ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΠΩΛΗΣΕΩΣ ΠΡΟΪΟΝΤΟΣ ΚΑΙ Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΑΥΤΗΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΔΙΑ ΤΑΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΑΣ

Ὑπὸ ΓΕΩΡ. ΙΩ. ΤΡΑΜΠΟΥ

Τὸ ζήτημα τοῦ σχηματισμοῦ τῆς τιμῆς πωλήσεως ἑνὸς προϊόντος εἴτε βιομηχανικοῦ, εἴτε βιοτεχνικοῦ, εἴτε γεωργικοῦ, εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ ἐπιστημονικοῦ ἐνδιαφέροντος καὶ εἶναι βέβαιον ὅτι θὰ εἶναι πάντοτε ἡ ἐπίκεντρος τῆς Οἰκονομικῆς Ἐπιστήμης καὶ τώρα καὶ εἰς τὸ μέλλον, ἐφ' ὅσον ἡ οἰκονομία θὰ εἶναι χρηματικὴ (ἐνχρήματος) καὶ ἐφ' ὅσον διὰ τῆς τιμῆς τῶν προϊόντων θὰ γίνεται κατὰ πρῶτον λόγον ἡ διανομὴ τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, ὡς καὶ ἐφ' ὅσον τὸ γενικὸν ἐπίπεδον τῶν τιμῶν, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἐκ τοῦ μέσου ὅρου τῶν τιμῶν τῶν ἐπὶ μέρους προϊόντων, εἴτε ταῦτα εἶναι καταναλωτικὰ εἴτε κεφαλαιουχικά, θὰ ἐπηρεάζῃ τοὺς λοιποὺς παράγοντας τῆς οἰκονομίας μιᾶς χώρας καὶ πάσης χώρας καὶ ἀμοιβαίως θὰ ἐπηρεάζεται καὶ τοῦτο ἐπαλλήλως ἐκ τῶν λοιπῶν παραγόντων.

Ἡ τιμὴ πωλήσεως ἑνὸς προϊόντος εἶναι ἴσως τὸ πλέον πολύπλοκον καὶ τὸ πλέον πολυσύνθετον φαινόμενον τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς καὶ νομίζω ὅτι δὲν εἶναι ὑπερβολὴ ἐὰν ὑποστηρίξω ὅτι εἶναι ὀρθὸν τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ διαμόρφωσις τῆς τιμῆς πωλήσεως τῶν προϊόντων εἶναι τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως καὶ τῆς συμβολῆς ὅλων τῶν παραγόντων τῶν καθαρῶς οἰκονομικῶν ἢ καὶ τῶν μὴ τοιούτων, οἱ ὁποῖοι διαδραματίζουν ἕνα ρόλον κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον σπουδαῖον εἰς τὴν οἰκονομικὴν ζωὴν τῶν ἀτόμων ὡς καὶ τῆς ὠργανωμένης Κοινωνίας.

Εἰς τὴν μελέτην μου «Γ. Ι. Τράμπου, Ἡ λειτουργία τοῦ μηχανισμοῦ τῶν τιμῶν, οἱ συντελεσταὶ τῆς τιμῆς καὶ αἱ συναρτήσεις των», ἡ ὁποία ἐδημοσιεύθη τὸ 1957, ὅπως ὅμως εἶχε διατυπωθῆ τὸ 1953 καὶ εἰς τὴν σελίδα 211 ἐπ., ἔπειτα ἀπὸ κριτικὴν ὅλων τῶν θεωριῶν αἱ ὁποῖαι διετυπώθησαν περὶ τῆς τιμῆς πωλήσεως μέχρι τότε, κατέστρωσα εἰς τὴν σελίδα 249 τῆς μελέτης μου ταύτης μίαν συνάρτησιν (fonction) τῆς τιμῆς πωλήσεως (Τ), τὴν ὁποίαν πρωτοτύπως διετύπωσα καὶ διετύπωσα ὡς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τῆς συναρτήσεως ταύτης ὅλους τοὺς παράγοντας οἱ ὁποῖοι, ἄλλοι ὀλιγώτερον καὶ ἄλλοι περισσότερον, καθορίζουν τὴν τιμὴν πωλήσεως ἑνὸς προϊόντος εἰς πάντα χρόνον καὶ εἰς πάντα τόπον (χῶρον), εἴτε τὸ προϊὸν τοῦτο εἶναι ἀγροτικόν, εἴτε βιομηχανικὸν οἱασδήποτε φύσεως, εἴτε βιοτεχνικόν.

Ἡ συνάρτησις αὐτὴ τῆς τιμῆς πωλήσεως εἶναι ἀνάλυσις τῆς βασικῆς συναρτήσεως

$$T = f\,(\pi_1\, D, \pi_2\, 0, \pi_3, M)$$

ὅπου D = ζήτησις, 0 = προσφορά, M = μέσα πληρωμῆς, f = σύμβολον συναρτήσεως, καὶ π = ἀριθμός τις συμβολίζων τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἕκαστον προϊὸν καὶ κατὰ μονάδα τούτου ποσοστὸν ἐκ τῆς ζητήσεως, τῆς προσφορᾶς καὶ τῶν μέσων πληρωμῆς. Ἐξυπακούεται ὅτι τὸ π εἶναι δυνατὸν δι' ἕκαστον παράγοντα νὰ εἶναι διάφορον καὶ συνηθέστατα εἶναι διάφορον.

Ἡ ἀναλυτικὴ συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως ἑνὸς προϊόντος τὴν ὁποίαν ἔδωκα εἰς τὴν προαναφερομένην μελέτην μου εἶναι :

$$T = \Sigma f[\pi[(\chi\psi_1)\,(eB)\,\pi\,(R-E)\,(V_1)\,\,(R)\,(eB)\,\,(km)\,(\Gamma)\,(\psi)\,\pi\,(Pr + S)\,(\Psi_2)\,\,(\pi_1\,.\,\pi_2\,M'-E_2)\,\,V_2]]$$

Ἐξακολουθῶ καὶ τώρα νὰ πιστεύω ὅτι ἡ προκειμένη συνάρτησις εἶναι πλήρης καὶ ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν πραγματικότητα τῶν συναλλαγῶν καὶ ἐπιμένω ὅτι εἶναι κατὰ βάσιν ὀρθή. Ἐπιθυμῶ ὅμως ἤδη, διὰ τῶν ἐκτεθησομένων κατωτέρω, νὰ συμπληρώσω τὴν συνάρτησιν ταύτην τῆς τιμῆς πωλήσεως καὶ κυρίως νὰ ἀναλύσω ταύτην μαθηματικῶς καὶ νὰ δόσω μερικὰς ἐξηγήσεις. Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ δὲ ταύτῃ θὰ καθορίσω εἰς τὸ τέλος ποῖα ἐκ τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν, δηλαδὴ τῆς ἀνωτέρας ἀλγέβρας (Algebre Moderne) ὡς καὶ τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως, εἶναι ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα προσαρμόζονται εἰς τὴν ἔρευναν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων καὶ εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν, καθὼς ἐπίσης καὶ ποῖοι ἐκ τῶν μαθηματικῶν λογισμῶν (Calcul) εἶναι κατάλληλοι διὰ τοὺς ὑπολογισμούς, σχετικῶς μὲ τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα.

Διὰ τὴν εὐχερῆ καὶ πλήρη κατανόησιν τῶν παραγόντων εἰς τὴν συνάρτησιν τῆς τιμῆς πωλήσεως προϊόντος, τὴν ὁποίαν καὶ προηγουμένως διετύπωσα καὶ τὴν κατέστρωσα πρωτοτύπως, θὰ τὴν παραστήσω ἤδη διὰ τῶν ἐννοιῶν καὶ τῶν συμβόλων των ὡς ἐξίσωσιν.

Οὕτω διατυπουμένη ἡ συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως εἶναι : (T) = Τιμὴ πωλήσεως ἑνὸς προϊόντος, (B) = εἶναι συναρτησιακὴ σχέσις ὅπου (π) ποσοστὸν ὑποκειμενικῶν καὶ Ψυχολογικῶν παραγόντων (Ψ) καὶ τῆς χρησιμότητος τοῦ προϊόντος διὰ τὴν διαβίωσιν (X). Ἐπίσης συναρτησιακὴ σχέσις τῆς ἐλαστικότητος (e) τοῦ προϊόντος (B), τοῦ ποσοστοῦ (π_1) τοῦ εἰσοδήματος (R), τοῦ μέρους ἐκ τοῦ εἰσοδήματος τοῦ διατειθεμένου διὰ τὴν ἐναποταμίευσιν (E), τῆς ὑποκαταστάσεως (V_1) τοῦ προϊόντος, καὶ πάλιν τοῦ εἰσοδήματος (R), τῆς ἐλαστικότητος τοῦ προϊόντος (eB), τοῦ μέσου ἐξόδου τῆς παραγωγῆς (km), τῶν ἐπιπτόντων γενικῶν ἐξόδων (τῶν ἐκτὸς τῆς παραγωγῆς) (Γ), καὶ πάλιν ψυχολογικῶν παραγόντων (Ψ_2), τῆς ποσότητος τῆς παραγωγῆς τοῦ προϊόντος (B), δηλαδὴ (Pr), σὺν τὰς ἐναποθηκευμένας ποσότητας τοῦ προϊόντος (S) (δηλονότι Pr + S) ὡς καὶ τῶν μέσων πληρωμῆς (M), δηλαδὴ τῆς διατειθεμένης ποσότητος ἀγοραστικῆς δυνάμεως μετὰ τῶν ψυχολογικῶν παραγόντων (Ψ_2), ποσοστοῦ ἐκ τοῦ ποσοστοῦ τῶν συνολικῶν Μέσων Πληρωμῆς (M′), πλὴν τὴν χρηματικὴν ἐναποταμίευσιν (E_2) δηλαδὴ ($M - E_2$), πολλαπλασιαζομένης τῆς διαφορᾶς ταύτης ἐπὶ τὴν ταχύτητα τῆς κυκλοφορίας τοῦ χρήματος (V_2).

Μετὰ τὴν ἐννοιακὴν ἀνάλυσιν τῆς συναρτήσεως τῆς τιμῆς πωλήσεως (T), προχωρῶ ἤδη εἰς τὴν ἀπὸ μαθηματικῆς πλευρᾶς ἀνάλυσιν καὶ ἔρευναν τῆς συναρτήσεως ταύτης ὅπως ἤδη τὴν διετύπωσα.

Ἡ συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως (T) εἶναι μία σύνθετος συνάρτησις συναρτήσεων, διότι τὸ δεύτερον, τὸ δεξιὸν σκέλος τῆς συναρτήσεως, τὸ ὁποῖον εἶναι ἕνα ἄθροισμα Σ ὅρων, ἀποτελουμένων ἀπὸ τὰς ἑκάστοτε τιμὰς τῶν διαφόρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, αἱ ὁποῖαι καὶ καθορίζουν τὴν ἐξηρτημένην μεταβλητὴν (T), καὶ ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀριστερὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως. Τὸ δεξιὸν τοῦτο σκέλος τῆς συναρτήσεως συναπαρτίζεται ἀπὸ τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς, αἱ ὁποῖαι ὅμως καὶ αὗται καὶ ἑκάστη τούτων εἶναι μία συνάρτησις (ἐξηρτημένη μεταβλητὴ) ἄλλων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, δηλαδὴ ἄλλων ὅρων καὶ παραγόντων εὑρισκομένων ἐκτὸς τῆς συναρτήσεως (T). Περὶ τούτου ὅμως θὰ ἐπανέλθω καὶ κατωτέρω καὶ πρέπει νὰ τονίσω εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς ὅτι πράγματι εἰς τὴν οἰκονομικὴν ζωήν, οἱ καθοριστικοὶ παράγοντες τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν φαινομένων καὶ γεγονότων δὲν ἀποτελοῦν σταθερὰς (constants) ὑπὸ τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν, δηλαδὴ οἰκονομικὰ φαινόμενα ἢ γεγονότα τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν σταθερὰν ἀνταπόκρισιν καὶ ἐφαρμογὴν (Application) εἰς ἕνα μαθηματικὸν ἀριθμητικὸν σύνολον (Ensemble) τιμῶν, τὸ ὁποῖον διὰ τῶν ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν ἢ δεκαδικῶν ἀριθμῶν δίδει τὰς τιμὰς εἰς τρέχον νόμισμα, εἴτε ὡς ἀπόλυτος σταθερά, εἴτε ὡς αὐθαίρετος σταθερὰ [πρβλ. Ch. Pisot–M. Zamansky, Mathematiques Generales, Algebre–Analyse (1963) σελ. 50 καὶ ἀλλαχοῦ, Π.Ν. Μ ά γ ε ι ρ α, Τριγωνομετρικὰ θέματα (1963) σελ. 24)] ὥστε τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα ἢ γεγονότα νὰ ἔχουν πάντοτε ἐντὸς τοῦ χρόνου καὶ τοῦ χώρου (τόπου) ὡρισμένας τιμὰς σταθερὰς ἀλλὰ ὅλα τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα καὶ γεγονότα ἔχουν πάντοτε μίαν ἀλληλεξάρτησιν καὶ μίαν συνεχῆ ἀλληλεπίδρασιν καὶ διαρκῶς μεταβάλλονται καὶ μεταμορφοῦνται. Τοῦτο δὲ — πρέπει νὰ τονίσω — συμβαίνει κατ' ἀναλογίαν καὶ εἰς τὴν Φύσιν, ὅπου καὶ ἐκεῖ παρουσιάζεται κατὰ κανόνα ἡ διαρκὴς ροή. Κατὰ συνέπειαν τούτων καὶ ἡ συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως (T), τὴν ὁποίαν ἔδωκα προηγουμένως εἶναι μία συνάρτησις σ ύ ν θ ε τ ο ς, δηλαδὴ μία συνάρτησις συναρτήσεων καὶ τὸ γεγονὸς τοῦτο ἔχει μεγάλην σημασίαν καὶ ἀπὸ μαθηματικῆς πλευρᾶς καὶ ἰδίως διὰ τὰς παραγώγους (derivées) ταύτης.

Εἰς τὴν συνάρτησιν (T) εἶναι πάρα πολὺ εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ ὅτι ἐξ ὅλων τῶν παραγόντων μόνον μία ὑπάρχει σταθερὰ καὶ μάλιστα αὐθαίρετος σταθερὰ καὶ αὐτὴ εἶναι ὁ παράγων (Γ), δηλαδὴ τὰ γενικὰ ἔξοδα, τὰ ἐκτὸς τῆς παραγωγῆς, τὰ ὁποῖα λεπτομερῶς ἐρευνῶ εἰς τὴν μελέτην μου, Γ. Ι. Τράμπου, 'Η λειτουργία τοῦ μηχανισμοῦ τῶν τιμῶν (1957) σελ. 236 ἐπ.

Ταῦτα (τὸ Γ) ἔχουν περίπου μίαν σταθερὰν τιμὴν καὶ δὲν μεταβάλλονται καὶ δὲν ἐπηρεάζονται ποσῶς ἀπὸ τοὺς λοιποὺς ὅρους καὶ παράγοντας καὶ εὑρίσκονται μάλιστα ἐκτὸς τῶν ἐξόδων παραγωγῆς. 'Ως πρὸς τὴν σχέσιν τῆς παραγωγῆς καὶ τοῦ μέσου ἐξόδου ταύτης, κατωτέρω θὰ ἐρευνήσω ταύτην καὶ θὰ ἀποδείξω ὅτι ταῦτα εἶναι ταὐτόσημα, δηλαδὴ Pr=Km.

'Η συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως εἶναι προφανῶς μία συνάρτησις γραμμικὴ (lineaire), διότι αὕτη πληροῖ ὅλους τοὺς ὅρους τοὺς ἀπαιτουμένους διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ γραμμικὴ ἐφαρμογή. Τόσον ἡ συνάρτησις τῆς τιμῆς πιωλήσεως (Τ), ὅσον καὶ ὅλαι αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὸ δεύτερον σκέλος τῆς συναρτησιακῆς σχέσεως καὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ ἐκεῖναι συναρτήσεις ἄλλων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ὅλαι, προφανῶς, εἶναι διανύσματα (Vecteurs, γερμ. Vektoren), καὶ ἀναφέρονται ὅλαι εἰς σύνολα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμάδες, εἶναι δὲ τρόπον τινὰ εἶδος διανυσματικοῦ χώρου ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἐφαρμογήν των, τὴν ἀπεικόνισίν των εἰς τὸ σύνολον τῶν τιμῶν εἰς νόμισμα, τελουμένης τῆς ἐξωτερικῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ [Περὶ τῆς ἐννοίας τῆς ὁμάδος (groupe) ὡς καὶ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου πρβλ. [Ch. Pisot–M. Zamansky, Mathematiques Generales (1963) σελ. 106 ἐπ. καὶ 33, 34 καὶ Prof. Dr Hel. Hasse, Höhere Algebra I, Berlin (1957) πρ. 6 σελ. 49 ἐπ.]. 'Υποστηρίζω ὅτι εἶναι εἶδος διανυσματικῶν χώρων τὰ σύνολα εἰς τὰ ὁποῖα κινοῦνται αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, διότι τὰ στοιχεῖα τούτων ἔχουν ἐφαρμογὴν ἀντίστοιχον εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὰς τιμὰς τούτων εἰς νόμισμα, κατὰ ταῦτα αἱ μεταβολαὶ ὅλων τῶν μεταβλητῶν τοῦ δευτέρου σκέλους λαμβάνουν τιμάς. Κατὰ τὴν ἀνταπόκρισιν καὶ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἐπὶ τοῦ ὡς σώματος (Korps, Körper Πρβλ. H. Hasse, Höhere Algèbra, Berlin (1957) σελ. 11) συνιστωμένου συνόλου τῶν τιμῶν εἰς νόμισμα (valeurs), δηλαδὴ τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν (ἀκεραίων, κλασματικῶν, δεκαδικῶν) πάντοτε θετικῶν κατὰ τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν (Pisot–Zamansky, Mathematiques Generales (1962) σελ. 46] καὶ οὕτως ἐκπληρώνουν τοὺς ὅρους μιᾶς γραμμικῆς ἐφαρμογῆς, δηλονότι :

$$f.(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

διὰ κάθε x_1 τὸ ὁποῖον εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου R τῶν ἀριθμῶν καὶ διὰ κάθε x_2 τὸ ὁποῖον εἶναι στοιχεῖον τοῦ ἰδίου συνόλου R.

'Η παραγωγὴ (Pr) λόγου χάριν καὶ οἱ παράγοντές της, ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον (Ensemble, Menge), ἐπίσης δὲ ἡ ζήτησις καὶ οἱ παράγοντές της καὶ οὕτω καθεξῆς. [f = ἡ ἐφαρμογὴ ἑνὸς στοιχείου τοῦ ἑνὸς συνόλου, ἐπὶ ἑνὸς στοιχείου τοῦ ἄλλου συνόλου].

Ἐπίσης καὶ $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

(Ἡ σχέσις τοῦ στοιχείου πρὸς τὸ Σύνολον εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει παριστάνεται συμβολικῶς διὰ τοῦ ϵ). Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως εἶναι ἡ εὐθεία γραμμή).

Προτίθεμαι νὰ ἐρευνήσω καὶ τὴν μαθηματικὴν θέσιν τῆς συναρτήσεως τῆς τιμῆς πωλήσεως ἐντὸς τῶν συνόλων.

Νομίζω ὅμως ὅτι προηγουμένως πρέπει νὰ ἀναλύσω μαθηματικῶς ἕνα ἕκαστον τῶν παραγόντων οἱ ὁποῖοι, κείμενοι εἰς τὸ δεύτερον σκέλος τῆς συναρτήσεως (T) τῆς τιμῆς πωλήσεως, προφανῶς ἀποτελοῦν, ἕκαστος τούτων, μίαν ἐκ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τῆς συναρτήσεως. Οἱ παράγοντες αὐτοὶ εἶναι ἡ ζήτησις, ἡ προσφορὰ καὶ τὰ μέσα πληρωμῆς.

Ἡ συνάρτησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς τῆς ζητήσεως.

Ὁ πρῶτος ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ δευτέρου σκέλους τῆς συναρτήσεως τῆς τιμῆς πωλήσεως (T) εἶναι ἡ ζήτησις (D) τοῦ προϊόντος, δηλαδὴ εἰς τὴν συνάρτησιν (T) ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ ζήτησις (D). Ὅπως καὶ προηγουμένως ἐξέθεσα καὶ αὐτὴ ἡ ζήτησις εἶναι καθ' ἑαυτὴν συνάρτησις, δηλαδὴ ἐξηρτημένη μεταβλητὴ ἄλλων παραγόντων, ὅπως τῆς ἐλαστικότητος τοῦ προϊόντος (e), τοῦ ὑποκειμενικοῦ ψυχολογικοῦ παράγοντος (Ψ) ὡς καὶ ἀντικειμενικῶν παραγόντων, δηλαδὴ τῆς χρησιμότητος καὶ τῆς ἀναγκαιότητος (X) τοῦ προϊόντος (B) καὶ τοῦ ποσοστοῦ ἐκ τοῦ εἰσοδήματος (R–E), τὸ ὁποῖον διαθέτει τὸ ἄτομον καὶ τὸ σύνολον τῶν ἀτόμων, διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ προϊόντος μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς ἐναποταμιεύσεως, δηλαδὴ ἡ συνάρτησις εἶναι:

$$D = f[\pi\,(x\Psi)(eB)\,\pi\,(R-E)]$$

(Περὶ τῆς συναρτήσεως τῆς ζητήσεως τὴν ὁποίαν δίδει ὁ K.A. Fox κατωτέρω).

Ὁ G. Tintner [Mathematics and Statistics for economistes No 39 καὶ γαλλικὴ μετάφρασις ὑπὸ I. Demarcillac, Mathematiques et Statistiques pour les Economistes, Paris (1962) No 39 σελ. 134 ἐπ. Συνήθως ἐν προκειμένῳ παραπέμπω εἰς τὴν γαλλικὴν ἔκδοσιν], δίδει μίαν γενικὴν συνάρτησιν τῆς ζητήσεως εἰς τὴν ἀγορὰν μὲ τὸν τύπον.

$$P = p(Q) = f(Q)$$

Εἰς τὴν ὁποίαν $P =$ ἡ τιμὴ τοῦ προϊόντος καὶ $Q =$ ἡ ζητουμένη ποσότης.

Ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι ἡ γενίκευσις τῶν γραμμικῶν ζητήσεων, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀτομικῶν ζητήσεων εἰς τὴν ἀγορὰν τοῦ προϊόντος, εἰς μίαν δεδομένην τιμήν, ὁπότε πρόκειται περὶ τῆς συνολικῆς ζητήσεως τοῦ προϊόντος (demande globale), ἐπίσης δὲ τῶν τετραγωνισμένων ζητήσεων (demandes quadrantiques) ὡς καὶ τῶν ζητήσεων μὲ σταθερὰν ἐλαστικότητα. Ὅπως ὅμως δίδεται ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις, πρόκειται προφανῶς περὶ τῆς συναρτήσεως τῆς τιμῆς πωλήσεως, διότι ἡ συνάρτησις, δηλονότι ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητὴ εἶναι τὸ P, δηλαδὴ ἡ τιμὴ πωλήσεως, ἐνῶ ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι τὸ Q, δηλαδὴ ἡ ζητουμένη ποσότης.

Πόσον εἶναι ἐλλιπὴς ἡ συνάρτησις αὐτὴ τῆς ζητήσεως, ὡς συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως ἑνὸς προϊόντος καὶ οὐχὶ ὡς συνάρτησις τῆς ζητήσεως καὶ μάλιστα ἐν σχέσει πρὸς τὴν συνάρτησιν τῆς τιμῆς πωλήσεως τὴν ὁποίαν δίδω προηγουμένως ὡς καὶ εἰς τὴν μελέτην μου «Ἡ λειτουργία τοῦ μηχανισμοῦ τῶν τιμῶν (1957) σελ. 249», εἶναι νομίζω καταφανὲς ὡς πρὸς τοῦτο· ὅμως θὰ ἐπανέλθω κατωτέρω.

Ὁ G. Tintner [op. cit.] δίδει καὶ τὴν ἀντίθετον τῆς ἐκτεθείσης συναρτήσεως συνάρτησιν τῆς ζητήσεως ὡς ἑξῆς :

$$Q = Q(P) = g(P)$$

Καὶ λέγει ὁ Tintner ὅτι περιληπτικῶς ἡ συνάρτησις αὕτη δύναται νὰ ἀναγραφῆ ὡς

$$h(P,\ Q) = 0$$

καὶ προσθέτει ὅτι ὅλαι αἱ σχέσεις αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι (=) καὶ διαγράφουν τὴν ἰδίαν οἰκονομικὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς ζητουμένης ποσότητος Q καὶ τῆς τιμῆς μονάδος τοῦ ζητουμένου προϊόντος P. Εἶναι καταφανὲς ὅτι ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως ὅπως τὴν δίδει ὁ Tintner, ὅτι δηλαδὴ ἡ ζήτησις εἶναι συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως τοῦ προϊόντος, δὲν εἶναι πλήρης ὡς καὶ ὅτι δὲν εἶναι καὶ πολὺ ὀρθὴ ἡ διατύπωσίς της ὡς ἀντιστρόφου τῆς συναρτήσεως τῆς τιμῆς πωλήσεως, διότι πράγματι μὲν ὑπάρχει μία ἐπαλληλία καὶ ἀλληλεπίδρασις μεταξὺ τιμῆς πωλήσεως καὶ ζητήσεως τοῦ προϊόντος, προσβλεπομένων εἰς τὴν δυναμικὴν καὶ οὐχὶ εἰς τὴν στατικὴν μορφήν των, ὅμως προσεκτικὴ παρατήρησις τῆς πραγματικότητος εἰς τὴν ἀγορὰν πείθει ἐπαρκῶς ὅτι κυρίως καὶ κατὰ πρῶτον λόγον μεταξὺ τῶν δύο παραγόντων (τιμὴ πωλήσεως καὶ ζήτησις), καταφανῶς ἡ ζήτησις εἶναι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή, ἐνῷ ἡ τιμὴ εἶναι ἡ συνάρτησις (ἐξηρτημένη μεταβλητή), διότι ὅση καὶ ἐὰν εἶναι ἡ τιμὴ πωλήσεως, ἡ ὑπάρχουσα ζήτησις δὲν ἐπηρεάζεται σημαντικῶς, ἐπειδὴ οἱ καθοριστικοὶ ὅροι διὰ τὴν ζήτησιν (ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ) εἶναι κυρίως ἡ ἀνάγκη καὶ ἡ χρησιμότης τοῦ προϊόντος, ἡ ὁποία προσδιορίζει καὶ τὴν ποσότητα τῆς ζητήσεως, ἐπίσης δὲ καὶ τὸ ὕψος τοῦ εἰσοδήματος (R) καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις

$$Q = g(P)$$

δὲν ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῆς πραγματικότητος καὶ κατὰ τὰς συναλλαγὰς προηγεῖται ἡ ζήτησις καὶ ἕπεται ἡ τιμὴ καὶ ἀπόδειξις τούτου εἶναι ὅτι ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ ἡ ἀνάλογος ζήτησις πίπτει ἡ τιμὴ πωλήσεως καὶ ἀντιστρόφως ἐὰν ὑπάρχῃ μεγάλη ζήτησις ὑψοῦται ἡ τιμὴ πωλήσεως. Ἐπὶ πλέον τούτου, ὅταν πρόκειται νὰ καθορισθῇ ἡ τιμὴ πωλήσεως ἑνὸς προϊόντος), εἶναι καταφανὲς ὅτι οἱ παράγοντες, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τῆς συναρτήσεως καὶ εὑρίσκονται εἰς τὸ δεύτερον σκέλος ταύτης, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκωνται καὶ εἰς τὸ ἀριστερόν, τὸ πρῶτον σκέλος τῆς συναρτήσεως ἐν τῇ πραγματικότητι, ὡς καὶ ὅτι ὅταν λαμβάνουν ἑκάστοτε τιμὰς ἐκ τοῦ μαθηματικοῦ συνόλου τῶν τιμῶν, τῶν ἀξιῶν (Valeurs), αἱ τιμαὶ τὰς ὁποίας λαμβάνουν ἡ χρησιμότης καὶ τὸ ὕψος τοῦ εἰσοδήματος φυσικὰ πάντοτε εἰς ὡρισμένην στιγμὴν τοῦ χρόνου καὶ εἰς ὡρισμένον σημεῖον τοῦ χώρου (τόπου) καθορίζουν χρονικῶς καὶ τοπικῶς τὴν τιμὴν πωλήσεως τοῦ προϊόντος. Ἡ ζήτησις (D) ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ προϊόντος, ἀλλὰ προφανῶς ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ προϊόντος ἡ ὁποία ἐπηρεάζει τὴν ζήτησιν εἶναι ἡ προγενεστέρα τιμὴ τοῦ προ/όντος δηλαδὴ προγενεστέρου χρόνου καὶ συναλλαγῆς εἰς τὴν ἀγορὰν καὶ οὐχὶ ἡ ζητουμένη τιμὴ κατὰ τὴν ἑπομένην στιγμὴν ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητή.

Ἡ ὀρθὴ τοποθέτησις τῶν καθοριστικῶν παραγόντων, δηλαδὴ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, εἶναι ἐκείνη τὴν ὁποίαν δίδω εἰς τὴν συνάρτησίν μου τῆς τιμῆς πωλήσεως καὶ κατὰ τὴν ὁποίαν τοποθέτησιν τῶν παραγόντων, ὅταν πρόκειται περὶ τῆς ζητήσεως, ὁ κύριος καθοριστικὸς παράγων ταύτης εἶναι ἡ χρησιμότης καὶ ἡ ἀναγκαιότης τοῦ προϊόντος, εἴτε τοῦτο εἶναι καταναλωτικὸν εἴτε εἶναι κεφαλαιουχικόν. Τοῦτο, νομίζω, κατανοεῖται πλήρως ὑπὸ τῶν οἰκονομολόγων, διότι εἰς τὴν θεωρίαν τῆς ἱκανοποιήσεως τῶν ἀναγκῶν διατυποῦται καὶ μία συνάρτησις (S) κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἄτομον διαθέτει τὸ διαθέσιμον διὰ τὴν ἀγορὰν προϊόντων ἀναγκαῖον διὰ τοῦτο ποσὸν ἐκ τοῦ εἰσοδήματός του καὶ ὅσον ἀφορᾷ τὴν ποσότητα ἑκάστου προϊόντος, καθορίζει κατὰ μίαν ἀναλογίαν ποίαν ποσότητα θὰ προμηθευθῇ ἐξ ἑκάστου προϊόντος. Ἡ συνάρτησις τῆς ἱκανοποιήσεως (S) [G. Tintner, Mathematiques et statistiques pour les économistes (1963) I No 80 σελ. 238] εἶναι ἡ ἑξῆς :

$$S = f\ (x, y)$$

Ὅπου S=ἡ ἱκανοποίησις τῆς ἀνάγκης διὰ τοῦ προϊόντος καὶ ἑπομένως ἡ ζήτησις καὶ (x, y) = δύο ἐκ τῶν προϊόντων τὰ ὁποῖα εἶναι χρήσιμα εἰς τὸ ἄτομον. Διὰ τῆς συναρτήσεως ταύτης καὶ τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων τῶν x καὶ y, καθορίζεται τελικῶς ποίαν ποσότητα ἐξ ἑκάστου προϊόντος θὰ ἀγοράσῃ καὶ θὰ προμηθευθῇ τὸ ἄτομον τοῦτο.

Ἔστω ὅτι Px καὶ Py εἶναι αἱ τιμαὶ ἑκατέρου τῶν δύο προϊόντων x καὶ y ὡς καὶ αἱ ποσότητες τῶν προ/όντων τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς μίαν ἀγορὰν καὶ ταῦτα πάντα ὅτι εἶναι ἀνεξάρτητα πάσης ἐνεργείας καὶ ἐπιδράσεως τοῦ ἀτόμου.

Ἔστω ἐπίσης ὅτι R εἶναι τὸ δεδομένον εἰσόδημα τοῦ ἀτόμου, τὸ ὁποῖον διαθέτει διὰ τὴν ἀγορὰν τῶν δύο προϊόντων. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἐφαρμόζεται ἡ καλουμένη ἐξίσωσις τοῦ προϋπολογισμοῦ, δηλαδὴ

$$R = XPx + yPy$$

Εἰς τὴν ἀξίσωσιν ταύτην τὸ εἰσόδημα R καὶ αἱ τιμαὶ τῶν δύο προϊόντων x καὶ y, δηλονότι τὰ Px καὶ Py εἶναι σταθεραί, δηλαδὴ εἶναι δεδομένα καὶ μόνον ἄγνωστοι εἶναι αἱ ποσότητες x καὶ y τῶν δύο προϊόντων τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἀγοράσῃ τὸ ἄτομον τοῦτο. Τὸ ἄτομον ζητεῖ διὰ τοῦ χρήματος (εἰσοδήματος) τὸ ὁποῖον διαθέτει νὰ ἐπιτύχῃ τὸ μέγιστον τῆς ἱκανοποιήσεως τῶν ἀναγκῶν του. ἀναλόγως τῆς χρησιμότητος (S) διὰ τῆς ἐκλογῆς τῶν προσηκουσῶν ποσοτήτων ἐκ τῶν δύο προϊόντων x καὶ y, φυσικὰ πάντοτε ἐντὸς τῶν ὁρίων τοῦ διατειθεμένου εἰσοδήματος. Ἡ νέα συνάρτησις εἶναι ὡς πρὸς τὸν τύπον της

$$F\,(x,\ y) = f\ [(x,\ y) + \lambda\,(x\ p_x + y\ p_y - R)]$$

ὅπου λ=ὁ γνωστὸς πολλαπλασιαστὴς τοῦ Lagrange, δηλαδὴ μία σταθερὰ πρὸς προσδιορισμόν.

Ὅταν ἐξισώσωμεν πρὸς τὸ μηδὲν (0) τὰς μερικὰς παραγώγους τοῦ F θὰ ἔχωμεν.

$$F'x\ \ (X,\ Y)=0$$

$$F'y\ \ (X,\ Y)=0$$

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον εὑρίσκονται αἱ ποσότητες X καὶ Y τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἀγοράσῃ τὸ ἄτομον ἐκ τῶν χρησίμων διὰ τοῦτο προϊόντων X καὶ Y.

Πρὸς διασαφήνισιν καὶ πλήρη κατανόησιν θὰ διατυπώσω ἕνα παράδειγμα ἀριθμητικὸν τῆς συναρτήσεως (S), τῆς ἱκανοποιήσεως τῶν ἀναγκῶν ἑνὸς ἀτόμου ἀναλόγως τοῦ εἰσοδήματος (R).

Ἰδοὺ ἡ συνάρτησις :

$$S = 4\,x + 17\ y - x^2 - x\ y - 3\,y^2$$

Ἔστω ὅτι $Px = 1$, $Py = 2$ καὶ $R = 7$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἀτομικοῦ προϋπολογισμοῦ εἶναι

$$x + 2\,y = 7$$

Τὸ S πρέπει νὰ εἶναι τὸ μέγιστον (maximum) καὶ προσβλέπων εἰς τοῦτον τὸν ὅρον, διατυπώνω τὴν συνάρτησιν

$$F\,(x,y) = 4x + 17y - x^2 - xy - 3y^2 + \lambda x + 2\lambda y - 7\lambda$$

λ = ὁ πολλαπλασιαστὴς τοῦ Lagrange.

Μηδενίζω ἕκαστον τῶν δύο μερικῶν παραγώγων.

$$\frac{dF}{dx} = 4\text{–}2x\text{–}y + \lambda = O$$

$$\frac{dF}{dy} = 17\text{–}x\text{–}6y + 2\lambda = O$$

Τὸ σύνολον τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων καὶ τῆς ἐξισώσεως τοῦ προϋπολογισμοῦ

$$X + 2y = 0$$

συνιστοῦν ἕνα γραμμικὸν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους καὶ ἐὰν ἐπιλύσω τοῦτο, ἔχω, διὰ x καὶ y, τὰς τιμὰς $x = 1$ καὶ $y = 3$, ποσότητας τῶν προϊόντων x καὶ y αἱ ὁποῖαι ζητοῦνται εἰς τὴν ἀγορὰν τῶν προϊόντων. [G. Tintner, Mathématiques etc. (1962) No 80 σελ. 239)].

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν Ψ, εἶναι ἐμφανὲς ὅτι ὁ παράγων Ψ πηγάζει ἐκ ψυχολογικῶν λόγων, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀστάθμητοι καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῆ ἀριθμητικῶς καὶ ἐπομένως ἐπηρεάζει ὁ παράγων οὗτος τὴν χρησιμότητα τοῦ προϊόντος εὐθέως καὶ ἀπορροφᾶται ὑπὸ τῆς μεταβλητῆς τῆς χρησιμότητος. Σκέπτομαι δὲ ἐν προκειμένῳ ὡς πρὸς τὸν παράγοντα Ψ, ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῆ οὔτε ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς κατὰ τὴν θεωρίαν καὶ τοὺς νόμους περὶ πιθανοτήτων (Probabilité), οὔτε αἱ μαθηματικαὶ ἐλπίδες, οὔτε ἡ κυβευτικὴ τιμὴ (valeur aleatoire), διότι βάσις τῆς θεωρίας τῆς πιθανότητος ὅπως καὶ τῆς στατιστικῆς εἶναι ἡ ὕπαρξις φαινομένων μάζης καὶ ὄχι ἡ ὕπαρξις ἑνὸς συμβάντος μεμονωμένου.

Ὁ Ψυχολογικὸς δὲ παράγων εἶναι τόσον ῥευστὸς καὶ ἀσύλληπτος καὶ προφανῶς ἀκαθόριστος ὥστε δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν πολλαί, μαζικαὶ περιπτώσεις ὁμοιόμορφοι ὥστε ἐκ τῆς πείρας καὶ τοῦ δείγματος νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθοῦν οἱ νόμοι τῆς πιθανότητος, τῆς κατανομῆς (Distribution) καὶ τῆς Variable Aleatoire, δηλαδὴ μεταβλητῆς τυχαίας καὶ κυβευτικῆς, ὥστε ἡ μεταβλητὴ ἡ κυβευτικὴ νὰ εἶναι ἱκανὴ νὰ λάβῃ τιμὰς ἀπὸ μίαν πιθανότητα καλῶς προσδιοριζομένην. Περὶ τούτου ὅμως θὰ ἐπανέλθω καὶ κατωτέρω. Δὲν ὑπάρχουν αἱ ταυτόσημοι ἐκδηλώσεις τῆς ψυχολογίας τοῦ ἀτόμου ἢ τοὐλάχιστον αἱ παρόμοιαι ἐκδηλώσεις εἰς τὰ ψυχολογικὰ φαινόμενα, ὥστε νὰ ὑφίσταται ὁμοιομορφία Ὁ ψυχολογικὸς παράγων Ψ μαθηματικῶς μόνον διὰ τῆς τοπολογίας εἶναι δυνατὸν νὰ ἐρευνηθῆ.

Ἡ ἐλαστικότης (e) τοῦ προϊόντος (B), δηαδὴ ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ (eB), δύναται νὰ νοηθῆ ὑπὸ δύο μορφάς, ἤτοι ὡς ἐλαστικότης προερχομένη ἐκ τῆς δυνατότητος ὑποκαταστάσεως τοῦ προϊόντος διὰ ἄλλου προϊόντος, δυναμένου καὶ τοῦ ἄλλου προϊόντος νὰ ἱκανοποιήσῃ τὴν χρησιμότητα καὶ τὴν ἀνάγκην τοῦ ζητοῦντος τὸ πρῶτον προϊόν, ὡς καὶ ὡς ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως καθ' ἑαυτὴν καὶ ἐν σχέσει πρὸς τὴν τιμὴν πωλήσεως τοῦ προϊόντος, δηλαδὴ ὁ ἐπηρεασμὸς τοῦ ζητοῦντος ἕνεκεν τοῦ σχετικοῦ ὕψους τῆς τιμῆς πωλήσεως τοῦ προϊόντος. Καὶ ὁ ἐπηρεασμὸς τοῦ ζητοῦντος ὑφίσταται ὄχι ἕνεκεν τῆς τιμῆς πωλήσεως ἡ ὁποία θὰ σχηματισθῆ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ζητήσεως, ἀλλὰ ἕνεκεν τῆς κατὰ τὸν προηγούμενον χρόνον τιμῆς πωλήσεως, εἰς τὸ ὕψος τῆς ὁποίας εἶναι πολὺ πιθανὸν ὅτι θὰ σχηματισθῆ ἡ νέα τιμὴ πωλήσεως, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν χρόνον τῆς ζητήσεως.

Εἰς τὴν προκειμένην ὅμως ἔρευναν δέχομαι ὅτι ἡ τιμὴ πωλήσεως πρέπει νὰ καθορισθῇ διὰ τῆς συναρτήσεως (T) ὡς καὶ ὅτι ἡ τιμὴ πωλήσεως τοῦ προϊόντος εἶναι συνάρτησις, δηλαδὴ τὸ ζητούμενον καὶ τὸ ζητούμενον δὲν αὐτο-καθορίζεται ποτέ. ἀλλὰ τὸ ζητούμενον τὸ καθορίζουν τελείως ἄλλοι παράγοντες, κείμενοι ἐκτὸς ἑαυτοῦ.

Ταῦτα πάντα ὑπὸ τὸν ὅρον τῆς σχετικότητος, διότι πράγματι μία σκιὰ ἐπηρεασμοῦ συντρέχει εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν καὶ ὑπάρχει ἕνας, ὅπως προεξέθεσα, ἐλαφρὸς ἐπηρεασμὸς τῆς ζητήσεως, προερχόμενος ἐκ τῆς τιμῆς πωλήσεως τὴν ὁποίαν ζητεῖ ὁ πωλητὴς τοῦ προϊόντος, ἐπηρεαζόμενος ἀπὸ τὴν προγενέστερον χρόνον καὶ τὰ ἔξοδα κτήσεως. Εν πάσῃ ὅμως περι-πτώσει ὡς πρὸς τὴν ἐλαστικότητα γενικῶς ἔχουν δοθῇ ὑπὸ τῶν ἐπιστημόνων διάφοροι συναρτήσεις, τὰς ὁποίας θὰ διατυπώσω, μολονότι ἐξακολουθῶ νὰ φρονῶ ὅτι κατὰ τὴν στατικὴν στιγμὴν τοῦ σχηματισμοῦ τῆς τιμῆς πωλήσεως ἑνὸς προϊόντος, ἡ ἐλαστικότης εἶναι πλέον δεδομένη, τρόπον τινὰ παγωμένη καὶ ἔχει σταθερὰν τιμήν.

Γενικῶς ἐλαστικότης μιᾶς συναρτήσεως

$$y = f(x)$$

εἶναι τὸ ὅριον (Limite) τοῦ πηλίκου τῆς σχετικῆς αὐξήσεως (ἢ μειώσεως) τῆς συναρτήσεως y πρὸς τὴν σχετικὴν αὔξησιν (ἢ μείωσιν) τοῦ x, ὅταν ἡ διδομένη αὔξησις εἰς τὸ x τείνει πρὸς τὸ μηδὲν (0).

[Περὶ τῆς ἐννοίας τοῦ ὁρίου μιᾶς συναρτήσεως ἐντὸς ἑνὸς διαστήματος πρβλ. C. Pisot–M. Zamansky, Mathématiques Générales (1963) σελ. 245 ἐπ.].

Δηλαδὴ τὸ ὅριον ἐλαστικότητος εἶναι :

$$\frac{E_y}{E_x} = \lim_{d_x \to O} \frac{\frac{\Delta_y}{y}}{\frac{\Delta_x}{x}} = \left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{d_y}{d_x}\right)$$

Ὅπου E = ἐλαστικότης.

Ἡ ἐλαστικότης εἶναι ἕνας ἀριθμὸς χωρὶς διάστημα, καὶ τελείως ἀνεξάρτητος τῶν μονάδων μετρήσεως τοῦ x καὶ τοῦ y. Ἡ ἐλαστικότης τοῦ y ἐν ἀναφορᾷ πρὸς τὸ x εἶναι προσεγγιστικῶς τὸ σχετικὸν μέγεθος τὸ μετρούμενον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν (%) τῆς αὐξήσεως (θετικὴ ἐλαστικότης) ἢ τῆς μειώσεως (ἀρνητικὴ ἐλαστικότης) τοῦ y ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἢ μειοῦται εἰς τιμὴν σχετικὴν πρὸς τὸ 1% [G. Tintner, Mathematiques (1963) No 58 σελ. 181].

Ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως ἐν σχέσει πρὸς τὴν τιμὴν πωλήσεως ἐξ ἄλλου, εἶναι ὅπως ὑποστηρίζεται εἰς τὴν θεωρίαν, τὸ ὅριον τῆς σχετικῆς μεταβολῆς τῆς ζητουμένης ποσότητος, ἡ ὁποία εἶναι ἀποτέλεσμα μιᾶς σχετικῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς πωλήσεως, ὅταν αὐτὴ ἡ μεταβολὴ τῆς τιμῆς πωλήσεως τείνει πρὸς τὸ μηδὲν (0). Συνήθως αὐτὴ ἡ ἐλαστικότης εἶναι ἀρνητική.

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς ἐλαστικότητος ταύτης παριστάνεται διὰ τοῦ ποσοστοῦ τῆς μειώσεως τοῦ ζητουμένης ποσότητος κατὰ προσέγγισιν, κατὰ συνέπειαν μιᾶς αὐξήσεως τῆς τιμῆς πωλήσεως κατὰ 1 %. Ἡ ἐξίσωσις ἡ ὁποία ἔχει διατυπωθῆ διὰ τὴν ἐλαστικότητα τῆς ζητήσεως ἐν σχέσει πρὸς τὴν τιμὴν πωλήσεως εἶναι :

$$\frac{EQ}{EP} = \left(\frac{P}{Q}\right) \cdot \left(\frac{dQ}{dP}\right) = \frac{P}{Q} \cdot \frac{1}{\frac{dP}{dQ}}$$

καὶ κατὰ συνέπειαν

$$\frac{EQ}{EP} = \frac{P \cdot dQ}{dP \cdot Q}$$

Ὅπου E = ἐλαστικότης (e) καὶ P = τιμὴ πωλήσεως [G. Tintner, Mathématiques etc. No 59 σελ. 182 ἐπ.].

Θὰ ἐρευνήσω καὶ τὴν σχέσιν μεταξὺ τοῦ ὁριακοῦ εἰσοδήματος (R) καὶ τῆς ἐλαστικότητος τῆς ζητήσεως ἐξ ἑτέρου, τὸ ὁποῖον εἰσόδημα (R) καὶ κατὰ τὴν συνάρτησιν τῆς τιμῆς πωλήσεως τὴν ὁποίαν πρωτοτύπως κατέστρωσα ἀπὸ τοῦ 1953, εἶναι ἕνας σπουδαιότατος παράγων διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς τιμῆς πωλήσεως καὶ σημαντικὴ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ τῆς συναρτήσεως (T).

Κατὰ τὴν κρατοῦσαν θεωρίαν τὸ συνολικὸν εἰσόδημα (Revenu global) εὑρίσκεται ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὴν τιμὴν πωλήσεως τοῦ προϊόντος ἐπὶ τὴν πωληθεῖσαν ποσότητα τοῦ προϊόντος. Τὸ συνολικὸν τοῦτο ποσὸν εἶναι τὸ σύνολον τῶν χρηματικῶν καταβολῶν τῶν ἀγοραστῶν τοῦ προϊόντος.

Φυσικὰ τὸ συνολικὸν τοῦτο εἰσόδημα ἀφορᾷ ἕνα μόνον προϊόν. Ἐὰν ὅμως τὰ ἐπὶ μέρους ταῦτα εἰσοδήματα τὰ ἀθροίσωμεν, τότε θὰ ἔχωμεν τὸ πραγματικὸν συνολικὸν εἰσόδημα, τὸ διατειθέμενον διὰ τὴν κατανάλωσιν.

Ἐὰν εἰς τοῦτο προσθέσωμεν καὶ τὸ διατειθέμενον εἰσόδημα διὰ τὴν ἐπένδυσιν (I) ὡς καὶ τὸ εἰσόδημα τὸ διατειθέμενον διὰ τὴν καθαρὰν ἐναποταμίευσιν, θὰ ἔχωμεν τελικῶς ἐν τῷ συνόλῳ τὸ γενικὸν εἰσόδημα.

Ἡ συνάρτησις τοῦ εἰσοδήματος (R) ὅπως δίδεται εἰς τὴν ἐπιστήμην εἶναι :

$$R \cdot (Q) = fQ = f(Q) \cdot Q = h(Q)$$

Ὅπου R = εἰσόδημα, Q = ζήτησις.

Ἐκτὸς τῆς γραμμικῆς ταύτης συναρτήσεως τοῦ εἰσοδήματος δίδεται καὶ γραφικὴ παράστασις ταύτης [Πρφλ. Q. Tintner, Mathématiques etc. (1962) I No 39 σελ. 134).

Παρατηρῶ ὅμως ὅτι διὰ νὰ λάβῃ μίαν τιμὴν ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις, πρέπει νὰ εἶναι γνωστὴ ὡς σταθερὰ ἡ ζητουμένη ποσότης (Q) ὡς καὶ κατὰ τὴν ἐξίσωσιν RQ = P(Q) πρέπει νὰ εἶναι γνωστὴ ἡ τιμὴ πωλήσεως τοῦ προϊόντος. Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι λογικῶς ὀρθόν.

Καθορίζονται τρία εἴδη εἰσοδήματος. 1) Τὸ συνολικὸν εἰσόδημα (revenu global), τὴν ἔννοιαν τοῦ ὁποίου ἐξέθεσα ἤδη. 2) Τὸ ὁριακὸν εἰσόδημα (revenu marginal) καὶ 3ον) Τὸ μέσον εἰσόδημα (revenu moyen). Τὸ ὁριακὸν εἰσόδημα εἶναι ἡ σχέσις μεταξὺ τῆς αὐξήσεως (ἢ μειώσεως) τοῦ συνολικοῦ εἰσοδήματος καὶ τῆς αὐξήσεως (ἢ μειώσεως) τῆς ποσότητος τῶν πωλουμένων προϊόντων. Μαθηματικῶς διατυπουμένη ἡ σχέσις αὐτὴ εἶναι ὅτι τὸ ὁριακὸν εἰσόδημα εἶναι τὸ ὅριον τῆς κλασματικῆς σχέσεως.

$$\frac{\text{Αὔξησις τοῦ συνολικοῦ εἰσοδήματος (ἢ μείωσις)}}{\text{Αὔξησις τῶν πωλήσεων (ἢ μείωσις)}}$$

Ὁσάκις ἡ αὔξησις τῶν πωλήσεων τείνει πρὸς τὸ μηδὸν (0), τότε

$$R = P \cdot Q$$
$$R'(D) = \lim_{dQ \to 0} \frac{dR}{dQ}$$

R = συνολικὸν εἰσόδημα
R′ = ὁριακὸν εἰσόδημα
D = ζήτησις
Q = ζητουμένη ποσότης
lim = ὅριον

Ἡ ἔννοια τοῦ μέσου εἰσοδήματος εἶναι αὐτονόητος ἐκ τοῦ ὅρου μέσου. Τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα καὶ τὸ πραγματικὸν κατὰ κεφαλὴν εἰσόδημα, εἴδη τῆς καθολικῆς ἐννοίας τοῦ εἰσοδήματος δὲν ἐνδιαφέρουν ἀμέσως τὴν παροῦσαν ἔρευναν.

Τὸ ὁριακὸν εἰσόδημα — ὅπως προηγουμένως καθωρίσθη — εἶναι μία σχέσις ὁρίου (limite) καὶ διατυπούμενον τὸ ὁριακὸν εἰσόδημα ὡς ἐξίσωσις εἶναι :

$$R' = \frac{P}{\frac{EQ}{EP}} + P = P\left(1 + \frac{1}{\frac{EQ}{EP}}\right)$$

ὅπου R′ = ὁριακὸν εἰσόδημα, Q = ζητουμένη ποσότης, E = ἐλαστικότης, P = τιμή.

Ἐν τέλει τὸ ὁριακὸν εἰσόδημα δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς τὸ γινόμενον τῆς τιμῆς πωλήσεως ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῆς μονάδος σὺν τὸ ἄθροισμα τῆς μονάδος. καὶ τοῦ ἀντιστρόφου τῆς ἐλαστικότητος. καὶ διὰ τοῦτο δύναται νὰ δοθῇ ἡ ἐξίσωσις.

$$R' = 1 - 2Q$$

Καὶ ἐκ τῆς συναφείας τῶν διαφόρων τύπων προκύπτει ὅτι

$$R' = P\left(1 + \frac{1}{\frac{EQ}{EP}}\right) = (1-Q)\cdot\left(1 - \frac{1}{\frac{1-(Q)}{Q}}\right) = 1 - Q)\ (1 - \frac{Q}{1-Q} = (1-Q)\ \frac{1-2Q}{1-Q}$$

$$\left(1 = \frac{E}{1-E}\right) = (1-E)\,\frac{1-2E}{1-E}$$

καὶ τελικῶς $R' = 1 - 2Q$ [πρβλ. G. Tintner, Mathematiques etc. I, No 60 σελ. 184 ἐπ.].

Πρέπει νὰ παρατηρήσω ὅτι προηγουμένως ἠρεύνησα καὶ διετύπωσα τοὺς μαθηματικοὺς τύπους τόσον τῆς ζητήσεως (ζητουμένης ποσότητος) ὅσον καὶ τοῦ εἰσοδήματος ἐκ τῆς πλευρᾶς τῆς μικροοικονομίας, ἡ ὁποία καὶ ἀφορᾷ τὴν δρᾶσιν καὶ τὴν οἰκονομικὴν συμπεριφορὰν καὶ κατάστασιν ἑκάστου ἀτόμου καὶ ἑκάστης ἐπιχειρήσεως μεμονομένως. Ὅταν ὅμως ἐρευνῶνται ζητήματα συναρτήσεως τιμῆς πωλήσεως, ὅπως ἡ συνάρτησις (T) δὲν εἶναι ἀρκετὴ ἡ μικροοικονομία καὶ ἀπαραιτήτως πρέπει ἡ ἔρευνα καὶ ἡ ἀνάλυσις νὰ περάσῃ καὶ εἰς τὸ σύνολον μιᾶς οἰκονομίας, δηλαδὴ εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀτόμων καὶ τῶν ἐπιχειρήσεων, τὰ ὁποῖα συναπαρτίζουν μίαν ὁλόκληρον ὠργανωμένην οἰκονομίαν. Πρέπει δηλαδὴ νὰ περάσωμεν ἀπὸ τὴν μ ι κ ρ ο ο ι κ ο ν ο μ ί α ν εἰς τὴν μ α κ ρ ο ο ι κ ο ν ο μ ί α ν. Τοῦτο δὲν εἶναι ἀδύνατον μονολότι παρουσιάζονται πολλαὶ καὶ σοβαραὶ δυσκολίαι καὶ ἰδίως ἐν σχέσει πρὸς τὰ προβλήματα τῶν τιμῶν πωλήσεως, τῆς ζητήσεως ὡς καὶ τοῦ εἰσοδήματος ἐν τῷ συνόλῳ καὶ μάλιστα ὡς πρὸς τὰ διάφορα προϊόντα ἕνεκεν τῆς ἰδιαζούσης φύσεως ἑκάστου προϊόντος.

Καὶ ἤδη προχωρῶ εἰς τὴν κατάστρωσιν καὶ τὴν φύσιν τοῦ ἀθροίσματος Σ τῶν ἐπὶ μέρους ζητήσεων τῶν διαφόρων ἀτόμων καὶ ἐν σχέσει πρὸς τὴν ζήτησιν (D) καὶ πρὸς τὸ εἰσόδημα (R). Εἶναι προφανὲς ὅτι διὰ τὴν μακροοικονομίαν, ἡ ζήτησις καθὼς καὶ τὸ εἰσόδημα πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα Σ τῶν ἐπὶ μέρους ζητήσεων τῶν ἀτόμων τὰ ὁποῖα ἀπαρτίζουν τὸ σύνολον τοῦ πληθυσμοῦ εἰς μίαν οἰκονομίαν. Καὶ τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ ὅταν πρόκειται περὶ τοῦ συνολικοῦ εἰσοδήματος. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν ζήτησιν, διότι ἡ ζήτησις ἀφορᾷ διάφορα καὶ ποικίλα προϊόντα, πρέπει ἡ μαθηματικὴ διατύπωσις νὰ γίνῃ ὡς πρὸς ἕνα ὡρισμένον προϊὸν (B), τοῦ ὁποίου θὰ διατυπώσω τὴν συνολικὴν ζήτησιν ὡς ἄθροισμα ζητήσεων ὅλων τῶν ἀτόμων καὶ ἐπιχειρήσεων μιᾶς ὠργανωμένης οἰκονομίας. Καὶ ἤδη δίδω τὸ ἄθροισμα τοῦτο.

Πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς μίαν οἰκονομίαν ὑπάρχουν ν ἄτομα (ν=ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων δηλαδὴ τὸ πλῆθος, ἔστω ὀκτὼ ἑκατομμύρια (8.10^6) καὶ νὰ ὑποθέσωμεν ἐπίσης ὅτι D εἶναι ἡ ζήτησις τῶν ἀτόμων i, διὰ τὸ προϊὸν (B) ($i = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \nu$, $\nu = 8.10^6$) ὁμοίως νὰ ὑποτεθῇ ὅτι r εἶναι τὸ χρηματικὸν εἰσόδημα τῶν i ἀτόμων.

Ὁ Engel διετύπωσε περὶ τοῦ ζητήματος τούτου ὡρισμένας καμπύλας, αἱ ὁποῖαι καὶ καλοῦνται καμπύλαι τοῦ Engel δι' ἕνα προϊόν, ἐπὶ παραδείγματι τὸ B, αἱ ὁποῖαι καμπύλαι διατυπούμεναι γραμμικῶς ὡς μία ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις εἶναι

$$D_i = a_i\ r_i\ k_i \qquad i = 1, 2, \ldots \nu$$

Προφανῶς αἱ χρησιμοποιούμεναι παράμετροι a_i καὶ K_i εἶναι χαρακτηριστικαὶ διὰ κάθε ἄτομον, μέλος τῆς οἰκονομίας εἰδικῶς δὲ ἡ παράμετρος a_i εἶναι ἡ ὁριακὴ τάσις (πρόθεσις) τοῦ ἀτόμου πρὸς κατανάλωσιν διὰ τὸ προϊὸν Β. Ἐν προκειμένῳ ἡ ἔννοια τοῦ χαρακτηριστικοῦ (Caractéristique) νομίζω ὅτι δὲν συμπίπτει πρὸς τὴν ἔννοιαν τοῦ χαρακτηριστικοῦ, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰς ἐξισώσεις καὶ πολυώνυμα καὶ ἀλλαχοῦ [Πρβλ. Pisot-Zamansky Mathématiques Générales (1963) σελ. 624 καὶ ἀλλαχοῦ καὶ H. Hasse, Höhere Algebra II (1958) σελ. 36].

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ Engel δύναται νὰ γενικευθῇ διὰ τὸ σύνολον τῆς ζητήσεως τοῦ προϊόντος (Β) εἰς ὁλόκληρον τὴν οἰκονομίαν, ὁπότε ἡ παράμετρος a_i ἀφορᾷ τὴν τάσιν (πρόθεσιν) ὅλων τῶν ἀτόμων τῆς οἰκονομίας καὶ ἐπομένως εἶναι ὀρθότερον νὰ γραφῇ ὡς α_ν διότι τότε $i = \nu$.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ συνολικὴ ζήτησις τοῦ προϊόντος (Β) εἶναι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀτομικῶν ζητήσεων καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι.

$$D = \sum_{i=1}^{\nu} \delta_i$$

ὅπου $i = 1, 2 \ldots . \nu$

$\delta =$ ἡ ἀτομικὴ ζήτησις.

Δηλαδὴ $D = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \ldots + \delta\nu$

Ἐὰν $\nu = 8 \cdot 10^6$ ἀτόμων τότε $\delta\nu = \delta \cdot 8 \cdot 10^6$

Ἡ συνολικὴ ζήτησις τοῦ προϊόντος (Β) γράφεται τότε ἐν σχέσει πρὸς τὸ εἰσόδημα r.

$$D = \sum_{i=1}^{v} a_i r_i + \sum_{i=1}^{v} k_i$$

Καθορίζω ἤδη ὅτι εἰς τὸ ἄθροισμα Σ, τὸ ὁποῖον δίδω ἀμέσως κατωτέρω, χρησιμοποιεῖται ἕνα συνολικὸν εἰσόδημα (ὄχι τελείως καθωρισμένον) ὑπὸ τὸ ἑλληνικὸν γράμμα ρ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα Σ ὅλων τῶν ἀτομικῶν εἰσοδημάτων, οἱ δὲ συντελεσταὶ τῆς σταθμίσεως εἶναι αἱ ἀνταναχλάσεις τῶν ἀτομικῶν τάσεων (προθέσεων) πρὸς κατανάλωσιν τῶν μέσων τιμῶν εἰς τὴν οἰκονομίαν.

$$\rho = \sum_{i=1}^{v} \frac{a_i}{\overline{\alpha}} r_i \qquad \text{ὅπου } \overline{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{v} a_i}{v}$$

Δηλαδὴ τὸ διάνυσμα $\overline{\alpha}$ ἰσοῦται, κατὰ τρόπον ὄχι τελείως θετικὸν πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν παραμέτρων a_i τῶν χαρακτηριστικῶν τῶν ἀτόμων i, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν προθέσεων (τῶν τάσεων) πρὸς κατανάλωσιν τοῦ προϊόντος Β, αἱ ὁποῖαι τάσεις πρὸς κατανάλωσιν εἶναι — ὅπως ἐξέθεσα προηγουμένως — πολὺ ρευσταὶ καὶ δυσκόλως συλλαμβάνονται διὰ μαθηματικὴν ἐκτίμησιν. Ἐὰν εἰς τὸ προηγούμενον ἄθροισμα ἀντικαταστήσω τὸ διάνυσμα $\bar{\alpha}$ μὲ τὸ ἴσον του κλάσμα θὰ ἔχω τελικῶς.

$$\rho = \sum_{i=1}^{v} \frac{a_i r_i}{\frac{\sum_{i=1}^{v} a_i}{v}}$$

Ἡ γενικὴ (καθολικὴ) ζήτησις (D) δύναται νὰ γραφῇ καὶ γραμμικῶς ὡς ἑξῆς :

$$D = \bar{\alpha}\rho + K \qquad \text{ὅπου} \qquad K = \sum_{i=1}^{v} k_i$$

[πρβλ. G. Tintner, Mathematiques et statistiques pour les Economistes I (1962) No 114 σελ. 412].

Ὑπάρχει καὶ μία ἄλλη μέθοδος προσδιορισμοῦ τῆς συνολικῆς ζητήσεως (D), διὰ τῆς ὁποίας καθορίζεται ἡ συνολικὴ ζήτησις ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀτομικῶν ζητήσεων καὶ τὸ συνολικὸν εἰσόδημα (R) ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀτομικῶν εἰσοδημάτων. Ὑποτίθεται ὅτι ἀπὸ πολλὰς παρατηρήσεις ἐπὶ ν ἀτόμων καὶ (T) περιόδων χρόνου ἔχομεν ὡρισμένα ἀριθμητικὰ δεδομένα καὶ ἔστω ὅτι t εἶναι ὁ δείκτης μιᾶς χρονικῆς περιόδου, δηλαδὴ $t = 1, 2 \ldots v$ ($v = 10$ ἡμέραι ἢ 10 μῆνες).

Ἐφιστῶ τὴν προσοχὴν ὅτι εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἐφαρμόζεται ἡ γνωστὴ μαθηματικὴ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων (Carrés moindres) (περὶ τῆς ὁποίας θὰ ἀναφέρω ἀμέσως κατωτέρω) ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτουν σχέσεις τοῦ τύπου.

$$R_{it} = B_{iii} + k^{i} \qquad (\, i = 1,2, \ldots\ldots v \,)$$

Τότε ἡ ἐκτίμησις τῆς ἐξισώσεως μᾶς ὁδηγεῖ τελικῶς ἐν συναγωγῇ καὶ γενικεύσει ὡς πρὸς τὴν καμπύλην τοῦ Engel διὰ τὴν συνολικὴν ζήτησιν εἰς τὰ ἑπόμενα ἀθροίσματα.

$$D_t = \sum_{i=1}^{v} (\, \alpha^i B_i \,)\, r_t + \sum_{i=1}^{v} (\, a_i K_i + k^{\cdot} \,)$$

$$\text{ὅπου} \qquad a = \sum_{i=1}^{v} (\alpha\ B_i^i) \ \text{καὶ}\ k^{\cdot} = \sum_{i=1}^{v} (\, a_i K_i + k^{\cdot}_i \,)$$

Δίδω τώρα τὴν τελικὴν μορφὴν τῶν ἀθροισμάτων τῆς συνολικῆς ζητήσεως. Ταῦτα εἶναι :

$$D_t = \sum_{i=1}^{v} \left[\sum^{v} (a_i B_i) B_i \right] r_t + \sum_{i=1}^{v} \left[\sum_{i=1}^{v} (a_i B_t) k_i + \sum_{i=1}^{v} (a_i k'_i + K_i) \right]$$

Ὡς πρὸς τὴν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων (Carrés moindres), ἡ ὁποία προσομοιάζει πολὺ πρὸς μεθόδους τῆς στατιστικῆς, διασαφηνίζω ὅτι ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων τὴν ὁποίαν πρῶτος ἐπενόησεν ὁ Legendre καὶ ἀνέπτυξαν ὁ Gauss καὶ ὁ Laplace, εἶναι μία μέθοδος διὰ τῆς ὁποίας ἐπιτυγχάνεται ἡ λύσις ἑνὸς συστήματος ἐξισώσεων εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχουν περισσότεροι ἄγνωστοι ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις. Μετὰ τὴν διατύπωσιν τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ κυρίως τῶν ἀθροισμάτων τῶν δύο παραμέτρων, προχωρῶ εἰς τὸν μετασχηματισμὸν τῶν τύπων τούτων, τῶν δύο συνολικῶν παραμέτρων α καὶ K. Μετασχηματισμὸς εἰς τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν εἶναι ἡ μεταμόρφωσις μιᾶς ἐξισώσεως ὑπὸ νέαν μορφὴν ἐξισώσεως ἴσην ἢ ἰσοδύναμον, περισσότερον δὲ ἐπιστημονικῶς διατυπουμένη ἡ ἔννοια τοῦ μετασχηματισμοῦ καὶ μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῆς μαθηματικῆς ἐννοίας τῶν συνόλων, μετασχημαισμὸς εἶναι ἡ ἐφαρμογὴ καὶ ἡ ἀπεικόνισις ἑνὸς στοιχείου ἑνὸς συνόλου (xεE) διὰ τῆς ἀντιστοιχίας τούτου πρὸς ἕνα ἄλλο στοιχεῖον τοῦ ἰδίου πάλιν συνόλου (y = gxεE), δηλαδὴ y = fx + β ὅπου β στοιχεῖον (σημεῖον) τοῦ ἰδίου πάλιν συνόλου E (πρβλ. Ch. Pisot–M. Zamanky, Mathématiques Générales, (1963) σελ. 135].

Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ καὶ χάριν πλήρους κατανοήσεως προσθέτω ὅτι παράμετρος γενικῶς λέγεται καὶ εἶναι ἕνα αὐθαιρέτως τιθέμενον σύμβολον, εἰς τὸ ὁποῖον δίδεται ἑκάστοτε αὐθαίρετος τιμὴ ἢ καὶ γεωμετρικὴ σημασία καὶ ἡ ὁποία ἑκάστοτε ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ συμβόλου — παράμετρος — ἀποτελεῖ τὴν ἐξίσωσιν ἴσων λόγων, οἱ ὁποῖοι ἴσοι λόγοι ἀποτελοῦν τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως καὶ ἡ ὁποία ἐξίσωσις δύναται ν' ἀντικατασταθῇ μὲ ἕνα νέον σύστημα Παράδειγμα διὰ τὴν κατανόησιν : Ἐὰν τοὺς ἴσους λόγους τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{X - X_0}{\alpha} = \frac{\psi - \psi_0}{\beta}$$

τοὺς ἐξισώσωμεν μὲ τὸν αὐθαίρετον ἀριθμὸν t, τότε ἡ ρηθεῖσα ἐξίσωσις δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ μὲ τὸ σύστημα :

$$X = X_0 + \alpha t \qquad \Psi = \Psi_0 + \beta t$$

Τὸ t εἶναι ἡ παράμετρος τοῦ συστήματος ἐξισώσεων. [N. Κρητικοῦ Πρόχειροι σημειώσεις Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν I (1963) σελ. 87]. Καὶ ἀκόμη σαφέστερον. Παράμετρος εἶναι μία ἀκαθόριστος ποσότης, ἡ ὁποία εἰσέρχεται ἐντὸς τῆς ἐξισώσεως μιᾶς καμπύλης ἢ μιᾶς ἐπιφανείας ἡ ὁποία ποσότης ἐπιτρέπει διὰ τῆς μεταβλητότητος της νὰ ἐπιτύχωμεν ὅλας τὰς μεταβολὰς τῶν καμπυλῶν ἢ τῆς ἐπιφανείας [Kal Pisot – Zamansky, Mathématiques générales (1963) σελ. 347].

Μετὰ τὰς ἐπεξηγήσεις ταύτας προχωρῶ εἰς τὸν μετασχηματισμὸν τῶν προηγουμένως ἐκτεθεισῶν συνολικῶν παραμέτρων α καὶ k. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν οἱ εἰδικοὶ ἐπιστήμονες χρησιμοποιοῦν τὴν γνωστὴν εἰς τὸν τανυστικὸν λογισμὸν καὶ εἰς τὴν στατιστικήν, κλασικὴν σχέσιν τῶν συνμεταβλητῶν (Covariances). Κατὰ τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν συνμεταβλητὴ (Covariance) εἶναι ἡ μέση τιμὴ [Περὶ τῆς μέσης τιμῆς (Moyenne) Pisot Zamansky, Mathématiques générales (1963) σελ. 337] τῶν γινομένων τῶν ὁμολόγων ὅρων δύο κεντρικῶν μεταβλητῶν, δηλαδὴ κατὰ τὴν καθαρῶς μαθηματικὴν ἔννοιαν ἡ συμμεταβλητὴ εἶναι συνάρτησις τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν μεταβλητῶν τοιούτου τύπου, ὥστε ἡ συνάρτησις κατέχει τὴν ἰδιότητα τῆς ἀμεταβλήτου εἰς ἕνα γραμμικὸν μετασχηματισμόν.

Ἡ κλασικὴ σχέσις ἐπὶ τῶν συνμεταβλητῶν εἶναι :

$$\mathrm{COV}(X,Y)-\frac{1}{\nu}\,E\left\{[X-E(X)]\,[Y-E(Y)]\right\}=\frac{1}{\nu}\,[E(XY)-E(X)E(Y)$$

καὶ ἡ τειχὴ διατύπωσις εἶναι :

$$E(X\Upsilon)=E(X)\,E(\Upsilon)+\mathrm{VCOV}\,(X,Y)$$

Οὐσιῶδες εἶναι ὅτι εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν κάθε μία ἐκ τῶν παραμέτρων α_i, K_i, A_i. K_i ἀκολουθεῖ ἕνα νόμον καθωρισμένης πιθανότητος, [περὶ τῆς μαθηματικῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος κατωτέρω]. ἡ ὁποία πιθανότης εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ἀτόμου. Δηλαδὴ κατὰ τὴν ρηθεῖσαν ὑπόθεσιν κάθε ἄτομον i, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀνασυρθὲν ἐξ ἑνὸς πλήθους ὁλοκληρωτικῶς ρυθμιζομένου ὑπὸ τοῦ νόμου τῆς πιθανότητος, τοῦ νόμου τούτου ἀφορῶντος τὰς κατανομὰς (distributions) τοῦ εἰσοδήματος καὶ τῆς καταναλώσεως τοῦ προϊόντος Β.

Πρέπει τώρα νὰ παρεμβάλω εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τὴν παρατήρησίν μου ὅτι ἡ προηγηθεῖσα διατύπωσις καὶ ὁ τύπος προσβλέπει καὶ ἀφορᾶ τὰς παραμέτρους. Ὅμως αἱ παράμετροι καὶ ἰδίως αἱ αi καὶ Ai εἶναι δεῖκται τῶν προσωπικῶν διαθέσεων τῶν ἀτόμων ὅπως ἡ πρόθεσις καὶ ἡ τάσις τῶν ἀτόμων πρὸς κατανάλωσιν (Propension a consommer). Ἡ τοιαύτη ὅμως τάσις καὶ διάθεσις τῶν ἀτόμων ἀφορᾷ τὸν ψυχολογικὸν τούτων παράγοντα (Ψ) ὅπως τὸν καθορίζω εἰς τὴν συνάρτησιν τῆς τιμῆς πωλήσεως (Τ) καὶ ἑρμηνεύω ταύτην καὶ ἀνωτέρω καὶ εἰς τὴν μελέτην μου. [Γ.Ι. Τράμπου, Ἡ λειτουργία τοῦ μηχανισμοῦ τῶν τιμῶν κ.λ.π. (1957) σελ. 249 ἐπ. καὶ προηγουμένως]. Εἶναι ὅμως δυσχερὴς ὁ μαθηματικὸς καθορισμὸς καὶ σύμφωνα μὲ τοὺς νόμους τῶν πιθανοτήτων, τῶν παραμέτρων ai, Ai, δηλαδὴ τοῦ παράγοντος (Ψ) διὰ τοὺς ἑξῆς λόγους. Χρειάζεται μᾶλλον μαθηματικὴ τοπολογικὴ ἔρευνα. Ἡ πιθανότης (Probabilité), ὅπως καθορίζεται εἰς τὴν ἐπιστήμην, [πρβλ. G. Tintner, Mathématiques etc. I, (1962) σελ. 515 ἐπ.] δὲν εἶναι δυνατὸν μὲ τοὺς νόμους ποὺ τὴν διέπουν (νόμοι πιθανοτήτων) νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ μεμονομένων περιπτώσεων, δηλαδὴ ἐπὶ περιπτώσεων αἱ ὁποῖαι δὲν παρουσιάζονται ὡς μᾶζα, δηλαδὴ δὲν παρουσιάζονται ὡς πολλαπλᾶ καὶ μαζικὰ φαινόμενα, ὥστε ἐντεῦθεν νὰ προέρχωνται ἀριθμητικὰ δεδομένα. [G. Tintner, Mathématiques etc. I (1962) No 86].

Εἰς τὰς περιπτώσεις ὅμως κατὰ τὰς ὁποίας τὰ φαινόμενα εἶναι προϊόντα ἐνδιαθέτων, ψυχολογικῶν καθοριστῶν, ὅπως εἶναι ἡ πρόθεσις (τάσις) πρὸς κατανάλωσιν, ὡς ἡ προτίμησις τοῦ ὡρισμένου προϊόντος, εἶναι καταφανὲς ὅτι αἱ προτιμήσεις καὶ αἱ τάσεις δὲν δύνανται νὰ κατανεμηθοῦν εἰς ὡρισμένας κατηγορίας, ὥστε νὰ ἀποτελοῦν φαινόμενα μάζης καὶ ἐντεῦθεν ἀντικείμενα ἐφαρμογῆς τῶν νόμων τῶν πιθανοτήτων καὶ τῶν ἐπὶ τούτων ὑπολογισμῶν. Ἰδίως τῶν μαθηματικῶν ἐλπίδων (esperances mathématiques) δηλαδὴ τῆς κυβευτικῆς μεταβλητῆς (variance aleatoire), διότι ἕκαστον φαινόμενον ψυχολογικὸν παρουσιάζει ἰδίαν ἰδιορρυθμίαν καὶ δὲν κατατάσσονται εἰς κατηγορίας. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον δὲν δύνανται ἐπὶ ψυχολογικῶν περιπτώσεων (Ψ) νὰ συλληφθοῦν σαφῆ καὶ σχετικῶς θετικὰ δεδομένα καὶ νὰ καταστοῦν ἀντικείμενα ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν. Οὕτω μαθηματικῶς ἡ πιθανότης εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως :

$$\frac{\text{πλῆθος εὐνοϊκῶν περιπτώσεων διὰ τὸ γεγονὸς}}{\text{πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν ἐξ ἴσου πιθανῶν περιπτώσεων}}$$

[Πρβλ. Ν. Κρητικοῦ, Ἀνώτερα Μαθηματικὰ I (1963) § 18].

Εἶναι καταφανὲς ἐκ τοῦ κλάσματος τούτου, ὅτι διὰ νὰ ὑπολογισθῇ μαθηματικῶς ἡ πιθανότης πρέπει νὰ εἶναι δεδομένα ὡς ἀριθμοὶ καὶ ὁ ὀνομαστὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος ἔστω καὶ κατὰ τοὺς νόμους τῶν πιθανοτήτων. Ὅμως αἱ προτιμήσεις αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπόρροια ψυχολογικῶν διαθέσεων δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ δόσουν κατηγορίας ἀντικειμενικὰς καὶ ἑπομένως νὰ παρουσιάσουν βαθμωτὰ μεγέθη.

Παρὰ τὴν παρατήρησίν μου ταύτην θὰ προχωρήσω εἰς τὸν μετασχηματισμόν, ὅπως δίδεται ὑπὸ τῆς ἐπιστήμης, πάντοτε ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν τῆς πιθανότητος, ὅπως ἐτέθη προηγουμένως. Αἱ δύο παράμετροι α καὶ k μετασχηματιζόμεναι, εἶναι :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\nu} (aiAi) = E(aiAi) = E(ai)\,E(Ai) + \nu \text{ cov } (aiAi)$$

$$K = \sum_{i=1}^{\nu} (aik + ki) = \sum_{i=1}^{\nu} k^{\cdot} + E(aiki) = \sum_{i=1}^{\nu} k_i + E(ai)E(ki) + \nu\text{cov}\cdot(ai, ki)$$

Καὶ αἱ μαθηματικαὶ ἐλπίδες (esperances mathématiques), δηλαδὴ αἱ μαθηματικαὶ ἐλπίδες τῆς κυβευτικῆς μεταβλητῆς (variance aleatoire) τῶν παραμέτρων ai, Ai, Ki, ἐντὸς τῶν νόμων τῶν μαθηματικῶν ἐλπίδων καθορίζονται ὡς ἑξῆς : Πρέπει νὰ ἐξηγήσω ὅτι μαθηματικὴ ἐλπὶς ἡ μέση τιμὴ τῆς κυβευτικῆς (τυχαίας) μεταβλητῆς εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος ὅρος τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ταύτης κατὰ τὴν κατανομὴν (distribution) τῶν πιθανοτήτων. Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς μαθηματικῆς ἐλπίδος κατὰ τὴν θεωρίαν τῶν πιθανοτήτων, εὑρίσκεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν διαφόρων δυνατῶν τιμῶν τῆς κυβευτικῆς μεταβλητῆς, μὲ τὰς διαφόρους πιθανότητας καὶ μετὰ ταῦτα διὰ τῆς προσθέσεως τούτων.

Ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς χαρακτηρίζει τὴν γενικὴν κατάστασιν ἢ τὴν κεντρικὴν τάσιν τῆς κατανομῆς. Τὸ σύμβολον ταύτης εἶναι $E(X)=\mu$. Παράδειγμα :

Ἐὰν ἔχωμεν, τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς κυβευτικῆς μεταβλητῆς X, δηλαδὴ

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ X_\nu$$

καὶ τὰς πιθανότητας p.

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ P_\nu$$

τότε ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς (μ) τῆς κυβευτικῆς μεταβλητῆς θὰ εἶναι :

$$\mu = E(x) = x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + \ldots + x_\nu P_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} (x_i P_i)$$

Ἐπαναλαμβάνω ὅτι ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τῶν συνολικῶν παραμέτρων αι, Ai, Ki μὲ βάσιν (οὐχὶ μαθηματικὴν ἔννοιαν) τῶν σχέσεων εἶναι

$$r_{it} = A_{irt} + Ki + \varepsilon$$

ὅπου ε εἶναι τὸ κυβευτικὸν σφάλμα, ἡ παρέκλισις (ecart aleatoire), τὸ ὁποῖον σφάλμα παρακολουθεῖ ἕνα νόμον πιθανότητος τῆς μέσης τιμῆς μηδενικῆς. Ὡς μαθηματικὴ ἐλπὶς γράφεται αὐτὴ ἡ σχέσις οὕτως

$$E(r_{it}) = E(A_i r_i) + E(K_i) + E(e)$$

Λαμβανομένων δὲ ὑπ' ὄψιν τῶν σχέσεων

$$E(\varepsilon) = 0,\ E(r_{it}) = \nu r t E(A_i) \quad \text{καὶ}$$

$$E(r_{it}) = \sum_{i=1}^{\nu} r_{it} = r_t$$

τελικῶς προκύπτει ὅτι :

$$r_t = \nu E(A_i) r_t + E(K_i)$$

ἐκ τούτου δέ,

$$E(A_i) = \frac{1}{\nu} \quad \text{καὶ} \quad E(K_i) = O$$

Δηλαδὴ αἱ παράμετροι τελικῶς εἶναι :

$$a = \nu \bar{a} . \frac{1}{\nu} + \nu \operatorname{cov}(a_i A_i)$$

$$K = \sum_{i=1}^{\nu} K_i + \nu \bar{\alpha} . 0 + \nu cov (a_i, K_i)$$

Διὰ νὰ ἔχουν αἱ παράμετροι τὰς φυσικάς των τιμὰς

$$a = \bar{a} \quad \text{καὶ} \quad K = \sum_{i=1}^{\nu} K.i$$

πρέπει αἱ κατανομαὶ τῶν παραμέτρων ai Ai καὶ Ki νὰ εἶναι τοιαῦται ὥστε ἐντὸς τοῦ πλήθους [population ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ποὺ ἔχει εἰς τὴν θεωρίαν τῶν πιθανοτήτων] αἱ συνμεταβληταὶ νὰ εἶναι μηδενικαί, δηλαδὴ

$$cov (a_i A_i) = 0 \quad , \quad cov (\alpha_i K_i) = 0$$

Ταῦτα εἶναι περισσότερον ἀπὸ ἀρκετὰ ὥστε νὰ κατατοπισθῇ ὁ μελετητὴς εἰς τὸν μαθηματικὸν καθορισμὸν τῆς συνολικῆς ζητήσεως (D) ἐν σχέσει μάλιστα πρὸς τὸ εἰσόδημα (R) (r) ὅπως ἑρμηνεύεται ἐπιστημονικῶς [πρβλ. G. Tintner, Mathématiques etc. No 114].

Νομίζω ὅτι καθίσταται πλέον κατανοητὸν ὅτι δὲν εἶναι εὔκολος οὔτε καὶ δυνατὸς ὁ ἀριθμητικὸς καθορισμὸς τῶν παραμέτρων τῆς ζητήσεως καὶ τοῦ εἰσοδήματος, ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα ἀθροίσματα καὶ ἐξισώσεις καθωρίσθησαν, διότι — ὅπως ἐξέθεσα καὶ προηγουμένως — ἰδίως ἡ παράμετρος α ἡ ὁποία ἐκφράζει τὴν τάσιν, τὴν ἐπιθυμίαν τῶν ἀτόμων πρὸς κατανάλωσιν, ἀλλὰ καὶ ὅλαι αἱ παράμετροι δὲν ἔχουν ποσοτικὴν μορφὴν καὶ δὲν παρουσιάζουν ἀπὸ ἀπόψεως ἰδιοτήτων καὶ κατηγοριῶν μάζαν ὁμοίων περιπτώσεων, ὥστε νὰ εὑρεθοῦν αἱ μαθηματικαὶ ἐλπίδες, διότι κάθε ἄτομον ἔχει ἰδιόρρυθμον καὶ ἐξ ἰδίων λόγων τάσιν πρὸς κατανάλωσιν καὶ ἀντικειμενικῶς δὲ αἱ τάσεις αὐταὶ δὲν δύνανται νὰ ὑπαχθοῦν εἰς κατηγορίας ὥστε νὰ ἐφαρμοσθοῦν οἱ νόμοι τῆς κατανομῆς καὶ τῆς κυβευτικῆς μεταβλητῆς καὶ τῶν πιθανοτήτων διὰ καθαρῶς ὑποκειμενικοὺς καὶ ψυχολογικοὺς παράγοντας. Κατὰ συνέπειαν νομίζω ὅτι αἱ μαθηματικαὶ σχέσεις αἱ ὁποῖαι δίδονται ὑπὸ τῶν ἐπιστημόνων καὶ τὰς ὁποίας ἐξέθεσα, ἔχουν μόνον συμβολικὸν χαρακτῆρα, χωρὶς καμμίαν μαθηματικὴν ἐκτίμησιν. Ἡ τοπολογία εἶναι ἐν προκειμένῳ ἐνδεδειγμένη.

Ἡ συνάρτησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς προσφορὰ

Ὁ δεύτερος παράγων τοῦ δεξιοῦ (δευτέρου) σκέλους τῆς συναρτήσεως τῆς τιμῆς πωλήσεως (T) εἶναι ἡ προσφορά. Ὅπως καὶ ἡ ζήτησις οὕτω καὶ ἡ προσφορὰ εἶναι ἐξηρτημένη μεταβλητή, δηλαδὴ συνάρτησις τῶν κατωτέρω διαγραφομένων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Καὶ ἡ συνάρτησις τῆς προσφορᾶς (o) εἶναι ὅπως τὴν δίδω πρωτοτύπως

$$O = (V_2) (R) (eB) (km) (\Gamma) (\Psi) \pi (P_r + S)$$

Θὰ ἐρευνήσω καὶ τὴν συνάρτησιν ταύτην τῆς προσφορᾶς καὶ θὰ ἀναλύσω ταύτην μαθηματικῶς. Ὡς πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τῆς ὑποκαταστάσεως (V2) τοῦ προϊόντος ὡς καὶ τῆς ταυτοσήμου ἐλαστικότητος (e) τοῦ προϊόντος (B), δὲν θὰ ἀσχοληθῶ μὲ ταῦτα, διότι τὰ ἠρεύνησα προηγουμένως καὶ μαθηματικῶς κατὰ τὴν ἔρευναν τοῦ παράγοντος-ζήτησις. Ἐπίσης ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν εἰσόδημα (R), προηγουμένως ἀνέπτυξα τοῦτο λεπτομερῶς καθὼς καὶ τὰς σχετικὰς συναρτήσεις τοῦ εἰσοδήματος καὶ τὰς σχέσεις τούτου καὶ ἀναφέρομαι ὡς πρὸς ταῦτα εἰς τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα.

Ἐπίσης δὲν θὰ ἐρευνήσω τὸν ἀστάθμητον παράγοντα (Ψ) ὡς ψυχολογικὸν μὴ ἐπιδεχόμενον ἀριθμητικὴν ἐκτίμησιν ὅπως ἀνέπτυξα προηγουμένως παρὰ μόνον τοπολογικὴν ἐξέτασιν. Τὰ γενικὰ ἔξοδα (Γ) — ὅπως ὑπεστήριξα καὶ προηγουμένως — εἶναι ὁ μόνος παράγων τῆς συναρτήσεως (Τ), ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι ἀνεξάρτητος μεταβλητή, ἀλλὰ εἶναι μία σταθερά, ὡς παράγων δὲ ἔχει ἤδη ἐρευνηθῆ προηγουμένως (πρβλ. Γ. Ι. Τράμπου, Ἡ λειτουργία τοῦ μηχανισμοῦ τῶν τιμῶν (1957) σελ. 237).

Γενικῶς ὑποστηρίζεται εἰς τὴν θεωρίαν ὅτι τὴν συνάρτησιν τῆς προσφορᾶς μιᾶς ἐπιχειρήσεως ἢ καὶ ἑνὸς ἀτόμου δίδει ἡ ποσότης τοῦ προϊόντος ἡ ὁποία προσφέρεται εἰς τὴν ἀγορὰν εἰς μίαν ὡρισμένην τιμὴν καὶ ὅτι ἡ συνολικὴ προσφορὰ καθορίζεται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀτομικῶν ἢ ὑπὸ τῶν ἐπιχειρήσεων προσφερομένων ποσοτήτων τοῦ ὡρισμένου προϊόντος καὶ εἰς ὡρισμένην τιμήν. [G. Tintner, Mathématiques et Statistiques pour les Economistes I (1962) No 7 σελ. 19 ὡς καὶ ἡ αὐτόθι γραφικὴ παράστασις τῆς προσφορᾶς]. Νομίζω ὅτι, προκειμένου περὶ τοῦ καθορισμοῦ τῆς τιμῆς πωλήσεως ἑνὸς προϊόντος, ἡ κατὰ μονάδα τιμῆς προσφορὰ ὡρισμένης ποσότητος, δὲν ἀποτελεῖ τὴν ὀρθὴν τοποθέτησιν τοῦ ζητήματος καὶ δὲν ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῆς πραγματικότητος. Ἡ προσφερομένη εἰς τὴν ἀγορὰν ποσότης τοῦ προϊόντος εἶναι ἡ συνολικὴ ποσότης τοῦ προϊόντος καὶ προφανῶς ὡς τοιαύτη ἀποτελεῖ παράγοντα καὶ εἶναι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ τῆς τιμῆς πωλήσεως τοῦ προϊόντος (Τ)

Τὸ σύνολον δὲ τῆς ποσότητος τοῦ προϊόντος ἡ ὁποία προσφέρεται εἰς τὴν ἀγορὰν πιέζει τὴν ἀγορὰν καὶ ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς ζητήσεως τοῦ προϊόντος καὶ ἀποτέλεσμα δὲ ταύτης εἶναι ὁ σχηματισμὸς τῆς τιμῆς πωλήσεως τοῦ προϊόντος. Ἡ κατὰ διαφόρους τιμὰς προσφορὰ ποσοτήτων ἐκ τοῦ προϊόντος καὶ ἡ διὰ τοῦ συστήματος τούτου διαμόρφωσις τῆς τιμῆς πωλήσεως τοῦ προϊόντος δὲν ἀνταποκρίνεται πρὸς τὴν πραγματικότητα καὶ εἰς τὰς συναλλαγὰς τῆς ἀγορᾶς καὶ εἶναι καθαρὰ ἐπινόησις, προφανῶς τελείως φανταστική.

Ἡ τιμὴ πωλήσεως ἑνὸς προϊόντος ἀναμφισβητήτως σχηματίζεται διὰ τῆς ρίψεως εἰς τὴν ἀγορὰν ὁλοκλήρου τῆς ποσότητος, ἡ ὁποία εἶναι δυνατὸν νὰ προσφερθῆ καὶ μία παραστατικὴ τούτου εἰκών, εἶναι ἡ ρίψις ἐπὶ μιᾶς πλάστιγγος μιᾶς ποσότητος ἑνὸς προϊόντος καὶ συνέπεια τῆς ρίψεως ταυτοχρόνως εἶναι νὰ κινηθῇ ὁ δείκτης τοῦ βάρους. Εἰς τὴν προσοφὰν ἑνὸς προϊόντος ὁ δείκτης τῆς τιμῆς πωλήσεως κινεῖται κατὰ τρόπον ἀντίστροφον πρὸς τὸν δείκτην τοῦ βάρους τοῦ προϊόντος.

Ὅπως δὲ ἐξέθεσα προηγουμένως δὲν εἶναι μόνον ὁ παράγων «ρίψις τοῦ προϊόντος» εἰς τὴν ἀγοράν, ὁ ὁποῖος κανονίζει τὴν τιμὴν πωλήσεως. Ἡ προσφορὰ τοῦ προϊόντος εἶναι συνάρτησις πολλῶν παραγόντων καὶ κυρίως τῆς παραγωγῆς (Pr) τούτου, εἰς τὴν ὁποίαν ἐν προκειμένῳ συνυπολογίζω καὶ τὴν ἐναποθήκευσιν (S) ἡ ὁποία εἶναι καὶ αὐτή, μαζὶ μὲ τὴν παραγωγήν, παραγωγὴ καὶ δὲν χρειάζεται ἰδιαιτέρα ἔρευνα καὶ μαθηματικὴ διατύπωσις ταύτης. Ἡ ἐναποθήκευσις προσθέτει ποσότητα εἰς τὴν προσφορὰν τοῦ ἤδη παραγομένου προϊόντος, τὸ ὁποῖον ἐντὸς τοῦ χρόνου προσφέρεται. Καὶ κατὰ τοῦτο ὀρθῶς κατὰ τὴν γνώμην μου εἰς τὴν ἐπιστήμην ἐρευνᾶται πλήρως τὸ στοιχεῖον παραγωγή.

Οἱ ἐπιστήμονες (οἰκονομολόγοι) δίδουν μίαν βασικὴν συνάρτησιν τῆς παραγωγῆς, δηλαδή :

$$x = (\alpha,\ \beta)$$

ὅπου x = ἡ παραγομένη ποσότης ἐξ ἑνὸς προϊόντος (π.χ. ἠλεκτρικῶν ψυγείων), α = αἱ χρησιμοποιηθεῖσαι μονάδες τοῦ παράγοντος τῆς παραγωγῆς A, ὅπως τῆς ἐργασίας καὶ ταυτοχρόνως β = αἱ χρησιμοποιηθεῖσαι μονάδες τοῦ παράγοντος τῆς παραγωγῆς B, ὡς ἐπὶ παραδείγματι τῆς γῆς, τοῦ κεφαλαίου. Τώρα ἐρευνᾶται ἡ ἐπίδρασις τῆς αὐξήσεως (ἢ τῆς μειώσεως) τοῦ παράγοντος α ὅταν ἡ ποσότης τοῦ παράγοντος β παραμένῃ σταθερά. Τότε τὸ μέσον ὕψος τῆς αὐξήσεως (ἢ τῆς μειώσεως) τῆς παραγωγῆς (x) ἐν σχέσει πρὸς τὴν αὔξησιν (ἢ μείωσιν) τοῦ παράγοντος α δίδεται ὑπὸ τοῦ διαφορικοῦ τύπου : (διαφορικῆς ἐξισώσεως)

$$x + dx = \frac{f(a + da, b) - f(a, b)}{d\,a}$$

[Πρβλ. G. Tintner, Mathématiques et Statistiques pour les Economistes I (1962) No 71].

Εἶναι προφανές, μολονότι δὲν ἀναφέρεται τοῦτο, ὅτι ὁ τύπος οὗτος εἶναι ἡ κατὰ τὸν ἀπειροστικὸν λογισμὸν παράγωγος, τῆς βασικῆς συναρτήσεως τὴν ὁποίαν ἀνέγραψα προηγουμένως. Καὶ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ὅταν τὸ ἀπειροστὸν (da) τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, δηλαδὴ $da \rightarrow 0$ τὸ ὅριον τῆς σχέσεως ταύτης εἶναι ἡ μερικὴ παράγωγος

$$\frac{dx}{da} = fa'\ (a,b)$$

δηλαδὴ ἡ μερικὴ παράγωγος τῆς συναρτήσεως τῆς παραγωγῆς καὶ τοῦτο εἶναι ἡ ὁριακὴ παραγωγικότης τοῦ συντελεστοῦ A τῆς παραγωγῆς.

Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ ὡς πρὸς τὸν παράγοντα (συντελεστὴν) τῆς παραγωγῆς B, ὅταν ὁ ἕτερος παράγων (συντελεστὴς) δηλαδὴ ὁ A παραμένει σταθερός, καὶ αὐξάνει (ἢ μειοῦται) ὁ παράγων β ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{f(b+db,a)-f(a,b)}{db}$$

καὶ ἡ μερικὴ παράγωγος θὰ εἶναι : $\dfrac{dx}{db} = bf'(a,b)$

Καὶ αὐτὴ ἡ παράγωγος εἶναι ἡ ὁριακὴ παραγωγικότης τοῦ συντελεστοῦ B. Ὑπὸ τὸ κράτος τοῦ ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ εἶναι γνωστὸν ὅτι οὐδεὶς ὠργανωμένος παράγων δύναται νὰ ἐπιδράσῃ, οὔτε ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς παραγωγῆς, οὔτε ἐπὶ τῶν τιμῶν τῶν παραγόντων (συντελεστῶν) τῆς παραγωγῆς. Κατὰ συνέπειαν τὰ στοιχεῖα ταῦτα καθορίζονται ἐλευθέρως καὶ κατὰ πλήρη λειτουργίαν τῶν συναρτήσεων, δηλαδὴ τῶν ὡς ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν δρώντων παραγόντων.

Πολλαὶ διετυπώθησαν εἰς τὴν ἐπιστήμην συναρτήσεις διὰ τὴν παραγωγήν.

Νομίζω ὅμως ὅτι ἡ πλέον ἐπιτυχὴς συνάρτησις τῆς παραγωγῆς, ἡ ὁποία διετυπώθη εἶναι ἡ ὑπὸ τῶν Gobb καὶ Douglas τὸ ἔτος 1928 διατυπωθεῖσα συνάρτησις εἰς ἕνα ἄρθρον εἰς τὴν American Economic Review. Ἐκ τούτων ὁ Douglas εἰς μελέτην του The theory of Wages (1934), ἐχρησιμοποίησε τὴν συνάρτησιν ταύτην καὶ τὴν ἀνέπτυξε πολὺ εὐρύτερον (Πρβλ. Περὶ τῆς συναρτήσεως τῆς παραγωγῆς τῶν Gobb - Douglas, τὴν πλήρη ταύτης ἀνάπτυξιν ὑπὸ Ν. Γ. Μαρματάκη, Ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς καὶ ἡ στασιμότης τῆς Κεφαλαιοκρατίας, Ἀρχεῖον Οἰκονομικῶν καὶ Κοινωνικῶν Ἐπιστημῶν, τόμος 41 (1961), τεῦχος Δ' καὶ τὸ ἀνάτυπον (1962) σελ. 12 ἑπ.). Ὅπως ἤδη ἐξέθεσα ὅλαι αἱ συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν διὰ τὴν παραγωγὴν εἶναι καθαρῶς μαθηματικῆς φύσεως καὶ δύναμαι νὰ τονίσω μάλιστα ὅτι εἰδικῶς — προκειμένου περὶ τῆς παραγωγῆς — ἡ συνάρτησις ταύτης εἶναι καθαρῶς μαθηματικὴ καὶ πολὺ βεβαία, διότι ὅλαι αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ ταύτης, λαμβάνουν ἐκ τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν, πολὺ καθωρισμένας τιμάς καὶ κυρίως δὲν ἐξαρτῶνται ἀπὸ τοὺς νόμους τῶν πιθανοτήτων. Τελευταίως ἐδόθησαν διὰ τὴν παραγωγὴν πολλαὶ καὶ ποικίλαι συναρτήσεις, ἀκόμη καὶ μὴ γραμμικαί, ἡ δὲ γενικὴ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς διατυποῦται ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$Y = F(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots x_\nu)$$

ὅπου $Y = P_r$ = Παραγωγὴ τοῦ προϊόντος ἢ ἡ συνολικὴ παραγωγὴ καὶ $x_1, x_2, \ldots\ldots x_\nu$ = οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς.

Μία ἄλλη συνάρτησις τῆς παραγωγῆς εἶναι :

$$Y = 2Hab - Aa^2 - Bb^2$$

ὅπου $Y = Pr =$ Παραγωγὴ καὶ Α, Β, Η, θετικαὶ σταθεραὶ κατὰ τοιαύτην διάταξιν, ὥστε $H^2 > AB$ καὶ a,b = συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς. Ἐπίσης μία ἄλλη συνάρτησις κατὰ τὸ σύστημα τοῦ Leontief εἶναι ἡ ἑπομένη:

$$Y = 4(xy - x^2 - 3y^2)$$

ὅπου Y = αἱ ἐκροαί, εἰσόδημα καὶ λοιπὰ καὶ x, y οἱ συντελεσταὶ τῆς Παραγωγῆς. Καὶ μία ἀκόμη συνάρτησις τῆς παραγωγῆς εἶναι ἡ

$$Y = 8 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

Νομίζω ὅμως καὶ πιστεύω ὅτι ἡ ἀρτιωτέρα, ἡ πληρεστέρα καὶ ἡ πλέον ἀνταποκρινομένη εἰς τὰ πράγματα συνάρτησις τῆς παραγωγῆς, εἶναι ἡ δοθεῖσα ὑπὸ τῶν Gobb – Douglas, δηλαδὴ ἡ συνάρτησις:

$$Y = \lambda k^{\alpha} N^{1-\alpha}$$

ὅπου Y = τὸ ἐθνικὸν προϊὸν (παραγωγή), K = ὁ συντελεστὴς τῆς παραγωγῆς Κεφάλαιον, N = ὁ συντελεστὴς τῆς παραγωγῆς ἐργασία καὶ λ καὶ α, αἱ παράμετροι τῆς συναρτήσεως. Ἡ συνάρτησις τῶν Gobb – Douglas, ἔχει εἰς τὸ δεύτερον σκέλος της δύο ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς, δηλαδὴ τὸ Κεφάλαιον καὶ τὴν Ἐργασίαν.

Ἐπὶ τῆς συναρτήσεως ταύτης γίνονται διάφοροι μαθηματικαί, δηλαδὴ ἀλγεβρικαὶ πράξεις, ὅπως ἐπὶ παραδείγματι:

$$N = \left(\frac{Y}{K^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = Y_1^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

[Πρβλ. Ν. Γ. Μαρματάκη, op. cit., σελ. 16] ὡς καὶ ἡ παραγώγησις ταύτης.

Νομίζω ὅμως ὅτι τὸ δεύτερον σκέλος, τὸ δεξιόν, τῆς συναρτησιακῆς σχέσεως, δηλαδὴ τὸ $\lambda K^{\alpha} N^{1-\alpha}$ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι γινόμενον Π τῶν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν Κ καὶ Ν, ὥστε νὰ εἶναι δυναταὶ αἱ ἐκτελούμεναι πράξεις, ἀλλὰ ἡ συνάρτησις τῶν Gobb – Douglas εἶναι μία ἁπλῆ παράστασις καὶ τὸ δεύτερον σκέλος τῆς συναρτήσεως πρέπει νὰ εἶναι ἕνα ἄθροισμα Σ, τὸ ὁποῖον δίδει τὴν ἐξηρτημένην μεταβλητὴν (συνάρτησιν) Y = παραγωγή. Δηλαδὴ πρέπει νὰ νοηθῇ ἡ συνάρτησις ὡς

$$Y = \lambda K^{\alpha} + N^{1-\alpha}$$

Πράγματι ἡ συνολικὴ παραγωγὴ ὡς τιμὴ τοῦ συνολικοῦ προϊόντος εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ διατεθέντος ποσοστοῦ ἐκ τοῦ παράγοντος Κεφάλαιον σὺν (+) τὸ διατεθὲν ποσοστὸν ἐκ τοῦ παράγοντος ἐργασία. Παραδείγματος χάριν Y (ἕνα ψυγεῖον δραχ. 40) = λK^{α} (ποσοστὸν Κεφαλαίου) δραχ. 10 + $N^{1-\alpha}$ (ποσοστὸν ἐργασίας) δραχ. 30). Ὁ ἴδιος λογισμὸς γίνεται καὶ ὅταν πρόκειται περὶ ποσοτήτων παραγωγῆς, δηλαδὴ περὶ ὄγκου παραγωγῆς. Καὶ διαφορετικὰ χωρὶς ἀποτίμησιν εἰς δραχμὰς Y (ψυγεῖον ὡς ὑλικὴ ποσότης) = λK^{α}

(ποσότης ὑλικοῦ εἰς τὸ ὁποῖον ἐπενδύθη ποσοστὸν ἐκ τοῦ Κεφαλαίου) + $N^{1-\alpha}$ (ποσότης διατεθείσης ἐργασίας διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ψυγείου). Ὅταν ὅμως τὸ K καὶ τὸ N δὲν εἶναι γινόμενον διὰ τὴν ἐξίσωσίν των πρὸς τὸ Y, δὲν δύναται νὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις ὡς κλάσμα

$$N = \left(\frac{Y}{K}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Μόνον δύνανται κατὰ τὴν γνώμην μου νὰ προκύψουν αἱ ἐξισώσεις

$$Y - \lambda K^{\alpha} = N^{1-\alpha} \quad \text{καὶ} \quad Y - N^{1-\alpha} = \lambda K^{\alpha}$$

ὡς καὶ $\dfrac{Y}{\lambda K^{\alpha} + N^{\alpha-1}} = 1$

Ὁπωσδήποτε ὅμως ὁ ὑπὸ τῆς οἰκονομομετρικῆς (καὶ οὐχὶ οἰκονομετρική, διότι ὁ ἐπικρατήσας οὗτος ὅρος οὐδὲν σημαίνει) κατὰ τὴν ἀνάλυσίν της καθορισμὸς τῶν τιμῶν τῶν δύο δυνάμεων ὡς καὶ τῆς παραμέτρου, ὥστε νὰ εἶναι

$$Y = 1{,}01\ K^{0.25}\ N^{0.75}$$

νομίζω ὅτι εἶναι πολὺ ὀρθός, διότι πράγματι πιστεύω ὅτι οἱ ὑπολογισμοὶ αὐτοὶ ἀνταποκρίνονται πρὸς τὴν πραγματικότητα καὶ πράγματι ἡ ἀναλογία διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἑνὸς προϊόντος εἶναι 25 % Κεφάλαιον καὶ 75% ἐργασία.

Ἐπίσης φρονῶ ὅτι εἶναι ὀρθὸς ὁ ὑπολογισμὸς ἐξ ἑνὸς τῆς ὁριακῆς παραγωγικότητος τοῦ Κεφαλαίου

$$\frac{dY}{dK} = a\,\frac{Y}{K} = \text{ἐπιτόκιον ἢ ποσοστὸν κερδῶν } \pi$$

καὶ ἐξ ἑτέρου ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ὁριακῆς παραγωγικότητος τῆς ἐργασίας

$$\frac{dY}{dN} = \frac{\beta Y}{N} = \text{μισθός}.$$

Συνήθως δίδεται καὶ ἡ πρώτη παράγωγος τῆς λογιστικῆς καμπύλης καὶ εἶναι : $\dfrac{dY}{dx} = \varphi'(x)Y\ \dfrac{Y - K}{K}$

Ὁ τύπος οὗτος προέρχεται ἐκ τῆς λογιστικῆς καμπύλης καὶ ὁ τύπος τῆς λογιστικῆς καμπύλης εἶναι :

$$Y = \frac{K}{1 + be}\ \varphi x$$

Ἐκ τῆς προσεκτικῆς μελέτης τῆς συναρτήσεως τῆς παραγωγῆς τῶν Gobb – Douglas προκύπτει ἀβίαστον τὸ συμπέρασμα ὅτι ἐκ τῶν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ταύτης, σπουδαιοτέρα καὶ σοβαρωτέρα εἶναι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ τῆς ἐργασίας (N). Περὶ τοῦ παράγοντος ἐργασία ἐκθέτω ἐκτενῶς τὴν γνώμην μου καὶ ἔχω ἤδη ἀναλύσει καὶ μαθηματικῶς τὴν ἐργασίαν (Πρβλ. Γ. Ι. Τράμπου, Ἡ λειτουργία τοῦ μηχανισμοῦ τῶν τιμῶν, οἱ συντελεσταὶ τῆς τιμῆς καὶ αἱ συναρτήσεις των (1957) σελ. 235 ἐπ.) καὶ ἐκεῖ δίδω τὰς ἐξισώσεις τοῦ ἐργατικοῦ μισθοῦ ἐν σχέσει πρὸς τὰς ὥρας ἐργασίας.

Θὰ προσθέσω μόνον ὅτι ἐκτὸς τῶν ἐξισώσεων τὰς ὁποίας δίδω, δίδονται ἐπίσης καὶ ἄλλαι ἐξισώσεις προκύπτουσαι ἐκ τῆς συναρτήσεως τῆς παραγωγῆς τῶν Gobb – Douglas (Πρβλ. Ν. Γ. Μαρματάκη, Ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς καὶ ἡ στασιμότης τῆς Κεφαλαιοκρατίας (1962) σελ. 36 ἐπ.). Σπουδαιότεραι ἐκ τούτων εἶναι :

Ἡ ὁριακὴ παραγωγικότης τοῦ Κεφαλαίου $\dfrac{dY}{dK} = a\,\dfrac{Y}{K}$

Ἡ ὁριακὴ παραγωγικότης τῆς ἐργασίας $\dfrac{dY}{dN} = 1 - a\,\dfrac{Y}{N}$

Ἡ παραγωγικότης τῆς συνολικῆς ἐργατικῆς δυνάμεως $N\dfrac{dY}{dN} = 1 - aY$.

Ἐπίσης δίδονται καὶ μερικαὶ ἄλλαι ἐξισώσεις (Ν. Γ. Μαρματάκη, op. cit.). Ὁ τελευταῖος παράγων τῆς προσφορᾶς, ὁ ὁποῖος καὶ ἀποτελεῖ μίαν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τῆς συναρτήσεως τῆς τιμῆς πωλήσεως (Τ), εἶναι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ km, δηλαδὴ τὸ μέσον κόστος, τοῦ προϊόντος (Β).

Πρέπει τώρα νὰ παρατηρήσω ὅτι τὸ κόστος παραγωγῆς ἑνὸς προϊόντος εἴτε εἶναι τὸ συνολικὸν (total), εἴτε τὸ μέσον (moyenne), προκύπτει πάντοτε πλήρως καὶ ἀποκλειστικῶς ἐκ τῶν δύο συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, δηλαδὴ τοῦ Κεφαλαίου καὶ τῆς Ἐργασίας (ἐργατικὸς μισθός), διότι ὁποιασδήποτε φύσεως καὶ ἐὰν εἶναι ἕνα ἔξοδον παραγωγῆς, θὰ προέρχεται τοῦτο εἴτε ἐκ τοῦ διατιθεμένου ποσοστοῦ Κεφαλαίου, εἴτε ἐκ τῆς ἀμοιβῆς τῆς καταναλισκομένης ἐργατικῆς δυνάμεως. Κατὰ συνέπειαν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ «Κόστος Παραγωγῆς» ἐξαντλεῖται καὶ λογικῶς καὶ μαθηματικῶς εἰς τὴν δοθεῖσαν προηγουμένως συνάρτησιν τῶν Gobb – Douglas (Κεφάλαιον, Ἐργασία) καὶ ἑπομένως εἶναι καταφανές, ὅτι εἶναι περιττὸν νὰ προσθέσω εἰς τὴν συνάρτησιν τῆς τιμῆς πωλήσεως (Τ) καὶ εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος τῆς συναρτησιακῆς σχέσεως, ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν καὶ τὸ μέσον κόστος τῆς παραγωγῆς, ἐφ' ὅσον ἤδη εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος τῆς συναρτήσεως Τ διατυπώνω ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὴν παραγωγὴν τοῦ προϊόντος Β δηλαδὴ Παραγωγὴ = Pr, διότι :

$$\text{παραγωγή} = Y = Pr = \lambda K^{\alpha} + N^{1-\alpha}$$

Βεβαίως ἡ προσφορὰ συνίσταται εἰς τὴν προσκομιδὴν τῆς παραγωγῆς ἐν γένει (σὺν ἐναποθήκευσις) εἰς τὴν ἀγορὰν καὶ ὁ ὄγκος ταύτης πιέζει τὴν ἀγοράν, ὁ ὄγκος ὅμως οὗτος τῆς παραγωγῆς ἀναλυόμενος συνίσταται εἰς Κεφάλαιον καὶ Ἐργασίαν καὶ ταῦτα ἐνσωματούμενα εἰς τὸ προϊὸν (Β) πιέζουν καὶ ὡς τιμαὶ τὴν ἀγορὰν καὶ συντελοῦν εἰς τὸν σχηματισμὸν τῆς τιμῆς πωλήσεως τοῦ προϊόντος. Παρὰ ταῦτα ὅμως καὶ εἰς τὴν θεωρίαν γίνεται χωριστὴ ἔρευνα τοῦ Κόστους καὶ χωριστὴ τῆς παραγωγῆς ὡς ἀποτελέσματος καὶ δίδονται χωρισταὶ συναρτήσεις.

Πράγματι ὁ G. Tintner [Mathématiques etc I (1962) No 40, σελ. 136 ἐπ.] διατυπώνει διὰ τὸ συνολικὸν κόστος (coût total) τὴν συνάρτησιν :

$$C = f(Q)$$

ὅπου C = τὸ συνολικὸν Κόστος καὶ Q = ἡ παραχθεῖσα ποσότης τοῦ προϊόντος. Ἡ συνάρτησις αὐτὴ προϋποθέτει ἕνα καλῶς καθωρισμένον κεφάλαιον τῆς ἐγκαταστάσεως, τὸ ὁποῖον ὅμως εἶναι καὶ τοῦτο κεφάλαιον.

Νομίζω ὅμως ὅτι ἡ συνάρτησις αὐτή, περιοριζομένη μόνον εἰς τὴν παραγομένην ποσότητα τοῦ προϊόντος εἶναι ἐλλιπής. Ἡ πλήρης συνάρτησις τῆς παραγωγῆς εἶναι, ὅταν ἀναλυθῇ ἡ παραχθεῖσα ποσότης εἰς τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα τὴν ἀποτελοῦν καὶ τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἶναι τὸ Κεφάλαιον καὶ ἡ Ἐργασία, εἰς τὸ Κεφάλαιον δὲ περιλαμβάνεται καὶ τὸ ποσοστὸν τὸ ἀντιστοιχοῦν ἐκ τοῦ παγίου Κεφαλαίου ὡς καὶ τὸ βιομηχανικὸν κέρδος καὶ ἀντιστοίχως καὶ τὸ κέρδος τοῦ ἀγρότου διὰ τὰ γεωργικὰ προϊόντα καὶ ὅταν γίνῃ ἡ ὑποκατάστασις τοῦ Q διὰ τῶν στοιχείων τοῦ K καὶ N, εἶναι ἡ συνάρτησις Y = Pr τῆς παραγωγῆς τῶν Gobb καὶ Douglas.

Τὸ μέσον κόστος, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κόστος μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ παραγομένου προϊόντος, εἶναι τὸ πηλίκον ἑνὸς κλάσματος τοῦ ὁποίου ἀριθμητὴς εἶναι τὸ συνολικὸν κόστος C καὶ παρονομαστὴς εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τοῦ παραχθέντος προϊόντος, ἔστω Q, τότε τὸ μέσον κόστος km

$$km = \frac{C}{Q} = \frac{f(Q)}{Q} = g \cdot (Q)$$

Νομίζω ὅτι, χωρὶς νὰ ἔχῃ ἀναλυθῇ ἡ συνάρτησις g(Q) μέχρι τοῦδε, πρέπει νὰ προχωρήσω καὶ νὰ τὴν ἀναλύσω καὶ νὰ ἀντικαταστήσω τὴν τελικὴν συνάρτησιν g(Q) διὰ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, τῶν ὁποίων συνάρτησις εἶναι τὸ Q, δηλαδὴ διὰ τῶν ἀναλόγων ποσοστῶν τοῦ Κεφαλαίου (K) καὶ τῆς ἐργασίας (N) τὰ ὁποῖα κατηναλώθησαν καὶ ἐμπεριέχονται εἰς τὴν ποσότητα Q τοῦ προϊόντος (B).

Τότε ἡ συνάρτησις Km θὰ εἶναι :

$$km = gQ = f\ (K,N)$$

Καὶ ἐὰν προστεθοῦν αἱ ἀντιστοιχοῦσαι παράμετροι καὶ ὡς δυνάμεις, τότε προκύπτει πλήρως ἡ συνάρτησις τῶν Gobb – Douglas.

Κατὰ συνέπειαν τούτων καί :

$$P_r = km$$

Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τὴν ὁποίαν προηγουμένως ὑποστηρίζω ἡ συνάρτησις C = f(Q) εἶναι προφανῶς ὀρθὴ καὶ προχωρῶ βαθύτερον εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν ταύτης. Ἐν συντομίᾳ παριστῶ τὸ μέσον κόστος διὰ τοῦ km, τὸ συνολικὸν κόστος παραγωγῆς διὰ τοῦ C καὶ τὴν συνολικὴν ποσότητα τοῦ παραχθέντος προϊόντος (B) διὰ τοῦ Q. Χρησιμοποιῶ τὴν παράγωγον τοῦ κλάσματος καὶ οὕτως ἐπιτυγχάνω τὸν ἀναγκαῖον ὅρον τοῦ ἐλαχίστου τοῦ μέσου ἐξόδου.

Ἡ ἀρχικὴ καὶ βασικὴ ἐξίσωσις εἶναι :

$$\mathrm{km} = \frac{C}{Q}$$

Ἡ παράγωγος τοῦ κλάσματος εἶναι :

$$\frac{d(\mathrm{km})}{dQ} = \frac{QC' - C}{Q^2} = o$$

Ἐκ τούτου προκύπτει :

$$QC' - C = O \quad \text{καὶ} \quad C' = \frac{C}{Q} = \mathrm{km} = \lambda K'^{\alpha} + N'^{1-\alpha} = P_r$$

Συμπέρασμα : Τὸ μέσον κόστος (km) εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὁριακὸν κόστος (G. Tintner, Mathématiques etc. I (1962) No 67, σελ. 202 ἑπ.].

Τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι :

$$C' = \frac{dC}{dQ} \qquad \text{καὶ} \qquad C = \int SC'dQ,$$

δηλαδὴ τὸ ὁλοκλήρωμα S τοῦ ὁριακοῦ κόστους εἶναι τὸ συνολικὸν κόστος. Ἡ ὁλοκλήρωσις ἐνέχει καὶ μίαν συμβατικὴν σταθεράν.

Ἐξήντλησα καὶ τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς αἱ ὁποῖαι ἐπηρεάζουν τὴν προσφορὰν (O).

Τὰ μέσα πληρωμῆς

Ἤδη δι' ἐλαχίστων θὰ ἀναλύσω τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τῆς συναρτήσεως τῶν μέσων πληρωμῆς. Τὰ μέσα πληρωμῆς, δηλαδὴ τὸ παντὸς εἴδους χρῆμα κατὰ τὴν οἰκονομικήν του σημασίαν καθὼς καὶ τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν τούτου, τὰ ἠρεύνησα καὶ τὰ ἐξέθεσα εἰς τὴν μελέτην μου. Ἡ λειτουργία τοῦ μηχανισμοῦ τῶν τιμῶν (1957) σελ. 239 ἑπ. ὡς καὶ προηγουμένως ἐνταῦθα καὶ μάλιστα σχετικῶς διὰ μακρῶν, ὥστε εἶναι τελείως περιττὸν νὰ ἀσχοληθῶ καὶ τώρα μὲ τὸ ζήτημα τοῦτο. Τὸ μόνον τὸ ὁποῖον θὰ προσθέσω ἐνταῦθα εἶναι ὅτι, διότι δὲν δύναται νὰ γίνῃ ἀσφαλὴς καὶ σοβαρὸς μαθηματικὸς καὶ ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τῆς συναρτήσεως τοῦ χρήματος, δηλαδὴ τῆς

$$M = f[(\psi)\ (\pi_1 \pi_2)\ (M' - E)\ (v_2)],$$

πρέπει ἡ συνάρτησις αὐτὴ νὰ κριθῇ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῶν νόμων τῶν πιθανοτήτων (probabilités). Ἡ πιθανότης εἶναι συνυφασμένη μὲ τὴν ἀναγκαιότητα τοῦ ἀντικειμένου καὶ μὲ τὸ ὕψος τοῦ εἰσοδήματος. Οἱ νόμοι τῶν πιθανοτήτων εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθοῦν ἐν προκειμένῳ, διότι τὰ μέσα πληρωμῆς παρουσιάζουν μάζαν ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς συχνῆς πολλαπλότητος καὶ ὁμοιομορφίας, κατὰ κατηγορίας καὶ μάλιστα ἡ μάζα τῶν φαινομένων εἶναι γνωστὴ καὶ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ καὶ νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ ὁ κλασματικὸς καθορισμὸς τῆς πιθανότητος, δηλαδὴ ἡ πιθανότης θὰ εἶναι κατὰ κλασματικὸν τρόπον καὶ ὡς ὅριον, τουτέστιν ἡ πιθανότης τῆς διαθέσεως τοῦ ὡρισμένου ποσοῦ χρήματος ὡς καὶ τῆς ὡρισμένης ταχύτητος τῆς κυκλοφορίας του θὰ εἶναι τὸ ὅριον (Lim) τοῦ κλάσματος: $\frac{\mu}{R}$ ὅπου R = τὸ εἰσόδημα εἰς ἀριθμὸν χρηματικῶν μονάδων, συνδυασμένος μὲ τὴν δυνατότητα νὰ διατεθῇ ὁλόκληρον διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ προϊόντος (B) καὶ μ = ὁ ἀριθμὸς τῶν χρηματικῶν μονάδων, συνδυασμένος μὲ ὅλας τὰς εὐνοϊκὰς συνθήκας νὰ διατεθοῦν αἱ ὡρισμέναι μονάδες χρήματος ἐκ τοῦ εἰσοδήματος R διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ προϊόντος (B). Τοῦτο, ἀναλυόμενον, σημαίνει ὅτι ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῆς πιθανότητος διαθέσεως ὁλοκλήρου τοῦ εἰσοδήματος τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον ($+\infty$), (πιθανότης P), τότε πιθανότης $P = \lim \frac{\mu}{R}$.

Καὶ πράγματι ἐκ τῆς κοινῆς πείρας καὶ τῆς σταθμίσεως τῆς ἀναγκαιότητος τοῦ προϊόντος (B) εἰς ὡρισμένον χρόνον καὶ εἰς ὡρισμένον σημεῖον τοῦ χώρου (ὡρισμένον τόπον), εἶναι δυνατὸν νὰ σταθμίσωμεν — ἐν σχέσει πρὸς τὸ ὕψος τοῦ εἰσοδήματος — τὴν πιθανότητα διαθέσεως ὡρισμένου ποσοστοῦ τούτου (εἰς χρῆμα) διὰ τὸ ὡρισμένον προϊὸν (B).

Σημειώνω ἐπίσης ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ὅπως καὶ εἰς πλείστας περιπτώσεις οἰκονομικῶν φαινομένων, πρόκειται περὶ κυβευτικῆς (τυχαίας) μεταβλητῆς (variable aleatoire), δηλαδὴ περὶ μεταβλητῆς ἡ ὁποία εἶναι ἐπιδεκτικὴ νὰ λάβῃ διαφόρους τιμάς, ὑπακούουσα εἰς ἕνα νόμον καθωρισμένης πιθανότητος.

Εἰς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα ἡ ἐμπειρία ἐκ τῶν στατιστικῶν δεδομένων, δηλονότι ἐκ πολλῶν περιπτώσεων συμβάντων σχετικῶν, λόγῳ χάριν, ἐπὶ χιλίων περιπτώσεων, συμβαίνει ὁμοιομόρφως τὸ γεγονὸς τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει. Οὕτως εἰς τὰς χιλίας περιπτώσεις μηνιαίου εἰσοδήματος δραχμῶν χιλίων, διατίθενται ἐκ τούτου δραχμαὶ τετρακόσιαι διὰ τὴν ἀγορὰν κρέατος καὶ ἡ πιθανότης εἶναι 400 : 1000 = 4 %

Ἡ συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως (T) ἑνὸς προϊόντος

Ἐτερμάτισα τὴν ἔρευναν καὶ τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν τῶν διαφόρων παραγόντων τοῦ δεξιοῦ (δευτέρου) σκέλους τῆς συναρτησιακῆς σχέσεως τῆς τιμῆς πωλήσεως ἑνὸς οἱουδήποτε προϊόντος (B), οἱ ὁποῖοι παράγοντες αποτελοῦν καὶ τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τῆς συναρτήσεως ταύτης καὶ ἤδη προχωρῶ εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν τῆς συναρτήσεως τῆς τιμῆς πωλήσεως (Τ) ἐν τῷ συνόλῳ της, ὅπως τὴν καθώρισα τελικῶς. Καὶ κατ' ἀρχὰς παρατηρῶ ὅτι εἰς τὴν ἐπιστήμην — καθ' ὅσον γνωρίζω — δὲν ἐδόθησαν μαθηματικοὶ τύποι καὶ ἰδίως τύποι συναρτήσεως διὰ τὴν τιμὴν πωλήσεως ἑνὸς προϊόντος. Ὅμως καὶ ἐὰν ἐδόθησαν, ὅπως ἡ συνάρτησις :

$$P = f(D) \text{ ὅπου } P = \text{τιμή},\ D = \text{ζήτησις}$$

ὅλαι αἱ συναρτήσεις αὐταὶ εἶναι τελείως ἐλλιπεῖς καὶ χωρὶς νὰ συμπεριλαμβάνουν ὅλους τοὺς παράγοντας (ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς) μιᾶς πλήρους συναρτήσεως διὰ τὴν τιμὴν πωλήσεως.

Ἡ μόνη συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως ἑνὸς προϊόντος, ἡ ὁποία εἶναι σχετικῶς πλήρης καὶ πλήρης μόνον ὅταν συμπληρωθῇ διὰ τῆς προσθέσεως καὶ τῆς προσφορᾶς, καθ' ὅσον γνωρίζω μαζὶ μὲ τὰς ὑπὸ τοῦ G. Tintner δοθείσας τοιαύτας, εἶναι ἡ ὑπὸ τοῦ K. A. Fox καταστρωθεῖσα διὰ τὴν ἀγορὰν μεγάλων ζώων (κτηνῶν) εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας καὶ διὰ τὴν περίοδον 1921–1941 καὶ εἶναι διὰ μὲν τὴν ζήτησιν

$$P = A_{qD} - 1{,}14\ y^{0{,}9}$$

καὶ ἡ συνάρτησις διὰ τὴν προσφορὰν

$$q_o = B_p - {}^{0{,}07}\ Z^{\ 0{,}77}$$

ὅπου p = ἡ τιμή, y = τὸ εἰσόδημα τὸ διαθέσιμον, qD = ζητουμένη ποσότης, q_o = ἡ προσφερομένη ποσότης, Z = ἡ παραγωγὴ τῶν μεγάλων ζώων (κτηνῶν) καὶ A καὶ B δύο σταθεραί. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ πρώτη εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς τιμῆς ἐν σχέσει πρὸς τὴν ζήτησιν ἐνῷ ἡ δευτέρα ἐξίσωσις εἶναι ἐξίσωσις τῆς προσφορᾶς καὶ εἰς τὸ δεύτερον σκέλος τῆς ἐξισώσεως ἀναφέρεται καὶ ἡ τιμή. Εἶναι ὅμως δυνατὸν ἐκ ταύτης νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν (συνάρτησιν) ἐν σχέσει πρὸς τὴν τιμήν. Ἡ συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως ἐν σχέσει πρὸς τὴν προσφορὰν θὰ εἶναι χωρὶς δυνάμεις

$$P = Bq_o Z$$

Τώρα ἐὰν προσθέσω τὰς δύο συναρτήσεις κατὰ σκέλη θὰ ἔχω μίαν ἐξίσωσιν ἢ μᾶλλον συνάρτησιν τῆς τιμῆς πωλήσεως τοῦ προϊόντος τὴν

$$P = f(Aq_D{}^{-1{,}14},\ y^{0{,}9},\ Bq_o,\ Z)$$

Καὶ ἐὰν τὸ Z = παραγωγή, τὸ ἀντικαταστήσω μὲ τὴν συνάρτησιν τῶν Gobb - Douglas (Y) $Z = \lambda K^{\alpha}, N^{\ 1-\alpha} = Pr$ θὰ ἔχω τελικῶς καὶ

$$P = f(A_{qD},\ y,\ Bq_o,\ \lambda K^{\alpha},\ N^{1-\alpha}).$$

Ἡ συνολικὴ αὐτὴ συνάρτησις τοῦ K. A. Fox ὅπως τὴν συνεπλήρωσα εἶναι — νομίζω — ἡ πλέον ἐνδιαφέρουσα καὶ ἡ περισσότερον ἐγγίζουσα τὴν πραγματικότητα καὶ σχετικῶς ἴσως ἡ μόνη ἡ ὁποία πλησιάζει πρὸς τὴν συνάρτησιν τῆς τιμῆς πωλήσεως τὴν ὁποίαν διετύπωσα πρωτοτύπως τὸ 1952.

Εἶναι ὅμως ἡ συνάρτησις τοῦ Fox ἐλλιπὴς κατὰ πολλὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα ἔπρεπε νὰ ἀποτελοῦν τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς μιᾶς πλήρους καὶ ἀρτίας συναρτήσεως τῆς τιμῆς πωλήσεως, ὅπως ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ τῶν μέσων πληρωμῆς (χρήματος). Εἶναι καταφανὲς ὅτι καὶ ὁ K. A. Fox δὲν ἠθέλησε νὰ δόσῃ μίαν πλήρη συνάρτησιν τῆς τιμῆς πωλήσεως διὰ τὰ μεγάλα ζῶα (κτήνη) καὶ ἐνδιεφέρθη κυρίως νὰ δώσῃ κεχωρισμένως τὰς συναρτήσεις τῆς προσφορᾶς καὶ τῆς ζητήσεως.

Ἐπίσης καὶ ὁ G. Tintner δίδει τὰς δύο συναρτήσεις τῆς ζητήσεως καὶ τῆς προσφορᾶς τοῦ χοιρινοῦ κρέατος εἰς τὴν Αὐστρίαν διὰ τὴν περίοδον 1948 - 1955 ὡς ἑξῆς :

$$Q_D = 75.6p^{-1.02} \qquad Q_o = 6{,}43\ p^{0.74}$$

ὅπου Q_D = ζητουμένη ποσότης, Q_o = προσφερομένη ποσότης, P = τιμή. Καὶ αἱ δύο συναρτήσεις εἶναι ἐλαττωματικαὶ καὶ θέτουν τὰ ζητήματα ἀντιστρόφως, διότι ὅπως ἀνέπτυξα καὶ προηγουμένως καὶ ἡ ζητουμένη ποσότης καὶ ἡ προσφερομένη ποσότης δὲν εἶναι συναρτήσεις τῆς τιμῆς πωλήσεώς των, ἀλλὰ τοὐναντίον ἡ τιμὴ πωλήσεως εἶναι συνάρτησις τούτων καὶ πρέπει κατὰ τὴν γνώμην μου νὰ γραφοῦν ὀρθῶς χωρὶς τοὺς συντελεστὰς (σταθερὰς) ὡς καὶ τὰς δυνάμεις

$$P = Q_D, \qquad P = Q_o$$

Ἐν πάσῃ περιπτώσει ἐπαναλαμβάνω ὅτι — καθ' ὅσον γνωρίζω — μία πλήρης συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως δὲν ἐδόθη μέχρι σήμερον. Καὶ ἤδη προχωρῶ εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν τῆς συναρτήσεως τῆς τιμῆς πωλήσεως ὅπως τώρα θὰ τὴν διατυπώσω τελικῶς μὲ τὰς συμπληρώσεις καὶ τὰς τροποποιήσεις τὰς ὁποίας ἐπιφέρω ὥστε νὰ εἶναι πλήρης ἐν τῷ συνόλῳ της.

Ἐν πρώτοις παρατηρῶ καὶ πρὸ τῆς πλήρους καταστρώσεως τῆς συναρτήσεως, ὅτι ἡ παράθεσις τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τοῦ δεξιοῦ σκέλους τῆς συναρτησιακῆς σχέσεως δὲν πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς μαθηματικὸν γινόμενον ὅλων τῶν παραγόντων, δηλαδή, ὡς Π. Τοῦτο θὰ ἦτο σοβαρὸν σφάλμα. Τὸ δεξιὸν (δεύτερον) σκέλος τῆς συναρτήσεως πρέπει νὰ ἐννοηθῇ ὡς μέση τιμὴ (μέσος ὅρος) καὶ ὡς ἄθροισμα Σ ὅλων τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ὡς καὶ τῆς σταθερᾶς (Γ), δηλαδὴ ὡς ἄθροισμα ὅλων τῶν παραγόντων, διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παραγόντων.

Κατὰ ταῦτα ἕνας παράγων εἶναι ἡ χρησιμότης (X) τοῦ προϊόντος εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ συνυπολογισθῇ καὶ ὁ αστάθμητος ποιοτικός, ψυχολογικὸς παράγων (Ψ), δεύτερος παράγων εἶναι ἡ ἐλαστικότης (e) τοῦ προϊόντος, τρίτος παράγων εἶναι τὸ διατιθέμενον εἰσόδημα διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ προϊόντος μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς ἐναποταμιεύσεως (R — E), τέταρτος παράγων εἶναι καὶ πάλιν τὸ εἰσόδημα (R) ἐπὶ τὴν ἐλαστικότητα τοῦ προϊόντος (eB). Τὸ μέσον κόστος (km) πρέπει νὰ ἀπαλειφθῇ ἀπὸ τὴν συνάρτησιν τῆς τιμῆς πωλήσεως, διότι, ὅπως ἐξέθεσα προηγουμένως, περιλαμβάνεται εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τῆς παραγωγῆς (Pr). Πέμπτος παράγων εἶναι ἡ σταθερὰ (Γ) διότι τὰ ἔξοδα ταῦτα, (τὰ ὁποῖα εἶναι συνήθως πάγια) δὲν μεταβάλλονται καὶ ἔχουν ὡρισμένην τιμὴν καὶ ἑπομένως δὲν συνιστοῦν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τῆς συναρτήσεως. Ὁ Ψυχολογικὸς παράγων (Ψ_2) ἐπὶ τῆς προσφορᾶς εἶναι μαθηματικῶς μὴ σταθμητός, ὅπως προηγουμένως ἀνέπτυξα καὶ οὔτε καὶ μὲ τοὺς νόμους τῆς πιθανότητος εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ, παρὰ μόνον τοπολογικῶς. Ὁ Ψυχολογικὸς παράγων Ψ θὰ συνυπολογισθῇ ὡς ἐπηρεάζων τὰ στοιχεῖα τῆς παραγωγῆς. Ἕκτος παράγων εἶναι ἡ παραγωγὴ τοῦ προϊόντος μαζὶ μὲ τὴν ἐναποθήκευσιν (Pr + S) καὶ τέλος ἕβδομος παράγων εἶναι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ τῶν μέσων πληρωμῆς, δηλαδὴ τοῦ νομίσματος (ἀγοραστικὴ δύναμις) (M) ἐπὶ τὴν ταχύτητα τῆς κυκλοφορίας του (V_2). Κατὰ συνέπειαν τούτων τὸ ἄθροισμα τῶν ἑκάστοτε τιμῶν ὅλων τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν πρέπει νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἑπτὰ (7), ὅσοι εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ δευτέρου σκέλους τῆς συναρτήσεως (T) [Περὶ τῆς μέσης τιμᾶς πρβλ. Ch. Pisot - M. Zamansky, Mathématiques Générales, Algebre–Analyse (1963), σελ. 277 ἑπ.].

Καὶ μετὰ ταῦτα δίδω πλέον πλήρη, ὅπως τὴν συνεπλήρωσα καὶ τὴν ἐτροποποίησα, ἐλαφρῶς βεβαίως, τὴν συνάρτησιν τῆς τιμῆς πωλήσεως ἑνὸς προϊόντος, τὴν ὁποίαν τὸ πρῶτον διετύπωσα τὸ 1952 καὶ ἐδημοσιεύθη τὸ 1957. [Πρβλ. Γ. Ι. Τράμπου, Ἡ λειτουργία τοῦ μηχανισμοῦ τῶν τιμῶν (1957), σελ. 249].

Ἡ συνάρτησις ὅπως τελικῶς τὴν διατυπώνω εἶναι :

$$T = \frac{\sum_{1}^{1} f\pi\left[(x\psi i) + (eB) + \pi(R-E) + (ReB) + (\Gamma) + \pi(\psi Pr + S) + \pi_1 \pi_2 \psi_2 (M' - E)\, Y \right]}{7}$$

Προχωρῶ ἤδη εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν τῆς συναρτήσεως ταύτης ἐν τῷ συνόλῳ της. Ἡ συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως (T) νοεῖται ὅτι λαμβάνει εἰς τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς της τιμὰς μόνον ἐντὸς τοῦ χρόνου καὶ τοῦ χώρου (τόπου), δηλαδὴ ἑκάστη τιμή της ἀντιστοιχεῖ μόνον εἰς ὡρισμένην στιγμὴν τοῦ χρόνου καὶ εἰς ὡρισμένον σημεῖον τοῦ χώρου, δηλαδὴ εἰς ὡρισμένον τόπον.

Ἡ συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως (T) ὡς πρὸς τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς της, τὰς εὑρισκομένας εἰς τὸ δεύτερον σκέλος της, εἶναι μία συνάρτησις σύνθετος, δηλαδὴ συνάρτησις συναρτήσεων μὲ πολλὰς μεταβλητὰς καὶ πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς τοιαύτη, διότι ἑκάστη ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι καὶ ἐκείνη συνάρτησις ἄλλων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, μὴ διατυπουμένων ὡς παραγόντων εἰς τὴν συνάρτησιν (T) [Pisot - Zamansky, Mathématiques Générales (1963), σελ. 16].

Εἰς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα ὁ καθολικὸς κανὼν εἶναι ὅτι κάθε οἰκονομικὸν φαινόμενον εἶναι ἀποτέλεσμα πολλῶν ἄλλων οἰκονομικῶν καὶ κοινωνικῶν φαινομένων καὶ ταῦτα εἶναι καὶ πάλιν τὸ ἀποτέλεσμα ἄλλων τοιούτων καὶ ἡ ἅλυσσος αὐτὴ τῶν φαινομένων ὑφίσταται ἐπ' ἄπειρον. Τὸ ἴδιον συμβαίσει καὶ εἰς τὴν Φύσιν, ὥστε ἡ συνάρτησις ἐννοιακῶς εἶναι ἕνα γεγονὸς ὄχι μόνον μαθηματικόν, ἀλλὰ καὶ Φυσικὸν καὶ Κοινωνικόν. Ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητή, δηλαδὴ ἡ τιμὴ πωλήσεως (Τ) τοῦ προϊόντος λαμβάνει τιμὰς (ὑπὸ τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν) ἐκ τῶν μαθηματικῶν συνόλων (ensembles, Menge) τῶν ἀριθμῶν τὰ ὁποῖα σύνολα εἶναι καὶ τὰ πεδία μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως. Τὰ μαθηματικὰ ταῦτα σύνολα εἶναι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, εἰς τὸ ὁποῖον δὲν συμπεριλαμβάνεται τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον διὰ τὴν πρόσθεσιν δηλαδὴ τὸ μηδέν, διέτι $T > 0$, ὡς καὶ ὅλαι αἱ τιμαὶ τῶν παραγόντων τοῦ δευτέρου σκέλους, τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὡς καὶ τῶν ρητῶν, ὅλων μεγαλυτέρων τοῦ μηδενός. Ἀποκλείεται τὸ σύνολον τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, διότι μία τιμὴ πωλήσεως ἑνὸς προϊόντος ἀποκλείεται νὰ εἶναι ἀρνητικὴ (—), Ἐπίσης ἀποκλείεται ἡ τιμὴ πωλήσεως (Τ) νὰ λάβῃ τιμὴν ἐκ τοῦ συνόλου τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν (i, j) καὶ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $(\alpha + \iota\beta)$.

Ἐκ τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων δὲν εἶναι δυνατὸν ἡ τιμὴ πωλήσεως (Τ) νὰ εἶναι ἕνα δυώνυμον ἢ ἕνα πολυώνυμον (ὑπὸ τὴν ἀλγεβρικὴν ἔννοιαν).

Ἡ συνάρτησις (ἐξηρτημένη μεταβλητὴ) (Τ) εἶναι ἡ ἐφαρμογὴ (application) τῶν στοιχείων (éléments, points) τῶν συνόλων, ἐντὸς τῶν ὁποίων κινοῦνται εἴτε πρὸς τὰ ἄνω εἴτε πρὸς τὰ κάτω (δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ) αἱ τιμαὶ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τοῦ δευτέρου σκέλους τῆς συναρτήσεως. Πρέπει νὰ παρατηρήσω ὅτι καὶ ὅλαι αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ τοῦ δευτέρου σκέλους τῆς συναρτησιακῆς σχέσεως (Τ), κινοῦνται ἑκάστη ἐντὸς τοῦ ἰδίου της συνόλου πραγμάτων (λόγου χάριν τῶν ὑλικῶν κατασκευῆς τοῦ προϊόντος), τὸ ὁποῖον ἴδιον σύνολον προφανῶς ἀποτελεῖ τὸν μαθηματικῶς καλούμενον διανυσματικὸν χῶρον (espace vectoriel), διότι συντρέχουν ὅλα τὰ ἀπαιτούμενα γεγονότα, διὰ νὰ χαρακτηρισθοῦν αἱ ὁμάδες (groupes) ὡς διανυσματικοὶ χῶροι [Πρβλ. Ch. Pisot - M. Zamansky, Mathématiques Générales (1963), σελ. 48 ἑπ.], καὶ ἔχουν ἀνταπόκρισιν καὶ φαρμογὴν καὶ εἰκόνα εἰς τὰ ἀριθμητικὰ σύνολα, διότι κάθε πραγματικὸν γεγονὸς συμβαῖνον εἰς τὸ σύνολον τοῦ καθορισμοῦ (ensemble de definition) ἔχει ἐφαρμογὴν εἰς τὸ σύνολον τῶν τιμῶν. (Ensemble de valeurs). Τοιουτοτρόπως εἶναι δυνατὸν κατὰ ἕνα τρόπον νὰ εὕρῃ ἐφαρμογὴν καὶ ἐν προκειμένῳ ἡ μαθηματικὴ ἔννοια τοῦ διανυσματικοῦ χώρου. Κάθε ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ τῆς συναρτήσεως (Τ) λαμβάνει τιμὰς μόνον ἐντὸς ἑνὸς διαστήματος (Intervalle) (β,γ), καθοριζομένου ἀπὸ τὰς συνθήκας αἱ ὁποῖαι ἑκάστοτε ἐπικρατοῦν. Ὅλαι αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ καὶ ἡ συνάρτησις (Τ) λαμβάνουν τιμὰς — ὅπως ἐξέθεσα —

ἐντὸς τοῦ διαστήματος (β,γ) καὶ ἔχουν μίαν μεγίστην (maximum) τιμὴν τὴν ὁποίαν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπερβοῦν καὶ μίαν ἐλαχίστην τιμὴν (minimum) κάτω τῆς ὁποίας δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κατέλθουν. Ἐὰν τὸ διάστημα ἐντὸς τοῦ ὁποίου κινοῦνται αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ εἶναι (β,γ) τότε τὸ β εἶναι τὸ (minimum) καὶ τὸ γ τὸ μέγιστον (maximum). Ὅλαι αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ τῆς συναρτήσεως (T) καθὼς καὶ ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητὴ (T) εἶναι συνεχεῖς ὑπὸ τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν ἐντὸς τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου. (Πρβλ. Π. Ν. Μάγειρα, Τριγωνομετρικὰ Θέματα (1963) σελ. 37].

Εἶναι καταφανὲς ὅτι τὸ ἐλάχιστον (τὸ β) εἰς τὸ διάστημα (β,γ) δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδὲν (0) καὶ πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ πωλήσεως (T) καθὼς καὶ κάθε τιμὴ ἑκάστης τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν $\rangle$ 0, διότι τιμὴ πωλήσεως ἴση πρὸς τὸ μηδὲν $(T) = 0$ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξῃ εἰς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα, πολὺ δὲ περισσότερον ἀρνητική. Ἀλλὰ καὶ τὸ μέγιστον (max.) τοῦ διαστήματος (intervalle) δὲν εἶναι ἀπεριόριστον, δηλονότι ἡ τιμὴ εἰς νόμισμα τῆς συναρτήσεως (T) δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον $(+\infty)$, διότι καὶ αἱ τιμαὶ ἔχουν φραγμὸν πρὸς τὰ ἄνω καὶ ὁ φραγμὸς τῶν τιμῶν, δηλαδὴ τὸ μαθηματικὸν μέγιστον τῆς συναρτήσεως συνίσταται, νομίζω, εἰς τὸ ὕψος τοῦ μέρους τοῦ συνολικοῦ εἰσοδήματος (revenu), τὸ ὁποῖον εἶναι δυνατὸν νὰ διατεθῇ διὰ τὴν συνολικῶς προσφερομένην καὶ κατὰ μονάδα τιμωμένην ποσότητα τοῦ προϊόντος (B). Καὶ πράγματι ἡ τιμὴ πωλήσεως T δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τείνῃ κατὰ τὴν ἄνοδόν της πρὸς τὸ ἄπειρον $(+\infty)$ δι' οἱονδήποτε προϊόν, διότι καὶ διὰ τὸ πλέον ἀναγκαῖον καὶ διὰ τὸ πλέον πολυτελὲς προϊὸν καὶ διὰ τὸ πλέον χρήσιμον καὶ διὰ τὸ πλέον μὴ χρήσιμον, ὑπάρχει μία ὁριακὴ ζήτησις ὑπὸ τοῦ ἀτόμου ἢ τῆς ἐπιχειρήσεως ἢ καὶ τοῦ συνόλου τῶν ἀτόμων καὶ τῶν ἐπιχειρήσεων καὶ τὸ ὅριον τῆς ζητήσεως τοῦτο ρυθμίζεται ὑπὸ τῆς χρησιμότητος τοῦ προϊόντος ἐν συνδυασμῷ ὅμως πάντοτε πρὸς τὸ μέγιστον, πρὸς τὸ ἀνώτατον ὕψος τὸ ὁποῖον δύναται νὰ διαθέσῃ ἐκ τοῦ εἰσοδήματός του (R) τὸ ἄτομον ἢ ἡ ἐπιχείρησις ἢ τὸ σύνολον τούτων διὰ τὴν ἀπόκτησιν τοῦ προϊόντος. Δηλαδὴ διὰ νὰ διατυπώσω ταῦτα μαθηματικῶς, ἡ χρησιμότης τοῦ προϊόντος καὶ τὸ μέρος τοῦ εἰσοδήματος τὸ ὁποῖον δύναται νὰ διατεθῇ διὰ τὸ προϊὸν συνιστοῦν μίαν συνεμταβλητὴν (covariace) ὑπὸ τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν.

Ὅπως ἐξέθεσα ἡ συνάρτησις (T) εἶναι συνεχὴς ἐντὸς τοῦ διαστήματος τὸ ὁποῖον ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ποὺ διεσαφήνισα, δηλαδὴ μεταξὺ τοῦ β (min.) καὶ γ (max.), ὅταν τὸ β καὶ τὸ γ εἶναι στοιχεῖα (éléments) τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν, δηλαδὴ ἀριθμοὶ ἐκφραζόμενοι εἰς νόμισμα καὶ τότε $\beta \leqq T \leqq \gamma$.

[Πρβλ. Π. Ν. Μάγειρα, Τριγωνομετρικὰ θέματα (1963), σελ. 28 καὶ Pisot – Zamansky, op. cit., σελ. 239]. Καὶ ἡ συνάρτησις εἶναι ἀριθμητικὴ (numerique), διότι τὸ διάστημα μεταξὺ $\beta \in$ τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν καὶ $\gamma \in$ τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμητικόν. Συνεχὴς συνάρτησις σημαίνει ὅτι, οἱαδήποτε μεταβολὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τῆς συναρτήσεως (Τ) ἐντὸς τοῦ διαστήματος (β,γ), ὅσον δήποτε μικρὰ καὶ ἐὰν εἶναι ἡ μεταβολή, ἔχει μίαν καὶ μόνον μίαν ἀντίστοιχον μεταβολὴν τῆς Τ ὅσον δήποτε μικρὰν ἐντὸς τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν (ἀκεραίων, κλασματικῶν, πραγματικῶν) οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ προϊόντος εἰς νόμισμα ὡς καὶ ὅτι ἡ μεταβολὴ δύναται νὰ εἶναι ὁσονδήποτε μικρά."

Ἡ συνάρτησις (Τ) εἶναι μονότιμος ἢ μονοσήμαντος, διότι εἰς μίαν τιμὴν μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἢ εἰς μίαν τιμὴν τῶν μεταβολῶν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἐν συνδυασμῷ, ἀντιστοιχεῖ καὶ ἔχει ἐφαρμογὴν μία μόνον τιμὴ τοῦ (Τ).

Ἡ συνάρτησις Τ, δύναται νὰ εἶναι συνεχὴς πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ συνεχὴς πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἑνὸς σημείου δηλαδὴ μιᾶς τιμῆς πάντοτε ἐντὸς τοῦ διαστήματος (β,γ), ἀναλόγως ἐὰν ἡ τιμὴ πωλήσεως αὐξάνῃ ἢ μειοῦται ὁπότε καὶ εἶναι φθίνουσα. Τὸ διάστημα (β,γ) εἶναι ἐμφανῶς κλειστόν, διότι ἔχει min. τὸ β καὶ max. τὸ γ [Pisot - Zamansky, Mathématiques Générales (1963), σελ. 249 ἐπ.].

Περιττὸν εἶναι νὰ προσθέσω ὅτι ἡ συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως(Τ) ὅταν ἑκάστοτε λαμβάνῃ καθωρισμένην (σταθερὰν) τιμὴν εἶναι μία ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις, διότι ὡς ἐξίσωσις ἔχει ὡς μηδὲν (ρίζαν ἢ λύσιν) ἕνα ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν καὶ μάλιστα θετικὸν τοιοῦτον.

Ὅπως ἐξέθεσα καὶ προηγουμένως ἡ συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως (Τ) εἶναι συνάρτησις ὄχι μόνον μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἀλλὰ πολλῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν καὶ μάλιστα ἐξ (6) μεταβλητῶν. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ἔχει μεγίστην σημασίαν καὶ ὡς πρὸς τὴν παραγώγισιν τῆς συναρτήσεως καὶ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν καὶ τὴν κίνησιν ἑκάστης τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τῆς συναρτήσεως, ἐν σχέσει πρὸς τὰς λοιπὰς μεταβλητὰς τῆς συναρτήσεως καὶ ἰδίως ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἐξηρτημένην μεταβλητὴν (Τ).

Παρατηρῶ, ἐν προκειμένῳ ὅτι εἶναι δυνατὸν ἡ μία ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ ἢ καὶ πολλαὶ τούτων νὰ εἶναι συνεχεῖς πρὸς τὰ δεξιὰ καθ' ὃν χρόνον ἄλλη ἢ ἄλλαι ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ νὰ κινοῦνται πρὸς τὰ ἀριστερά, δηλαδὴ νὰ εἶναι φθίνουσαι. Δηλονότι εἶναι δυνατὸν ὅταν μία ἢ μερικαὶ ἐκ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν εἶναι αὔξουσαι, ταυτοχρόνως μία ἢ πολλαὶ ἄλλαι μεταβληταὶ νὰ εἶναι φθίνουσαι καὶ τοῦτο συμβαίνει εἰς τὴν πραγματικότητα.

Πρέπει προηγουμένως νὰ καθορίσω ἕνα ὡρισμένον γεγονὸς τὸ ὁποῖον ἀφορᾷ τὸ σύνολον τῆς συναρτήσεως (Τ) καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει μεγίστην σημασίαν, νομίζω, διὰ τὴν παραγώγισιν καὶ διὰ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως.

Ὅπως ἤδη διετύπωσα τὴν συνάρτησιν τῆς τιμῆς πωλήσεως (Τ) φαίνεται ὅτι ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ δεξιοῦ (δευτέρου) σκέλους τῆς συναρτησιακῆς σχέσεως — πλὴν ἑνὸς δηλαδὴ τοῦ (Γ) ὁ ὁποῖος εἶναι σταθερά —, δηλαδὴ τὸ Χ, (R — E), τὸ Pr καὶ λοιπὰ εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ καθ' ἑαυτὰς χωρὶς νὰ ἔχουν συντελεστὰς ἢ δυνάμεις εἰς τὰς ὁποίας νὰ ὑψωθοῦν. Τοῦτο ὅμως τὸ ἔπραξα πρὸς ἁπλούστευσιν τῆς συναρτήσεως καὶ διὰ τὴν γενικότητα ταύτης καὶ δὲν ἀνταποκρίνεται πρὸς τὴν πραγματικότητα καὶ τὸ ἀληθὲς εἶναι ὅτι ἑκάστη τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ἔχει παραμέτρους ὡς συντελεστὰς καὶ ὡς δυνάμεις καὶ τὸ γεγονὸς τοῦτο διαδραματίζει σπουδαῖον ρόλον, ἐν σχέσει πρὸς τὰς μαθηματικὰς συνεπείας. Αἱ παράμετροι αὐταὶ λαμβάνουν διαφόρους ἑκάστοτε τιμὰς καὶ ἀναλόγως ἑκάστου προϊόντος ὡς καὶ ἀναλόγως τοῦ χρόνου καὶ τοῦ τόπου. Οἱ συντελεσταὶ — ἀναλόγως τοῦ χρόνου καὶ τοῦ τόπου — καὶ δι' ἕκαστον προϊὸν ἔχουν σταθερὰς τιμάς, ὅπως ἐπὶ παραδείγματι τὰ π, π_1 π_2, ἔχουν σταθερὰς ἑκάστοτε τιμάς. Ἐπὶ παραδείγματι ἡ προσφερομένη ἑκάστοτε ποσότης ἐκ τῆς παραγωγῆς δηλαδὴ τὸ $\pi(\Psi Pr)$ ὡς πρὸς τὸν συντελεστὴν π λαμβάνει ἑκάστοτε σταθερὰν τιμὴν καὶ ὁ ἄγνωστος καὶ ἡ μεταβλητὴ εἶναι τὸ Pr, δηλαδὴ τὸ σύνολον τῆς παραγωγῆς τοῦ ὡρισμένου προϊόντος (B). Τὸ π λοιπὸν εἶναι συντελεστής, ὁ ὁποῖος ἔχει σχετικὴν σταθερὰν τιμὴν ὡς λ.χ. $\frac{4}{10^4}$. Ταῦτα ἔχουν μεγάλην σημασίαν ὅταν πρόκειται νὰ ἐρευνηθῇ καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως, διότι ἡ παράγωγος τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως τοῦ Pr, ὅπου τὸ π σταθερά, ἔχει σταθερὰν τιμὴν εἰς ὁλόκληρον τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τοῦ Pr, δηλαδὴ τὸ διάστημα (β,γ) [$\beta < Pr < \gamma$, διότι $Pr = \lambda K^{\alpha} N^{1-\alpha}$ καὶ $\beta < K,N < \gamma$ καὶ τότε ἡ παράγωγος τῆς πPr ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν τοῦ Pr δηλαδὴ μὲ τὸ π. Τοῦτο συμβαίνει ἀναλόγως καὶ μὲ τὰς ἄλλας ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς, διὰ τὴν παραγώγισίν των. Ἐν πάσῃ περιπτώσει κανὼν εἶναι ὅτι μία πραγματικὴ συνεχὴς συνάρτησις εἶναι παραγωγίσιμος εἰς ἕνα σημεῖον τοῦ διαστήματος ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν της, ἐὰν ἔχῃ ἕνα ὅριον ἐντὸς τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τὸ ὅριον τοῦτο εἶναι ἡ παράγωγος [Pisot – Zamansky, op.cit. (1963) σελ. 282 ἑπ.].

Ἐτερμάτισα εἰς γενικὰς μόνον γραμμὰς τὴν ἀπὸ μαθηματικῆς ἀπόψεως ἔρευναν τῆς συναρτήσεως τῆς τιμῆς πωλήσεως (T).

Τελικῶς θὰ τονίσω καὶ πάλιν ὅτι ἡ μαθηματικὴ ἔρευνα τῆς συναρτήσεως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κριθῇ ὑπὸ τὴν αὐστηρὰν μαθηματικὴν κρίσιν, διότι καὶ ἡ συνάρτησις τῆς τιμῆς πωλήσεως (T) ἐμπίπτει κάπως ὡς φαινόμενον οἰκονομικὸν εἰς τὰ ὅρια τῶν πιθανοτήτων.

Τὰ μαθηματικὰ διὰ τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας. Ἡ ἔννοια μαθηματικῶν.

Τὰ μαθηματικὰ εἶναι γνωστὸν ὅτι εἶναι ἕνας λαμπρὸς καὶ ἐπιτυχὴς τρόπος ἐκφράσεως τῶν οἱωνδήποτε ἐννοιῶν καὶ συλλογισμῶν καὶ πιστεύω ὅτι γενικῶς εἶναι ὁ καλύτερος τρόπος ἐκφράσεως, διότι τὰ σύμβολα τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰ μαθηματικὰ καὶ ἐπὶ τῆς σημασίας τῶν ὁποίων εἶναι γενικῶς σύμφωνοι οἱ ἐπιστήμονες, ἐκφράζουν λογικὰς ἐννοίας καὶ προτάσεις.

Ὁ κατὰ λογικὸν τρόπον καὶ μάλιστα κατὰ τρόπον ἐπαληθευόμενον ὑπὸ τῆς πραγματικότητος, συνδυασμὸς τῶν διαφόρων συμβόλων, εἴτε ταῦτα εἶναι οἱ παντὸς εἴδους παραδεδεγμένοι ἀριθμοί, εἴτε γράμματα τῶν γνωστῶν εἰς ὅλους ἀλφαβήτων, εἴτε ἄλλαι συμβολικαὶ παραστάσεις, ἐπαναλαμβάνω ὁ συνδυασμὸς τῶν διαφόρων τούτων συμβόλων ἀποτελεῖ προφανῶς μίαν εὐχερῆ ἀνάγνωσιν καὶ κατανόησιν τῶν λογικῶν προτάσεων.

Καὶ πράγματι εἶναι περισσότερον θετικὸν καὶ πρακτικὸν ἀντὶ τῆς διατυπώσεως τῶν συλλογισμῶν καὶ τῶν ἐννοιῶν διὰ λέξεων καὶ φράσεων καὶ γλωσσικῶν ἐκφράσεων, νὰ χρησιμοποιοῦνται τὰ μαθηματικὰ σύμβολα, αἱ ἐξισώσεις ἢ αἱ ἀνισότητες, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ πλέον σαφεῖς καὶ πλέον θετικαί, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἐπὶ τούτων θὰ ὑπάρχῃ μία σαφὴς συμφωνία ὡς πρὸς τὰς ἐννοίας τὰς ὁποίας περιέχουν καὶ ἐκφράζουν τὰ μαθηματικὰ σύμβολα.

Ὁ μέγας μαθηματικὸς Henri Poincaré ἐξέφρασε τὴν γνώμην ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἶναι καθαρὰ ἀποκυήματα τοῦ νοός, δηλαδὴ τῆς σκέψεως καὶ ὅτι ταῦτα ἔχουν συμβατικὸν χαρακτῆρα. Καὶ ἔχει ἐπίσης γίνει δεκτὸν εἰς τὴν Φιλοσοφίαν ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἶναι μία καθαρὰ γνῶσις ἐκ τῶν προτέρων (a priori) καὶ ὄχι μία ἐμπειρία, ὅτι δηλαδὴ τὰ μαθηματικὰ εἶναι μία γνῶσις ἡ ὁποία δὲν προέρχεται ἐκ τῆς παρατηρήσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ κόσμου διὰ τῆς ἐπαληθεύσεως τῶν μαθηματικῶν προτάσεων ὑπὸ τῆς ἀντικειμενικῆς πραγματικότητος.

Δὲν νομίζω ὅτι ἡ γνώμη τοῦ σοφοῦ γάλλου ἐπιστήμονος, ὅπως καὶ τῆς ἐπιστήμης τῆς φιλοσοφίας, εἶναι τελείως ὀρθή. Βεβαίως εἰς ὅλας τὰς ἐπιστήμας καὶ τὰς πλέον θετικάς, τίθενται πάντοτε ὡς βάσεις διάφοροι ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν ὁποίων γίνονται διάφοροι συλλογισμοὶ καὶ καταλήγουν εἰς διάφορα συμπεράσματα. Τὰ συλλογιστικὰ συμπεράσματα προφανῶς εἶναι λογικῶς ὀρθά, ἐφ' ὅσον ὅμως ἡ βάσις, δηλαδὴ ἡ ὑπόθεσις θὰ διαπιστωθῇ ὑπὸ τῆς πραγματικότητος. Ἐὰν ἡ βασικὴ ὑπόθεσις δὲν ἐπαληθευθῇ ὑπὸ τῆς πραγματικότητος, τότε — ἐν ἀναφορᾷ πρὸς τὴν πραγματικότητα — τὰ συμπεράσματα δὲν ἔχουν καμμίαν πρακτικὴν σημασίαν καὶ ἀξίαν καὶ πρόκειται περὶ παιχνιδίων τῆς σκέψεως.

Κατὰ τὴν γνώμην μου τὰ μαθηματικά, τόσον τὰ στοιχειώδη ὅσον καὶ τὰ ἀνώτερα, τὰ νεώτερα μαθηματικὰ (mathématiques modernes) εἶναι προϊόντα κατὰ βάσιν μιᾶς ἐμπειρίας (erfahrung) καὶ ἐπαληθεύονται ὑπὸ τῆς ἐξωτερικῆς πραγματικότητος καὶ τότε μόνον ἔχουν μίαν πραγματικὴν σημασίαν καὶ ἀξίαν διὰ τὴν ἐπιστήμην, ὡς ἐφηρμοσμένα μαθηματικά. Ἐὰν δὲν ἐπαληθεύωνται ὑπὸ τῆς πραγματικότητος τότε, ὅπως εἶπον, εἶναι καθαρὰ παίγνια τῆς σκέψεως καὶ ἔχουν θεολογικὴν σημασίαν.

Τὰ μαθηματικὰ δὲν ἔχουν μορφὴν μεταφυσικήν. Τουναντίον μάλιστα εἶναι μία ζῶσα δύναμις (lebentige kraft) καὶ ἀνταποκρίνονται καὶ ὑπηρετοῦν τὴν πραγματικότητα καὶ τὴν ζωὴν καὶ πλήρης ἀπόδειξις τούτου εἶναι ὅτι τὰ ἐφηρμοσμένα μαθηματικὰ καὶ ἰδίως τὰ ἀνώτερα μαθηματικά, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰς θετικὰς ἐπιστήμας καὶ εἰδικῶς εἰς τὴν Θεωρητικὴν Φυσικήν, τὴν Πυρηνικὴν Φυσικήν, τὴν Ὀπτικήν, τὴν Κλασικὴν Μηχανικήν, τὴν Κυματικὴν Μηχανικὴν τῶν κβαντικῶν Πεδίων, (Κβαντομηχανικὴν) κατὰ τὴν διατύπωσιν διαφόρων συλλογισμῶν καὶ ὑποθέσεων ὡς καὶ διὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς μὲ ἀνωτέρας μαθηματικὰς μεθόδους, ὅπως ὁ τανυστικὸς λογισμός, ὁδηγοῦν εἰς θετικὰ συμπεράσματα, τὰ πλεῖστα τῶν ὁποίων διαπιστοῦνται ὑπὸ τῶν παρατηρήσεων καὶ τῶν πειραμάτων. Καὶ εἶναι βέβαιον ὅτι οἱ μαθηματικοὶ συλλογισμοὶ ὁδηγοῦν τελικῶς τοὺς ἐπιστήμονας εἰς τὴν ἐξεύρεσιν τῆς πραγματικότητος εἰς τὴν Φύσιν, ἡ ὁποία πραγματικότης μετὰ ταῦτα — ἀργὰ ἢ γρήγορα — ἐπιβεβαιοῦται ὑπὸ τῶν πειραμάτων.

Καὶ αἱ ὑποθέσεις τὰς ὁποίας θέτουν οἱ μαθηματικοὶ ἔχουν μίαν μεγίστην σημασίαν, ὅπως καὶ αἱ ὑποθέσεις εἰς τὰς λοιπὰς καὶ τὰς θετικὰς ἐπιστήμας, διότι διὰ τῶν ὑποθέσεων προχωρεῖ ἡ ἐπιστήμη.

Ἡ θεωρία τοῦ Ernst Mach, ὅτι τὸν θετικισμὸν ἀποτελοῦν μόνον ὅλαι αἱ προτάσεις, ἁπλαῖ κατὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀντίληψιν, αἱ ὁποῖαι προτάσεις στηρίζονται εἰς τὴν παρατήρησιν καὶ τὸ πείραμα καὶ ὅτι μόνον τὰ δεδομένα αὐτὰ συναποτελοῦν τὴν θετικὴν ἐπιστήμην, εἶναι ἐν μέρει ἐσφαλμένη καὶ θέτει φραγμοὺς καὶ κατὰ τὴν γνώμην μου ὀρθότατα συνεπλήρωσε ταύτην ὁ A. Einstein, συμπληρώσας τὸν Mach διὰ τῆς προσθήκης ὅτι καὶ οἱ συλλογισμοὶ ὡς καὶ αἱ ὑποθέσεις αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀφετηρίαν τὴν παρατήρησιν καὶ τὸ πείραμα καὶ αἱ ὁποῖαι προχωροῦν καὶ πέραν τούτων δὲν εἶναι ἁπλῶς μεταφυσική, ἀλλὰ θετικὴ ἐπιστημονικὴ μέθοδος.

Καὶ πράγματι πρέπει νὰ παρατηρήσω ὅτι χωρὶς τὰς ὑποθέσεις αὐτάς, τὰς πέραν τῆς παρατηρήσεως καὶ τοῦ πειράματος, θὰ ἦτο φυσικῶς ἀδύνατον νὰ προχωρήσουν οἱ ἐπιστήμονες καὶ νὰ ἐξελιχθῇ ἡ ἐπιστήμη πρὸς τὴν πρόοδον, ἡ ὁποία πρόοδος τῆς ἐπιστήμης διὰ τῆς ἀποδοχῆς νέων προτάσεων, συχνὰ — πολὺ συχνὰ — ἐπαληθεύεται διὰ νέων παρατηρήσεων καὶ νέων πειραμάτων. Καὶ τότε ὅλαι αἱ προηγούμεναι νέαι ὑποθέσεις, γίνονται μετὰ ταῦτα ἐπιστημονικὰ δεδομένα. Καὶ πρὸς διαπίστωσιν τούτων ἀναφέρω τὰς περιπτώσεις τῶν ὑποθέσεων τῶν J. Maxwell καὶ L. De Broglie ὡς καὶ πολλῶν ἄλλων ἐπιστημόνων, αἱ ὁποῖαι ὑποθέσεις ἔπειτα ἀπὸ πολλὰ ἔτη ἐπεβεβαιώθησαν ὑπὸ τῶν πειραμάτων. Τὰ μαθηματικὰ εἶναι ἡ σχετικῶς περισσότερον θετικὴ ἐπιστήμη καὶ γνῶσις καὶ ὑποστηρίζω ὅτι εἶναι σχετικῶς θετικὴ ἐπιστήμη, διότι εἶναι ἀναμφισβήτητον ὅτι ἀκόμη καὶ εἰς τὰ μαθηματικὰ πολλάκις δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψουν δεδομένα καὶ συμπεράσματα ἀπολύτως θετικὰ καὶ βέβαια.

Καὶ πράγματι εἰς πολλὰ εἴδη μαθηματικῶν λογισμῶν γίνονται ὑποχωρήσεις καὶ ἀφαιρέσεις καὶ συμβιβασμοὶ οἱ ὁποῖοι κλονίζουν τὴν πίστιν εἰς τὸ περίφημον δόγμα τῆς μαθηματικῆς ἀκριβείας καὶ ὡς παραδείγματα θὰ ἀναφέρω ὅτι μεταξὺ τῶν ἄλλων πρῶτον ὁλόκληροι οἱ ὑπολογισμοὶ εἰς τοὺς νόμους τῶν πιθανοτήτων, αἱ μαθηματικαὶ ἐλπίδες ἡ κυβιστικὴ (τυχαία) μεταβλητὴ ἡ κατανομὴ (distribution) δὲν παρουσιάζουν καμμίαν μαθηματικὴν τελείαν ἀκρίβειαν. Δεύτερον εἰς τὸν διαφορικὸν (ἀπειροστικὸν) λογισμὸν καὶ εἰς τὴν διαφόρισιν τῆς συναρτήσεως $\psi = x^2$ καὶ τὴν παράγωγόν της $\psi + dy = x^2 + 2xdx + dx^2$ ἡ παράγωνος πρέπει νὰ εἶναι $\frac{dy}{dx} = 2xdx^2$. Καὶ ὅμως κατὰ τὸν λογισμὸν τὸ dx^2 παραλείπεται. Εἶναι βεβαίως τὸ ἀπειροστὸν dx^2 πολὺ μικρόν, ὅμως τοῦτο δὲν ἔχει καμμίαν σημασίαν καὶ ἡ παράλειψίς του εἶναι εἰς βάρος τῆς μαθηματικῆς ἀκριβείας, διότι ὅσον καὶ ἐὰν τὸ dx^2 ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν (ο), ποτὲ ὅμως δὲν ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Τρίτον ὁ τύπος παρεμβολῆς τοῦ Lagrange εἶναι ἕνας κατὰ προσέγγισιν καθορισμὸς τοῦ πολυωνύμου, εὑρισκομένων μόνον κατὰ προσέγγισιν τῶν τιμῶν τῆς $\psi = \sigma(x)$ παρεμβαλλομένων μεταξὺ τῶν $x_1, x_2, \ldots xv + 1$ νέων θέσεων x, διότι δὲν εὑρίσκονται εὐκόλως αἱ ἀκριβεῖς τιμαὶ τῶν $x_1, x_2, \ldots xv + 1$. Καὶ αὐτὸς λοιπὸν ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ πολυωνύμου ἐν σχέσει πρὸς τὰ x, δὲν εἶναι ἀπολύτως ἀκριβής.

Πρέπει ἐπίσης νὰ παρατηρήσω ἐπὶ πλέον ὅτι καὶ εἰς αὐτὰ ἀκόμη τὰ στοιχειώδη μαθηματικὰ πολλάκις δίδονται σχετικαὶ καὶ ὄχι ἀπόλυτοι τιμαὶ (ἀπόλυτος τιμὴ ὑπὸ τὴν λογικὴν ἔννοιαν καὶ ὄχι τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν τῆς ἀπολύτου τιμῆς).

Καὶ πράγματι ἡ μονὰς 1, τὸ 2, τὸ 3, τὸ 4, καὶ λοιπὰ οὐδεμίαν ἐκφράζουν ἔννοιαν καὶ μαθηματικὴν ἀκόμη, ἐὰν ἐννοιακῶς καὶ λογικῶς δὲν συνδυασθοῦν πρὸς ἕνα εἶδος (species) τοῦ πραγματικοῦ κόσμου ἢ ἀκόμη καὶ τοῦ ἰδεατοῦ κόσμου, ὥστε νὰ ἀποτελοῦν στοιχεῖα μετρήσεως ἢ καθορισμοῦ ποσοτήτων ἢ μεγεθῶν ὅπως ἐπὶ παραδείγματι τέσσερα μῆλα, δύο ἰδέαι, πέντε διανοήματα καὶ λοιπά. Ἐὰν δὲν συνδυασθοῦν οἱ ἀριθμοὶ καὶ ἕκαστος τούτων, ὅπως προηγουμένως ἐξέθεσα, πρὸς ἕνα εἶδος, εἶναι τελείως ἐστερημένοι περιεχομένου καθὼς καὶ τὰ σύμβολα $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots x, \psi, \ldots\ldots$ ἐὰν δὲν συνδυασθοῦν πρὸς ἕνα εἶδος τοῦ φυσικοῦ ἢ τοῦ ἰδεατοῦ κόσμου, στεροῦνται τελείως περιεχομένου καὶ τὸ $1 = 2 = 5 = 1000 = +\infty$ ἢ $-\infty$. Καὶ αὐταὶ ἀκόμη αἱ στοιχειώδεις τέσσαρες πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς, καθὼς καὶ ἡ ἐξαγωγὴ ριζῶν καὶ οἱ μαθηματικοὶ λογισμοὶ — ὅταν ἐκτελοῦνται — ἔχουν ὡς σιωπηρὰν προϋπόθεσιν τὸν συνδυασμόν των καὶ τὴν ἀναφοράν των εἰς ὡρισμένον εἶδος ὁμοιογενές, διότι $2 + 2 = 4$ ἐννοεῖται 2 μῆλα + 2 μῆλα = 4 μῆλα. Καὶ πράγματι 2 μῆλα καὶ 2 λέοντες δὲν ἰσοῦνται πρὸς 4 μηλολέοντας ! Ταῦτα εἶναι ἄσχετα πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων (enseble, Menge) ὅπου καὶ ἀνομοιογενῆ πράγματα συνιστοῦν ἕνα σύνολον. Ὁπωσδήποτε ὅμως καὶ τότε αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις ζητοῦν τὴν ὁμοιογένειαν. Ἡ ὁμὰς (groupe) ἔχει ὡς προϋπόθεσιν νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ἐσωτερικῶς (ἐντὸς τῆς ὁμάδος) μία πρᾶξις συνδυασμοῦ, δηλαδὴ ἡ πρόσθεσις ἡ ὁποία ὅμως εἶναι ἀδύνατον νὰ τελεσθῇ ἐπὶ ἀνομοιογενείας τῶν στοιχείων (éléments, points) τῆς ὁμάδος.

Πρέπει νὰ τονίσω ὅτι καὶ αὐτὰ ἀκόμη τὰ μαθηματικὰ δὲν ἐξασφαλίζουν τὴν πλήρη ἀκρίβειαν καὶ προβαίνουν εἰς ἀβαρίας καὶ ὅτι ἡ συνήθως χρησιμοποιουμένη φράσις «μὲ μαθηματικὴν ἀκρίβειαν» δὲν ἀνταποκρίνεται καὶ δὲν ἑρμηνεύει πλέον τὴν ἀλήθειαν, διότι ὅσον ἀνέρχεται ὁ ἐρευνητὴς τὴν κλίμακα τῶν μαθηματικῶν γνώσεων ἀπὸ τὰ κατώτερα μαθηματικὰ πρὸς τὰ ἀνώτερα καὶ ἀνώτατα μαθηματικά, τόσον εἰσέρχεται εἰς ταῦτα ἡ ἐλαστικότης ἡ πιθανότης, ἡ ἀνακρίβεια, ἡ προσέγγισις καὶ πλήρης τούτου διαπίστωσις ἐκτὸς τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων, εἶναι ὅτι καὶ εἰς αὐτὴν ἀκόμη τὴν πρακτικὴν ἀριθμητικὴν εἰς τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀπειροψήφιοι ἢ περιοδικοί, γίνεται μία παραποίησις καὶ μία στρογγύλευσις τῶν δεκαδικῶν μονάδων διὰ προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως δεκαδικῶν μονάδων καὶ ἐπομένως δὲν ἀποδίδεται ἡ ἀκρίβεια τῶν ἀριθμῶν καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ γίνονται κατὰ προσέγγισιν ὅπως ἡ $\sqrt{2}$ ἀντικαθίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 1,414, ὁ ὁποῖος δὲν ἀποδίδει ἐπακριβῶς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 2 καὶ ὁ γνωστὸς ἀριθμὸς (σταθερὰ) π, δηλαδὴ ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, ἐνῷ εἶναι ἀπειροψήφιος 3,14159 . . . . . ἀντικαθίσταται πότε μὲ τὸν 3,14 καὶ πότε μὲ τὸν 3,1416. Ἡ προσέγγισις αὐτὴ πρὸς τὴν ἰσότητα, δηλαδὴ τὴν ἀκριβῆ τιμὴν μιᾶς ποσότητος ἢ ἑνὸς μεγέθους σημειώνεται μὲ τὸ σύμβολον $\simeq$, τὸ ὁποῖον σημαίνει περίπου ἴσον, ὅπως $\pi \simeq 3{,}1416$. Αὐτὴ δὲ ἡ τακτικὴ χρησιμοποίησις εἰς τὰ ἀνώτερα μαθηματικὰ τοῦ συμβόλου $\simeq$ προδίδει τὴν ἀνακρίβειαν καὶ τὴν ἀδυναμίαν εἰς τὰ μαθηματικά. Εἰς μίαν δὲ νεωτάτην θεωρίαν ἔφθασαν νὰ ἀναπτύξουν τὴν γνώμην ὅτι καὶ ἡ ἰσότης (=) εἶναι μία ἀνισότης ($\simeq$) μὲ διαφορὰν ἢ μηδὲν ἢ ἀπειροελαχίστην.

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἀκριβοῦς τιμῆς (τ) καὶ τῆς κατὰ προσέγγισιν τιμῆς (τ_1), δηλαδὴ ἡ διαφορὰ $\tau - \tau_1$ καλεῖται σφάλμα καὶ πολλάκις τὸ σφάλμα δὲν εἶναι γνωστὸν ποσοτικῶς ἢ μεγεθικῶς, διότι πολλάκις δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξευρεθῇ ἡ ἀκριβὴς τιμὴ μιᾶς ποσότητος ἢ ἑνὸς μεγέθους.

Κατὰ ταῦτα :

Ἀκριβὴς τιμὴ = προσεγγίζουσα τιμὴ + σφάλμα. Ἡ δὲ προσεγγίζουσα τιμὴ εἶναι ἢ (+) ἢ (—), δηλαδὴ εἴτε πρὸς τὰ ἄνω εἴτε πρὸς τὰ κάτω.

Εἶναι λοιπὸν καταφανὲς ὅτι τόσον τὰ καθαρὰ μαθηματικὰ (mathématiques pures), ὅσον καὶ τὰ ἐφηρμοσμένα μαθηματικά, παρουσιάζουν — καὶ ἰδίως κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἁπλῶν ἢ καὶ τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν — κενὰ καὶ ἀνακριβείας. Καὶ εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν Πυρηνικὴν Φυσικὴν πολλάκις μᾶζαι ὅπως τοῦ νετρίνου καὶ τοῦ φωτονίου, διότι εἶναι ἀπειροελάχισται, δηλαδὴ ἀπειροσταί, ἀπείρως μικραὶ καὶ προσεγγίζουν τὸ μηδὲν (0), δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν θεωρούμεναι ὡς ἀμελητέαι εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς καὶ θεωροῦνται εἰς τὰς διαφόρους συναρτήσεις ὅτι εἶναι ἴσαι πρὸς τὸ μηδέν, ὅπως ἐπίσης τὸ ἠλεκτρόνιον (e) καὶ τὸ φωτόνιον εἰς τὴν μηχανικὴν τῶν κβαντικῶν πεδίων, ἐνῷ οὐδέποτε εἰς τὴν πραγματικότητα ταῦτα ἰσοῦνται πρὸς τὸ 0.

Ἐπίσης ὅπως εἶναι γνωστὸν κατὰ τὴν κίνησιν ἑνὸς ἠλεκτρονίου περὶ τὸν πυρῆνα τοῦ ἀτόμου τῆς ὕλης, οἱουδήποτε φυσικοῦ στοιχείου καὶ τὴν διαγραφομένην ὑπὸ τούτου ἐλλειψοειδῆ τροχιὰν διὰ πολλοὺς λόγους δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ ἐ π α κ ρ ι β ῶ ς ἡ εἰς τὸν χρόνον μεταγενεστέρα θέσις του, μολονότι εἶναι γνωστὰ καὶ δεδομένα ἡ ἀρχικὴ θέσις του, ἡ κατεύθυνσίς του καὶ ἡ ταχύτης του, παρὰ μόνον εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ ἡ π ι θ α ν ὴ μεταγενεστέρα θέσις του καὶ τοῦτο διότι κατὰ τὸν γερμανὸν φυσικὸν W. Heisenberg, μεσολαβεῖ σφάλμα κατὰ τὴν παρατήρησιν καὶ σφάλμα ὑπολογισμοῦ καὶ ἐκ τῆς αἰτίας ταύτης ὁ Heisenberg διετύπωσε τὴν σπουδαίαν ἀρχὴν τῆς ἀβεβαιότητος (ἀπροσδιοριστίας), ἡ ὁποία καὶ ἀκόμη καὶ εἰς τὴν Φυσικὴν ὡδήγησεν εἰς τὸν κλονισμὸν τῆς παραδοχῆς τῶν νόμων τῆς αἰτιότητος τῶν φαινομένων καὶ εἰς τὴν παραδοχὴν μόνον νόμων πιθανοτήτων καὶ στατιστικῶν νόμων καὶ μάλιστα καθορίζεται εἰς τὴν προεκτεθεῖσαν περίπτωσιν ὅτι τὸ γινόμενον τῶν σφαλμάτων τῆς θέσεως καὶ τῆς ὁρμῆς (m.v) ἰσοῦται περίπου πρὸς τὴν σταθερὰν τοῦ M. Planck, δηλαδὴ τὸ $h = 6{,}624.10^{-27}$ Erg.

Εἶναι λοιπόν, κατόπιν τῶν ἐκτεθέντων, εὔλογον τὸ συμπέρασμα ὅτι ἐφ' ὅσον καὶ εἰς αὐτὰ τὰ θετικὰ μαθηματικά, ἐφ' ὅσον καὶ κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν Φυσικήν, τὴν Χημείαν καὶ τὰς ἄλλας θετικὰς ἐπιστήμας ὑπάρχουν μαθηματικαὶ ἀνακρίβειαι καὶ ὅτι, ἰσχυούσης τῆς ἀρχῆς τῆς ἀβεβαιότητος τοῦ Heisenberg, μόνον κατὰ προσέγγισιν γίνονται οἱ ὑπολογισμοὶ εἰς τὰς ἐπιστήμας ταύτας, εἶναι πολὺ φυσικὸν ὅτι καὶ εἰς τὰς κοινωνικὰς καὶ ἰδίως εἰς τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας διὰ τοὺς ἰδίους λόγους καὶ ὑπὸ τοιαύτην ἔννοιαν ἐφαρμόζονται τὰ μαθηματικὰ καὶ τὰ μαθηματικὰ συμπεράσματα ἐκφράζουν κατὰ κανόνα προσεγγιστικὰς καὶ πιθανὰς τιμάς.

Πρέπει νὰ γίνῃ κατανοητὸν ὅτι γενικῶς αἱ κοινωνικαὶ ἐπιστῆμαι, δηλαδὴ αἱ ἐπιστῆμαι αἱ ὁποῖαι ἐρευνοῦν τὰς διαφόρους δραστηριότητας τῶν ἀνθρώπων, ὡς ὁμάδων καὶ εἰς τὰς μεταξύ των σχέσεις καὶ ἐπομένως καὶ τὴν οἰκονομικὴν δραστηριότητα, προϋποθέτουν τὴν γνῶσιν ὅλων τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, κατὰ τὰ θεμελιώδη τοὐλάχιστον ἀξιώματα καὶ συμπεράσματά των, δηλαδὴ γνῶσιν τῆς Βιολογίας καὶ τῶν Βιολογικῶν ἐπιστημῶν ὡς καὶ τῶν Φυσικῶν ἐπιστημῶν, αἱ ὁποῖαι στηρίζονται σήμερον κυρίως εἰς τὰς μαθηματικὰς γνώσεις, διότι — τὸ τονίζω — ἡ Κοινωνία εἶναι προέκτασις τῆς

Φύσεως, ἐφ' ὅσον ἡ Κοινωνία δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἕνα ὀργανικὸν σύνολον ἀνθρώπων, δηλαδὴ ζώων λογικῶν καὶ ὡς τοιούτων ὄντων φυσικῶς ἐνοργάνων, τὰ ὁποῖα κυριαρχοῦνται ἀπὸ τὴν Φύσιν των τὴν Ὑλικὴν καὶ κατὰ μίαν συνέπειαν φυσικῶς ἀναπόδραστον τὰ ὄντα ταῦτα, δηλαδὴ οἱ ἄνθρωποι καὶ εἰς τὰς μεταξύ των σχέσεις καὶ εἰς τὴν δρᾶσιν των ὡς συνόλου ὑποτάσσονται καὶ εἰς τὰ φυσικὰ ἔνστικτά των καὶ εἰς τὴν λογικήν των ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἐκείνη προϊὸν φυσικῶν, ὀργανικῶν λειτουργιῶν. Καὶ αἱ φυσικαὶ των ἀνάγκαι, αἱ ὁποῖαι κοινωνικῶς λαμβάνουν τὴν μορφὴν τῶν συμφερόντων, ὑπαγορεύουν εἰς τούτους τὴν κοινωνικὴν διαγωγήν των καὶ συμπεριφοράν των. Ὅλαι δὲ αἱ ἐνέργειαι τῶν ἀνθρώπων ἢ καὶ αἱ παραλείψεις των, αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν τὴν κοινωνικὴν καὶ ἑπομένως καὶ τὴν οἰκονομικὴν συμπεριφορὰν καὶ δραστηριότητά των καθοδηγοῦνται ἀπὸ τὸ ἁρμόδιον ὑλικὸν ὄργανον, δηλαδὴ τὸν ἐγκέφαλον ὁ ὁποῖος λειτουργεῖ ὑπακούων εἰς φυσικούς, βιολογικοὺς καὶ ψυχολογικοὺς νόμους.

Σαφὲς καὶ ἀναμφισβήτητον εἶναι ὅτι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει προέχει ὁ φυσικὸς καὶ βιολογικὸς χαρακτὴρ τῆς οἰκονομικῆς δραστηριότητος καὶ ὅτι αὐτὴ ἡ οἰκονομικὴ δραστηριότης τῶν ἀνθρώπων, οἱ ὁποῖοι διαβιοῦν καὶ κινοῦνται κοινωνικῶς, διέπεται καὶ κυριαρχεῖται ἀπὸ κανόνας τείνοντας νὰ ἔχουν μίαν σχετικὴν ἀναγκαιότητα καὶ ἑπομένως νὰ περιβάλλωνται τὴν μορφὴν τοὐλάχιστον στατιστικῶν νόμων, μὲ συνέπειαν μαθηματικῆς πιθανότητος καὶ οἱ ὁποῖοι στατιστικοὶ νόμοι, εἴτε πολὺ εἴτε ὀλίγον, προσεγγίζουν τὴν βεβαιότητα, δηλαδὴ τὸν κανόνα τῆς ἀναγκαίας σχέσεως αἰτίου πρὸς αἰτιατὸν μὲ τὴν προσθήκην ἑνὸς λογικοῦ στοιχείου.

Τότε ὅμως καθίσταται καταφανὲς ὅτι ἡ ἐφαρμογὴ τῶν μαθηματικῶν εἰς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα ὄχι μόνον εἶναι ἐνδεδειγμένη, ἀλλὰ καὶ ἀπαραίτητος διὰ τὴν σταθερότητα τῶν συμπερασμάτων καὶ τὴν προχώρησιν εἰς ὑποθέσεις ἐπιστημονικὰς καὶ ἐπαληθεύσεις τούτων χάριν τοῦ ἀνθρώπου καὶ τῆς ἀνθρωπίνης ὁμάδος, δηλαδὴ τῆς Κοινωνίας.

Παρέχω ὅμως τὴν ἐξήγησιν ὅτι, προκειμένου περὶ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν μαθηματικῶν (τῶν σχετικῶς πλέον θετικῶν καὶ ἀκριβῶν γνώσεων), εἰς τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας, εἰς τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν, δὲν πρέπει νὰ ἀποδίδεται εἰς τὰς μαθηματικὰς προτάσεις καὶ τὰ ἐκ τοῦ μαθηματικοῦ λογισμοῦ συμπεράσματα, ἡ ἔννοια νόμων, δηλονότι συνέπειαι πλήρους ἀναγκαιότητος, ὥστε τὰ συμπεράσματα νὰ ἀνταποκρίνωνται ἐπακριβῶς εἰς τὴν οἰκονομικὴν πραγματικότητα, εἴτε διὰ τὸ παρὸν εἴτε διὰ τὸ μέλλον, διότι τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν, ἀλλὰ πρέπει νὰ ἀποδίδεται ἡ ἔννοια τῆς πιθανότητος, μεγάλης ἢ μικρᾶς κατὰ τὰς περιστάσεις, ἡ ὁποία ὅμως πιθανότης πράγματι ἐξυπηρετεῖ σοβαρῶς τὴν οἰκονομικὴν ζωὴν καὶ τὴν οἰκονομικὴν Ἐπιστήμην κατὰ ἕνα τρόπον σχετικῶς ἱκανοποιητικόν.

Ὀρθότατα δὲ οἰκονομολόγοι μὲ μεγίστην μαθηματικὴν κατάρτισιν ὅπως ὁ I. M. Keynes εἰς τὸ κλασικὸν σύγγραμμά του The General Theory of Employment, Interest and Money, London (1942), διετύπωσαν σοβαρωτάτας ἐπιφυλάξεις ὡς πρὸς τὴν πλήρη ἀξίαν καὶ σημασίαν τῶν μαθηματικῶν κατὰ τὴν ἐφαρμογήν των εἰς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα, τοῦτο δὲ πιστεύω καὶ διετύπωσα καὶ πρότερον [πρβλ. Γ. Ι. Τράμπου, Ἡ λειτουργία τοῦ μηχανισμοῦ τῶν τιμῶν (1957), σελ. 219 ἑπ. ὡς καὶ ἀλλαχοῦ]. Τονίζω καὶ πάλιν ὅτι πρόκειται περὶ πιθανοτήτων ὑπὸ τὴν μαθηματικὴν καὶ τὴν λογικὴν ἔννοιαν. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον νομίζω ὅτι ὀρθότατα δίδεται εἰς τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην ὁ ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος, ὅτι πιθανότης εἶναι ἡ τιμὴ — ὅριον τῆς σχετικῆς συχνότητος, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐμπειριῶν αὐξάνει μέχρι τοῦ ἀπείρου καὶ δίδεται ὁ τύπος τῆς ἐξισώσεως

$$P = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

ὅπου $P =$ πιθανότης, $m =$ ὁ ἀριθμὸς τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων διὰ τὸ καθορισμένον συμβὰν καὶ $n =$ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐνδεχομένων, ὁ ἐξαντλῶν ὅλας τὰς δυνατότητας, ἀποκλειομένων ἀμοιβαίως καὶ ὅλων τῶν ἐξ ἴσου ἀληθοφανῶν (πρβλ. G. Tintner, Mathématiques et Statistiques pour les Economistes I (1962) No 86, σελ. 261 ἑπ.).

Ὑποστηρίζεται συνήθως ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθοῦν τὰ μαθηματικὰ εἰς τὰς ἐπιστήμας αἱ ὁποῖαι ἐρευνοῦν τὰς ἐνεργείας ἢ παραλείψεις τοῦ ἀνθρώπου καὶ μάλιστα εἰς τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας, διότι οἱ θεμελιώδεις νόμοι τῶν οἰκονομικῶν ἐπιστημῶν δὲν εἶναι ποσοτικοί, ἐνῷ τὰ μαθηματικὰ προϋποθέτουν ποσότητας.

Τοῦτο ὅμως νομίζω ὅτι εἶναι πεπλανημένον καὶ τοὐλάχιστον ὑπερβολικόν. Εἶναι γνωστὸν ὅτι καὶ αὐτὰ τὰ μαθηματικὰ καὶ ἰδίως τὰ ἀνώτερα, τὰ νεώτερα μαθηματικὰ (mathématiques modernes) ἀσχολοῦνται καὶ ἐφαρμόζονται καὶ πραγματεύονται καὶ ἐρευνοῦν σχέσεις αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ποσοτικαὶ καὶ εἶναι γνωστὸν ὅτι τελευταίως εἰς τὴν Γερμανίαν ἐκυκλοφόρησαν μελέται μὲ περιεχόμενον καθαρῶς νομικόν, εἰς τὸ ὁποῖον νομικὸν περιεχόμενον ἐφαρμόζονται ἀνώτερα μαθηματικά.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐκτὸς τῶν ποσοτήτων ὑπάρχουν καὶ ἐρευνῶνται εἰς τὰ μαθηματικὰ καὶ τὰ μεγέθη, τὰ ὁποῖα δὲν παρουσιάζουν οὔτε μᾶζαν οὔτε βάρος. Ἐπίσης ὑπάρχουν καὶ εἰς τὴν Φύσιν καὶ εἰς τὴν Κοινωνίαν δεδομένα ὑποστατά, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι οὔτε ποσότητες ὑπὸ τὴν πραγματικὴν ἔννοιαν τοῦ βάρους, διότι αἱ ποσότητες παρουσιάζουν βάρος, οὔτε μεγέθη. Καὶ ὅμως καὶ εἰς τὴν Φυσικὴν ἀκόμη ταῦτα θεωροῦνται κατ' ἀνάλογον ἐφαρμογὴν ὡς ποσότητες ἢ ὡς μεγέθη καὶ πρέπει νὰ θεωροῦνται ὡς τοιαῦτα. Νομίζω ἐπὶ παραδείγματι ὅτι ἡ θερμότης, ἡ ἐνέργεια ἐν γένει καὶ ἡ δύναμις, ἐὰν κριθοῦν καὶ ἐκτιμηθοῦν αὐστηρῶς, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθοῦν οὔτε ὡς ποσότητες οὔτε ὡς μεγέθη. Καὶ ὅμως ἡ θερμότης τὴν ὁποίαν δίδουν εἰς τὴν ἀτμόσφαιραν τὰ φωτόνια (quanta ἐνεργείας) παρίστανται ὡς ποσότης ἢ ὡς μέγεθος καὶ διατυπώνεται εἰς σχέσιν συναρτήσεως (fonction), τῆς ὁποίας ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι ἡ ἀτμοσφαιρικὴ θερμοκρασία. Ὁμοίως γενικῶς ἡ θερμότης, ὑπὸ τὴν αὐστηρὰν ἔννοιάν της, εἶναι προϊὸν ἐνεργείας ὡς καὶ ὁ ἠλεκτρισμὸς εἶναι ἐνέργεια. τοῦ ἠλεκτρισμοῦ δὲ ἡ φύσις δὲν ἔχει καθορισθῆ εἰσέτι. Ἐν τούτοις μετρῶνται καὶ καθίστανται ἀντικείμενα μαθηματικῶν σχέσεων. Καὶ αὐτὴ ἀκόμη ἡ δύναμις (F), τῆς ὁποίας ἡ φύσις δὲν ἔχει ἐπακριβῶς καθορισθῆ, ἐὰν κριθῆ κατὰ τρόπον αὐστηρὸν εἶναι σαφὲς καὶ βέβαιον ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ποσότης, οὔτε μέγεθος. Καὶ ὅμως ὁ I. Mawxell διετύπωσε διαφορικὰς ἐξισώσεις τῆς ἠλεκτροδυναμικῆς, αἱ ὁποῖαι ἔπειτα ἀπὸ μίαν τεσσαρακονταετίαν ἐπηληθεύθησαν ὑπὸ τοῦ Hertz καὶ ἐγένοντο δεκταὶ εἰς τὴν ἐπιστήμην. Καὶ αὐτὸ τὸ βάρος, τὸ ὁποῖον βάρος ἐκφράζει ποσότητα μετρουμένην εἰς γραμμάια, ἐρευνώμενον βαθέως δὲν εἶναι καθ' ἑαυτὸ παρὰ μία δύναμις (F), δηλαδὴ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἕλξεως τῆς γῆς, ἡ ὁποία ἕλξις τῆς γῆς ἔχει τὸ μέγιστον (maximum) τῆς δυνάμεώς της εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς ὅπου ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ἡ ἀπόστασις εἶναι μηδὲν (0), διότι κατὰ τὸν τέταρτον νόμον τῆς κλασικῆς Μηχανικῆς, τὸν ὁποῖον διετύπωσεν ὁ I. Newton, ἡ ἕλξις τῆς γῆς πρὸς ἕνα σῶμα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τοῦ σώματος ἐκ τῆς ἐπιφανείας της καὶ ἑπομένως ὅσον τὸ σῶμα ἀπομακρύνεται τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς, τόσον τὸ βάρος μειοῦται καὶ καταλήγει τὸ βάρος τοῦ σώματος νὰ εἶναι μηδέν, ὅταν τὸ σῶμα εὑρεθῆ ἐκτὸς τῆς ἕλξεως τῆς γῆς καὶ τὸ βάρος αὐτὸ δὲν εἶναι ποσότης οὔτε μέγεθος. Καὶ ὅμως μετρεῖται. Δὲν ἐνδιαφέρει ἐν προκειμένῳ νὰ προσθέσω σχετικῶς ὅτι ὑπάρχει καὶ συνεχὴς μεταβολὴ τῆς μάζης (m_o) ἑνὸς σώματος ἐν σχέσει πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς ταχύτητός του, ὅτε ἡ μᾶζα καθίσταται ἐνεργὸς (me).

Ταῦτα — ὅσα ἐξέθεσα γενικώτερα — δὲν εἶναι περιττά, διότι δεικνύουν ὅτι καὶ αὐτὰ τὰ ἐφηρμοσμένα μαθηματικά, ὅπως καὶ τὰ καθαρὰ μαθηματικά, ἀσχολοῦνται καὶ μὲ ἀντικείμενα τὰ ὁποῖα δὲν ἀφοροῦν ποσότητας ἢ μεγέθη καθὼς καὶ ὅτι πολλάκις ἐκδηλώσεις εἰς τὸν ἐξωτερικὸν κόσμον, αἱ ὁποῖα, συλλαμβάνονται καὶ εἶναι ἐμφανεῖς καὶ τῶν ὁποίων ἡ βασικὴ προέλευσις δὲν δύναται νὰ θεωρηθῆ καὶ νὰ κριθῆ ὡς ποσότης ἢ ὡς μέγεθος καὶ ἀκόμη καὶ ἰδεαταὶ συλλήψεις, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν καθὼς καὶ ἡ βασικὴ προέλευσίς των ὡς ποσότης ἢ ὡς μέγεθος καὶ ὄχι μόνον εἰς τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ πλέον καὶ εἰς τὴν Φυσικὴν καὶ δύνανται νὰ τύχουν ἐφαρμογῆς τῶν μαθηματικῶν καὶ μάλιστα τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν.

Ἕνεκεν τούτου δὲν εἶναι ἀπορίας ἄξιον ὅτι καὶ εἰς τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν, κατ' ἀνάλογον τρόπον, θεωροῦνται καὶ λογίζονται ὡς ποσότητες ἢ ὡς μεγέθη τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα καὶ ἐπὶ τούτων ἐφαρμόζονται μαθηματικαὶ σχέσεις καθὼς καὶ διαφόρων εἰδῶν μαθηματικοὶ λογισμοί. Πρέπει ὅμως νὰ σημειωθῆ ὅτι συνήθως καὶ κατὰ κανόνα εἰς τὰς οἰκονομικὰς σχέσεις καὶ τὴν οἰκονομικὴν ζωὴν τὰ περισσότερα οἰκονομικὰ φαινόμενα ἔχουν μορφὴν ποσοτικὴν ἢ εἶναι μεγέθη, ὅπως τὰ θεμελιώδη φαινόμενα ἡ ζήτησις, ἡ προσφορά, ἡ παραγωγὴ προϊόντος καὶ τὰ λοιπά.

Δὲν εἶναι σύγχρονον τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας χρησιμοποιοῦνται εὐρέως τὰ μαθηματικά. Ἤδη ἀπὸ τοῦ 1682 ὁ W. Petty (Political Arithmetic) καὶ ὁ Quesnay τὸ 1758 (Taxbeau économique) καὶ μεταγενεστέρως ὁ Warlas, ὁ Jevons καὶ ἄλλοι ἐχρησιμοποίησαν εὐρέως διάφορα ἀριθμητικὰ παραδείγματα, τὰ ὁποῖα μάλιστα δὲν ἔχουν ποσοτικὸν χαρακτῆρα. Ἐπίσης δὲ καὶ διάφοροι θεωρίαι διετυπώθησαν μετὰ ταῦτα ὑπὸ μαθηματικοὺς ὅρους καὶ τύπους ὅπως ὁ διάσημος Σουηδὸς οἰκονομολόγος Knut Wieksell διετύπωσε κατὰ τρόπον μαθηματικὸν [Üxer Wert, kapital und Rente nach dem neueren national économischen theorien, Jena (1893)] τὰς θεωρίας τοῦ Boehm - Bawerk (1889) περὶ τοῦ κεφαλαίου.

Εἰς τὴν σύγχρονον ἐποχὴν καὶ μάλιστα εἰς τὸν εἰκοστὸν αἰῶνα τὰ μαθηματικὰ ἔτυχον μεγίστης καὶ σπουδαίας ἐφαρμογῆς εἰς τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν καὶ νομίζω ὅτι ἡ ἐφαρμογὴ τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν οἰκονομίαν προσέφερε σημαντικωτάτας ὑπηρεσίας διὰ τὴν πρόοδον καὶ τὴν ἐξέλιξιν τῆς ἐπιστήμης.

Καὶ τώρα, ἐφ' ὅσον κατέστη κατανοητὸν ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἶναι χρήσιμα εἰς τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν, θὰ προχωρήσω εἰς τὸν κατὰ γενικὰς καὶ ἁδροτάτας γραμμὰς καθορισμὸν ποῖα, κατὰ τὴν γνώμην μου, εἴδη μαθηματικῶν εἶναι χρήσιμα καὶ ἐφαρμόσιμα εἰς τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας.

Λέγω ποῖα εἶναι ἐφαρμόσιμα καὶ χρήσιμα μαθηματικὰ διὰ τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν, διότι εἶναι γεγονὸς ὅτι, προκειμένου περὶ ἑκάστης ἐπιστήμης καὶ μάλιστα ἑκάστου κλάδου ἐπιστήμης, δὲν ἐφαρμόζονται κάθε εἴδους μαθηματικά, ἀλλὰ ὡρισμένης μορφῆς μαθηματικὰ τὰ ὁποῖα εἰδικῶς εἶναι κατάλληλα διὰ τὸν κλάδον τῆς ἐπιστήμης. Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ εἰς τὴν Φυσικήν. Εἰς τὴν Πυρηνικὴν Φυσικὴν καθὼς καὶ εἰς τὰς θεωρίας τῆς σχετικότητος τοῦ A. Einstein ἐξελέγησαν τὰ κατάλληλα μαθηματικὰ διὰ νὰ ἐφαρμοσθοῦν. Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ εἰς τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν καὶ διὰ τὸν λόγον τοῦτον κατωτέρω θὰ ἐκθέσω ποῖα ἐκ τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν εἶναι κατάλληλα διὰ τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν. Περιττὸν νὰ τονίσω ὅτι τὰ κατώτερα μαθηματικά, δηλαδὴ πρακτικὴ καὶ θεωρητικὴ ἀριθμητική, στοιχειώδης γεωμετρία, στοιχειώδης τριγωνομετρία, κατωτέρα ἄλγεβρα, ὁπωσδήποτε ἔχουν ἐφαρμογὴν εἰς τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν, διότι ὅλοι αὐτοὶ οἱ ἁπλοῖ κλάδοι τῶν μαθηματικῶν εἶναι β ο η θ η τ ι κ ο ί, διὰ τοὺς ἀνωτέρους κλάδους τῶν μαθηματικῶν.

Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον θὰ ἐρευνήσω τώρα εἶναι ποῖα ἐκ τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν εἶναι χρήσιμα καὶ κατάλληλα νὰ ἐφαρμοσθοῦν εἰς τὸν πολιτικὴν οἰκονομίαν καὶ ἐν γένει εἰς τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας.

Προηγεῖται ἡ λογικὴ καὶ μάλιστα ἡ μαθηματικὴ λογικὴ ὡς καὶ ἡ γνῶσις τῶν συμβόλων. Τὰ μαθηματικὰ εἶναι κατὰ ἕνα τρόπον ἡ ἀπόρροια τῆς λογικῆς καὶ ἡ λογικὴ εἶναι τὸ ἐργαλεῖον τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται εἰς τὰ μαθηματικά.

Καὶ ἐν πρώτοις ἐκ τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν εἶναι χρήσιμα ὅλα τὰ σύνολα (ensembles, menge) καὶ ὅλαι αἱ θεωρίαι τῶν ὁμάδων, τῶν ὁποίων ἱδρυταὶ ὑπῆρξαν ὁ Galois (1811-1832) ὁ θεμελιωτής, μαζὶ μὲ τὸν Abel (1801-1829) τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν. Ἡ θεωρία τῶν συνόλων, τῶν ὑποσυνόλων καὶ τῶν ἐπακολούθων τούτων, τῶν δακτυλίων (gring) τῶν ὁμάδων, τοῦ διανυσματικοῦ χώρου, τοῦ Εὐκλειδείου συνεχοῦς καὶ αἱ ἐφαρμογαί των, εἶναι τόσον χρήσιμοι εἰς τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν, ὅσον εἶναι ἀπαραίτητοι καὶ χρήσιμοι εἰς τὴν πρακτικὴν ζωήν. Διαρκῶς περιβαλλόμεθα ἀπὸ σύνολα καὶ κινούμεθα ἐντὸς συνόλων καὶ ἀναφερόμεθα εἰς τὰ σύνολα χωρὶς νὰ τὰ ἀντιλαμβανώμεθα καὶ χωρὶς νὰ κατανοῶμεν τὴν σημασίαν των. Καὶ ἕκαστος ἐξ ἡμῶν εἶναι ἕνα στοιχεῖον ἑνὸς ἢ πολλῶν συνόλων. Καὶ τὰ πράγματα τὰ ὁποῖα μᾶς περιβάλλουν ἀποτελοῦν σύνολα καὶ ἐντὸς τῶν συνόλων δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν καὶ ὑποσύνολα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὰς ἰδιαιτέρας ἰδιότητας. Εἶναι λοιπὸν βάσις καὶ θεμέλιον ὅλων τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν ἡ θεωρία τῶν συνόλων ὡς καὶ αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν συνόλων καὶ νομίζω ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν ὁ οἰκονομολόγος νὰ κατανοήσῃ οὔτε στοιχειωδῶς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα καὶ τὰς οἰκονομικὰς σχέσεις ἐὰν δὲν κατέχῃ πλήρως τὴν σημασίαν καὶ τὴν μαθηματικὴν σπουδαιότητα τῶν συνόλων καὶ φυσικὰ τῶν μαθηματικῶν συνόλων.

Δίδουν συνήθως εἰς τὴν ἐπιστήμην τὸν νεώτερον ὁρισμὸν ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἶναι ἡ θεωρία τῶν ποσοτήτων καὶ τῶν ἐκτάσεων. Τὰ μαθηματικὰ ὅμως καὶ ἰδίως τὰ καθαρὰ μαθηματικά, συμβαίνει νὰ μὴ ἀσχολοῦνται μόνον μὲ τὰς ποσότητας, οὔτε μόνον καὶ μὲ τὰς διαστάσεις καὶ κατὰ τοῦτο ἔχουν ἐφαρμογὴν καὶ εἰς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα, ὁσάκις καὶ ταῦτα δὲν παρουσιάζουν ποσότητας ἢ διαστάσεις. Γενικῶς ἡ ἄλγεβρα καὶ εἰδικῶς ἡ ἀνωτέρα, ἡ νεωτέρα ἄλγεβρα διαδραματίζει σπουδαιότατον ρόλον εἰς τὴν ἐκτίμησιν καὶ τὴν κατανόησιν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων. Ἡ ἄλγεβρα ἡ ὁποία εἶναι ἡ θεωρία τῶν ἀριθμῶν ἢ ἐπιτυχέστερα τῶν συμβόλων, εἴτε ταῦτα εἶναι ἀριθμοί, εἴτε γράμματα, εἴτε οἱαδήποτε σύμβολα, νομίζω ὅτι ἀποτελεῖ τὸ χωνευτήριον καὶ τὸ καταφύγιον ὅλων τῶν κλάδων τῶν μαθηματικῶν. Ἀκόμη καὶ γεωμετρικαὶ παραστάσεις ὅπως εἶναι ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ καμπύλη ἀνάγονται εἰς ἀλγεβρικὰς ἐξισώσεις.

Ἡ ἄλγεβρα διαιρεῖται συνήθως εἰς τρία μέρη : 1) τὴν ἐκτατικὴν ἄλγεβραν (algebre extensive) τὴν ἀσχολουμένην μὲ τὰς ποσότητας, 2) τὴν δυναμικὴν ἄλγεβραν (algebre intensité), ἡ ὁποία ἀσχολεῖται μὲ τὴν διάταξιν τῶν ἀριθμῶν ἢ ἄλλων στοιχείων καὶ 3) τὴν ἄλγεβραν τοῦ συνεχοῦς. Κατὰ τὴν ἐξήγησιν τὴν ὁποίαν δίδει ὁ διάσημος Γερμανὸς φυσιολόγος Johan von Kries ἡ ἔννοια τῆς ἐκτατικότητος (extention) εἶναι συνδεδεμένη μὲ τὰ μεγέθη τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ διατυπωθοῦν καὶ νὰ ἐξηγηθοῦν μὲ ἄλλα μεγέθη τῆς αὐτῆς φύσεως, τὰ ὁποῖα λέγονται καὶ μετρικὰ μεγέθη. Ἡ ἔννοια τῆς ἐκτατικότητος εἶναι ἀρρήκτως συνδεδεμένη μὲ ἕνα χῶρον στατικὸν καὶ ὄχι μεταβαλλόμενον. Τοὐναντίον ὅταν αἱ σχέσεις μεταβάλλονται πρόκειται περὶ ζητημάτων δυναμικότητος (Intensité). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάγεται καὶ ἡ περίφημος διὰ τὰ ἀνώτερα μαθηματικὰ τοπολογία, ὅπως τὴν ἀπεκάλεσεν ὁ H. Poincaré, δηλαδὴ ἡ θεωρία τοῦ τόπου καὶ ἔτι σαφέστερον, ἡ ἐπιστήμη ἡ ὁποία τοποθετεῖ τὰ μεγέθη ἐντὸς ἑνὸς συστήματος, ἀνεξαρτήτως τῶν μετρικῶν χαρακτηριστικῶν των. Εἰς τὴν τρίτην περίπτωσιν ὑπάγεται ἡ συνέχεια ὑπὸ τὴν φυσικὴν καὶ μαθηματικὴν ἔννοιαν καὶ ἰδίως τὸ ἄπειρον καὶ εἰς ταύτην ὑπάγεται καὶ ἡ θεωρία τῶν συνόλων. Ἀπὸ ἀπόψεως ταξινομήσεως προσθέτω ὅτι βασικὴ εἶναι ἡ θεωρία τῶν συνόλων. Ἡ θεωρία αὐτὴ περιλαμβάνει τὴν τοπολογίαν καὶ εἰς ταύτην ὑπάγεται ἡ θεωρία τῶν μετρήσεων. Καὶ αἱ τρεῖς μορφαὶ τῆς ἀλγέβρας ἐνδιαφέρουν τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας, διότι εἶναι εὐκόλως κατανοητὸν ὅτι κατ' ἀναλογίαν τούτων καὶ τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα παρουσιάζουν καὶ στατικὴν ἀλλὰ κυρίως καὶ δυναμικὴν μορφὴν καὶ ἐπὶ πλέον εἰς ταῦτα καὶ διάταξις χωρεῖ καὶ τοπολογικὴ ἔρευνα, ὅπου μάλιστα μεσολαβοῦν παράγοντες μὴ ἀριθμητικοὶ ὅπως παραδείγματος χάριν οἱ ψυχολογικοὶ παράγοντες κατὰ τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα καὶ σχέσις πρὸς τὰ σύνολα καὶ πρὸς τὸ ἄπειρον ὑπὸ τὴν ὀρθὴν τοποθέτησίν του.

Ἡ γενικὴ θεωρία τῶν ἀριθμῶν ἔχει τεραστίαν σημασίαν ὄχι μόνον διὰ τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας, ἀλλὰ καὶ δι' ὅλας ἐν γένει τὰς ἐπιστήμας. Ἡ διάταξις τῶν ἀριθμῶν κατὰ τὴν ὁποίαν ἕνας ἀριθμὸς ἢ μία ποσότης ἢ ἕνα μέγεθος εἶναι ἴσον (=) ἢ μεγαλύτερον (>) ἢ μικρότερον (<) ἑνὸς ὁμοίου του ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ ἴδιον σύνολον, ἔχει μεγίστην σημασίαν διὰ τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ἔχει μίαν ἀναπόδραστον μεγίστην συνέπειαν. Δυνάμεθα νὰ κατατάξωμεν ἐκ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα εἰς μίαν σειρὰν (ἀκολουθίαν) (suite) ἐν σχέσει πρὸς μίαν ἰδιότητα, δηλαδὴ ἐν σχέσει πρὸς τὸν χρόνον, τὸν χῶρον, τὸ μέγεθος, τὴν οἰκονομικὴν σημασίαν. Ὅλα τὰ θεωρήματα τῆς διατάξεως τῶν ἀριθμῶν, τῶν ποσοτήτων, τῶν μεγεθῶν, ἔχουν μίαν οὐσιαστικὴν σημασίαν διὰ τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν. Ἐκ τῆς ἀνωτέρας ἀλγέβρας νομίζω ὅτι ὅλα τὰ μαθηματικὰ θέματα τὰ σχετικὰ μὲ τοὺς φυσικοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἔχουν μίαν ἄμεσον σχέσιν καὶ σημασίαν διὰ τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα. Ὅλοι οἱ νόμοι οἱ ἰσχύοντες διὰ τὴν σύνθεσιν τῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ διὰ τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὅπως ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως (commutativité) ἔχουν ἐπίδρασιν καὶ σημασίαν, ἐὰν δηλαδὴ ἰσχύουν ἢ δὲν ἰσχύουν. Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί, ἐκτὸς ὡρισμένων περιπτώσεων, δὲν ἔχουν μίαν σημασίαν διὰ τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα. Τὰ πολυώνυμα εἶναι ἕνα θέμα τῆς ἀνωτέρας ἀλγέβρας τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει ἐξαιρετικῶς τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας. Πράγματι λόγῳ τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων εἰς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα ὑπάρχουν περισσότεροι τοῦ ἑνὸς οἱ ἄγνωστοι παράγοντες οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ καθορισθοῦν καὶ νὰ ἐξευρεθοῦν. Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν μαθηματικῶν εἰς ἕνα οἰκονομικὸν φαινόμενον προκύπτουν πολυώνυμα μὲ ἕνα ἢ περισσότερους καὶ συνήθως περισσοτέρους ἀγνώστους. Τὰ πολυώνυμα αὐτά, οἱουδήποτε βαθμοῦ, πρέπει νὰ ἐπιλυθοῦν διὰ τῶν μαθηματικῶν μεθόδων τὰς ὁποίας ὑποδεικνύει ἡ ἀνωτέρα ἄλγεβρα. Καὶ ὅλαι αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν πολυωνύμων κατὰ συνέπειαν τούτων εἶναι ἀπαραίτητοι διὰ ταῦτα. Καὶ αὐτὴ ἀκόμη ἡ παραγώγισις τῶν πολυωνύμων καθὼς καὶ ὁ γνωστὸς τύπος τοῦ Taylor ἐνδείκνυνται διὰ τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα. Τὸ μόνον σύνολον τὸ ὁποῖον νομίζω ὅτι δὲν ἔχει καμμίαν σημασίαν διὰ τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα εἶναι τὸ σύνολον τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν ὡς καὶ τῶν μιγαδικῶν τοιούτων. Σημασίαν μεγάλην ἔχουν αἱ γραμμικαὶ ἐξισώσεις καθὼς καὶ ἡ μέθοδος τῶν διαδοχικῶν ἀφαιρέσεων (eliminations). Τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα, ὅπως καὶ προηγουμένως ἐξετέθη, ἔχουν πολλὰς διαστάσεις καὶ πολλοὺς ἀγνώστους καὶ κατὰ συνέπειαν ὅλοι οἱ μαθηματικοὶ τύποι καὶ ὅλοι οἱ τρόποι λύσεως τῶν ἐξισώσεων καὶ τῶν πολυωνύμων μὲ πολλοὺς ἀγνώστους ἔχουν σημαντικὸν ἐνδιαφέρον διὰ τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν.

Εἶναι καταφανὲς κατὰ συνέπειαν τῶν ἐκτεθέντων προηγουμένως ὅτι καὶ αἱ μῆτραι καὶ αἱ ἰδιότητες αὐτῶν καθὼς ἐπίσης καὶ ὅλαι αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν μητρῶν ἔχουν σημαντικὸν ἐνδιαφέρον καθὼς καὶ οἱ μετασχηματισμοὶ τῶν μητρῶν.

Πολὺ ὅμως περισσότερον ἐνδιαφέρον διὰ τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν ἔχουν αἱ ὁρίζουσαι (determinantes) καὶ αἱ ἰδιότητες τούτων, διότι εἶναι γνωστὸν ὅτι διὰ μέσου τῶν ὁριζουσῶν καὶ διὰ τῶν ἐπὶ τούτων πράξεων εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιλυθοῦν ἐξισώσεις καὶ πολυώνυμα ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους των. Ἴσως αἱ ὁρίζουσαι καθὼς καὶ αἱ συναρτήσεις νὰ ἔχουν τὸ μεγαλύτερον ἐνδιαφέρον διὰ τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας, μαζὶ βεβαίως μὲ τοὺς νόμους τῶν πιθανοτήτων.

Εἶναι τελείως περιττὸν νὰ τονίσω, διότι εἶναι κατανοητόν. ποίαν σημασίαν ἔχει ἡ μαθηματικὴ ἀνάλυσις διὰ τὰ προβλήματα τῆς πολιτικῆς οἰκονομίας. Ἐὰν καταβάλωμεν μίαν ἰδιαιτέραν προσοχήν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ οἰκονομικὴ ἀνάλυσις ὅταν τὴν προσβλέψωμεν ἐκ τῆς πλευρᾶς τῶν μαθηματικῶν δεδομένων τὰ ὁποῖα παρέχει ἡ οἰκονομικὴ πραγματικότης καὶ ἡ παρατήρησις, δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ μία ἀνάλυσις ἡ ὁποία περιέχει κατὰ πολὺ καὶ κατὰ ἕνα τρόπον μίαν μαθηματικὴν τοιαύτην.

Ἡ ἀνάλυσις — εἰς τὴν μαθηματικὴν ἔννοιάν της — ἔχει μεγίστην σημασίαν διὰ τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα, διότι ἡ ἀνάλυσις ἡ μαθηματικὴ περιέχει τὴν νεωτέραν μορφὴν τῆς τοπολογίας (topologie), ὅπως τὴν ὠνόμασε ὁ H.-

Poincaré, τῆς ὁποίας ἡ πραγματικὴ ἐκδήλωσις εἶναι τὸ ὅριον (limite), δηλαδὴ ἡ συνέχεια (ἀκολουθία) τῶν ἀριθμῶν τῶν διαφόρων συνόλων, ἡ ὁποία τείνει πρὸς ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος εἶναι καὶ τὸ ὅριον. Τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα τοῦτο παρουσιάζουν ἀκριβῶς τὸ ὁποῖον ἀνταποκρίνεται πρὸς τὴν πραγματικότητα. Εἶναι κατὰ κανόνα ἀκολουθίαι, συνέχειαι (suites) αἱ ὁποῖαι τείνουν πρὸς ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν τοῦ ἰδίου συνόλου, ἢ πρὸς τὸ μηδὲν ὁ ὁποῖος ἀριθμὸς ἢ μηδὲν εἶναι τὸ ὅριον. Καὶ αἱ συνέχειαι τοῦ (Cauchy) ὑπὸ τὴν ἔννοιαν των ἔχουν μίαν σημασίαν διὰ τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα. Ὑπάρχουν βεβαίως καὶ συνέχειαι μὴ τείνουσαι πρὸς ἕνα ὅριον. Αἱ συνέχειαι αὐταὶ ἔχουν μικρότερον ἐνδιαφέρον διὰ τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν.

Ὅτι ὅμως ἀποτελεῖ τὸ μέγιστον ἐνδιαφέρον διὰ τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας ἐν σχέσει πρὸς τὰ μαθηματικὰ εἶναι κυρίως αἱ συναρτήσεις τῶν διαφόρων μορφῶν. Καὶ ἐκ τῆς προηγηθείσης ἀναλύσεως τῆς τιμῆς πωλήσεως προϊόντος κατεδείχθη ὅτι ὅλα τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα εἶναι συναρτήσεις καὶ σχέσεις πρὸς ἄλλα φαινόμενα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ τῶν προηγουμένων καὶ ταῦτα συναρτήσεις ἄλλων πάλιν οἰκονομικῶν γεγονότων. Εἶναι σπάνιον νὰ παρουσιάζωνται σταθεραί, ὥστε νὰ πρόκειται περὶ ἁπλῶν ἐξισώσεων. Ὥστε ὁλόκληρος ἡ θεωρία τῶν συναρτησιακῶν σχέσεων, αἱ διάφοροι μορφαὶ τῶν συναρτήσεων, αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν συναρτήσεων, ἡ παραγώγισις τῶν συναρτήσεων, αἱ ἀκολουθίαι (συνέχειαι) τῶν ἀριθμητικῶν συναρτήσεων, καὶ ἡ ὁλοκλήρωσις (S) εἶναι ἀπολύτως ἀναγκαῖαι (διὰ τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας.

Ὁ ἀπειροστικὸς (διαφορικὸς λογισμὸς) καθὼς καὶ ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς (τὸ συμπλήρωμα τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ) ἔχουν μεγίστην σημασίαν διὰ τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν.

Πρέπει νὰ προσθέσω ὅτι κατὰ τὴν γνώμην μου ἀκόμη σπουδαιότερον διὰ τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα ὡς πολυσύνθετα καὶ πολλῶν διαστάσεων εἶναι ὁ τανυστικὸς λογισμός. Ἐὰν διὰ τὴν Φυσικήν, λόγῳ τῆς ἰδιομορφίας τῶν φαινομένων παρουσιαζόντων τανυστάς, εἶναι παρὰ πολὺ ἐνδιαφέρων, ὁ τανυστικὸς λογισμός, νομίζω ὅτι ἀκόμη πολὺ περισσότερον ἐνδιαφέρων εἶναι ὁ τανυστικὸς λογισμὸς διὰ τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα, διότι καὶ ταῦτα ἐμφανίζουν τανυστὰς συμμέτρους ἢ ὄχι.

Δὲν πρέπει νὰ λησμονῆται ὅτι ὑπάρχει μία πλήρης καὶ σπουδαία ἀνταπόκρισις μεταξὺ τῆς ἀλγέβρας καὶ τῆς γεωμετρίας καὶ ὅτι ἡ ἀναλυτικὴ γεωμετρία ἔχει παρὰ πολὺ ἐνδιαφέρον διὰ τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν, ὅταν τὰ μεγέθη παριστάνωνται γεωμετρικῶς.

Ἐκεῖνο ὅμως τὸ ὁποῖον νομίζω ὅτι δὲν ἔχει οὐδὲν ἐνδιαφέρον διὰ τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν εἶναι ὁ γεωμετρικὸς διανυσματικὸς λογισμός, διότι δὲν προσαρμόζεται καθόλου πρὸς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα καὶ ἰδίως ὡς λογισμὸς τῶν διανυσμάτων.

Τέλος εἶναι καταφανὲς ὅτι τὴν μεγαλυτέραν σημασίαν διὰ τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα καὶ τὸ ὑψηλότερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ μαθηματικὴ θεωρία τῶν πιθανοτήτων, ὅταν τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα δὲν ἐμφανίζωνται ὑπὸ περιωρισμένην καὶ μάλιστα μεμονωμένην μορφὴν εἰς τὴν οἰκονομικὴν πραγματικότητα ἀλλὰ παρουσιάζουν μάζαν ἡ ὁποία ἔχει τὰ ἴδια χαρακτηριστικά. Ἡ ἐκλογὴ τοῦ δείγματος (echantillon) τὰ ἰσχύοντα θεωρήματα καὶ οἱ νόμοι ἐπὶ πιθανοτήτων, ἡ κατανομὴ τῶν πιθανοτήτων, αἱ μαθηματικαὶ ἐλπίδες, αἱ τιμαὶ τῆς κυβευτικῆς ἢ στοχαστικῆς ἢ τυχηρᾶς μεταβλητῆς καὶ γενικῶς ὁ λογισμὸς ἐπὶ τῶν πιθανοτήτων, παρουσιάζουν τὸ μεγαλύτερον καὶ τὸ ζωηρότερον ἐνδιαφέρον διὰ τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν. Καὶ ὅταν καὶ εἰς αὐτὴν τὴν Φυσικὴν καὶ ἰδίως εἰς τὴν Κυματομηχανικὴν ἐφαρμόζωνται οἱ νόμοι τῶν πιθανοτήτων εἶναι πολὺ φυσικὸν καὶ πολὺ ὀρθὸν νὰ συμβαίνη τοῦτο καὶ εἰς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα, τὰ ὁποῖα εἶναι κοινωνικὰ φαινόμενα καὶ παρουσιάζουν ποικιλίαν καὶ ἐξ ἑτέρου, λόγῳ τῶν τρομακτικὰ μεγίστων μεγεθῶν των δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συλληφθοῦν ἐν τῷ συνόλῳ των καὶ ἐπὶ τῶν συνόλων τούτων νὰ γίνουν κατατάξεις καὶ ὑπολογισμοί, ἀλλὰ μόνον ἐκ μερικῶν παρατηρήσεων ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέρων εἰς ἀριθμόν, πρέπει νὰ συναχθοῦν τὰ μαθηματικὰ συμπεράσματα καὶ νὰ ἐξαχθοῦν νόμοι διὰ τὰ φαινόμενα ταῦτα, οἱ ὁποῖοι ὅμως νόμοι παρουσιάζουν μόνον στατιστικὸν χαρακτῆρα, δηλαδὴ οἱ νόμοι αὐτοὶ στηριζόμενοι εἰς πιθανότητας καὶ εἰς τοὺς νόμους τούτους δὲν ὑπακούουν ὅλα ἀνεξαρτήτως τὰ καθ' ἕκαστον οἰκονομικὰ φαινόμενα τῆς ἰδίας κατηγορίας, παρὰ μόνον ἐκ τοῦ συνόλου τῶν φαινομένων τούτων πιθανῶς ὑπακούει τὸ μέγιστον τῶν φαινομένων. Ὁπωσδήποτε ὅμως ἔχει διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἐπιστήμην μεγίστην καὶ ὑψηλὴν σημασίαν ἡ χρησιμοποίησις τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων ὑπὸ τὴν μαθηματικὴν μορφὴν καὶ διὰ τὴν πρόοδον τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων πολλὰ ὀφείλει ἡ ἐπιστήμη εἰς τὸν μέγαν γερμανὸν μαθηματικὸν Gauss.

Ἐν κατακλείδι θὰ τονίσω καὶ πάλιν ὅτι χωρὶς νὰ πιστεύω ὅτι ἡ ἐφαρμογὴ τῶν μαθηματικῶν ἐν γένει εἰς τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας ἀποτελεῖ πανάκιαν διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων της, νομίζω ὅτι ἡ ἐφαρμογὴ τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν πολιτικὴν οἰκονομίαν προσφέρει σοβαρὰν ὑπηρεσίαν διὰ τὴν πρόοδον τῆς πολιτικῆς οἰκονομίας.