆς $v_i = \sigma(x_i)$ γίνεται καθ' ὃν ἀκριβῶς τρόπον καὶ τῆς διαμέσου ἤτοι

$$K_1 = x_i + \frac{\Delta\chi}{2} + \frac{\Delta\chi}{\sigma(x_{i+1})}\left[\frac{N}{4} - \Phi(x_i)\right] = \sum_1^i \sigma(x_i)\Delta\chi$$

$N = \Sigma\sigma(x_i)$ τὸ πλῆθος τῶν συχνοτήτων, διὰ τὸ πρῶτον τεταρτημόριον καὶ

$$K_3 = x_i + \frac{\Delta\chi}{2} + \frac{\Delta\chi}{\sigma(x_i + 1)}\left[\frac{3N}{4} - \Phi(x_i)\right]$$ διὰ τὸ τρίτον τοιοῦτον.

Τὰ δεκατημόρια, πρῶτον, δεύτερον κτλ. Δ_1, Δ_2, ... εἶναι αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς, αἱ χωρίζουσαι τῆς δεδομένης σειρᾶς τὰ 10 %, 20 %,... τῶν ὅρων αὐτῆς.

Ἡ θέσις τούτων, ὡς εἶναι φανερὸν δίδεται ὑπὸ $\Delta\varkappa = \frac{N\varkappa}{10}$, $\varkappa = 1, 2, \ldots\ldots 9$

Ὁ λογισμὸς τῶν δεκατημορίων τῆς $\psi_i = \sigma(x_i)$, γίνεται ἀκριβῶς καθ' ὃν τρόπον καὶ τῶν τεταρτημορίων. Οὕτω γενικῶς ἔχομεν

$$\Delta\varkappa = x_i + \frac{\Delta\chi}{2} + \frac{\Delta\chi}{\sigma(x_i + 1)}\left[\frac{N\varkappa}{10} - \Phi(x_i)\right]$$

κλπ. ὅπου $K = 1, 2, \ldots\ldots\ldots 9$.

10. Γραφικὸς λογισμὸς ἄνω σταθερῶν.

Ἐὰν κληθῶσιν $\chi_1, \chi_2, \ldots\ldots, x_\nu$ τὰ μέσα τῶν διαστημάτων καὶ $\sigma(\chi_1)\Delta\chi$, $\sigma(\chi_2)\Delta\chi$, ... αἱ ἀντιστοιχοῦσαι συχνότητες, τοῦ $\Delta\chi = 1$, τοῦ εὔρους δηλ. τοῦ διαστήματος λαμβανομένου εἰς μονάδας τάξεως διαστήματος, θὰ χαράξωμεν τὴν καμπύλην ἥτις ἑνώνει τὰ σημεῖα $(\chi_1 - \frac{\Delta\chi}{2}, o)$ καὶ

$$\left[x_i + \frac{\Delta\chi}{2}i, \Phi(x_i)\right] \text{ διὰ } i = 1, 2, \ldots\ldots \nu$$

καὶ ὅπου $\Phi(x_i) = \sum_1 \sigma(x_\varkappa)\,\Delta\chi$, ἡ σωρεῖτις σειρά. Αἱ τετμημέναι τῆς τομῆς τῆς καμπύλης ταύτης μετὰ μὲν τῆς εὐθείας $\psi = \frac{N}{2}$ θὰ παράσχωσι τὴν τιμὴν τῆς διαμέσου, μετὰ δὲ τῶν εὐθειῶν $\psi = \frac{N}{4}$ καὶ $\psi = \frac{3N}{4}$, $\psi_\nu = \frac{N\nu}{10}$, $[\nu = 1, 2, \ldots\ldots 9]$ τὰ πρῶτον καὶ τρίτον τεταρτημόρια, ἔτι δὲ καὶ τὰ διάφορα δεκατημόρια, ἀναλόγως τῆς τιμῆς τοῦ ν.

11.—Ὁ Τύπος.

Ὁ τύπος εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς ἐν τῇ $\psi_i = \sigma(\chi_i)$ ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγίστην τεταγμένην, ὅ ἐστὶ εἰς τὴν πολυπληθεστέραν ὁμάδα συχνοτήτων.

Ἀντιστρόφως δὲ πρὸς τὴν διάμεσον ἥτις λογίζεται διά τε τὴν ἁπλῆν σειρὰν δεδομένων ὡς καὶ διὰ τὴν σειρὰν συχνοτήτων, ὁ τύπος ἔχει ἔννοιαν μόνον διὰ σειρὰν συχνοτήτων. Οὐσιαστικῶς ὁ τύπος ἀποτελεῖ τὴν κανονικὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς ἐν τῇ δεδομένῃ κατανομῇ, καθ' ὅσον ἀπαντᾶ συχνότερον τῶν λοιπῶν τιμῶν αὐτῆς.

Ἐὰν ἡ δοθεῖσα σειρὰ συχνοτήτων εἶναι κανονικὴ (Gauss) αὐτονόητον ὅτι ὁ τύπος, ἡ Διάμεσος καὶ ὁ μέσος ἀριθμητικὸς θὰ συμπίπτωσι λόγῳ τῆς συμμετρίας τῆς καμπύλης περὶ τὴν μεγίστην αὐνῆς τεταγμένην. Τοιαῦται ὅμως σειραὶ οὐδόλως ἀπαντῶσι εἰς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα, προσεγγίζουσαι μόνον τοιαῦται ὑφίστανται διά τινα βιομετρικὰ ἢ μετεωρολογικὰ φαινόμενα.

Ἐν ἀντιθέσει δὲ πρὸς τοὺς μέσους αἵτινες ἀποτελοῦσι καθαρὰν μαθηματικὴν ἀφαίρεσιν, ὁ τύπος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν κοινὴν ἰδέαν τοῦ πλήθους περὶ τοῦ μέσου, ὅταν ζητῆται παρ' αὐτοῦ ὁ προσδιορισμὸς μιᾶς κανονικῆς καταστάσεως. Εἰς τὴν κοινὴν ἀντίληψιν συνεπῶς ὁ τύπος προσεγγίζει περισσότερον πρὸς τὴν ἔννοιαν τοῦ μέσου, ὡς περιγραφικοῦ τῆς κανονικῆς καταστάσεως ὡρισμένου φαινομένου.

Ὑπὸ ἔποψιν οἰκονομικὴν ὁ τύπος - ἡμερομίσθιον, ὁ τύπος - τιμὴ ἀγαθοῦ τινος κ.λ.π. θὰ εἶναι τὸ συχνότερον ἀπαντώμενον ἡμερομίσθιον, τιμὴ κ.λ.π. Ἐπίσης οἱ ἔμποροι τείνουσι νὰ ἱκανοποιῶσιν οὐχὶ τὴν μέσην προτίμησιν τῆς πελατείας αὐτῶν, ἀλλὰ τὴν μᾶλλον συχνότερον ἐκδηλουμένην. Εἰς τὸ ἐμπόριον ὅθεν ἡ σημασία τοῦ τύπου γίνεται μᾶλλον ἀντιληπτή.

Παρὰ τὰ μεγάλα ὅμως πλεονεκτήματα ἅτινα ὁ τύπος ἐμφανίζει ἔναντι τῶν λοιπῶν στατιστικῶν σταθερῶν, δὲν προσδιορίζεται ἐν τούτοις, ἐπακριβῶς, διὰ παρεμβολῆς (μαθηματικοῦ τύπου), καθ' ὅσον ὁ ἀκριβὴς τούτου λογισμὸς ἀπαιτεῖ γνῶσιν τῆς κατανομῆς τῶν θεωρουμένων στοιχείων ἐν ὅλαις αὐτῶν ταῖς λεπτομερείες. Ἀλλὰ τὸ τοιοῦτον ὅμως ἐν τῇ πράξει εἶναι ἀδύνατον, διότι τὰ δεδομένα ἅτινα διαθέτομεν κατανέμονται, χάριν εὐκολίας τῆς ἐκθέσεως αὐτῶν, εἰς τὰς τάξεις, ἐξ οὗ καὶ ἡ δυσκολία τοῦ ἀκριβοῦς προσδιορισμοῦ τοῦ τύπου. Ἡ τιμὴ τοῦ τύπου ἐπειδὴ δὲν ἐπηρεάζεται ὑπὸ τῶν ἀκραίων τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἐν τῇ κατανομῇ, δέον νὰ χρησιμοποιῆται διὰ τὰς συγκρίσεις τῶν ἡμερομισθίων, μεταξὺ τῶν διαφόρων ἐποχῶν, καθ' ὅσον αἱ ἀκραῖαι αὗται τιμαὶ (κατώτατον, ἀνώτατον ἡμερομίσθιον) δύνανται νὰ παραλειφθῶσιν ὡς ἀνώμαλοι, χωρὶς τὸ τοιοῦτον νὰ ἐπηρεάσῃ ἔστω καὶ κατ' ἐλάχιστον τὴν τιμὴν τοῦ τύπου. Σημειωτέον ὅτι ὁ τύπος λογίζεται ὡς καὶ ἡ διάμεσος, ἀνεξαρτήτως τοῦ κλειστοῦ ἢ ἀνοικτοῦ τῆς δοθείσης κατανομῆς κατὰ τάξεις, τῶν τιμῶν της μεταβλητῆς.

Ἐὰν νῦν $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots \chi_\nu$ παριστῶσιν τὰ μέσα τοῦ διαστήματος ἑκάστης τάξεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καὶ $\sigma(\chi_i)\,\Delta\chi$ τὰς ἀντιστοιχούσας συχνότητας εἰς τὰ τιμὰς τοῦ χ_i, (διὰ $i = 1, 2, \ldots \nu$), τὰς ἐπαληθευούσας τὴν διπλὴν ἀνισότητα $\chi_i - \frac{\Delta\chi}{2} \leq \chi < \chi_i + \frac{\Delta\chi}{2}$, ἡ ἕνωσις τῶν σημείων $\{\chi_i, \sigma(\chi_i)\}$, διὰ $i = 1, 2, 3, \ldots \nu$ θὰ παράσχῃ ἡμῖν τὴν γραφικὴν ἀναπαράστασιν τῆς $\psi_i = \sigma(\chi_i)$, δηλ. τὸ ἐμπειρικὸν πολύγωνον συχνοτήτων. Ἐὰν ν εἶναι ἀριθμὸς μέγας, δυνατὸν τὸ ἐμπειρικὸν πολύγωνον νὰ ἐμφανίζῃ πλείονα τοῦ ἑνὸς μέγιστα, ἀπόλυτα ἢ σχετικά. Πρὸς ἐντοπισμὸν τῆς μεγίστης τεταγμένης εἰς μίαν μόνην τάξιν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, διενεργοῦμεν ἀλλαγὴν τοῦ εὔρους τοῦ διαστήματος τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καταρτίζοντες νέαν σειρὰν συχνοτήτων, εἰς ἣν τὸ εὗρος τοῦ διαστήματος τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, εἶναι ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μεῖζον, ἐννοεῖται ὅμως σταθερὸν ἀπὸ τάξεως εἰς ἑκάστην τάξιν ἑκάστης τῆς οὑτωσὶ καταρτιζομένης νέας σειρᾶς συχνοτήτων, καὶ μέχρις οὗ ἐπιτευχθῇ κατανομὴ ἐμφανίζουσα ἓν καὶ μόνον μέγιστον δηλ. μέχρις οὗ εὑρεθῇ καμπύλη μονοκόρυφος εἰς ἣν αἱ συχνότητες θὰ βαίνωσιν αὐξανόμεναι μὲν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι τῆς τιμῆς χ_μ φθίνουσαι δὲ ἀπὸ ταύτης μέχρι τέλους. Ἡ τιμὴ x_μ θὰ ἐξαρτᾶται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐκ τοῦ εὔρους τοῦ διαστήματος $\Delta\chi$, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν διαστημάτων.

Ἡ μέθοδος τοῦ Λογιστικοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ τύπου ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ σημείου καμπῆς τῆς καμπύλης $\Psi = \Phi\ (\chi)$, ἥτις ἀντικαθιστᾷ τὴν ἐμπειρικὴν τοιαύτην $\Psi_i = \Phi\ (\chi_i)$, $\left[\text{ ἀπὸ } \chi = \chi_i - \frac{\Delta\chi}{2} \text{ ἕως } \chi_i + \frac{\Delta\chi}{2}\right.$ καὶ $\Phi\ (\chi_i)$, διὰ $\left. i = 1, 2, 3, \ldots\ \nu \right]$.

Ὁ προσδιορισμὸς τῆς τετμημένης ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγίστην τεταγμένην τῆς $\psi_i = \sigma\ (\chi_i)$ γίνεται διὰ τῆς θεωρίας τῶν διαφορῶν, συναρτήσει τῆς σωρείτιδος σειρᾶς $\Phi\ (\chi_i)$ ὡς κάτωθι: Πράγματι, ἂν $\sigma\ (\chi_{\varkappa-1}) < \sigma\ (\chi_\varkappa) > \sigma\ (\chi_{\varkappa+1})$ τότε ἂν κληθῇ $\Phi\ (\chi_i)$ ἡ σωρεῖτις καμπύλη τῆς $\psi = \sigma\ (\chi_i)$, θὰ ὑφίστανται ἐν τῷ συνόλῳ $\Phi\ (\chi_\varkappa)$ συχνότητες ἔχουσαι τιμὴν τῆς μεταβλητῆς ἐλάσσονα τῆς $\chi_\varkappa + \frac{\Delta\chi}{2}$ Ἐὰν ὅθεν ἐνεργήσομεν ἀλλαγὴν τῆς μεταβλητῆς θεωροῦντες ὡς ἀρχὴν τὴν $\chi_{\varkappa-1} - \frac{\Delta\chi}{2}$ δηλ. τὸ ἔλασσον ὅριον τῆς προηγουμένης τάξεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς πρὸς ἣν ἀντιστοιχεῖ ἡ μείζων συχνότης, θὰ ἔχωμεν θέτοντες $\overline{\chi} = \chi_{\varkappa-1}\frac{\Delta\chi}{2}$, ἐνῷ αἱ λοιπαὶ τῆς μεταβλητῆς θὰ ὦσιν αἱ $X = \overline{\chi} + \lambda.\ \Delta\chi$ ὅπου λ ἡ ἀπόστασις ἑκάστου ἐλάσσονος ὁρίου ἀπὸ τοῦ $\overline{\chi}$ ἤτοι

$$\psi_\lambda = (1 + \Delta)^\lambda \psi_0 = \psi_0 + \lambda\,\Delta\psi_0 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2\,!}\Delta^2\psi_0 + \frac{\lambda(\lambda-1)\,(\lambda-2)}{2\,!}\Delta^3\,Y_0 \ldots$$

καὶ ὅπου ψ_0 ὁ ὅρος $\Phi(x_{\varkappa-1})$ τῆς σωρείτιδος σειρᾶς. Τὸ σημεῖον καμπῆς τῆς ψ_λ θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς δευτέρας παραγώγου μηδενιζομένης ἤτοι

$$\lambda = 1 - \frac{\Delta^2\psi_0}{\Delta^3\psi_0},\ \text{ἀλλὰ}\ \lambda = \frac{X - \overline{\chi}}{\Delta\chi},\ \text{ἄρα}$$

$$X = \overline{\chi} + \Delta\chi - \frac{\Delta^2\psi_0}{\Delta^3\psi_0}\,\Delta\chi = x_{\varkappa-1} + \frac{\Delta\chi}{2} - \frac{\Delta^2\psi_0}{\Delta^3\psi_0}\,\Delta\chi$$

ἀλλὰ $x_{\varkappa-1} + \frac{\Delta\chi}{2} = x_\varkappa - \frac{\Delta\chi}{2}$. Κατὰ συνέπειαν ὁ τύπος θὰ δίδεται ὑπὸ

$$X = x_\varkappa - \frac{\Delta\chi}{2} - \frac{\Delta^2\psi_0}{\Delta^3\psi_0}\,\Delta\chi$$

ὅπου $x_\kappa - \frac{\Delta\chi}{2}$ τὸ ἔλασσον ὅριον τῆς τάξεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς πρὸς ἣν ἀντιστοιχεῖ ἡ μείζων συχνότης καὶ $\Delta^2\psi_0$, $\Delta^3\psi_0$ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς ταύτην δευτέρα καὶ τρίτη διαφοραί.

Ἀντὶ τῆς ὡς ἄνω μεθόδου, ἐπίσης, χρησιμοποιεῖται καὶ ἡ ἑξῆς:

Ἐπειδὴ ὁ τύπος εἶναι τετμημένη ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγίστην τεταγμένην τῆς καμπύλης συχνοτήτων, πρὸς εὕρεσιν ταύτης χρησιμοποιοῦμεν παραβολικὴν παρεμβολὴν ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ ὁρατοῦ μεγίστου ταύτης. Ἂν αἱ τρεῖς κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου τῶν τραπεζίων(1) εἶναι αἱ $\chi_1\psi_1$, $\chi_2\psi_2$, $\chi_3\psi_3$, ὅπου ὅμως $\psi_1 < \psi_2 > \psi_3$ ἡ παραβολὴ ἥτις διέρχεται διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων ἔχει ἐξίσωσιν τὴν $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ ἧς ἡ τετμημένη τῆς κορυφῆς εἶναι $M = -\frac{\beta}{2\alpha}$ κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς στοιχειώδους ἀλγέβρας, ἀφ' ἑτέρου ἐπειδὴ χ_1, χ_2, χ_3 παριστῶσι τὰ μέσα τοῦ διαστήματος ἑκάστης τάξεως θέτομεν, ἐνεργοῦντες ἀλλαγὴν τῆς τεταβλητῆς $\chi_1 = -1$, $\chi_2 = 0$, $\chi_3 = +1$ καὶ ἄρα

$$\psi_1 = \int_{-1,5}^{-0,5} \psi d\chi = \frac{13}{\alpha} - \beta + \gamma$$

$$\psi_2 = \int_{-0,5}^{+0,5} \psi d\chi = \frac{\alpha}{12} + \gamma$$

$$\psi_3 = \int_{+0,5}^{+1,5} \psi d\chi = \frac{13}{\alpha} + \beta + \gamma$$

ἐξ ὧν ἔχομεν

$$\psi_1 - \psi_2 = \alpha - \beta$$

$$\psi_3 - \psi_2 = -\alpha - \beta, \text{ ὅθεν } \frac{\psi_1 - \psi_2}{\psi_3 - \psi_2} = \frac{1 + 2M}{-1 + 2M} \text{ ἤ}$$

$$M = \frac{\psi_1 - \psi_3}{2(\psi_1 + \psi_3 - 2\psi_2)}$$

ἀλλὰ M ὁ κεντρικὸς ὅρος, ὅθεν εἰς μονάδας διαστήματος Δχ

$$X = \chi_0 - \frac{(\psi_1 - \psi_3)\,\Delta\chi}{2(\psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3)}$$

1) Ἴδε Κ. Ἀθανασιάδου, Αἱ γραφικαὶ μέθοδοι ἐν τῇ Στατιστικῇ σελ. 12.— Ἱστοριογράμματα.

ὅπου χ_0 ὁ κεντρικὸς ὅρος τῆς τάξεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς πρὸς ἣν ἀντιστοιχεῖ ἡ μείζων συχνότης, ψ_0 ἡ μεγίστη συχνότης.

Ἐὰν καὶ πάλιν τεθῇ $\sigma(x_{\kappa-1}) < \sigma(x_\kappa) > \sigma(x_{\kappa+1})$, ὅπου $x_{\kappa-1}$, x_κ, $x_{\kappa+1}$ τὰ μέσα τοῦ διαστήματος τῶν ἀντιστοίχων τάξεων τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς βαίνουσι κατὰ πρόοδον ἀριθμητικὴν λόγου $\Delta\chi$, ἐκλέγομεν αὐθαιρέτως ὡς πρῶτον ὅρον αὐτῆς τὸν $x_{\kappa-1}$ ὅτε οἱ λοιποὶ ὅροι θὰ δίδωνται ὑπὸ $X = x_{\kappa-1} + \Delta\chi.\lambda$ ἢ

$$\lambda = \frac{X - x_{\kappa-1}}{\Delta\chi}$$

$$\text{ἄρα } \psi_\lambda = \psi_0 (1 + \Delta)^\lambda = \psi_0 + \lambda\,\Delta\psi_0 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}\Delta^2\psi_0 + \ldots\ldots$$

τὸ μέγιστον τῆς ἄνω θὰ δίδεται ὑπὸ $\frac{d\psi_\lambda}{d\lambda} = 0$ ἤτοι ὑπὸ

$$\Delta\psi_0 + \lambda\,\Delta^2\psi_0 - \frac{\Delta^2\psi_0}{2} = 0 \text{ ἢ}$$

$$\lambda = {}^1/_2 - \frac{\Delta\psi_0}{\Delta^2\psi_0}, \quad \text{ἄρα } X = x_{\kappa-1} + \frac{\Delta\chi}{2} - \frac{\Delta\psi_0}{\Delta^2\psi_0}\Delta\chi \text{ ἢ}$$

$$X = x_\kappa - \frac{\Delta\chi}{2} - \frac{\Delta\psi_0}{\Delta^2\psi_0}\Delta\chi$$

Ἐὰν νῦν ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων εἶναι μέγας δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁ τύπος ὡς κ α ν ο ν ι κ ὴ τῆς μεταβλητῆς τιμὴ καὶ συνεπῶς διὰ τούτου νὰ ὁρισθῇ ἡ πιθανότης τῶν ἀποκλίσεων $x_i - X$.

Ἐκ τῆς πείρας συνάγεται ὅτι εἰς τὰς ἐλαφρῶς ἀσυμμετρικὰς καμπύλας κατανομῶν προσεγγιζόντως ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον σχέσιν $2A+T=3\Delta$ ὅπου A ὁ μέσος ἀριθμητικός, T ὁ τύπος, Δ ἡ διάμεσος. Οὐχ ἧττον ἡ ἀκριβὴς σχέσις εἶναι $2\lambda o\gamma.\, A + \lambda o\gamma.\, T = 3\lambda o\gamma.\, \Delta$ ἢ $T.A^2 = \Delta^3$ (1).

---

1) Πράγματι, κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Kapteyn, τῆς ἀναγωγῆς δηλ. ἀσυμμετρικῆς κατανομῆς εἰς συμμετρικὴν τοιαύτην ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς τῆς συναρτήσεως $Z=f(\chi)$, ὥστε ἡ κατανομὴ τῶν Z νὰ εἶναι κανονική. Κατὰ ταῦτα $\omega(\chi)$ εἶναι ἡ πιθανότης ἵνα χ περιλαμβάνεται μεταξὺ χ καὶ $\chi+d\chi$, ὅτε ἡ μεταξὺ χ καὶ Z σχέσις εἶναι $\omega(\chi)d\chi = \frac{e^{z^2}dz}{\sqrt{\pi}}$ ἥτις ἀποτελεῖ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν προσδιορισμοῦ τοῦ Z συναρτήσει τοῦ χ. Ἐὰν τεθῇ $d\chi = \frac{\chi dz}{\Theta}$, τότε $dz = \frac{\Theta d\chi}{\chi}$ καὶ ἄρα $Z = K\lambda o\gamma\left(\frac{\chi}{\Delta}\right)$, ὅπου Δ ἡ διάμεσος τῶν χ ($Z=0$ διὰ $\chi=\Delta$ καὶ $K = \frac{\Theta}{\lambda o\gamma e}$). Ἡ ἐξίσωσις $Z = K\lambda o\gamma\left(\frac{\chi}{\Delta}\right)$ γράφεται $\Delta e^{\frac{Z}{K\lambda o\gamma e}} = \chi$. Ὁ μέσος τῆς κατανομῆς δίδε-

ται ὑπὸ $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} dz = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{Z}{K\lambda o\gamma e}} e^{-z^2} dz$ προσθέτοντες νῦν καὶ ἀφαιροῦντες εἰς τὸν ἐκθέτην τοῦ e τὴν $\frac{1}{4K^2\lambda o\gamma^2 e}$, ἔχομεν τελικῶς $A = \Delta e^{\frac{1}{4K^2\lambda o\gamma^2 e}}$

Ὁ τύπος T εὑρίσκεται ἐξισοῦντες πρὸς τὸ μηδὲν τὴν παράγωγον τοῦ $\omega(\chi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-[f(\chi)]^2} f'(\chi)$, ὅπου $f(\chi) = Z = K \lambda o\gamma \left(\frac{\chi}{\Delta}\right)$ ἤτοι ὑπὸ

$$f''(\chi) = 2 f(\chi) \, [f'(\chi)]^2, \quad \text{ἀλλὰ} \quad f'(\chi) = \frac{K}{\chi} \lambda o\gamma e,$$

$$f'' = -\frac{K\lambda o\gamma e}{\chi^2}, \quad \text{ὅθεν} \quad -\frac{K\lambda o\gamma e}{\chi^2} = 2Z \frac{K^2 \lambda o\gamma^2 e}{\chi^2} \quad \text{ἢ} \quad Z = \frac{-1}{2K\lambda o\gamma e}$$

καὶ τέλος $K \lambda o\gamma\left(\frac{T}{\Delta}\right) = -\frac{1}{2K\lambda o\gamma e}$ ἢ $T = \Delta e^{-\frac{1}{2K^2\lambda o\gamma e^2}}$

ἄρα (1), $A = \Delta e^{\frac{1}{4K^2\lambda o\gamma^2 e}}$ ἢ $A^2 = \Delta^2 e^{\frac{1}{2K^2\lambda o\gamma^2 e}}$

καὶ (2), $T = \Delta e^{-\frac{1}{2K^2\lambda o\gamma^2 e}}$, ἑπομένως $A^2 T = \Delta^3$

Ἐκ τῶν σχέσεων ὅμως (1) καὶ (2), προσεγγιζόντως ἔχομεν

$$\frac{A}{\Delta} = e^{\frac{1}{4K^2\lambda o\gamma^2 e}} = 1 + \frac{1}{4K^2\lambda o\gamma^2 e} + \cdots \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{2A}{\Delta} = 2 + \frac{1}{2K^2\lambda o\gamma^2 e} + \cdots$$

καὶ

$$\frac{T}{\Delta} = e^{-\frac{1}{2K^2\lambda o\gamma^2 e}} = 1 - \frac{1}{2K^2\lambda o\gamma^2 e} + \cdots$$

ὅθεν

$$\frac{2A+T}{\Delta} \simeq 3 \quad \text{ἢ} \quad 2A + T \simeq 3\Delta$$