

ΠΑΝΤΕΙΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES



ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

**Ελεγκσιμότητα–Παρατηρησιμότητα και Θεωρία της Αξίας:
Θεωρητική και Εμπειρική Διερεύνηση**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Παναγιώτης Βελτσίστας

Αθήνα, 2025

Τριμελής Επιτροπή

Θεόδωρος Μαριόλης, Καθηγητής Παντείου Πανεπιστημίου (Επιβλέπων)

Βασίλειος Κέφης, Καθηγητής Παντείου Πανεπιστημίου

Παναγιώτης Μιχαηλίδης, Καθηγητής Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου



Copyright © Παναγιώτης Βελτσίστας, 2025

All rights reserved. Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας διδακτορικής διατριβής, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της διδακτορικής διατριβής για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Η έγκριση της διδακτορικής διατριβής από το Πάντειον Πανεπιστήμιο Κοινωνικών και Πολιτικών Επιστημών δεν δηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Στην οικογένειά μου

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διδακτορικής μου διατριβής, αισθάνομαι βαθύτατη ευγνωμοσύνη και υποχρέωση να εκφράσω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου σε όσους στάθηκαν αρωγοί σε αυτή τη δύσκολη και δημιουργική διαδρομή. Καθώς η ευτυχία είναι το μόνο πράγμα που πολλαπλασιάζεται όταν μοιράζεται, θα ήθελα να αποδώσω την τιμή σε αυτούς που, με τη δική τους προσφορά, αποτέλεσαν κινητήρια δύναμη στην προσπάθειά μου.

Θα ήθελα, πρώτα απ' όλα, να απευθύνω τις θερμότερες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα Καθηγητή μου, κ. Θεόδωρο Μαριόλη. Η αφοσίωση και η καθοδήγησή του σε αυτή την πολυετή πορεία (από τα πρώτα κιόλας χρόνια της ακαδημαϊκής μου ζωής) ήταν καθοριστική και ανεκτίμητη για την ολοκλήρωση της παρούσας έρευνας. Με τις συζητήσεις μας, ο κ. Μαριόλης δεν στάθηκε μόνο καθοδηγητής, αλλά πηγή έμπνευσης και πραγματικός δάσκαλος. Σύμφωνα με τον William Glasser, οι επτά φροντίδες ενός δασκάλου είναι η υποστήριξη, η ενθάρρυνση, η προσεκτική ακρόαση, η αποδοχή, η εμπιστοσύνη, ο σεβασμός και η επίλυση διαφορών. Και τις επτά τις αισθάνθηκα ευεργετικές από τον κ. Μαριόλη. Τα διδάγματά του, από την επιστημονική μεθοδολογία έως την προσέγγιση των αναδυόμενων προκλήσεων, είναι ανεκτίμητα εφόδια για τη ζωή. Η εμπιστοσύνη που μου έδειξε δεν αποτελεί μόνο τιμή, αλλά και δέσμευση για συνεχή προσπάθεια, ακολουθώντας το παράδειγμά του. Χωρίς αυτόν, η ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής θα ήταν, αν μη τι άλλο, αδύνατη.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Παντείου Πανεπιστημίου κ. Βασίλειο Κέφη, καθώς και τον Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου κ. Παναγιώτη Μιχαηλίδη, μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στην οικογένειά μου και στα αγαπημένα μου πρόσωπα. Στάθηκαν δίπλα μου με ακούραστη αφοσίωση, παρέχοντας άνευ όρων υποστήριξη και αγάπη, ακόμα και στις στιγμές που οι δυσκολίες μετέτρεψαν την πορεία αυτή σε πραγματική πρόκληση. Χωρίς να τους ονοματίσω ξεχωριστά, αλλά με την πεποίθηση ότι γνωρίζουν ποιοι είναι, οι στιγμές αυτές τους ανήκουν εξίσου.

Περιεχόμενα

Περίληψη	8
Abstract	9
Εισαγωγή	10
Κεφάλαιο 1. Απλή παραγωγή	14
1.1 Εισαγωγή.....	14
1.2 Η σχέση τιμών παραγωγής–εργασιακών αξιών στο πλαίσιο του συνήθους υποδείγματος απλής παραγωγής	15
1.3 Κάθετη ολοκλήρωση.....	18
1.4 Η σχέση ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους στο σύστημα απλής παραγωγής	19
Κεφάλαιο 2. Συμπαράγωγή.....	22
2.1 Εισαγωγή.....	22
2.2 Η σχέση τιμών παραγωγής–εργασιακών αξιών στα πλαίσια ενός υποδείγματος συμπαράγωγής.....	22
2.3 «All-engaging» και «all-productive» συστήματα παραγωγής	25
2.4 Η σχέση ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους σε συστήματα συμπαράγωγής	26
Κεφάλαιο 3. Ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα συστημάτων	29
3.1 Εισαγωγή.....	29
3.2 Αυστηρώς ισοδύναμες αναπαραστάσεις συστημάτων και διαγωνοποίηση	30
3.3 Οι έννοιες της ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας	32
3.4 Ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα των οικονομικών συστημάτων απλής παραγωγής.....	36
3.5 Οι βαθμοί ελεγχιμότητας–παρατηρησιμότητας των οικονομικών συστημάτων και η δομική σχεδόν μη-ελεγχιμότητα–μη-παρατηρησιμότητα αυτών.....	42
Κεφάλαιο 4. Θεωρίες της αξίας	45
4.1 Σύγκριση των θεωριών της αξίας και η Σραφφαιϊνή προσέγγιση.....	45
4.2 Φασματική ανακατασκευή της θεωρίας της αξίας.....	47
Κεφάλαιο 5. Εμπειρική διερεύνηση	52
5.1 Εισαγωγή.....	52
5.2 Επεξεργασία δεδομένων.....	53
5.3 Παρουσίαση αποτελεσμάτων	54
5.3.1 Απλή Παραγωγή	54
5.3.2 Συμπαράγωγή	57

5.4 Η καμπύλη ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους των πραγματικών οικονομιών στην περίπτωση της συμπαραγωγής	65
5.5 Παρατηρήσεις εμπειρικής έρευνας	67
5.6 Επισημάνσεις σχετικά με την εμπειρική βιβλιογραφία	70
Γενικά συμπεράσματα και παρατηρήσεις.....	72
Βιβλιογραφία	75
Παράρτημα I. Αποκλίσεις ιδιαζουσών τιμών της μήτρας ελεγχιμότητας και οι αποστάσεις από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο σύστημα στην περίπτωση της απλής παραγωγής	82
Παράρτημα II. Αποκλίσεις ιδιαζουσών τιμών της μήτρας ελεγχιμότητας και οι αποστάσεις από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο σύστημα στην περίπτωση της συμπαραγωγής	90
Παράρτημα III. Προσθετικές εργασιακές αξίες.....	92
Παράρτημα IV. Ταξινόμηση κλάδων στην περίπτωση της συμπαραγωγής.....	103
Παράρτημα V. Διαγράμματα των κανονικοποιημένων ιδιοτιμών της μήτρας των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνολογικών συντελεστών στην περίπτωση της συμπαραγωγής	107
Παράρτημα VI. Διαγράμματα των λόγων των ιδιαζουσών τιμών της μήτρας ελεγχιμότητας στην περίπτωση της απλής παραγωγής	110
Παράρτημα VII. Διαγράμματα αποστάσεων από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο σύστημα στην περίπτωση της απλής παραγωγής.....	132
Παράρτημα VIII. Διαγράμματα των λόγων των ιδιαζουσών τιμών της μήτρας ελεγχιμότητας, K_1 , στην περίπτωση της συμπαραγωγής	154
Παράρτημα IX. Διαγράμματα των λόγων των ιδιαζουσών τιμών της μήτρας ελεγχιμότητας, K_2 , στην περίπτωση της συμπαραγωγής	157
Παράρτημα X. Διαγράμματα των αποστάσεων της μήτρας ελεγχιμότητας, K_1 , στην περίπτωση της συμπαραγωγής.....	160
Παράρτημα XI. Διαγράμματα των αποστάσεων της μήτρας ελεγχιμότητας, K_2 , στην περίπτωση της συμπαραγωγής.....	163
Παράρτημα XII. Διαγράμματα των «Labour-Commanded» τιμών στην περίπτωση της συμπαραγωγής	166
Παράρτημα XIII. Καμπύλες ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους στην περίπτωση της συμπαραγωγής	169

Πίνακες

Πίνακας 1. Αποτελέσματα ανάλυσης συστημάτων συμπαραγωγής, Γερμανία, $n = 54$	60
Πίνακας 2. Αποτελέσματα ανάλυσης συστημάτων συμπαραγωγής, Ελλάδα, $n = 54$	61
Πίνακας 3. Αποτελέσματα ανάλυσης συστημάτων συμπαραγωγής, Η.Π.Α., $n = 54$	62
Πίνακας 4. Αποτελέσματα ανάλυσης συστημάτων συμπαραγωγής, Λ. Δ. της Κίνας, $n = 47$	63
Πίνακας 5. Αποτελέσματα ανάλυσης συστημάτων συμπαραγωγής, Ρωσία, $n = 33$	64
Πίνακας 6. Οικονομικά σημαντικά διαστήματα του ποσοστού κέρδους	66
Πίνακας 7. Μέτρηση απόστασης από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο οικονομικό σύστημα στην περίπτωση της απλής παραγωγής	82
Πίνακας 8. Μέτρηση απόστασης από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο οικονομικό σύστημα στην περίπτωση της συμπαραγωγής	90
Πίνακας 9. Προσθετικές εργασιακές αξίες, Γερμανία, $n = 54$	92
Πίνακας 10. Προσθετικές εργασιακές αξίες, Ελλάδα, $n = 54$	95
Πίνακας 11. Προσθετικές εργασιακές αξίες, Η.Π.Α., $n = 54$	97
Πίνακας 12. Προσθετικές εργασιακές αξίες, Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας, $n = 47$	99
Πίνακας 13. Προσθετικές εργασιακές αξίες, Ρωσία, $n = 33$	101
Πίνακας 14. Ταξινόμηση Κλάδων	104

Σχήματα

Σχήμα 1. Η καμπύλη τιμών–σχετικού ποσοστού κέρδους και Θεωρίες της Αξίας. ...	46
Σχήμα 2. Η θέση των ιδιοτιμών των κανονικοποιημένων μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών στο μιγαδικό επίπεδο στην περίπτωση της απλής παραγωγής (8966 ιδιοτιμές).....	55
Σχήμα 3. Τέσσερις περιπτώσεις διπλής αντιστροφής τιμής–καθέτως ολοκληρωμένης εργασίας. «Πραγματικές» καμπύλες (συνεχείς καμπύλες) και οι Bienenfeld προσεγγίσεις τους τάξης 3, 5 και 7 (διακεκομμένες καμπύλες).	56
Σχήμα 4. Η θέση των κανονικοποιημένων ιδιοτιμών των μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών στο μιγαδικό επίπεδο στην περίπτωση της συμπαραγωγής (968 ιδιοτιμές).	58
Σχήμα 5. Πτυχές των καμπυλών ωρομισθίου–τιμών–σχετικού ποσοστού κέρδους. Ελληνική οικονομία, 2014 (απλή παραγωγή).....	67
Σχήμα 6. Η θέση των ιδιοτιμών των κανονικοποιημένων ψευδο-τυχαίων θετικών μητρών στο μιγαδικό επίπεδο σε σχέση με τις διαστάσεις τους: $n = 10, 50, 100$ και 1000.....	68

Περίληψη

Η παρούσα έρευνα έχει ως κύριο στόχο της την εξέταση τόσο των οικονομικών συστημάτων απλής παραγωγής όσο και των συστημάτων συμπαραγωγής αναφορικά με το βαθμό ελεγχιμότητας–παρατηρησιμότητας (κατά Kalman–Friedland) που αυτά παρουσιάζουν, στη βάση της Σραφφαϊανής θεωρίας της αξίας. Ως εκ τούτου, χρησιμοποιείται (i) ένα γραμμικό υπόδειγμα απλής παραγωγής και κυκλοφορούντος κεφαλαίου, και δεδομένα από συμμετρικούς πίνακες εισροών–εκροών που αφορούν ένα μεγάλο και ποικίλο όγκο πραγματικών οικονομιών, και (ii) ένα γραμμικό υπόδειγμα συμπαραγωγής, και δεδομένα που αντλούνται από πραγματικούς πίνακες προσφοράς και χρήσεων. Τόσο τα θεωρητικά όσο και τα εμπειρικά στοιχεία αποκαλύπτουν ότι οι οικονομίες απλής παραγωγής, οι οποίες συνήθως μελετώνται στη βιβλιογραφία, είναι σχεδόν παρόμοιες με μη-διαγωνοποιήσιμες, τριγωνικές και ταυτόχρονα μη-ελέγξιμες και μη-παρατηρήσιμες οικονομίες που παράγουν μόνο ένα βασικό εμπόρευμα και μη-αυτοαναπαραγόμενα μη-βασικά εμπορεύματα (κατά Sraffa), η τεράστια πλειονότητα των οποίων είναι καθαρά καταναλωτικά. Τα εν λόγω ευρήματα επεκτείνονται και σε συστήματα συμπαραγωγής. Τέλος, συμπεραίνεται ότι (i) οι οικονομίες του πραγματικού κόσμου συγκροτούν «δομικώς σχεδόν μη-ελέγξιμα–μη-παρατηρήσιμα συστήματα» και (ii) η Σραφφαϊανή θεωρία της αξίας παρέχει την πλέον γενική, έως σήμερα, βάση για την ανάλυση αυτών των οικονομιών.

Λέξεις-κλειδιά: Αριθμητική τάξη μήτρας, Βαθμοί ελεγχιμότητας–παρατηρησιμότητας, Δομική σχεδόν μη-ελεγχιμότητα–μη-παρατηρησιμότητα, Θεωρία της αξίας, Κατανομή ιδιοτιμών, Πραγματικές οικονομίες πινάκων εισροών–εκροών, Σραφφαϊανή Θεωρία.

Controllability–Observability and Theory of Value: Theoretical and Empirical Investigation

Panagiotis Veltsistas

Abstract

The main objective of this research is to examine both single production and joint production economic systems in terms of the degrees of controllability–observability (in the sense of Kalman–Friedland) they present, based on the Sraffian theory of value. Hence, it is used (i) a linear model of single production and circulating capital, and data from symmetric input–output tables drawn from a large and diverse set of actual economies, and (ii) a linear model of joint production, and data drawn from actual supply and use tables. Both theoretical and empirical evidence reveal that single production economies, which are commonly studied in the literature, are almost similar to non-diagonalizable, triangular and at the same time uncontrollable and unobservable economies that produce only one basic commodity and non-self-reproducing non-basic commodities (in the sense of Sraffa), the vast majority of which are pure consumption commodities. These findings are also extended to joint production systems. Finally, it is concluded that (i) the real-world economies constitute “structurally almost uncontrollable–unobservable systems” and (ii) the Sraffian theory of value provides the most general basis to date for the analysis of these economies.

Keywords: Actual input–output table economies, Degrees of controllability–observability, Eigenvalue distribution, Numerical matrix rank, Sraffian theory, Structural almost uncontrollability–unobservability, Theory of value.

Εισαγωγή

Το σύστημα εμπορευματικών τιμών–χρηματικού ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους αρκετά διαφοροποιημένων πραγματικών οικονομιών (αλλά, θεωρητικά, γραμμικών και απλής παραγωγής), έχει εξεταστεί σε ένα σχετικά μεγάλο αριθμό μελετών με τη χρήση συμμετρικών πινάκων εισροών–εκροών. Με βάσει τις προγενέστερες έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί, είναι εφικτό να προσδιοριστούν τα βασικότερα τυποποιημένα ευρήματα¹, τα οποία αφορούν στο οικονομικά σημαντικό διάστημα του ποσοστού κέρδους.²

Εν πρώτοις, παρατηρούνται μη-μονότονες καμπύλες εμπορευματικών τιμών–ποσοστού κέρδους. Ωστόσο, δεν ξεπερνούν το 18–20% των εξεταζόμενων περιπτώσεων, ενώ εκφρασμένες σε όρους του Στραφάϊανου Πρότυπου εμπορεύματος (*Sraffian Standard Commodity*), δεν εμφανίζουν περισσότερα από ένα σημεία αλλαγής μονοτονίας, πλην ελαχίστων εξαιρέσεων (το 0,06% των περιπτώσεων). Επιπλέον, παρατηρούνται περιπτώσεις κατά τις οποίες σημειώνεται αλλαγή στη σχέση διάταξης τιμών παραγωγής–εργασιακών αξιών (*reversals*), φαινόμενο ανάλογο με την επαναχρησιμοποίηση (*re-switching*) της τεχνικής παραγωγής, οι οποίες ωστόσο είναι σπανιότερες και δεν ξεπερνούν το 10–11% των περιπτώσεων (Mariolis & Veltsistas, 2022).

Επιπλέον, παρά την ύπαρξη σημαντικών διαφοροποιήσεων από την περίπτωση των «διακλαδικά ίσων αξιακών συνθέσεων (ή εντάσεων) του κεφαλαίου» (Ricardo–Marx–Dmitriev–Samuelson) οι καμπύλες ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους είναι σχεδόν γραμμικές, με την έννοια ότι οι συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών τείνουν να είναι άνω του 99%, και οι δεύτερες παράγωγοί τους δεν αλλάζουν πρόσημο περισσότερο από μία ή, πολύ σπάνια, δύο φορές, ανεξάρτητα από το *numéraire* που επιλέγεται.

Ως εκ τούτου, η προσέγγιση των καμπυλών τιμών–ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους μέσω πολυωνυμικών εξισώσεων χαμηλής τάξης (δηλαδή, γραμμικών ή, *a fortiori*, τετραγωνικών) είναι ικανοποιητική, από καθαρά ποσοτική άποψη. Επιπλέον, η συντριπτική πλειονότητα των μη-δεσποζουσών ιδιοτιμών συνωστίζονται σε πολύ χαμηλές τιμές, και οριοθετούνται σε μια σχετικά μικρή περιοχή του μοναδιαίου κύκλου. Στην

¹ Τα τυποποιημένα γεγονότα (*stylized facts*) αποτελούν απλουστευμένες παρουσιάσεις εμπειρικών ευρημάτων που επιβεβαιώνονται τόσο συχνά και, επομένως, μπορούν να θεωρηθούν ως προφανείς εμπειρικές αλήθειες.

² Για μια αναλυτική παρουσίαση των εν λόγω ζητημάτων, βλ. π.χ. Tsoulfidis & Mariolis (2007) και Mariolis & Tsoulfidis (2016a, 2016b, 2018).

πραγματικότητα, τόσο οι ιδιοτιμές (*eigenvalues*) όσο και οι ιδιάζουσες τιμές (*singular values*) των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών ακολουθούν φθίνουσες τάσεις. Οι μιγαδικές (καθώς και οι αρνητικές) ιδιοτιμές τείνουν να εμφανίζονται στις χαμηλότερες τάξεις, δηλαδή το μέτρο τους είναι σχετικά μικρό. Ωστόσο, ακόμη και στις περιπτώσεις όπου εμφανίζονται στις υψηλότερες βαθμίδες (δηλαδή, δεύτερη ή τρίτη θέση), το πραγματικό μέρος τους είναι πολύ μεγαλύτερο από το φανταστικό. Στις σπανιότερες περιπτώσεις όπου το φανταστικό μέρος μιας ιδιοτιμής υπερβαίνει το πραγματικό, όχι μόνο ο λόγος τους είναι σχετικά μικρός, αλλά και το μέτρο της ιδιοτιμής μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα ποσότητα. Γενικότερα, το φανταστικό μέρος γίνεται προοδευτικά μικρότερο.

Επιπλέον, οι εμφανίσεις, αφενός, μη-μονότονων καμπυλών εμπορευματικών τιμών–ποσοστού κέρδους και, αφετέρου, καμπυλών χρηματικού ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους μεταβαλλόμενης καμπυλότητας προβλέπονται και ερμηνεύονται από τη Σραφφαϊνή Θεωρία της Αξίας. Αντιθέτως, όχι μόνο δεν προβλέπονται από όλες τις άλλες θεωρίες (κλασική, μαρξική, αυστριακή, νεοκλασική και κεϋνσιανή), αλλά οδηγούν και στην κατάρρευση αυτών των θεωριών. Οι μη-Σραφφαϊνές θεωρίες θα ίσχυαν σε έναν κόσμο παραγωγής (i) ενός και μοναδικού (απλού ή σύνθετου) εμπορεύματος, για το οποίο θα υπήρχε οποιοδήποτε πλήθος εναλλακτικών τεχνικών παραγωγής, ή (ii) δύο εμπορευμάτων και μίας και μοναδικής τεχνικής παραγωγής, ή, τέλος, (iii) οποιουδήποτε πλήθους ετερογενών εμπορευμάτων, όπου θα υπήρχε οποιοδήποτε πλήθος εναλλακτικών τεχνικών παραγωγής, αλλά τα κέρδη θα ήταν μηδενικά.

Ωστόσο, από την άλλη πλευρά, τα ως άνω εμπειρικά ευρήματα υποδεικνύουν ότι οι εν λόγω δυικές εμφανίσεις (δηλαδή, ύπαρξη μη-μονότονων καμπυλών τιμών–ποσοστού κέρδους και ύπαρξη καμπυλών ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους μεταβαλλόμενης καμπυλότητας) δεν εκδηλώνονται εκτενώς στον πραγματικό οικονομικό κόσμο, πράγμα το οποίο θα πρέπει να χαρακτηριστεί ως *παράδοξο*, δεδομένου ότι οι πραγματικές οικονομίες εμφανίζονται ως συστήματα (i) παραγωγής μεγάλου πλήθους ετερογενών εμπορευμάτων, (ii) θετικών κερδών, (iii) εναλλακτικών τεχνικών παραγωγής, και (iv) πολύπλοκων διακλαδικών συνδέσεων.

Το προαναφερθέν παράδοξο δύναται να εξηγηθεί από τη διαπίστωση ότι, οι εξεταζόμενες οικονομίες παρουσιάζουν δομικά χαρακτηριστικά μη-διαγωνοποιήσιμων και τριγωνικών μητρών, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, αυτή η διάρθρωση αποτελεί ένα εγγενές χαρακτηριστικό τους. Το παραπάνω εξηγεί και τον λόγο για τον οποίον, τόσο τα μέτρα των υποδεσποζουσών ιδιοτιμών όσο και των υποδεσποζουσών

ιδιαιζουσών τιμών των κανονικοποιημένων μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών μειώνονται απότομα, ενώ οι υπόλοιπες συγκεντρώνονται σε πολύ χαμηλές τιμές, πολύ κοντά στο μηδέν.

Η παρούσα διατριβή ερευνά την περίπτωση της απλής παραγωγής εμπορευμάτων, ενώ επεκτείνει και αναλύει τα εξαχθέντα συμπεράσματα στην περίπτωση της συμπαραγωγής εμπορευμάτων, έχοντας ως εφιαλτήριο την προσφάτως εισηγμένη στη βιβλιογραφία (Mariolis & Tsoulfidis, 2018; Mariolis, 2021a, 2021c, 2021d) διατύπωση ότι, το παραπάνω παράδοξο θα λυνόταν εάν το κατά Sraffa σύστημα εμπορευματικών τιμών–χρηματικού ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους των πραγματικών οικονομιών είχε πολύ χαμηλούς βαθμούς ελεγχιμότητας–παρατηρησιμότητας κατά Kalman–Friedland (Kalman, 1960, 1963; Kalman et al., 1963; Friedland 1975).

Για την εμπειρική διερεύνηση χρησιμοποιήθηκαν από την *World Input–Output Database (WIOD)*, συμμετρικοί πίνακες εισροών–εκροών που αφορούν συνολικά σαράντα τρεις οικονομίες στην περίπτωση της απλής παραγωγής, και από την ίδια βάση δεδομένων, πίνακες προσφοράς και χρήσεων που αφορούν συνολικά πέντε οικονομίες. Κάθε οικονομία εξετάστηκε για τέσσερα έτη, καλύπτοντας την περίοδο από το 2000 έως το 2014. Στην περίπτωση της απλής παραγωγής, για κάθε έτος και κάθε οικονομία εξετάστηκαν η κατανομή των ιδιοτιμών των κανονικοποιημένων μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών και οι ιδιάζουσες τιμές αυτών των μητρών (ο λόγος της τελευταίας ως της την πρώτη ιδιάζουσα τιμή), το μέτρο της ορίζουσας των μητρών ελεγχιμότητας–παρατηρησιμότητας (μήτρα Krylov), οι αριθμητικές τάξεις αυτών των μητρών, ο βαθμός ελεγχιμότητας–παρατηρησιμότητας, καθώς και η απόσταση (*spread*) του ελέγξιμου συστήματος από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο σύστημα. Στην περίπτωση της συμπαραγωγής, εξετάστηκαν η κατανομή των ιδιοτιμών των μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών, ο λόγος της τελευταίας ως της την πρώτη ιδιάζουσα τιμή των μητρών αυτών, το μέτρο της ορίζουσας των μητρών ελεγχιμότητας–παρατηρησιμότητας, οι αριθμητικές τάξεις αυτών των μητρών, ο βαθμός ελεγχιμότητας–παρατηρησιμότητας, η απόσταση του ελέγξιμου από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο σύστημα, καθώς και τα οικονομικά σημαντικά διαστήματα του ποσοστού κέρδους.

Εν κατακλείδι, συμπεραίνεται ότι, οι πραγματικές οικονομίες πινάκων εισροών–εκροών εμφανίζουν πολύ χαμηλούς βαθμούς ελεγχιμότητας–παρατηρησιμότητας και χαρακτηρίζονται *a posteriori* ως «δομικώς σχεδόν μη-ελέγξιμα και μη-παρατηρήσιμα συστήματα». Η παραπάνω διαπίστωση οφείλεται στα δομικά χαρακτηριστικά

αυτών των οικονομιών και, συγκεκριμένα, στο γεγονός ότι οι μήτρες των κανονικοποιημένων καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών (στην περίπτωση της απλής παραγωγής) είναι σχεδόν όμοιες με μη-διαγωνοποιήσιμες και τριγωνικές οικονομίες, οι οποίες παράγουν μόνο ένα βασικό εμπόρευμα και μη-αυτοαναπαραγόμενα μη-βασικά εμπορεύματα, η πλειονότητα των οποίων είναι καθαρά καταναλωτικά εμπορεύματα.

Το υπόλοιπο της παρούσης δομείται ως εξής. Στα πρώτα τέσσερα κεφάλαια αναπτύσσεται το θεωρητικό πλαίσιο στη βάση του οποίου πραγματοποιείται η εν λόγω μελέτη και στο Κεφάλαιο 5 αναπτύσσονται και αναλύονται τα εμπειρικά αποτελέσματα της έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 1 αναπτύσσεται η απλή παραγωγή, το Κεφάλαιο 2 αναλύει την περίπτωση της συμπαραγωγής εμπορευμάτων, το Κεφάλαιο 3 εξηγεί τις έννοιες της ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας, δίνοντας έμφαση στα οικονομικά συστήματα, έννοιες οι οποίες αποτελούν ακρογωνιαίό λίθο για την παρούσα μελέτη, το Κεφάλαιο 4 αναφέρεται στις θεωρίες της αξίας και στις περιπτώσεις που δύνανται να εξαχθούν και, τέλος, στο Κεφάλαιο 5 εκτίθενται τα ευρήματα της έρευνας που αφορούν τόσο την απλή παραγωγή όσο και τη συμπαραγωγή.

Κεφάλαιο 1. Απλή παραγωγή

1.1 Εισαγωγή

Σύμφωνα με τον David Ricardo, οι τιμές των αγαθών καθορίζονται από την ποσότητα της εργασίας που απαιτείται για την παραγωγή τους, συμπεριλαμβανομένης και της εργασίας που «ενσωματώνεται» στα μέσα παραγωγής (π.χ. εργαλεία, μηχανές, κτίρια). Αυτή η προσέγγιση είναι γνωστή ως εργασιακή θεωρία της αξίας (*labour theory of value*). Πιο συγκεκριμένα, «Ουχί μόνον η αμέσως επί των αγαθών καταβληθείσα εργασία επηρεάζει την αξίαν των, αλλά και η δαπανηθείσα εις τα σκεύη, εργαλεία και κτίρια δι' ων εξυπηρετείται η εργασία αύτη.» (Ρικάρντο, 1938, σ. 19). Επιπλέον, ο Ricardo εξέτασε τον τρόπο με τον οποίο οι αλλαγές στο ποσοστό κέρδους επηρεάζουν τις σχετικές τιμές. Σύμφωνα με τον Ricardo, μία μείωση του ποσοστού κέρδους κατά 1% θα προκαλέσει μια αντίστοιχη ποσοστιαία μεταβολή στις σχετικές τιμές παραγωγής. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα κέρδη και οι μισθοί κατανέμονται με βάση την αξία που δημιουργείται από την εργασία.

Έκτοτε, ο Karl Marx ανέπτυξε περαιτέρω τις ιδέες του Ricardo, προσθέτοντας μια κοινωνική και ιστορική διάσταση στη θεωρία της αξίας. Ο Marx υιοθέτησε την ιδέα της ενσωματωμένης εργασίας, αλλά την επέκτεινε για να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο η αξία ενός αγαθού καθορίζεται από την κοινωνικά αναγκαία εργασία που απαιτείται για την παραγωγή του. Επιπλέον, ο Marx ανέπτυξε τη θεωρία των τιμών παραγωγής (*prices of production*), οι οποίες αποτελούν την βάση για την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι τιμές διαμορφώνονται στον καπιταλιστικό τρόπο παραγωγής και εξέτασε τον μετασχηματισμό των αξιών σε τιμές παραγωγής, δείχνοντας πώς οι τιμές αποκλίνουν από τις εργασιακές αξίες λόγω της ομοιόμορφης ποσοστιαίας κερδοφορίας.

Εν συνεχεία, η εργασία του Pierro Sraffa επικεντρώθηκε στην ανάλυση της αξίας και της κατανομής σε μια οικονομία, βασισμένη στις ιδέες των προαναφερθέντων κλασικών οικονομολόγων. Ο Sraffa απέρριψε την νεοκλασική θεωρία της αξίας, η οποία βασίζεται στην οριακή χρησιμότητα και την οριακή παραγωγικότητα. Αντίθετα, επανέφερε την κλασική προσέγγιση σύμφωνα με την οποία, οι τιμές καθορίζονται από τις αντικειμενικές συνθήκες παραγωγής (τεχνολογία, εργασία) και την κατανομή του εισοδήματος μεταξύ μισθών και κερδών.

Στο έργο του, ο Sraffa χρησιμοποιεί γραμμικά συστήματα εξισώσεων για να περιγράψει τον τρόπο με τον οποίο οι τιμές των αγαθών καθορίζονται από τις σχέσεις

παραγωγής. Το κύριο στοιχείο της ανάλυσής του είναι η έννοια του πλεονάσματος (*surplus*), δηλαδή της παραγωγής που υπερβαίνει τα απαραίτητα για την αναπαραγωγή του συστήματος. Αυτό το πλεόνασμα κατανέμεται ανάμεσα σε μισθούς και κέρδη, με την κατανομή να καθορίζεται από κοινωνικές και θεσμικές παραμέτρους.

Το υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου δομείται ως εξής. Αρχικά γίνεται αναλυτική περιγραφή του συστήματος τιμών απλής παραγωγής στη βάση του οποίου πραγματοποιείται και αναλύεται μεγάλο μέρος της εμπειρικής μελέτης. Συγκεκριμένα, περιγράφεται η σχέση τιμών παραγωγής–εργασιακών αξιών, καθώς και η σχέση χρηματικού ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους. Τέλος, αναλύεται η κάθετη ολοκλήρωση του συστήματος τιμών, καθώς αυτό δίνει τη δυνατότητα εξέτασης της κανονικοποιημένης μήτρας στον καθέτως ολοκληρωμένο τομέα παραγωγής.

1.2 Η σχέση τιμών παραγωγής–εργασιακών αξιών στο πλαίσιο του συνήθους υποδείγματος απλής παραγωγής

Θεωρούμε ένα κλειστό, γραμμικό σύστημα απλής παραγωγής³ (*single production*) και κυκλοφορούντος κεφαλαίου⁴ (*circulating capital*), το οποίο παράγει n εμπορεύματα (Sraffa, 1960). Υποθέτουμε τα κάτωθι⁵:

- i. Η εργασία και οι τεχνικοί συντελεστές παραγωγής είναι σταθεροί.
- ii. Η οικονομία είναι αμιγώς κερδοφόρα ή, ισοδύναμα, βιώσιμη και διαγωνοποιήσιμη.
- iii. Κάθε εμπόρευμα εισέρχεται άμεσα ή και έμμεσα στην παραγωγή όλων των εμπορευμάτων. Δηλαδή, όλα τα εμπορεύματα είναι «βασικά (*basic commodities*)» (Sraffa, 1960, pp. 7–8) και, έτσι, η μήτρα των άμεσων τεχνικών συντελεστών είναι μη-διασπώμενη.
- iv. Η τιμή οποιουδήποτε εμπορεύματος που λαμβάνεται ως εκροή στο τέλος της περιόδου παραγωγής είναι ίση με την τιμή του αντίστοιχου εμπορεύματος που χρησιμοποιήθηκε ως εισροή στην αρχή αυτής της περιόδου παραγωγής (στάσιμες τιμές).

³ Απλή παραγωγή έχουμε όταν κάθε κλάδος του υπό θεώρηση συστήματος παράγει ένα, και μοναδικό, ομοιογενές εμπόρευμα.

⁴ Θεωρούμε μια τεχνική παραγωγής η οποία απαιτεί μόνον κυκλοφορούντα κεφαλαιουχικά αγαθά (*circulating capital commodities*), δηλαδή κεφάλαιο το οποίο φθείρεται πλήρως κατά τη διάρκεια της περιόδου παραγωγής.

⁵ Η παρούσα ενότητα στηρίζεται στα Mariolis (2021c, pp. 56–64), Mariolis & Tsoulfidis (2018) και Mariolis (2021d).

- v. Το καθαρό προϊόν κατανέμεται μεταξύ κερδών και μισθών. Οι τελευταίοι καταβάλλονται στο τέλος της ενιαίας περιόδου παραγωγής (*ex post*), και δεν υπάρχουν αποταμιεύσεις από τους μισθούς.
- vi. Η εργασία μπορεί να θεωρηθεί ως ομοιογενής, όταν οι λόγοι των κλαδικών ωρομισθίων παραμένουν αμετάβλητοι.
- vii. Τόσο το ποσοστό κέρδους (ή το επιτόκιο) όσο και ο ποσοστιαίος ρυθμός επισώρευσης κεφαλαίου (ή ποσοστιαίος ρυθμός μεγέθυνσης) είναι διακλαδικώς ενιαία.

Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, δύνανται να προσδιοριστούν οι τιμές παραγωγής του οικονομικού συστήματος⁶, ήτοι

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{l}^T + (1+r)\mathbf{p}^T\mathbf{A} \quad (1)$$

όπου $\mathbf{p}^T$ είναι το $1 \times n$ διάνυσμα των τιμών παραγωγής, w το ενιαίο χρηματικό ωρομίσθιο, r το ενιαίο ποσοστό κέρδους, $\mathbf{l}^T (> \mathbf{0}^T)$ το $1 \times n$ διάνυσμα των εισροών σε εργασία, και $\mathbf{A} (\geq \mathbf{0})$ η μη-διασπώμενη (*irreducible*) $n \times n$ μήτρα των τεχνικών συντελεστών, με $\lambda_{A1} < 1$, δεδομένου ότι το οικονομικό σύστημα θεωρείται βιώσιμο/κερδοφόρο. Βάσει της εξίσωσης (1) μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) Για $r = -1$ λαμβάνουμε

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{l}^T$$

δηλαδή, το διάνυσμα τιμών παραγωγής είναι ανάλογο του διανύσματος των συντελεστών άμεσης εργασίας.

(ii) Για $r = 0$ λαμβάνουμε⁷

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{l}^T + \mathbf{p}^T\mathbf{A}$$

ή, επιλύοντας ως προς $\mathbf{p}^T$,

⁶ Το ανάστροφο διάνυσμα ενός $n \times 1$ διανύσματος $\mathbf{x}$ συμβολίζεται με $\mathbf{x}^T$ (διάνυσμα γραμμή ή αριστερό διάνυσμα), και ο διαγώνιος πίνακας που αποτελείται από τα στοιχεία του $\mathbf{x}$ συμβολίζεται με $\hat{\mathbf{x}}$. Επιπλέον, η τιμή λ_{A1} συμβολίζει την P–F ιδιοτιμή της ημι-θετικής $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$, και $(\mathbf{x}_{A1}, \mathbf{y}_{A1}^T)$ τα συνδεδεμένα με αυτή ιδιοδιανύσματα, καθώς, λ_{Ak} , με $k = 2, 3, \dots, n$ και $|\lambda_{A2}| \geq |\lambda_{A3}| \geq \dots \geq |\lambda_{An}|$ συμβολίζουν το μέτρο (*modulus*) των μη-δεσποζουσών (*non-dominant*) ιδιοτιμών, και $(\mathbf{x}_{Ak}, \mathbf{y}_{Ak}^T)$ τα συνδεδεμένα με αυτές ιδιοδιανύσματα. Τέλος, με $\mathbf{e} \equiv [1, 1, \dots, 1]^T$ συμβολίζεται το διάνυσμα-άθροισμα (*summation vector*), με $\mathbf{e}_i$ το μοναδιαίο διάνυσμα (*unit vector*) στο οποίο το στοιχείο i ισούται με τη μονάδα, και με $\mathbf{I}$ την $n \times n$ μοναδιαία μήτρα. Σημειώνεται ότι, τα γράμματα (ή οι αριθμοί) με έντονη γραφή (**bold**) δηλώνουν μήτρες ή διανύσματα. Για την παρουσίαση των θεωρημάτων Perron–Frobenius (P–F), βλ. Pasinetti (1977, pp. 267–276, Mathematical Appendix).

⁷ Η εν λόγω περίπτωση είναι γνωστή ως «καθαρά εργασιακή θεωρία της αξίας».

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{v}^T$$

όπου

$$\mathbf{v}^T \equiv [v_i] \equiv \mathbf{I}^T [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$$

δηλώνει το διάνυσμα των «καθέτως ολοκληρωμένων» συντελεστών εργασίας⁸ (Pasinetti, 1973, Sraffa, 1960, Appendix A) ή, διαφορετικά, των «εργασιακών αξιών» (σύμφωνα με την παραδοσιακή αντίληψη), δηλαδή, των άμεσων και έμμεσων απαιτήσεων σε εργασία προκειμένου να παραχθεί μία μονάδα καθαρού εμπορεύματος και, τέλος, η μήτρα $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} > \mathbf{0}$, γνωστή ως «αντίστροφη μήτρα του Leontief»⁹.

(iii) Για $w = 0$ λαμβάνουμε

$$\mathbf{p}^T = (1 + r)\mathbf{p}^T \mathbf{A}$$

δηλαδή, οι τιμές είναι ανάλογες του κόστους/των τιμών των μέσων παραγωγής. Καθώς ένα μη-θετικό διάνυσμα τιμών παραγωγής είναι οικονομικά μη-σημαντικό, συνεπάγεται ότι η τιμή $(1 + r)^{-1} (\equiv \lambda_{A1}^{-1})$ είναι η P-F ιδιοτιμή της μήτρας $\mathbf{A}$, ή

$$r = R \equiv \lambda_{A1}^{-1} - 1$$

και $\mathbf{p}^T$ είναι το αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας. Μόνον και μόνον όταν ισχύει $-1 \leq r < R$, τότε

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{l}^T [\mathbf{I} - (1 + r)\mathbf{A}]^{-1}$$

ή, διαφορετικά

$$\mathbf{p}^T = w[\mathbf{l}^T + (1 + r)\mathbf{l}^T \mathbf{A} - (1 + r)^2 \mathbf{l}^T \mathbf{A}^2 + \dots]^{-1} \quad (2).$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η αναγωγή των τιμών σε ποσότητες εργασίας σταθμισμένες με το ποσοστό κέρδους ή, αλλιώς, «αναγωγή σε χρονολογημένες ποσότητες εργασίας (*dated quantities*)» (Sraffa 1960, pp. 34–35).

Αν το διάνυσμα της εργασίας, $\mathbf{l}^T$, είναι το αριστερό P-F ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\mathbf{A}$, δηλαδή $\mathbf{l}^T \mathbf{A} = \lambda_{A1} \mathbf{l}^T$, και ανακαλώντας ότι $r = R \equiv \lambda_{A1}^{-1} - 1$, τότε η σχέση (2) ανάγεται σε

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{l}^T (1 + R)(R - r)^{-1}$$

ή, διαφορετικά,

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{v}^T R(R - r)^{-1}$$

⁸ Δηλαδή, των «ενσωματωμένων» ποσοτήτων εργασίας.

⁹ Στη μήτρα $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ η στήλη i περιλαμβάνει τα ετερογενή εμπορεύματα που απαιτούνται άμεσα και έμμεσα σε ολόκληρο το οικονομικό σύστημα προκειμένου να παραχθεί μία μονάδα του εμπορεύματος i ως τελικό προϊόν (βλ. π.χ. Miller & Blair, 2009, pp. 21,31–34).

δηλαδή, το διάνυσμα των τιμών είναι ανάλογο του διανύσματος των άμεσων συντελεστών εργασίας και, ταυτοχρόνως, ανάλογο του διανύσματος των καθέτως ολοκληρωμένων συντελεστών εργασίας (εργασιακών αξιών). Ως εκ τούτου, συνεπάγεται ότι, για $r = 0$ (ή $\mathbf{I}^T \mathbf{A} = \lambda_{A1} \mathbf{I}^T$) ισχύει η λεγόμενη εργασιακή θεωρία της αξίας, ενώ για $w = 0$ ισχύει η λεγόμενη κεφαλαιουχική θεωρία της αξίας¹⁰.

1.3 Κάθετη ολοκλήρωση

Προχωρώντας την ανάλυση, θα ήταν σκόπιμο να επικεντρωθούμε στην κανονικοποιημένη (*normalized*) καθέτως ολοκληρωμένη αναπαράσταση του συστήματος των τιμών. Αναδιατάσσοντας την εξίσωση (1), λαμβάνουμε

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{v}^T + r\mathbf{p}^T \mathbf{H} \quad (3)$$

ή

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{v}^T + \rho \mathbf{p}^T \mathbf{J} \quad (4)$$

ή, όταν και μόνον όταν $0 \leq \rho < 1$,

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{v}^T [\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}]^{-1} = w\mathbf{v}^T \sum_{h=0}^{+\infty} (\rho \mathbf{J})^h = w[\mathbf{v}^T + \rho \mathbf{v}^T \mathbf{J} + \rho^2 \mathbf{v}^T \mathbf{J}^2 + \dots] \quad (5)$$

όπου $\mathbf{H} \equiv [\mathbf{h}_i] \equiv \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} (= [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}) (> \mathbf{0})$ είναι η μήτρα των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών¹¹ (Pasinetti, 1973). Επιπλέον, το μέγεθος $\rho \equiv rR^{-1}$, $0 \leq \rho \leq 1$, δηλώνει το σχετικό ποσοστό κέρδους, το οποίο ισούται με το μερίδιο των κερδών στο προϊόν στο Σραφφαϊανό Πρότυπο σύστημα (*Sraffian Standard System*), και το μέγεθος $R \equiv \lambda_{A1}^{-1} - 1 = \lambda_{H1}^{-1}$ δηλώνει το μέγιστο δυνατό ποσοστό κέρδους (δηλαδή, εκείνο το ποσοστό κέρδους το οποίο αντιστοιχεί σε μηδενικό ωρομίσθιο, $w = 0$, και θετικό διάνυσμα τιμών, $\mathbf{p}^T > \mathbf{0}$), το οποίο ισούται με το λόγο του καθαρού προϊόντος ως προς τα μέσα παραγωγής στο Σραφφαϊανό Πρότυπο σύστημα (Sraffa, 1960, pp. 21–23, §§28–31). Τέλος, το μέγεθος $\mathbf{J} \equiv \mathbf{R}\mathbf{H}$ είναι μια θετική μήτρα (η κανονικοποιημένη

¹⁰ Οι δύο «πολικές θεωρίες της αξίας» (εργασιακή και κεφαλαιουχική) ισχύουν ταυτοχρόνως όταν και μόνον όταν $w\mathbf{v}^T = (1 + R)w\mathbf{v}^T \mathbf{A}$.

¹¹ Σύμφωνα με τον Pasinetti (1973), κάθε συντελεστής v_i (από τη σχέση $\mathbf{v}^T \equiv [v_i] \equiv \mathbf{I}^T [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$) εκφράζει την ποσότητα εργασίας που απαιτείται άμεσα και έμμεσα σε ολόκληρο το οικονομικό σύστημα προκειμένου να παραχθεί μία μονάδα του εμπορεύματος i ως τελικό προϊόν. Καλούμε τον εν λόγω συντελεστή *καθέτως ολοκληρωμένο συντελεστή εργασίας* για το εμπόρευμα i . Ομοίως, κάθε στήλη του διανύσματος $\mathbf{h}_i$ εκφράζει τη σειρά των ετερογενών ποσοτήτων των εμπορευμάτων $1, 2, \dots, n$, τα οποία απαιτούνται άμεσα και έμμεσα προκειμένου να παραχθεί μία μονάδα του εμπορεύματος i ως τελικό προϊόν. Το βαθμωτό v_i και το διάνυσμα $\mathbf{h}_i$, αποτελούν, μαζί, αυτό που εδώ καλούμε *καθέτως ολοκληρωμένο κλάδο* για την παραγωγή του εμπορεύματος i .

μήτρα των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών), της οποίας η P–F ιδιοτιμή ισούται με 1, $\lambda_{J1} = R\lambda_{H1} = 1$ (όπως εξάγεται από την εξίσωση (3) όταν θέσουμε $w = 0$), και οι απόλυτες τιμές των ιδιοτιμών της μήτρας $\mathbf{J}$ (της εξίσωσης 4) είναι μικρότερες από αυτών της μήτρας $\mathbf{A}$ (της εξίσωσης 1), δηλαδή ισχύει $|\lambda_{Jk}| < |\lambda_{Ak}| |\lambda_{A1}^{-1}|$ (Mariolis & Tsoulfidis, 2016b, p. 22).

Η εξίσωση (4) αναπαριστά την αναγωγή των τιμών σε χρονολογημένες ποσότητες εργασιακών αξιών, και συνεπάγεται ότι κάθε στοιχείο του διανύσματος των τιμών εκφρασμένων σε όρους του χρηματικού ωρομισθίου (*labour-commanded prices*),

$$\mathbf{P}^T \equiv \mathbf{p}_w^T \equiv w^{-1} \mathbf{p}^T = \mathbf{v}^T [\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}]^{-1} \quad (6)$$

είναι μια αυστηρά αυξανόμενη και κυρτή συνάρτηση του σχετικού ποσοστού κέρδους, ρ , που τείνει στο συν (στο μείον) άπειρο καθώς το ρ τείνει στο 1 από κάτω (από πάνω). Παραγωγίζοντας την εξίσωση (6) ως προς ρ , λαμβάνουμε

$$\dot{\mathbf{p}}_w^T \equiv d\mathbf{p}_w^T / d\rho = \mathbf{v}^T [\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}]^{-1} \mathbf{J} [\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}]^{-1} = \mathbf{p}_w^T \mathbf{J} [\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}]^{-1}.$$

Τέλος, από την εξίσωση (6) διαπιστώνουμε ότι η μήτρα $\rho \mathbf{J}$ είναι συγκλίνουσα, ήτοι $(\rho \mathbf{J})^k \rightarrow \mathbf{0}$, για $k \rightarrow +\infty$.

1.4 Η σχέση ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους στο σύστημα απλής παραγωγής

Αν ένα τυχαίο εμπόρευμα $\mathbf{z}$, με $\mathbf{v}^T \mathbf{z} = 1$, επιλεγθεί ως μέτρο της αξίας ή, αλλιώς, *numéraire*, δηλαδή ισχύει $\mathbf{p}^T \mathbf{z} = 1$, τότε από τις εξισώσεις (4) και (5) συνεπάγεται ότι

$$w = W - \rho k_z = 1 - \rho k_z$$

και, αντιστοίχως,

$$w = (\mathbf{v}^T [\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}]^{-1} \mathbf{z})^{-1} = \det[\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}] (\mathbf{v}^T \text{adj}[\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}] \mathbf{z})^{-1} \quad (7\alpha)$$

και

$$\mathbf{p}^T(\rho) = (\mathbf{v}^T [\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}]^{-1} \mathbf{z})^{-1} \mathbf{v}^T [\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}]^{-1} \quad (7\beta)$$

όπου $W \equiv (\mathbf{p}^T \mathbf{z})(\mathbf{v}^T \mathbf{z})^{-1} = 1$ και

$$k_z = \mathbf{p}^T \mathbf{J} \mathbf{z} (\mathbf{v}^T \mathbf{z})^{-1} = \mathbf{p}^T \mathbf{J} \mathbf{z}.$$

Η εξίσωση (7α) δίνει μία σχέση ανταλλαγής (*trade-off*) μεταξύ μισθών, w , και κερδών, r , γνωστή ως «καμπύλη ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους», η οποία μπορεί να δώσει το πολύ $3n - 6$ σημεία καμπής, και η εξίσωση (7β) δίνει τη σχέση τιμών παραγωγής ως συναρτήσεις του σχετικού ποσοστού κέρδους, η οποία μπορεί να δώσει το πολύ $2n - 4$

ακρότατα (χωρίς, ωστόσο, να είναι βέβαιο ότι όλα θα βρίσκονται στο διάστημα $0 \leq \rho \leq 1$).

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά την εξίσωση (4) με το Σραφφαϊανό Πρότυπο εμπόρευμα (1960, Ch. 4 & 5) (*Sraffa's Standard Commodity*), δηλαδή $\mathbf{s} \equiv [\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{x}_{A1}$, με $\mathbf{I}^T \mathbf{x}_{A1} = 1$, λαμβάνουμε

$$\mathbf{p}^T \mathbf{s} = w \mathbf{v}^T \mathbf{s} + \rho \mathbf{p}^T \mathbf{J} \mathbf{s}$$

ή, εφόσον $\mathbf{v}^T \mathbf{s} = 1$ και $\mathbf{J} \mathbf{s} = \mathbf{s}$,

$$w = (1 - \rho) \mathbf{p}^T \mathbf{s} \quad (8)$$

όπου το $\mathbf{p}^T \mathbf{s}$ ισούται με την αξία του καθαρού προϊόντος (εκφρασμένο σε όρους του εμπορεύματος $\mathbf{z}$) στο Σραφφαϊανό Πρότυπο σύστημα. Από αυτό προκύπτει ότι,

$$\rho = 1 - w(\mathbf{p}^T \mathbf{s})^{-1}$$

το οποίο ισούται με το μερίδιο των κερδών στο Πρότυπο σύστημα, και το R ισούται με το λόγο καθαρού προϊόντος–κεφαλαίου στο Πρότυπο σύστημα. Ως εκ τούτου, το k_z ισούται με το λόγο του κεφαλαίου–καθαρού προϊόντος του καθέτως ολοκληρωμένου τομέα παραγωγής, ο οποίος παράγει το εμπόρευμα *numéraire*, προς το λόγο του κεφαλαίου–καθαρού προϊόντος στο Πρότυπο σύστημα.

Αν το διάνυσμα $\mathbf{v}^T (\mathbf{I}^T)$ είναι το P–F ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\mathbf{J}$ (της $\mathbf{A}$) ή, εναλλακτικά, αν το Πρότυπο εμπόρευμα επιλεγεί ως μέτρο της αξίας, δηλαδή $\mathbf{z} = \mathbf{s}$, τότε $k_z = \mathbf{p}^T \mathbf{s} = 1$ και

$$w = w^S \equiv 1 - \rho \quad (9)$$

δηλαδή, η καμπύλη ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους είναι γραμμική, όπως συμβαίνει και στην περίπτωση ενός οικονομικού συστήματος που παράγει μόνον ένα εμπόρευμα. Όταν $\mathbf{z} = \mathbf{s}$, από τις εξισώσεις (4) και (5) συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{p}^T = (1 - \rho) \mathbf{v}^T + \rho \mathbf{p}^T \mathbf{J} \quad (10)$$

$$\mathbf{p}^T = (1 - \rho) [\mathbf{v}^T + \rho \mathbf{v}^T \mathbf{J} + \rho^2 \mathbf{v}^T \mathbf{J}^2 + \dots] \quad (11).$$

Για $\rho = 1$, το $\mathbf{p}^T$ συνιστά αριστερό P–F ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\mathbf{J}$, εκφρασμένο σε όρους του Πρότυπου εμπορεύματος, δηλαδή

$$\mathbf{p}^T (1) = (\mathbf{y}_{J1}^T \mathbf{s})^{-1} \mathbf{y}_{J1}^T = (\mathbf{y}_{J1}^T [\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{x}_{A1})^{-1} \mathbf{y}_{J1}^T$$

ή, εφόσον ισχύει $[\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{x}_{A1} = (1 - \lambda_{A1}) \mathbf{x}_{A1}$, και επειδή οι μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{J}$ έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα, λαμβάνουμε

$$\mathbf{p}^T(1) = [(1 - \lambda_{A1})\mathbf{y}_{J1}^T \mathbf{x}_{J1}]^{-1} \mathbf{y}_{J1}^T \quad (12).$$

Η εξίσωση (10) δείχνει ότι το μέγεθος p_j είναι ένας κυρτός συνδυασμός των μεγεθών v_j και $\mathbf{p}^T \mathbf{J} \mathbf{e}_j$, όπου το τελευταίο ισούται με το λόγο των μέσων παραγωγής στον κα-
θέτως ολοκληρωμένο τομέα παραγωγής που παράγει το εμπόρευμα j ως προς τα μέσα
παραγωγής στο Πρότυπο σύστημα. Στον αντίποδα, η εξίσωση (11) δίνει τις τιμές πα-
ραγωγής, εκφρασμένες σε όρους του Πρότυπου εμπορεύματος, ως πολυωνυμικές συ-
ναρτήσεις του σχετικού ποσοστού κέρδους, ρ ¹².

¹² Όταν όλοι οι μισθοί καταβάλλονται *ex ante*, τότε η καμπύλη χρηματικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρ-
δους παύει να είναι γραμμική, ήτοι

$$w = (1 + r)^{-1} (1 - rR^{-1}) = (1 + r)^{-1} (1 - \rho).$$

Κεφάλαιο 2. Συμπαραγωγή

2.1 Εισαγωγή

Η καθαρή συμπαραγωγή εμπορευμάτων μέσω εγχωρίως παραγομένων εμπορευμάτων, αλλά και εισαγομένων εμπορευμάτων, είναι ο κανόνας της οικονομικής πραγματικότητας. Και οι δύο όψεις αυτού του κανόνα, δηλαδή η συμπαραγωγή και το εξωτερικό εμπόριο, συνεπάγονται ότι, σε γενικές γραμμές, οι σχετικές τιμές των εμπορευμάτων εξαρτώνται από το πρότυπο της τελικής ζήτησης ή, τυπικά μιλώντας, το «*θεώρημα της μη υποκατάστασης*», το οποίο μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Dmitriev ([1898] 1974), δεν είναι γενικής ισχύος. Στην περίπτωση της συμπαραγωγής, κάθε εμπόρευμα δύναται να παραχθεί από διαφορετικούς κλάδους, ενώ κάθε κλάδος μπορεί να παράγει περισσότερα του ενός εμπορεύματα. Επομένως, υπάρχει μια πρόσθετη πηγή εννοιολογικών και αναλυτικών δυσκολιών για την παραδοσιακή θεωρία της αξίας (Μαριόλης, 2012).

Το υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου δομείται ως εξής. Αρχικά αναλύεται το σύστημα τιμών–εργασιακών αξιών στο πλαίσιο της συμπαραγωγής, έπειτα εξετάζονται οι έννοιες των «*all-engaging*» και «*all-productive*» συστημάτων και, τέλος, περιγράφεται η σχέση ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους του εν λόγω υποδείγματος.

2.2 Η σχέση τιμών παραγωγής–εργασιακών αξιών στα πλαίσια ενός υποδείγματος συμπαραγωγής

Θεωρούμε ένα κλειστό σύστημα παραγωγής το οποίο συγκροτείται από n κλάδους που παράγουν περισσότερα του ενός εμπορεύματα. Λαμβάνοντας υπόψιν τις υποθέσεις του Κεφαλαίου 1.2, υποθέτουμε ότι η οικονομία έχει n γραμμικές διαδικασίες παραγωγής. Ως εκ τούτου, πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες εξισώσεις και ανισότητες (von Neumann, 1945, Sraffa, 1960)¹³:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{B} \leq w \mathbf{l}^T (1+r) \mathbf{p}^T \mathbf{A} \quad (13)$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = w \mathbf{l}^T \mathbf{x} (1+r) \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (14)$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{f} = 1 \quad (15)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{x} \geq c (\mathbf{l}^T \mathbf{x}) \mathbf{f} + (1+g) \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (16)$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = c (\mathbf{l}^T \mathbf{x}) \mathbf{p}^T \mathbf{f} + (1+g) \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (17)$$

¹³ Το παρόν κεφάλαιο βασίζεται στο Mariolis (2021b, pp. 146-149).

$$\mathbf{p}^T \geq \mathbf{0}^T, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}^T, [w, c] \geq \mathbf{0}^T \quad (18)$$

όπου $\mathbf{p}^T$ δηλώνει το διάνυσμα των εμπορευματικών τιμών, $\mathbf{B}$ τη μήτρα εκροών του συστήματος, w το ενιαίο χρηματικό ωρομίσθιο, $r(\geq 0)$ το εξωγενώς δοσμένο ενιαίο ποσοστό κέρδους, $\mathbf{l}^T$ το διάνυσμα των εισροών σε εργασία, $\mathbf{A}$ τη μήτρα των εισροών του συστήματος, $\mathbf{x}$ το $m \times 1$ (ημι-)θετικό διάνυσμα των επιπέδων λειτουργίας των κλάδων, $\mathbf{f}$ το εξωγενώς δοσμένο $n \times 1$ (ημι-)θετικό διάνυσμα της σύνθεσης της ενιαίας κατανάλωσης (που λειτουργεί και ως *numéraire*), c ένα βαθμωτό που δηλώνει το ύψος της συνολικής (*total*) κατανάλωσης ανά μονάδα απασχολούμενης εργασίας και, τέλος, $g(\geq 0)$ τον ενιαίο ρυθμό μεγέθυνσης.

Η λογική αυτή εφαρμόζεται ανεξάρτητα από το εάν το σύστημα είναι τετράγωνο, τα r, g ενιαία, κ.λπ. Η διερεύνηση του παραπάνω συστήματος έχει δείξει ότι αυτό είναι απολύτως δυνατόν να εμφανίζει τελείως διαφορετικές ιδιότητες από αυτές ενός συστήματος απλής παραγωγής, καθώς και ότι μάλλον πολύ λίγα πράγματα δύνανται να λεχθούν *a priori* για τη συμπεριφορά ενός συστήματος συμπαραγωγής¹⁴.

Η σχέση (13) συνεπάγεται ότι καμία διαδικασία δεν είναι σε θέση να καταβάλει επιπλέον κέρδη. Η εξίσωση (14) συνεπάγεται, επίσης λόγω των σχέσεων (18), ότι όταν μία διεργασία δεν είναι σε θέση να καταβάλει το ισχύον ποσοστό κέρδους, δεν λειτουργεί. Η σχέση (16) υποδηλώνει ότι οι «απαιτήσεις χρήσης» (Straffa 1960, p. 43, υποσημείωση 2), δηλαδή η ζήτηση για συσσώρευση κεφαλαίου και η κατανάλωση, ικανοποιούνται. Η εξίσωση (17), επίσης λόγω των σχέσεων (18), είναι ο «κανόνας των ελεύθερων αγαθών», δηλαδή τα επιπλέον παραγόμενα αγαθά αποκτούν μηδενική τιμή. Τέλος, η εξίσωση (15) καθορίζει το *numéraire*. Η προσεκτικότερη εξέταση του παραπάνω συστήματος μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι, κυρίως όταν $g < r$, υπάρχουν θεμελιώδεις και σημαντικές διαρθρωτικές διαφορές μεταξύ των περιπτώσεων της απλής παραγωγής και της συμπαραγωγής, γεγονός που υποδηλώνει ότι οι νόμοι που διέπουν τη συμπεριφορά των οικονομιών απλής παραγωγής δεν ισχύουν για όλες τις οικονομίες συμπαραγωγής.

Προχωρώντας την ανάλυση, θεωρούμε ένα βιώσιμο και κερδοφόρο $n \times n$ οικονομικό σύστημα συμπαραγωγής, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$\mathbf{p}^T \mathbf{B} = w \mathbf{l}^T + (1+r) \mathbf{p}^T \mathbf{A} \quad (19).$$

¹⁴ Για μία σύντομη της σχετικής συζήτησης, βλ. π.χ. Bidard (1991, Ch. 17 & 1997), Kurz & Salvadori, (1995, Ch. 8) και Μαριόλης (2010, σσ. 60–70).

Κατά τον Marx, οι «εργασιακές αξίες» αποτελούν μεγέθη τα οποία (i) ορίζονται βάσει της πράγματι χρησιμοποιούμενης τεχνικής παραγωγής, (ii) ικανοποιούν την ιδιότητα της αθροιστικότητας (*additivity*), δηλαδή η «εργασιακή αξία» του ακαθάριστου προϊόντος (τόσο κάθε κλάδου όσο και του συστήματος) ισούται με την «εργασιακή αξία» των φθαρέντων μέσων παραγωγής συν την ποσότητα της άμεσης εργασίας, (iii) είναι μονοσήμαντα προσδιορισμένα και (iv) είναι θετικά¹⁵.

Ως εκ τούτου, οι εργασιακές αξίες, θα μπορούσαν να οριστούν ως οι τιμές εργασίας εκφρασμένες σε όρους ωρομισθίου (δηλαδή, μετρημένες με το χρηματικό ωρομίσθιο) που αντιστοιχούν σε μηδενικό κέρδος, δηλαδή

$$w^{-1} \mathbf{p}^T \mathbf{B} = \mathbf{I}^T + w^{-1} \mathbf{p}^T \mathbf{A}$$

ή, θέτοντας $(\mathbf{v}^a)^T \equiv w^{-1} \mathbf{p}^T$,

$$(\mathbf{v}^a)^T \mathbf{B} = \mathbf{I}^T + (\mathbf{v}^a)^T \mathbf{A}$$

ή, υπό την προϋπόθεση ότι η μήτρα $[\mathbf{B} - \mathbf{A}]$ είναι μη-ιδιάζουσα¹⁶,

$$(\mathbf{v}^a)^T = \mathbf{I}^T [\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1} \quad (20).$$

Οι αξίες που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο καλούνται «προσθετικές εργασιακές αξίες». Δηλαδή, ορίζονται βάσει της πράγματι χρησιμοποιούμενης τεχνικής παραγωγής, ικανοποιούν την ιδιότητα της αθροιστικότητας και παραστούν τους «πολλαπλασιαστές απασχόλησης»¹⁷. Το στοιχείο v_j ισούται με την εργασία που απαιτείται προκειμένου να παραχθεί ένα καθαρό προϊόν το οποίο αποτελείται αποκλειστικά από μία μονάδα του εμπορεύματος j . Ωστόσο, μπορεί να είναι μη-μοναδικά καθορισμένο (όταν η μήτρα $[\mathbf{B} - \mathbf{A}]$ είναι ιδιάζουσα) ή αρνητικό (Steedman, 1975). Πιο συγκεκριμένα, ορισμένα v_j είναι αρνητικά όταν και μόνον όταν ένας μη-αρνητικός γραμμικός συνδυασμός μερικών διαδικασιών υποδηλώνει ένα υψηλότερο καθαρό προϊόν ανά μονάδα εργασίας από έναν μη-αρνητικό συνδυασμό των υπόλοιπων διαδικασιών (Filippini & Filippini, 1982, pp. 387–388). Η πιθανή αρνητικότητα του στοιχείου v_j ή και της αντίστοιχης μήτρας των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών, $\mathbf{H} \equiv \mathbf{A}[\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1}$, δεν υποδηλώνει ότι η απαιτούμενη ποσότητα εργασίας για την παραγωγή ενός εμπορεύματος είναι αρνητική, αλλά ότι το καθαρό προϊόν της υπό εξέταση οικονομίας δεν μπορεί να περιλαμβάνει μόνο αυτό το εμπόρευμα. Επομένως, συνεπάγεται ότι, όταν επιτρέπεται η

¹⁵ Για μια αναλυτική προσέγγιση, βλ. Σώκλης (2012, σ. 39) και τις εκεί αναφορές.

¹⁶ Δηλαδή, η ορίζουσα της μήτρας είναι διάφορη του μηδενός.

¹⁷ Σύμφωνα με τον Kahn (1931) και Sraffa (1960, p. 60).

συμπαράγωγή εμπορευμάτων, οι προαναφερθείσες Μαρξικές ιδιότητες δεν ικανοποιούνται απαραίτητως (Steedman, 1975).

2.3 «All-engaging» και «all-productive» συστήματα παραγωγής

Η εξίσωση (19) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\mathbf{p}^T [\mathbf{B} - \mathbf{A}] = w\mathbf{l}^T + r\mathbf{p}^T \mathbf{A} \quad (21)$$

ή, διαφορετικά,

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{l}^T [\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1} + r\mathbf{p}^T \mathbf{A} [\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1}.$$

Στην περίπτωση που ισχύει $[\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1} > \mathbf{0}$ τότε το υπό εξέταση σύστημα ονομάζεται «all-engaging»¹⁸ και χαρακτηρίζεται από ένα θετικό διάνυσμα αξιών, ενώ οι τιμές παραγωγής είναι θετικές για $0 \leq r \leq R = \lambda^{-1} - 1$, όπου λ είναι η μοναδική θετική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det[\mathbf{B} - (1+r)\mathbf{A}]^{-1}$ που συνδέεται με θετικό ιδιοδιάνυσμα. Στην περίπτωση που ισχύει $[\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1} \geq \mathbf{0}$ τότε το υπό εξέταση σύστημα ονομάζεται «all-productive» και χαρακτηρίζεται από ένα ημι-θετικό διάνυσμα αξιών, ενώ οι τιμές παραγωγής είναι ημι-θετικές για $0 \leq r \leq R = \lambda^{-1} - 1$.

Ωστόσο, θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω ειδικές περιπτώσεις αποτελούν ικανή, αλλά όχι και αναγκαία συνθήκη για να την οικονομική σημαντικότητα των προσθετικών εργασιακών αξιών και των τιμών παραγωγής. Για παράδειγμα, μπορεί η μήτρα $[\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1}$ να περιέχει και αρνητικά στοιχεία (και, άρα, το σύστημα να μην είναι all-productive), αλλά να ισχύει $\mathbf{l}^T [\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1} \geq \mathbf{0}$ και, επομένως, το διάνυσμα των προσθετικών εργασιακών αξιών να είναι οικονομικά σημαντικό. Περαιτέρω, εάν υποθέσουμε ότι η μήτρα $[\mathbf{B} - (1+r)\mathbf{A}]$ είναι μη-ιδιάζουσα, η σχέση (19) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\mathbf{p}^T = w\mathbf{l}^T \mathbf{E}(r_0) \quad (22)$$

όπου $\mathbf{E}(r_0) \equiv [\mathbf{B} - (1+r)\mathbf{A}]^{-1}$. Ακόμα και εάν το υπό εξέταση σύστημα δεν είναι all-engaging, μπορεί να χαρακτηρίζεται από $\mathbf{E}(r_0) > \mathbf{0}$ για ένα διάστημα τιμών του ποσοστού κέρδους. Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα ονομάζεται «r0-all-engaging» και συμπεριφέρεται ως ένα μη-διασπώμενο σύστημα απλής παραγωγής για $r_0 \leq r \leq R$,

¹⁸ Η έννοια των «all-engaging» («all-productive») συστημάτων, η οποία εισήχθη από τον Schefold, είναι εξαιρετικής σημασίας, καθώς αντιστοιχεί σε συστήματα συμπαράγωγής τα οποία διατηρούν όλες τις ουσιώδεις ιδιότητες των μη-διασπώμενων (διασπώμενων) συστημάτων απλής παραγωγής. Αναλυτικά, βλ. Schefold (1971, pp. 34–35, 1978b), Kurz & Salvadori (1995, pp. 238–240) και Bidard (1996).

όπου r_0 είναι η μικρότερη τιμή του ποσοστού κέρδους για την οποία ισχύει $\mathbf{E}(r_0) > \mathbf{0}$.

Άρα, ένα « r_0 -all-engaging» σύστημα χαρακτηρίζεται από $\mathbf{p}^T > \mathbf{0}^T$ για $r_0 \leq r \leq R$.

Επιπλέον, η σχέση (22) μπορεί να χαρακτηρίζεται και από $\mathbf{E}(r_0) \geq \mathbf{0}$. Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα ονομάζεται « r_0 -all-productive» και συμπεριφέρεται ως ένα διασπώμενο σύστημα απλής παραγωγής για $r_0 \leq r \leq R$, όπου r_0 είναι η μικρότερη τιμή του ποσοστού κέρδους για την οποία ισχύει $\mathbf{E}(r_0) \geq \mathbf{0}$. Επομένως, ένα « r_0 -all-productive» σύστημα χαρακτηρίζεται από $\mathbf{p}^T \geq \mathbf{0}^T$ για $r_0 \leq r \leq R$.

Ωστόσο, ακόμα και εάν δεν υπάρχει κανένα διάστημα του ποσοστού κέρδους για το οποίο να ισχύει $\mathbf{E}(r_0) > \mathbf{0}$, είναι δυνατόν οι τιμές παραγωγής να είναι οικονομικά σημαντικές λόγω του ότι δεν αποκλείεται να ισχύει $\mathbf{I}^T \mathbf{E}(r_0) > \mathbf{0}$.

Η σχέση $\mathbf{I}^T \mathbf{E}(r_0) > \mathbf{0}$ αποτελεί μία ικανή συνθήκη για την ύπαρξη ενός διαστήματος του ποσοστού κέρδους στο οποίο ένα σύστημα συμπαραγωγής συμπεριφέρεται ως ένα μη-διασπώμενο σύστημα απλής παραγωγής υπό την έννοια ότι σε αυτά τα συστήματα αντιστοιχούν θετικές τιμές παραγωγής και τιμές παραγωγής σε όρους του χρηματικού ωρομισθίου, οι οποίες αυξάνονται με το ποσοστό κέρδους. Η διερεύνηση δύναται να βασισθεί στο ακόλουθο θεώρημα (Bidard, 1996, p. 328). Έστω τα ιδιοσυστήματα των μητρών $\{\mathbf{B}, \mathbf{A}\}$, ήτοι

$$\lambda \mathbf{B} \chi = \mathbf{A} \chi$$

$$\lambda \psi^T \mathbf{B} = \psi^T \mathbf{A}.$$

Το σύστημα $\{\mathbf{B}, \mathbf{A}\}$ είναι « r_0 -all-engaging» αν υπάρχουν $[\lambda, \chi, \psi^T] > \mathbf{0}$, όπου το χ είναι προσδιορισμένο εξαιρέσει βαθμωτού. Σε αυτή την περίπτωση, το μέγεθος $\lambda^{-1} - 1$ αντιπροσωπεύει το μέγιστο εφικτό ρυθμό ανάπτυξης (και κέρδους), όπως ορίζεται από τον von Neumann (1945), το ψ^T είναι διάνυσμα των τιμών παραγωγής και το χ είναι το διάνυσμα των επιπέδων παραγωγής του Σραφφαϊανού Προτύπου Συστήματος (Sraffa, 1960, Ch. 8).

2.4 Η σχέση ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους σε συστήματα συμπαραγωγής

Βάσει των υποθέσεων της προηγούμενης ενότητας, οι τιμές παραγωγής ενός συστήματος συμπαραγωγής περιγράφονται σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις

$$\mathbf{p}^T \mathbf{B} = w \mathbf{l}^T + (1 + r) \mathbf{p}^T \mathbf{A}$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{z} = 1.$$

Εφόσον η μήτρα $[\mathbf{B} - (1+r)\mathbf{A}]$ είναι μη-ιδιάζουσα, λαμβάνουμε το εξής

$$w = [\mathbf{I}^T \mathbf{E}(r) \mathbf{z}]^{-1} \quad (23).$$

Η εξίσωση (23) δίνει μία σχέση ανταλλαγής μεταξύ ωρομισθίου και ποσοστού κέρδους στην υπό εξέταση οικονομία (καμπύλη $w-r$). Ωστόσο, ακόμα και εάν η $w-r$ καμπύλη ορίζεται, τίποτα δεν εγγυάται ότι η εξίσωση (23) έχει οικονομικό νόημα, καθώς δεν αποκλείεται να μην υπάρχει διάστημα του ποσοστού κέρδους όπου οι τιμές παραγωγής να είναι οικονομικά σημαντικές. Ακόμα και αν υπάρχει ένα τέτοιο διάστημα, η κλίση της καμπύλης $w-r$ δεν είναι *a priori* γνωστή. Ως εκ τούτου, και σε αντίθεση με ό,τι ισχύει στις περιπτώσεις απλής παραγωγής, στα συστήματα συμπαραγωγής η καμπύλη $w-r$ δεν είναι κατ' ανάγκην φθίνουσα και, επομένως, είναι δυνατόν σε μία τιμή του ωρομισθίου να αντιστοιχούν περισσότερες από μία οικονομικά σημαντικές λύσεις για τα $(\mathbf{p}^T, r)$.

Εν αντιθέσει, εάν η υπό εξέταση οικονομία είναι «*all-engaging*» («*all-productive*»), δηλαδή ισχύει $[\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1} > \mathbf{0}$ ($[\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1} \geq \mathbf{0}$), η σχέση (23) ορίζει μία γνησίως φθίνουσα και οικονομικά σημαντική συνάρτηση ανάμεσα στο ωρομίσθιο και το ποσοστό κέρδους για $0 \leq r \leq R$.

Ωστόσο, ακόμα και εάν μήτρα $[\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1}$ δεν είναι (ημι-)θετική, τότε υπάρχει πάντοτε ένα διάστημα του ποσοστού κέρδους όπου η καμπύλη $w-r$ είναι γνησίως φθίνουσα και οικονομικά σημαντική στην περίπτωση που το σύστημα είναι «*r₀-all-engaging*» («*r₀-all-productive*»), εν ολίγοις στην περίπτωση που ισχύει $\mathbf{E}(r_0) > \mathbf{0}$ ($\mathbf{E}(r_0) \geq \mathbf{0}$). Στην τελευταία περίπτωση η καμπύλη $w-r$ είναι πάντοτε γνησίως φθίνουσα για $r_0 \leq r \leq R$.

Παρόλα αυτά, ακόμα και εάν δεν υπάρχει ένα διάστημα του ποσοστού κέρδους στο οποίο η μήτρα $\mathbf{E}(r_0)$ να είναι (ημι-)θετική, δεν αποκλείεται η καμπύλη $w-r$ να είναι γνησίως φθίνουσα για οποιοδήποτε *numéraire*. Κάτι τέτοιο μπορεί να διερευνηθεί μέσω της μελέτης της κίνησης των τιμών σε όρους ωρομισθίου, $\mathbf{p}^T w^{-1}$, συναρτήσεως του ποσοστού κέρδους, δηλαδή στην περίπτωση όπου $\mathbf{I}^T \mathbf{E}(r_0) > 0$. Εάν και μόνον εάν κάθε στοιχείο του διανύσματος των τιμών σε όρους ωρομισθίου αποτελεί γνησίως αύξουσα συνάρτηση του ποσοστού κέρδους, τότε η καμπύλη $w-r$ είναι γνησίως φθίνουσα ανεξάρτητα από το ποιο είναι το *numéraire*.

Τέλος, ορισμένες τιμές σε όρους ωρομισθίου είναι φθίνουσες συναρτήσεις του ποσοστού κέρδους εάν και μόνον εάν υπάρχει ένας μη-αρνητικός γραμμικός συνδυασμός των διαδικασιών παραγωγής ο οποίος να παράγει ένα υψηλότερο καθαρό προϊόν από έναν μη-αρνητικό γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων, ενώ η αξία των εισροών των πρώτων είναι χαμηλότερη (βλ. Filippini and Filippini, 1982, pp.389–390; Salvadori and Steedman, 1988, p. 181).

Κεφάλαιο 3. Ελεγχσιμότητα και παρατηρησιμότητα συστημάτων

3.1 Εισαγωγή

Οι έννοιες της «ελεγχσιμότητας (*controllability*)» και «παρατηρησιμότητας (*observability*)», οι οποίες εισήχθησαν για πρώτη φορά από τον Kalman (1960), είναι δύο θεμελιώδεις ιδιότητες που διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυση και τον έλεγχο των γραμμικών συστημάτων εισροών–εκροών, καθώς και στη «Σύγχρονη Θεωρία των Συστημάτων Ελέγχου». Ως εκ τούτου, η περίπλοκη δομή που παρουσιάζουν τα οικονομικά συστήματα καθιστά αναγκαία τη μελέτη της ελεγχσιμότητας και παρατηρησιμότητας αυτών. Επιπροσθέτως, η έννοια του «κανονικού» συστήματος/τεχνικής παραγωγής, η οποία εισήχθη από τον Schefold (1971, pp.19–20, 1976), είναι θεμελιώδης για τη σύγχρονη «Θεωρία Παραγωγής», και ιδίως για τη διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ των σχετικών τιμών των εμπορευμάτων, της κατανομής του εισοδήματος και των τεχνικών συνθηκών παραγωγής, στο πλαίσιο των συστημάτων παραγωγής *à la* Sraffa (1960). Ωστόσο, στο πλαίσιο της συγκεκριμένης ανάλυσης δεν γίνεται αναφορά στην έννοια της κανονικότητας, καθώς θεωρείται ότι δεν διαφέρει ουσιαστικά από την έννοια της ελεγχσιμότητας (βλ. Mariolis, 2003; Μαριόλης, 2012, Δοκίμιο 8).

Ο κύριος στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι η διερεύνηση των βαθμών ελεγχσιμότητας και παρατηρησιμότητας σε συστήματα τόσο απλής παραγωγής όσο και συμπαραγωγής εμπορευμάτων. Χρησιμοποιώντας γραμμικά μοντέλα που υποστηρίζονται από πραγματικούς πίνακες εισροών–εκροών, συμπεραίνεται ότι ένα σύστημα με εξαιρετικά μικρό βαθμό ελεγχσιμότητας–παρατηρησιμότητας χαρακτηρίζεται ως «σχεδόν μη-ελέγξιμο και μη-παρατηρήσιμο». Ταυτοχρόνως, το παραπάνω συμπέρασμα συνεπάγεται ότι, οι εξεταζόμενες οικονομίες είναι σχεδόν όμοιες με μη-διαγωνοποιήσιμες και τριγωνικές οικονομίες, οι οποίες παράγουν μόνο ένα βασικό εμπόρευμα και μη-αυτοαναπαραγόμενα μη-βασικά εμπορεύματα, η συντριπτική πλειονότητα των οποίων προορίζεται για καταναλωτικούς σκοπούς. Αυτή η προσέγγιση προσφέρει μια νέα οπτική στην κατανόηση των δομικών ιδιοτήτων των οικονομικών συστημάτων.

Το υπόλοιπο του παρόντος δομείται ως εξής. Αρχικά αναφέρονται ορισμένες βασικές έννοιες και αναλύονται οι αυστηρώς ισοδύναμες αναπαραστάσεις των δυναμικών υποδειγμάτων. Στη συνέχεια αναλύονται οι έννοιες της ελεγχσιμότητας και παρατηρησιμότητας τόσο εν γένει των συστημάτων όσο και των οικονομικών συστημάτων. Τέλος, εξετάζεται ο βαθμός ελεγχσιμότητας–παρατηρησιμότητας των οικονομικών

συστημάτων, καθώς και η δομική σχεδόν μη-ελεγχιμότητα–μη-παρατηρησιμότητα αυτών.¹⁹

3.2 Αυστηρώς ισοδύναμες αναπαραστάσεις συστημάτων και διαγωνοποίηση

Μια σημαντική κατηγορία γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, δυναμικών συστημάτων (π.χ. φυσικών ή οικονομικών) μπορεί να περιγραφεί από το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων διαφορών²⁰,

$$\Psi_{t+1}^T = \Psi_t^T \mathbf{A} + u_t \mathbf{b}^T, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (24\alpha)$$

$$\varepsilon_t = \Psi_t^T \delta \quad (24\beta)$$

όπου $\Psi_t^T \equiv [\psi_{j(t)}]$, $j = 1, 2, \dots, n$, είναι το πραγματικό $1 \times n$ διάνυσμα κατάστασης του συστήματος, $\mathbf{A}$ η πραγματική, σταθερή, $n \times n$ μήτρα του συστήματος (γνωστή ως *plant coefficient matrix*), η οποία περιγράφει τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των στοιχείων του συστήματος, u_t η εισροή του συστήματος, η οποία συνιστά μια βαθμωτή συνάρτηση του χρόνου (γνωστή και ως *one-dimensional control vector*), $\mathbf{b}^T$ ένα πραγματικό, σταθερό, $1 \times n$ διάνυσμα, δ ένα πραγματικό $n \times 1$ διάνυσμα, και ε_t η εκροή του συστήματος, γνωστή και ως μεταβλητή μέτρησης. Οι εξισώσεις (24α) και (24β) είναι οι δυναμικές εξισώσεις αυτού του συστήματος «μίας εισόδου και μίας εξόδου». Το ανάλογο αυτών των εξισώσεων σε συνεχή χρόνο είναι

$$d\Psi_t^T / dt = u_t \mathbf{b}^T + \Psi_t^T [\mathbf{A} - \mathbf{I}] \quad (25\alpha)$$

$$\varepsilon_t = \Psi_t^T \delta \quad (25\beta)$$

όπου το $d\Psi_t^T / dt$ δηλώνει την παράγωγο του συστήματος ως προς το χρόνο.

Η «κατάσταση» ενός δυναμικού συστήματος είναι μια μαθηματική δομή που περιέχει τις n μεταβλητές $\psi_{j(t)}$, ήτοι τις λεγόμενες μεταβλητές κατάστασης. Οι αρχικές τιμές $\psi_{j(0)}$ αυτών των μεταβλητών, καθώς και η εισροή u_t του συστήματος αρκούν για τον μοναδικό προσδιορισμό της συμπεριφοράς του συστήματος για κάθε $t \geq 0$. Οι μεταβλητές κατάστασης δεν είναι απαραίτητο να είναι παρατηρήσιμα και μετρήσιμα μεγέθη (π.χ. από φυσική ή, αντίστοιχα, οικονομική άποψη). Μπορούν να είναι αμιγώς μαθηματικές, αφηρημένες ποσότητες. Αντίθετα, η εισροή και η εκροή του συστήματος

¹⁹ Το παρόν κεφάλαιο στηρίζεται στα Mariolis (2003), Μαριόλης (2012, σσ. 217–235) και Mariolis (2021c, pp. 35–110).

²⁰ Όσον αφορά την αξιωματική βάση αυτής της περιγραφής, βλ. Kalman (1963, pp. 154–157, pp. 189–90) και Luenberger (1979, pp. 276–278).

είναι συγκεκριμένα, παρατηρήσιμα και μετρήσιμα μεγέθη, δηλαδή μεγέθη που έχουν συγκεκριμένη σημασία (π.χ. από φυσική ή, αντίστοιχα, οικονομική άποψη). Ο «χώρος κατάστασης» είναι ο n -διαστάσεων χώρος, στον οποίο οι συνιστώσες του διανύσματος κατάστασης αντιπροσωπεύουν το σύστημα συντεταγμένων του. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι η επιλογή των μεταβλητών κατάστασης, δηλαδή η επιλογή του μικρότερου δυνατού συνόλου μεταβλητών για τον μοναδικό προσδιορισμό της μελλοντικής συμπεριφοράς του συστήματος, δεν είναι μοναδική. Φυσικά, σε κάθε συγκεκριμένη επιλογή των εν λόγω μεταβλητών αντιστοιχεί μια μοναδικά καθορισμένη κατάσταση του συστήματος (Μαριόλης, 2012, σσ. 219–220).

Δύο αναπαραστάσεις, $[\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}^T, \boldsymbol{\delta}]$ και $[\mathbf{A}^*, \boldsymbol{\beta}^{*T}, \boldsymbol{\delta}^*]$ του υπό θεώρηση δυναμικού συστήματος καλούνται «αυστηρώς ισοδύναμες» όταν τα διανύσματα κατάστασής τους $\boldsymbol{\psi}_t^T$ και $\boldsymbol{\psi}_t^{*T}$, αντίστοιχα, συνδέονται για όλα τα t μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\boldsymbol{\psi}_t^{*T} = \boldsymbol{\psi}_t^T \mathbf{T} \quad (26)$$

όπου $\mathbf{T}$ είναι μία ομαλή, σταθερή μήτρα. Από τις εξισώσεις (24α), (24β) και (26) προκύπτει ότι η αυστηρή ισοδυναμία συνεπάγεται τις ακόλουθες σχέσεις (και *vice versa*),

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$$

$$\boldsymbol{\beta}^{*T} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{T}$$

$$\boldsymbol{\delta}^* = \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\delta}$$

οι οποίες ορίζουν, έναν «μετασχηματισμό ομοιότητας (*similarity transformation*) μέσω της μήτρας ομοιότητας (*similarity matrix*) $\mathbf{T}$ » ή μια αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων στο χώρο κατάστασης.

Αν η μήτρα $\mathbf{A}$ έχει ένα πλήρες σύνολο n γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων (άρα πρόκειται για μία διαγωνοποιήσιμη μήτρα), τότε το σύστημα (24α) είναι αυστηρά ισοδύναμο με το σύστημα

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{t+1}^T = \tilde{\boldsymbol{\psi}}_t^T \hat{\boldsymbol{\lambda}}_A + u_t \tilde{\boldsymbol{\beta}}^T$$

όπου

$$\boldsymbol{\lambda}_A = \mathbf{X}_A^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X}_A$$

δηλώνει τη διαγώνια μήτρα (ή φασματική αναπαράσταση/μήτρα) η οποία αποτελείται από τις ιδιοτιμές, λ_{A_j} , της μήτρας $\mathbf{A}$, γνωστή και ως μήτρα προσαρμογής (*modal matrix*), το $\mathbf{X}_A$ ($\mathbf{X}_A^{-1}$) δηλώνει τη μήτρα που αποτελείται από τα δεξιά (αριστερά) ιδιοδιανύσματα της μήτρας $\mathbf{A}$, και $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_t^T \equiv \boldsymbol{\psi}_t^T \mathbf{X}_A$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^T = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_A$. Ως εκ τούτου, η μήτρα $\mathbf{A}$ ορίζει

ένα νέο σύστημα συντεταγμένων (*normal coordinates*) στο οποίο η μήτρα του συστήματος αναπαρίσταται από τον διαγώνιο πίνακα των ιδιοτιμών του.

Εάν δεν υπάρχει ένα πλήρες σύνολο ιδιοδιανυσμάτων, η μήτρα $\mathbf{A}$ δεν μπορεί να αναχθεί σε διαγώνια μορφή μέσω ενός μετασχηματισμού ομοιότητας. Είναι πάντοτε δυνατόν, ωστόσο, να βρεθεί μια βάση στην οποία η μήτρα $\mathbf{A}$ είναι σχεδόν διαγώνια (Jordan κανονική μορφή). Στην περίπτωση αυτή, το μετασχηματισμένο σύστημα περιέχει (επίσης) «αλυσίδες» υποσυστημάτων πρώτης τάξης (που συνδέονται με μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή του συστήματος), όπου η εκροή του ενός είναι η εισροή ενός άλλου συστήματος.

3.3 Οι έννοιες της ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας

Το σύστημα (24α), $[\mathbf{A}, \mathbf{b}^T]$, καλείται «πλήρως ελέγξιμο (*completely controllable*)» εάν η αρχική κατάσταση $\mathbf{\Psi}_0^T = \mathbf{0}^T$ μπορεί να μεταφερθεί, μέσω της εισροής ελέγχου, u_t , σε κάθε τελική κατάσταση, εντός πεπερασμένου χρόνου. Ως εκ τούτου, η πλήρης ελεγχιμότητα του συστήματος αντιστοιχεί στην ικανότητα ελέγχου της κατάστασης του συστήματος. Το σύστημα διακριτού χρόνου (24α) είναι πλήρως ελέγξιμο²¹ εάν και μόνο εάν η $n \times n$ μήτρα ελεγχιμότητας (γνωστή και ως μήτρα Krylov)

$$\mathbf{K} \equiv [\mathbf{b}, \mathbf{A}^T \mathbf{b}, (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{b}, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{b}]^T \quad (27)$$

έχει τάξη (*rank*) ίση με τη διάσταση της μήτρας $\mathbf{A}$, δηλαδή n . Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν $\text{rank}[\mathbf{K}] = m < n$, το σύστημα καλείται μη-ελέγξιμο (*uncontrollable*) ή, πιο συγκεκριμένα, καλείται «ελέγξιμο τάξης m ». Διαφορετικά ειπωμένο, το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο όταν και μόνον όταν το διάνυσμα $\mathbf{b}^T$ δεν είναι ορθογώνιο σε κανένα (πραγματικό ή μιγαδικό) δεξιό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\mathbf{A}$ (δηλαδή, όταν ισχύει $\mathbf{b}^T \mathbf{x}_{A_j} \neq 0$). Η κατάσταση κατά την οποία η μήτρα Krylov έχει τάξη ίση με n είναι ισοδύναμη με την υπόθεση ότι η μήτρα $\mathbf{K}$ είναι μη-ιδιάζουσα (*non singular*), δηλαδή η ορίζουσά της είναι διάφορη του μηδενός. Όταν και μόνον όταν η διάσταση ενός ιδιοχώρου συνδεδεμένου με μία ιδιοτιμή της μήτρας $\mathbf{A}$ είναι μεγαλύτερη από 1 ή, ισοδύναμα, όταν και μόνον όταν ικανοποιεί μία πολυωνυμική εξίσωση βαθμού μικρότερου του n , τότε η οικονομία είναι μη-ελέγξιμη όποιο και αν είναι το διάνυσμα $\mathbf{b}^T$ (Ford & Johnson, 1968).

²¹ Η έννοια της ελεγχιμότητας είναι ισοδύναμη της έννοιας της κανονικότητας (βλ. Μαριόλης, 2012, Δοκίμιο 9, σσ. 221–226, Θεώρημα 2.1.1 και Ορισμός 3.1).

Για παράδειγμα, θεωρούμε τις ακόλουθες δύο ακραίες περιπτώσεις:

i) Όταν το διάνυσμα $\mathbf{\beta}^T$ είναι ένα από τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας $\mathbf{A}$, το οποίο είναι συνδεδεμένο με την ιδιοτιμή λ_{A1} , δηλαδή $\mathbf{\beta}^T \mathbf{A} = \lambda_{A1} \mathbf{\beta}^T$, συνεπάγεται ότι $rank[\mathbf{K}] = 1$ και, όταν $\mathbf{\Psi}_0^T = \mathbf{0}^T$,

$$\mathbf{\Psi}_{t+1}^T = (u_0 \lambda_{A1}^t + u_1 \lambda_{A1}^{t-1} + \dots + u_{t-1} \lambda_{A1} + u_t) \mathbf{\beta}^T$$

δηλαδή, τα $\mathbf{\Psi}_{t+1}^T$ και $\mathbf{\beta}^T$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα από την αλληλουχία της εισροής, u_t . Το σύστημα είναι, επομένως, ελέγξιμο τάξης 1 ανεξάρτητα από την τάξη της μήτρας $\mathbf{A}$.

ii) Όταν $rank[\mathbf{A}] = 1$, δηλαδή όταν $\mathbf{A} = \mathbf{xy}^T$ και, ως εκ τούτου, η μόνη μη-μηδενική ιδιοτιμή της μήτρας $\mathbf{A}$ ισούται με $\lambda = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$, συνεπάγεται ότι $rank[\mathbf{K}] = 2$ και, όταν $\mathbf{\Psi}_0^T = \mathbf{0}^T$,

$$\mathbf{\Psi}_{t+1}^T = (\mathbf{\beta}^T \mathbf{x})(u_0 \lambda^{t-2} + u_1 \lambda^{t-3} + \dots + u_{t-2} \lambda + u_{t-1}) \mathbf{y}^T + u_t \mathbf{\beta}^T$$

δηλαδή, το $\mathbf{\Psi}_{t+1}^T$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{y}^T$ και $\mathbf{\beta}^T$, ανεξάρτητα από την αλληλουχία της εισροής, u_t . Το σύστημα είναι, επομένως, ελέγξιμο τάξης 2, ανεξάρτητα από την κατεύθυνση του $\mathbf{\beta}^T$.

Το σύστημα (24α) και (24β), ήτοι $[\mathbf{A}, \mathbf{\beta}^T, \mathbf{\delta}]$, καλείται «πλήρως παρατηρήσιμο (*completely observable*)» εάν η γνώση των τιμών της εισροής και της εκροής, για κάποιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα, επαρκεί για τον προσδιορισμό της αρχικής κατάστασης $\mathbf{\Psi}_0^T = \mathbf{0}^T$. Στην αντίθετη περίπτωση καλείται μη-παρατηρήσιμο (*unobservable*). Το σύστημα διακριτού χρόνου (24α, 24β) είναι πλήρως παρατηρήσιμο όταν και μόνον η $n \times n$ μήτρα παρατηρησιμότητας

$$\mathbf{K}^O \equiv [\mathbf{\delta}, \mathbf{A}\mathbf{\delta}, \mathbf{A}^2\mathbf{\delta}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{\delta}] \quad (28)$$

έχει βαθμό (*rank*) ίσο με τη διάσταση της μήτρας $\mathbf{A}$, δηλαδή n . Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν $rank[\mathbf{K}^O] = m^O < n$, το σύστημα καλείται μη-παρατηρήσιμο (*unobservable*) ή, πιο συγκεκριμένα, καλείται «παρατηρήσιμο τάξης m^O ». Διαφορετικά ειπωμένο, το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο όταν και μόνον όταν το διάνυσμα $\mathbf{\delta}$ δεν είναι ορθογώνιο σε κανένα (πραγματικό ή μιγαδικό) αριστερό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\mathbf{A}$ (δηλαδή, όταν ισχύει $\mathbf{y}_{A_i}^T \mathbf{\delta} \neq 0$).

Από αυτό το θεώρημα προκύπτει ότι όταν το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο, η γνώση των n τιμών της εισροής και της εκροής είναι επαρκής για τον προσδιορισμό του Ψ_0^T (Luenberger, 1979, p. 287). Επιπλέον, μπορεί εύκολα να συναχθεί από τα παραπάνω θεωρήματα ότι οι ιδιότητες της πλήρους ελεγχσιμότητας και της πλήρους παρατηρησιμότητας είναι ανεξάρτητες από την επιλογή του συστήματος στο χώρο κατάστασης, δηλαδή ότι όλες οι αυστηρά ισοδύναμες περιγραφές ενός δυναμικού συστήματος είναι επίσης ισοδύναμες από την άποψη της πλήρους ελεγχσιμότητας και παρατηρησιμότητας. Επιπλέον, προκειμένου να δοθεί μία σαφής αναπαράσταση των εν λόγω δυικών ιδιοτήτων, υποθέτουμε ότι ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και, κατ' επέκταση, ότι είναι διαγωνοποιήσιμος.

Ο μετασχηματισμός ομοιότητας δεν επηρεάζει ούτε την ελεγχσιμότητα ούτε την παρατηρησιμότητα του συστήματος, εφόσον ισχύουν τα κάτωθι

$$\mathbf{K}^* \equiv [\mathbf{B}^*, \mathbf{A}^{*T} \mathbf{B}^*, (\mathbf{A}^{*T})^2 \mathbf{B}^*, \dots, (\mathbf{A}^{*T})^{n-1} \mathbf{B}^*] = \mathbf{K} \mathbf{T}$$

$$\mathbf{K}^{O*} \equiv [\mathbf{d}^*, \mathbf{A}^* \mathbf{d}^*, \mathbf{A}^{*2} \mathbf{d}^*, \dots, \mathbf{A}^{*(n-1)} \mathbf{d}^*] = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K}^O.$$

Έτσι, προκύπτει επίσης ότι το σύστημα (24α) και (24β) είναι τόσο πλήρως ελέγξιμο όσο και πλήρως παρατηρήσιμο εάν η μήτρα Henkel

$$\mathbf{K} \mathbf{K}^O = \mathbf{K}^* \mathbf{K}^{O*}$$

έχει πλήρη τάξη.

Αν, λοιπόν, μετατρέψουμε τη μήτρα $\mathbf{A}$ στη μήτρα $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$, όπου οι στήλες της $\mathbf{T}$ είναι τα δεξιά ιδιοδιανύσματα της $\mathbf{A}$, τότε μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο (παρατηρήσιμο) εάν και μόνο εάν το διάνυσμα $\mathbf{B}^T$ (το διάνυσμα $\mathbf{d}$) δεν είναι ορθογώνιο σε κανένα δεξιό (αριστερό) ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\mathbf{A}$. Όταν, και μόνον όταν, παραβιάζεται αυτή η συνθήκη, η μήτρα $\mathbf{K} \mathbf{T}$ ($\mathbf{T}^{-1} \mathbf{K}^O$), άρα και η μήτρα $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K}^O$), είναι μη-ομαλή²². Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει τουλάχιστον μία συνιστώσα του Ψ_i^{*T} , η οποία δεν επηρεάζεται (δεν επηρεάζει) από την εισροή (την εκροή) του συστήματος. Έτσι, οι συνιστώσες του Ψ_i^{*T} , οι οποίες αντιστοιχούν στις μηδενικές συνιστώσες του $\mathbf{B}^T$ (του $\mathbf{d}$), αποτελούν τις μη-ελέγξιμες (μη-παρατηρήσιμες) μεταβλητές κατάστασης του συστήματος.

²² Εάν υπάρχει ιδιοτιμή λ της μήτρας $\mathbf{A}$, στην οποία αντιστοιχούν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε το σύστημα είναι μη-ελέγξιμο και μη-παρατηρήσιμο ανεξαρτήτως της διεύθυνσης των διανυσμάτων (Ford & Johnson, 1968) $\mathbf{B}^T$ ($\mathbf{d}$) για το οποίο το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο (παρατηρήσιμο).

Εάν το σύστημα (24α) είναι πλήρως ελέγξιμο, τότε δεν είναι αυστηρά ισοδύναμο με ένα σύστημα του τύπου

$$\begin{bmatrix} \Psi_{1t+1}^{*T} & \Psi_{2t+1}^{*T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{1t}^{*T} & \Psi_{2t}^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{21}^* \end{bmatrix} + u_t \begin{bmatrix} \beta_1^{*T} & \mathbf{0}_2^T \end{bmatrix}$$

όπου Ψ_{1t}^{*T} και Ψ_{2t}^{*T} είναι διανύσματα διαστάσεων $1 \times n_1$ και $1 \times n_2$, αντίστοιχα, και $n_1 + n_2 = n$ (*Kalman controllability decomposition*). Δηλαδή, δεν μπορεί να βρεθεί ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο οι μεταβλητές κατάστασης να διαχωρίζονται σε δύο ομάδες, Ψ_{1t}^{*T} , και Ψ_{2t}^{*T} , έτσι ώστε η ομάδα 2 να μην επηρεάζεται ούτε από την ομάδα 1 ούτε από την εισροή του συστήματος.

Από την άλλη πλευρά, εάν το σύστημα (24α) και (24β) είναι πλήρως παρατηρήσιμο, τότε δεν είναι αυστηρά ισοδύναμο με ένα σύστημα του τύπου

$$\begin{bmatrix} \Psi_{1t+1}^{*T} & \Psi_{2t+1}^{*T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{1t}^{*T} & \Psi_{2t}^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{12}^* \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{A}_{21}^* \end{bmatrix} + u_t \begin{bmatrix} \beta_1^{*T} & \beta_2^{*T} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_t = \begin{bmatrix} \Psi_{1t}^{*T} & \Psi_{2t}^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^* \\ \mathbf{0}_2 \end{bmatrix}$$

όπου Ψ_{1t}^{*T} και Ψ_{2t}^{*T} είναι διανύσματα διαστάσεων $1 \times n_1$ και $1 \times n_2$, αντίστοιχα, και $n_1 + n_2 = n$ (*Kalman observability decomposition*). Δηλαδή, δεν είναι δυνατόν να βρεθεί ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο οι μεταβλητές κατάστασης να διαχωρίζονται σε δύο ομάδες, Ψ_{1t}^{*T} , και Ψ_{2t}^{*T} , έτσι ώστε η ομάδα 2 να μην επηρεάζει ούτε την ομάδα 1 ούτε την εκροή του συστήματος.

Εάν και μόνο εάν το σύστημα (24α) και (24β) δεν είναι πλήρως ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο, τότε είναι αυστηρά ισοδύναμο με ένα σύστημα του τύπου

$$\Psi_{t+1}^{*T} = \Psi_t^{*T} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \mathbf{0}_{14} \\ \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{0}_{23} & \mathbf{0}_{24} \\ \mathbf{A}_{31}^* & \mathbf{0}_{32} & \mathbf{A}_{33}^* & \mathbf{0}_{34} \\ \mathbf{A}_{41}^* & \mathbf{A}_{42}^* & \mathbf{A}_{43}^* & \mathbf{A}_{44}^* \end{bmatrix} + u_t \begin{bmatrix} \beta_1^{*T} & \beta_2^{*T} & \mathbf{0}_3^T & \mathbf{0}_4^{*T} \end{bmatrix} \quad (29\alpha)$$

$$\mathcal{E}_t = \Psi_t^{*T} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_1 \\ \delta_2^* \\ \mathbf{0}_3 \\ \delta_4^* \end{bmatrix} \quad (29\beta)$$

όπου $\Psi^{*T} \equiv [\Psi_1^{*T} \quad \Psi_2^{*T} \quad \Psi_3^{*T} \quad \Psi_4^{*T}]$, Ψ_k^{*T} είναι ένα $1 \times n_k$ διάνυσμα ($k=1, \dots, 4$ και $n = n_1 + \dots + n_4$) και τα $[A_{mk}^*, \beta_k^{*T}, \delta_k^*]$ ($m=1, \dots, 4$) είναι υπομήτρες και υποδιανύσματα κατάλληλων διαστάσεων. Ως εκ τούτου, το συνολικό σύστημα διασπάται σε τέσσερα, αμοιβαίως αποκλειόμενα, υποσυστήματα, ήτοι (Μαριόλης, 2010, σ. 222)

- i. στο υποσύστημα 1, το οποίο είναι πλήρως ελέγξιμο και μη-παρατηρήσιμο
- ii. στο υποσύστημα 2, το οποίο είναι πλήρως ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο
- iii. στο υποσύστημα 3, το οποίο είναι μη-ελέγξιμο και μη-παρατηρήσιμο
- iv. στο υποσύστημα 4, το οποίο είναι μη-ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο.

3.4 Ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα των οικονομικών συστημάτων απλής παραγωγής

Προχωρώντας στην ανάλυση της ελεγχιμότητας–παρατηρησιμότητας των οικονομικών συστημάτων, θεωρούμε έναν μετασχηματισμό ομοιότητας του συστήματος $[\mathbf{J}, \mathbf{v}^T, \mathbf{z}]$ σε $[\mathbf{J}^*, \mathbf{v}^{*T}, \mathbf{z}^*]$, όπου $\mathbf{J}^* \equiv \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T}$, $\mathbf{v}^{*T} \equiv \mathbf{v}^T \mathbf{T}$, $\mathbf{z}^* \equiv \mathbf{T}^{-1} \mathbf{z}$, και $\mathbf{T}$ συμβολίζει μία μήτρα μετασχηματισμού ομοιότητας. Τα δύο αυτά συστήματα λέγεται ότι είναι «αυστηρά ισοδύναμα» και οι εξισώσεις (7α) και (7β) υποδηλώνουν ότι τα αντίστοιχα ποσοστά ωρομισθίου και διανύσματα τιμών συνδέονται για όλα τα ρ ως $w^*(\rho) = w(\rho)$ και $\mathbf{p}^{*T}(\rho) = \mathbf{p}^T(\rho) \mathbf{T}$.²³

Στην ειδική περίπτωση όπου το $\mathbf{T} (\mathbf{T}^{-1})$ είναι η μήτρα που διαμορφώνεται από τα δεξιά (τα αριστερά) ιδιοδιανύσματα της μήτρας $\mathbf{J}$, δηλαδή $\mathbf{T} = \mathbf{X}_J$ (*modal matrix*), η μήτρα $\mathbf{J}^*$ γίνεται διαγώνια, και τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές της μήτρας $\mathbf{J}$, δηλαδή $\mathbf{J}^* = \mathbf{X}_J^{-1} \mathbf{J} \mathbf{X}_J = \hat{\lambda}_J$ (φασματική αναπαράσταση/μήτρα).

Ως εκ τούτου, λαμβάνουμε $w(\rho) = (\mathbf{v}^{*T} [\mathbf{I} - \rho \hat{\lambda}_J]^{-1} \mathbf{z}^*)^{-1}$ ή

$$w(\rho) = \left[v_1^* z_1^* (1 - \rho)^{-1} + \sum_{k=2}^n v_k^* z_k^* (1 - \lambda_{Jk} \rho)^{-1} \right]^{-1} \quad (40)$$

και $\mathbf{p}^{*T}(\rho) = w(\rho) \mathbf{v}^{*T} [\mathbf{I} - \rho \hat{\lambda}_J]^{-1}$ ή

$$p_1^*(\rho) = w(\rho) v_1^* (1 - \rho)^{-1}, \quad p_k^*(\rho) = w(\rho) v_k^* (1 - \lambda_{Jk} \rho)^{-1} \quad (41)$$

²³ Η παρούσα ενότητα βασίζεται στο Mariolis & Veltsistas (2022, pp. 10–15).

όπου $v_1^* = \mathbf{v}^T \mathbf{x}_{j1} (> 0)$, $z_1^* = \mathbf{y}_{j1}^T \mathbf{z} (> 0)$, $v_1^* z_1^* + \dots + v_k^* z_k^* = \mathbf{v}^T \mathbf{z} = 1$, και p_k^* είναι οι τιμές των μη-Σραφφαϊανών Προτύπων εμπορευμάτων.

Βασίζόμενοι στην προαναφερόμενη δυική έννοια της ελεγχσιμότητας-παρατηρησιμότητας, μπορεί να λεχθεί ότι, το σύστημα $[\mathbf{J}, \mathbf{v}^T]$ είναι «πλήρως ελέγξιμο» όταν οι σχετικές τιμές των μη-Σραφφαϊανών Προτύπων εμπορευμάτων,

$$p_f^* (p_g^*)^{-1} = [v_f^* (v_g^*)^{-1}] [(1 - \lambda_{jf} \rho)^{-1} (1 - \lambda_{jg} \rho)], f, g = 2, 3, \dots, n$$

επηρεάζονται από το ποσοστό κέρδους. Επομένως, θεωρούμε την ακόλουθη $n \times n$ μήτρα ελεγχσιμότητας (ή μήτρα Krylov)

$$\mathbf{K} \equiv [\mathbf{v}, \mathbf{J}^T \mathbf{v}, (\mathbf{J}^T)^2 \mathbf{v}, \dots, (\mathbf{J}^T)^{n-1} \mathbf{v}]^T.$$

Η παραπάνω μήτρα μπορεί να εκφραστεί ως $\mathbf{K} = \mathbf{\Lambda} \hat{\mathbf{v}}^* \mathbf{X}_j^{-1}$ και, ως εκ τούτου, η ορίζουσά της δίνεται από τη σχέση

$$\det[\mathbf{K}] = \det[\mathbf{\Lambda}] \det[\hat{\mathbf{v}}^*] \det[\mathbf{X}_j^{-1}]$$

όπου $\det[\mathbf{\Lambda}] = \prod_{1 \leq i < j < n} (\lambda_{ji} - \lambda_{ji})$, $\mathbf{\Lambda} \equiv (\lambda_{ji})^{i-1}$ δηλώνει τη μήτρα Vandermonde των ιδιο-

τιμών της μήτρας $\mathbf{J}$, και $\hat{\mathbf{v}}^*$ δηλώνει τη διαγώνια μήτρα η οποία αποτελείται από τα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{v}^{*T} = \mathbf{v}^T \mathbf{X}_j$. Εάν η διαγωνοποιήσιμη μήτρα $\mathbf{J}$ έχει μια επαναλαμβανόμενη ιδιοτιμή, τότε η σχετική τιμή των αντίστοιχων μη-Σραφφαϊανών Προτύπων εμπορευμάτων δεν επηρεάζεται από το ποσοστό κέρδους. Επιπλέον, οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός ιδιοδιανυσμάτων που σχετίζεται με την εν λόγω ιδιοτιμή είναι επίσης ένα ιδιοδιάνυσμα, και $\det[\mathbf{\Lambda}] = 0$.

Συνεπώς, υπάρχει ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\mathbf{J}$ το οποίο είναι ορθογώνιο σε οποιοδήποτε δεδομένο $\mathbf{v}^T$, και $\det[\mathbf{K}] = 0$ ή, ισοδύναμα, $rank[\mathbf{K}] < n$. Στην περίπτωση όπου το $\mathbf{v}^T$ είναι ορθογώνιο σε οποιοδήποτε δεξιό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\mathbf{J}$, τότε η τιμή των σε όρους εργασίας εκφρασμένων αντίστοιχων μη-Σραφφαϊανών Προτύπων εμπορευμάτων είναι ίση με μηδέν, και $\det[\hat{\mathbf{v}}^*] = 0$ ή, ισοδύναμα, $rank[\mathbf{K}] < n$. Από αυτό συνεπάγεται ότι, το σύστημα $[\mathbf{J}, \mathbf{v}^T]$ είναι «πλήρως ελέγξιμο» αν και μόνον αν η μήτρα $\mathbf{K}$ έχει τάξη ίση με n ή, ισοδύναμα, όταν και μόνον όταν το διάνυσμα $\mathbf{v}^T$ δεν είναι ορθογώνιο σε κανένα (πραγματικό ή μιγαδικό) δεξιό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\mathbf{J}$, δηλαδή όταν ισχύει $\mathbf{v}^T \mathbf{x}_{ji} \neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση, τα διανύσματα των τιμών των εμπορευμάτων που αντιστοιχούν σε οποιοδήποτε n διακριτές τιμές του

ποσοστού κέρδους είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (Bidard & Salvadori, 1996; Kurz & Salvadori, 1995, Ch. 6).

Εν αντιθέσει, όταν και μόνον όταν η μήτρα Krylon έχει βαθμό μικρότερο από n , έστω βαθμό m ($rank[\mathbf{K}] = m < n$), τότε το σύστημα είναι μη-ελέγξιμο ή, για την ακρίβεια, «ελέγξιμο τάξης m ». Αυτό συνεπάγεται ότι, τα διανύσματα των τιμών των εμπορευμάτων που αντιστοιχούν σε οποιεσδήποτε $m+1$ διακριτές τιμές του ποσοστού κέρδους είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή, διαφορετικά ειπωμένο, υπάρχουν $n-m$ μη-Σραφφαϊανά Πρότυπα εμπορεύματα, των οποίων οι σε όρους εργασίας εκφρασμένες τιμές δεν επηρεάζονται από το ποσοστό κέρδους. Στην περίπτωση όπου το σύστημα είναι μη-ελέγξιμο, η μήτρα Krylon είναι ιδιάζουσα (*singular*), και ως εκ τούτου, υπάρχει ένα διάνυσμα $\mathbf{z}'$ τέτοιο ώστε $\mathbf{K}\mathbf{z}' = \mathbf{0}$ και, επομένως, $\mathbf{w}^{-1}\mathbf{p}^T\mathbf{z}' = 0$. Συνεπώς, μια αλλαγή στο *numéraire* από $\mathbf{z}'$ σε $\mathbf{z} + \zeta\mathbf{z}'$, όπου ζ είναι ένα βαθμωτό, δεν επηρεάζει το πραγματικό ωρομίσθιο και τις τιμές των εμπορευμάτων (Miyao, 1977). Όταν και μόνον όταν η διάσταση ενός ιδιοχώρου συνδεδεμένου με μία ιδιοτιμή της μήτρας $\mathbf{J}$ είναι μεγαλύτερη από 1 ή, ισοδύναμα, όταν και μόνον όταν ικανοποιεί μία πολυωνυμική εξίσωση βαθμού μικρότερου του n , τότε το σύστημα είναι μη-ελέγξιμο όποιο και αν είναι το διάνυσμα $\mathbf{v}^T$ (Ford & Johnson, 1968).

Από την άλλη πλευρά, μπορεί να λεχθεί ότι το σύστημα $[\mathbf{J}, \mathbf{z}]$ είναι «πλήρως παρατηρήσιμο» όταν η καμπύλη χρηματικού ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους αντιπροσωπεύει, όχι μόνο το Σραφφαϊανό Πρότυπο σύστημα, αλλά και όλα τα τυποποιημένα μη-Σραφφαϊανά συστήματα. Ας υποθέσουμε την $n \times n$ μήτρα Krylon των πρώτων n χρονολογημένων ποσοτήτων μέσω παραγωγής στον κανονικοποιημένο καθέτως ολοκληρωμένο τομέα παραγωγής που παράγει το *numéraire* εμπόρευμα, δηλαδή

$$\mathbf{K}^0 \equiv [\mathbf{z}, \mathbf{J}\mathbf{z}, \mathbf{J}^2\mathbf{z}, \dots, \mathbf{J}^{n-1}\mathbf{z}].$$

Η παραπάνω μήτρα μπορεί να εκφραστεί ως $\mathbf{K}^0 = \mathbf{X}_J \hat{\mathbf{z}}^* \mathbf{\Lambda}^T$, όπου $\hat{\mathbf{z}}^*$ δηλώνει τη διαγώνια μήτρα η οποία αποτελείται από τα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{z}^* = \mathbf{X}_J^{-1}\mathbf{z}$. Συνεπώς, προκύπτει ότι το εν λόγω σύστημα είναι «πλήρως παρατηρήσιμο» εάν και μόνον εάν η μήτρα $\mathbf{K}^0$ έχει τάξη ίση με n ή, ισοδύναμα, αν το διάνυσμα $\mathbf{z}$ δεν είναι ορθογώνιο σε κανένα (πραγματικό ή μιγαδικό) αριστερό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\mathbf{J}$. Σε αντιδιαστολή, εάν $rank[\mathbf{K}^0] = m^0 < n$, τότε το σύστημα λέγεται ότι είναι μη-παρατηρήσιμο ή, πιο συγκεκριμένα, «παρατηρήσιμο τάξης m^0 », και αυτό δηλώνει ότι η καμπύλη χρηματικού ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους αντιπροσωπεύει μόνο m^0

τυποποιημένα συστήματα (ή, πιο συγκεκριμένα, το Σραφφαϊανό Πρότυπο σύστημα και μόνο $m^0 - 1$ μη-Σραφφαϊανά Πρότυπα συστήματα).

Εάν η μήτρα $\mathbf{J}$ έχει μια επαναλαμβανόμενη ιδιοτιμή ή, ισοδύναμα, εάν η $\mathbf{J}$ ικανοποιεί μια πολωνυμική εξίσωση βαθμού μικρότερη από n , τότε το σύστημα $[\mathbf{J}, \mathbf{v}^T, \mathbf{z}]$ είναι μη-ελέγξιμο και μη-παρατηρήσιμο ανεξάρτητα από τα διανύσματα $\mathbf{v}^T$ και $\mathbf{z}$ (Ford & Johnson, 1968). Τέλος, δεδομένου ότι

$$\mathbf{K}^* \equiv [\mathbf{v}^*, \mathbf{J}^{*T} \mathbf{v}^*, \dots, [\mathbf{J}^{*T}]^{n-1} \mathbf{v}^*]^T = \mathbf{K} \mathbf{T}$$

$$\mathbf{K}^{O*} \equiv [\mathbf{z}^*, \mathbf{J}^* \mathbf{z}^*, \dots, [\mathbf{J}^*]^{n-1} \mathbf{z}^*] = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K}^O$$

η ανισότητα Sylvester συνεπάγεται

$$\text{rank}[\mathbf{K}^*] = \text{rank}[\mathbf{K}] \text{ και } \text{rank}[\mathbf{K}^{O*}] = \text{rank}[\mathbf{K}^O],$$

δηλαδή οι μετασχηματισμοί ομοιότητας δεν επηρεάζουν ούτε την ελεγχσιμότητα ούτε την παρατηρησιμότητα του συστήματος. Επίσης, προκύπτει ότι το σύστημα $[\mathbf{J}, \mathbf{v}^T, \mathbf{z}]$ είναι ταυτοχρόνως πλήρως ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο αν η μήτρα Hankel

$$\mathbf{K} \mathbf{K}^O = \mathbf{\Lambda} \hat{\mathbf{v}}^* \hat{\mathbf{z}}^* \mathbf{\Lambda}^T = \mathbf{K}^* \mathbf{K}^{O*}$$

είναι πλήρους τάξεως. Εν συντομία, η πλήρης ελεγχσιμότητα-παρατηρησιμότητα συνεπάγεται απρόβλεπτες μεταβολές στις σχετικές τιμές των εμπορευμάτων και του ωρομισθίου, οι οποίες προκύπτουν από μεταβολές του ποσοστού κέρδους, ενώ η προβλεψιμότητα μειώνεται με την αυξανόμενη τάξη της ελεγχσιμότητας-παρατηρησιμότητας.

Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι, αν το σύστημα $[\mathbf{J}, \mathbf{v}^T]$ είναι πλήρως ελέγξιμο, τότε δεν είναι αυστηρά ισοδύναμο με ένα σύστημα του τύπου

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^{*T} & \mathbf{p}_2^{*T} \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{*T} & \mathbf{0}_2^T \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^{*T} & \mathbf{p}_2^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11}^* & \mathbf{0}_{12}^* \\ \mathbf{J}_{21}^* & \mathbf{J}_{22}^* \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{J}^*$ είναι αναγώγιμη μήτρα, $\mathbf{p}_1^{*T}$, $\mathbf{p}_2^{*T}$ είναι τα $1 \times n_1$ και $1 \times n_2$ μετασχηματισμένα υποδιανύσματα τιμών, αντίστοιχα, και $n_1 + n_2 = n$. Δηλαδή, δεν είναι δυνατόν να βρεθεί ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο οι τιμές διαχωρίζονται σε δύο υποομάδες έτσι ώστε η ομάδα 2 να μην επηρεάζεται ούτε από την ομάδα 1 ούτε από το ποσοστό κέρδους. Στην αντίθετη περίπτωση, λαμβάνουμε

$$\mathbf{p}_2^{*T} = \mathbf{0}_2^T, \quad w^{-1} \mathbf{p}_1^{*T} = \mathbf{v}_1^{*T} [\mathbf{I}_1 - \rho \mathbf{J}_{11}^*]^{-1}$$

και τόσο το n_2 -υποσύστημα 2 όσο και το αρχικό σύστημα $[\mathbf{J}, \mathbf{v}^T]$ είναι μη-ελέγξιμα. Από την άλλη πλευρά, αν το αρχικό σύστημα $[\mathbf{J}, \mathbf{z}]$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο, τότε δεν είναι αυστηρά ισοδύναμο με ένα σύστημα του τύπου

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^{*T} & \mathbf{p}_2^{*T} \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{*T} & \mathbf{v}_2^{*T} \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^{*T} & \mathbf{p}_2^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11}^* & \mathbf{J}_{12}^* \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{J}_{22}^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^{*T} & \mathbf{p}_2^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^* \\ \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{*T} & \mathbf{v}_2^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^* \\ \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} = 1$$

$\mathbf{J}^*$ είναι αναγώγιμη μήτρα, $\mathbf{p}_1^{*T}$, $\mathbf{p}_2^{*T}$ είναι τα $1 \times n_1$ και $1 \times n_2$ μετασχηματισμένα υποδιανύσματα τιμών, αντίστοιχα, και $n_1 + n_2 = n$. Δηλαδή, δεν είναι δυνατόν να βρεθεί ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο οι τιμές διαχωρίζονται σε δύο υποομάδες έτσι ώστε η ομάδα 2 να μην επηρεάζει ούτε την ομάδα 1 ούτε την καμπύλη ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους. Στην αντίθετη περίπτωση, λαμβάνουμε

$$w(\rho) = (\mathbf{v}_1^{*T} [\mathbf{I}_1 - \rho \mathbf{J}_{11}^*]^{-1} \mathbf{z}_1^*)^{-1}, \quad \mathbf{p}_1^{*T}(\rho) = w(\rho) \mathbf{v}_1^{*T} [\mathbf{I}_1 - \rho \mathbf{J}_{11}^*]^{-1}$$

$$\mathbf{p}_2^{*T}(\rho) = w(\rho) [\rho \mathbf{v}_1^{*T} [\mathbf{I}_1 - \rho \mathbf{J}_{11}^*]^{-1} \mathbf{J}_{12}^* + \mathbf{v}_2^{*T}] [\mathbf{I}_2 - \rho \mathbf{J}_{22}^*]^{-1}$$

και τόσο το n_2 -υποσύστημα 2 όσο και το αρχικό σύστημα $[\mathbf{J}, \mathbf{z}]$ είναι μη-παρατηρήσιμα.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, αν το σύστημα $[\mathbf{J}, \mathbf{v}^T, \mathbf{z}]$ είναι ταυτόχρονα μη-ελέγξιμο και μη-παρατηρήσιμο, τότε είναι αυστηρά ισοδύναμο με ένα σύστημα του τύπου

$$\mathbf{p}^{*T} = w \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{*T} & \mathbf{v}_2^{*T} & \mathbf{0}_3^T & \mathbf{0}_4^T \end{bmatrix} + \rho \mathbf{p}^{*T} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11}^* & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \mathbf{0}_{14} \\ \mathbf{J}_{21}^* & \mathbf{J}_{22}^* & \mathbf{0}_{23} & \mathbf{0}_{24} \\ \mathbf{J}_{31}^* & \mathbf{0}_{32} & \mathbf{J}_{33}^* & \mathbf{0}_{34} \\ \mathbf{J}_{41}^* & \mathbf{J}_{42}^* & \mathbf{J}_{43}^* & \mathbf{J}_{44}^* \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{p}^{*T} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{z}_2^* \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{z}_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{*T} & \mathbf{v}_2^{*T} & \mathbf{0}_3^T & \mathbf{0}_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{z}_2^* \\ \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{z}_4^* \end{bmatrix} = 1 \quad (43)$$

Συνεπώς, το συνολικό σύστημα αποσυντίθεται σε τέσσερα, αμοιβαίως αποκλειόμενα, υποσυστήματα, ήτοι στο

- i. n_1 -υποσύστημα 1, το οποίο είναι πλήρως ελέγξιμο και μη-παρατηρήσιμο
- ii. n_2 -υποσύστημα 2, το οποίο είναι πλήρως ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο
- iii. n_3 -υποσύστημα 3, το οποίο είναι μη-ελέγξιμο και μη-παρατηρήσιμο
- iv. n_4 -υποσύστημα 4, το οποίο είναι μη-ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο

και $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$. Οι πραγματικές τιμές των μη-μηδενικών διανυσμάτων και των μητρών εξαρτώνται από την επιλογή της μήτρας μετασχηματισμού ομοιότητας, $\mathbf{T}$, ενώ οι διαστάσεις των αντίστοιχων, τессάρων αμοιβαία αποκλειόμενων, υποσυστημάτων είναι μοναδικά καθορισμένες (*Kalman general decomposition theorem*). Τέλος, από τις εξισώσεις (7α), (7β), (42) και (43) προκύπτει ότι τα μετασχηματισμένα υποδιανύσματα τιμών που αντιστοιχούν στο μη-ελέγξιμο και μη-παρατηρήσιμο υποσύστημα 3 και στο μη-ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο υποσύστημα 4 είναι και τα δύο ίσα με μηδέν, ενώ το σύνολο του διανύσματος τιμών εκφρασμένων σε όρους ωρομισθίου,

$$\mathbf{w}^{-1} \mathbf{p}^T = \mathbf{v}^{*T} [\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}^*]^{-1} \mathbf{T}^{-1}$$

αντιπροσωπεύει μόνο τα πλήρως ελέγξιμα υποσυστήματα 1 και 2, και το διάνυσμα

$$[\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}]^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{T} [\mathbf{I} - \rho \mathbf{J}^*]^{-1} \mathbf{z}^*$$

αντιπροσωπεύει μόνο τα πλήρως παρατηρήσιμα υποσυστήματα 2 και 4. Επομένως, η καμπύλη χρηματικού ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους αντιπροσωπεύει μόνο το πλήρως ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο υποσύστημα, δηλαδή το υποσύστημα 2. Πιο συγκεκριμένα, η P–F ιδιοτιμή της μήτρας $\mathbf{J}$ είναι μια ιδιοτιμή της υπομήτρας $\mathbf{J}_{22}^*$, το υποσύστημα 2 περιλαμβάνει το Σραφφαϊανό Πρότυπο σύστημα και η καμπύλη χρηματικού ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους είναι ένας λόγος μεταξύ ενός πολωνύμου n_2 -στου βαθμού και ενός πολωνύμου (n_2-1) -στου βαθμού, δηλαδή

$$w(\rho) = (\mathbf{v}_2^{*T} [\mathbf{I}_2 - \rho \mathbf{J}_{22}^*]^{-1} \mathbf{z}_2^*)^{-1}$$

Ως εκ τούτου, οι διαρθρωτικές σχέσεις μεταξύ των μετασχηματισμένων υποσυστημάτων 2 και 1 είναι οι ίδιες με εκείνες μεταξύ των βασικών και μη-βασικών κλάδων του Sraffa, αντίστοιχα, και, συνεπώς, το Σραφφαϊανό Πρότυπο σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας «υπερ-βασικός» κλάδος (αν και τα μετασχηματισμένα υποσυστήματα 1, 3 και 4 δεν είναι απαραίτητα οικονομικά σημαντικά). Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι η οικονομία είναι μη-ελέγξιμη ή και μη-παρατηρήσιμη και ότι εστιάζουμε στο διάνυσμα των τιμών εκφρασμένων σε όρους ωρομισθίου ή και στην καμπύλη του χρηματικού ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους, αντίστοιχα. Τότε, στην πραγματικότητα, δεν παρατηρείται ολόκληρη η οικονομία, αλλά μόνο ορισμένα τμήματά της ή υπάρχει απώλεια πληροφορίας.

Η παραπάνω ανάλυση ισχύει και για την πλευρά των φυσικών ποσοτήτων της οικονομίας. Συνεπώς, προκύπτει ότι το σύστημα τιμών είναι πλήρως ελέγξιμο αν το σύστημα ποσοτήτων είναι πλήρως παρατηρήσιμο, και όταν η κατανάλωση

χρησιμοποιείται ως *numéraire*, το σύστημα τιμών είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν το σύστημα ποσοτήτων είναι πλήρως ελέγξιμο.

3.5 Οι βαθμοί ελεγχιμότητας–παρατηρησιμότητας των οικονομικών συστημάτων και η δομική σχεδόν μη-ελεγχιμότητα–μη-παρατηρησιμότητα αυτών

Σύμφωνα με εμπειρικές μελέτες, τα συστήματα είναι σχεδόν πάντα πλήρως ελέγξιμα και πλήρως παρατηρήσιμα. Δεδομένου, ωστόσο, ότι «μικρές» αλλαγές στις παραμέτρους του συστήματος μπορούν να μετατρέψουν ένα πλήρως ελέγξιμο και παρατηρήσιμο σύστημα σε μη-ελέγξιμο και μη-παρατηρήσιμο, είναι χρήσιμο να υπάρχει ένα μέτρο ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας το οποίο, σε αντίθεση με τις τάξεις της μήτρας Krylov, εξαρτάται συνεχώς από αυτές τις παραμέτρους.

Ως εκ τούτου, ακολουθώντας τον Friedland (1975), ορίζουμε τους «βαθμούς ελεγχιμότητας–παρατηρησιμότητας (*degrees of controllability–observability*)» ως τους λόγους μεταξύ της μικρότερης, $\sigma_{\bullet n}$, και της μεγαλύτερης, $\sigma_{\bullet 1}$, ιδιάζουσας τιμής της μήτρας Krylov, δηλαδή,

$$D \equiv \sigma_{\bullet n} \sigma_{\bullet 1}^{-1}$$

με $0 \leq D < 1$,²⁴ όπου «•» δηλώνει την υπό εξέταση μήτρα (δηλαδή, είτε τη μήτρα ελεγχιμότητας είτε τη μήτρα παρατηρησιμότητας), και D^{-1} ισούται με τον «αριθμό κατάστασης (*condition number*)» της μήτρας • (ο οποίος παρέχει ένα μέτρο της απόστασης από την πλησιέστερη ιδιάζουσα μήτρα). Όταν το D ισούται με μηδέν, τότε το σύστημα είναι μη-ελέγξιμο ή μη-παρατηρήσιμο, αντίστοιχα. Σε διαφορετική περίπτωση είναι πλήρως ελέγξιμο ή πλήρως παρατηρήσιμο. Εντούτοις, όταν η τιμή D είναι εξαιρετικά μικρή, η ελεγχιμότητα ή η παρατηρησιμότητα της οικονομίας είναι «μικρή» ή «αδύναμη». Σε αυτή την περίπτωση, το σύστημα καλείται «σχεδόν μη-ελέγξιμο» ή «σχεδόν μη-παρατηρήσιμο», αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τους Mariolis et al. (2025), ένα σύστημα χαρακτηρίζεται ως «δομικώς σχεδόν μη-ελέγξιμο και μη-παρατηρήσιμο»²⁵ επειδή (i) εμφανίζει πολύ χαμηλούς βαθμούς ελεγχιμότητας–παρατηρησιμότητας ανεξάρτητα από τη διεύθυνση των

²⁴ Στην εμπειρική ανάλυση του Κεφαλαίου 5 της παρούσας εργασίας χρησιμοποιείται το DC για να δηλώσει τον βαθμό ελεγχιμότητας και DO για να δηλώσει τον βαθμό παρατηρησιμότητας.

²⁵ Η έννοια της «δομικής σχεδόν μη-ελεγχιμότητας και μη-παρατηρησιμότητας» είναι βασισμένη στον ορισμό της «δομικής ελεγχιμότητας» που διατυπώθηκε από τον Lin (1972). Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, το σύστημα $[J, v^T]$ καλείται «δομικώς ελέγξιμο» εάν είναι δυνατόν να επιλεγούν τα μη-μηδενικά στοιχεία (ή, στοιχεία που δεν είναι επακριβώς γνωστά) στο J και v^T έτσι ώστε το σύστημα που προκύπτει να είναι πλήρως ελέγξιμο.

$\mathbf{v}^T$ και $\mathbf{z}$ και, ταυτοχρόνως, (ii) αυτό το γεγονός ανάγεται στην παραγωγική-καταναλωτική δομή του, δηλαδή στο ότι οι εξεταζόμενες οικονομίες είναι σχεδόν όμοιες με μη-διαγωνοποιήσιμες και τριγωνικές οικονομίες, οι οποίες παράγουν μόνο ένα βασικό εμπόρευμα και μη-αυτοαναπαραγόμενα μη-βασικά εμπορεύματα, η συντριπτική πλειονότητα των οποίων είναι καθαρά καταναλωτικά εμπορεύματα. Σε αυτό το γεγονός ανάγεται και η εμπειρικά ευρεθείσες κατανομές των ιδιοτιμών και ιδιαιδισμών τιμών.

Τέλος, η απόσταση μεταξύ ενός πλήρως ελέγξιμου συστήματος $[\mathbf{J}, \mathbf{v}^T]$ και του πλησιέστερου μη-ελέγξιμου συστήματος $[\mathbf{J} + \Delta\mathbf{J}, \mathbf{v}^T + \Delta\mathbf{v}^T]$, όπου $\Delta\mathbf{J}$, $\Delta\mathbf{v}^T$ υποδηλώνουν τις επιτρεπόμενες «διαταραχές (*perturbations*)», ορίζεται ως εξής

$$d(\mathbf{J}, \mathbf{v}^T) \equiv \min \|\Delta\mathbf{J}, \Delta\mathbf{v}^T\|$$

όπου « $\|\bullet\|$ » δηλώνει την Ευκλείδεια τάξη (*Euclidean norm*) του $\bullet$. Ένα άνω όριο για την απόσταση αυτή δίνεται από τη σχέση

$$d(\mathbf{J}, \mathbf{v}^T) \leq \min \left\{ \left(1 + \|\mathbf{C}_J\| \sigma_{\mathbf{K}_h}^{-1} \right) \sigma_{\mathbf{K}_{h+1}} \right\}, \quad h = 1, 2, \dots, n-1$$

όπου $\mathbf{C}_J$ δηλώνει την μήτρα *companion* της $\mathbf{J}$, ενώ $\|\mathbf{C}_J\| = \sigma_{\mathbf{C}_{J,1}}$. Παρομοίως, το αντίστοιχο άνω όριο για την απόσταση μεταξύ ενός πλήρως παρατηρήσιμου συστήματος και του πλησιέστερου μη-παρατηρήσιμου συστήματος προσδιορίζεται αναλόγως. Το άνω όριο για την απόσταση, $d(\mathbf{J}, \mathbf{v}^T, \mathbf{z})$, μεταξύ ενός πλήρως ελέγξιμο και ταυτόχρονα παρατηρήσιμου συστήματος και του πλησιέστερου μη-ελέγξιμου και μη-παρατηρήσιμου συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$d(\mathbf{J}, \mathbf{v}^T, \mathbf{z}) \leq \min \{d_I, d_{II}\}$$

όπου

$$d_I \leq \min \left\{ \left(\|\mathbf{C}_J\| \sigma_{\mathbf{K}_{h+1}} + \min \{ \sigma_{\mathbf{N}_1}, \sigma_{\mathbf{K}_1^0} \sigma_{\mathbf{K}_h} \} \right) \sigma_{\mathbf{K}_h}^{-1} + \sigma_{\mathbf{K}_{h+1}} \right\}$$

$$d_{II} \leq \min \left\{ \left(\|\mathbf{C}_J\| \sigma_{\mathbf{K}_{h+1}^0} + \min \{ \sigma_{\mathbf{N}_1}, \sigma_{\mathbf{K}_1} \sigma_{\mathbf{K}_h^0} \} \right) \sigma_{\mathbf{K}_h^0}^{-1} + \sigma_{\mathbf{K}_{h+1}^0} \right\}$$

και $\mathbf{N} \equiv \mathbf{K}\mathbf{K}^0$ (Boley & Lu, 1984, p. 774; Boley & Lu, 1986, pp. 250–251; Clotet et al., 2001, pp. 556–563).

Τέλος, θεωρούμε την κανονικοποιημένη αριθμητική τάξη της μήτρας Krylov, η οποία ορίζεται ως

$$NNRC(\bar{\tau}) \equiv 100n^{-1}NR(\mathbf{K}, \bar{\tau})$$

όπου το $NR(\mathbf{K}, \bar{\tau})$ δηλώνει την αριθμητική τάξη της μήτρας $\mathbf{K}$, δηλαδή τον αριθμό των μοναδιαίων τιμών της $\mathbf{K}$ που είναι μεγαλύτερες από $\bar{\sigma}_{\mathbf{K}1}$, και $\bar{\tau}$ δηλώνει το επιλεγμένο επίπεδο ανοχής. Το $NNRC$ εκφράζει, για ένα δεδομένο επίπεδο ανοχής, το ποσοστό του συστήματος που είναι πλήρως ελέγξιμο (Mariolis & Veltsistas, 2022, p. 18–19).

Κεφάλαιο 4. Θεωρίες της αξίας

4.1 Σύγκριση των θεωριών της αξίας και η Σραφφαϊανή προσέγγιση

Γενικότερα, διακρίνονται τρεις διαφορετικές θεωρίες της αξίας²⁶. Πρώτον, στην περίπτωση της «ίσης αξιακής σύνθεσης του κεφαλαίου (*equal value compositions of capital*)» των Ricardo–Marx–Dmitriev–Samuelson, το μέγεθος $\mathbf{I}^T (\mathbf{v}^T)$ είναι αριστερό P–F ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\mathbf{A} (\mathbf{J})$. Ως εκ τούτου, οι τιμές των εμπορευμάτων είναι ανεξάρτητες από την κατανομή του εισοδήματος, και ίσες με τις εργασιακές τους αξίες, δηλαδή $\mathbf{p}^T = \mathbf{v}^T = \mathbf{p}^T (\mathbf{I})$ ή, διαφορετικά ειπωμένο, φαίνεται να ισχύει η «καθαρά εργασιακή θεωρία της αξίας (*pure labour value theory*)» (PLVT) (Pasinetti, 1977, pp. 75–76). Σε αυτή την περίπτωση, η οικονομία είναι ελέγξιμη τάξης 1, ανεξαρτήτως της τάξης της μήτρας $\mathbf{J}$.

Δεύτερον, στην περίπτωση των δύο παραγωγικών κλάδων, οι συναρτήσεις $\mathbf{p}^T(\rho)$ είναι απαραίτητα μονότονες και, ως εκ τούτου, η κατεύθυνση της κίνησης των σχετικών τιμών των εμπορευμάτων προσδιορίζεται μόνον από τις διαφορές στις σχετικές εντάσεις κεφαλαίου, όπως εμφανίζεται και στις διάφορες εκδοχές της «παραδοσιακής θεωρίας της αξίας (*traditional value theory*)» (TVT).

Τέλος, όπως επισήμανε ο Sraffa (1960), αφήνοντας στην άκρη τις δύο παραπάνω περιοριστικές περιπτώσεις, οι αλλαγές στην κατανομή του εισοδήματος δύνανται να έχουν πολύπλοκες αναδραστικές επιπτώσεις στις τιμές των μέσων παραγωγής, πράγμα που συνεπάγεται ότι η κατεύθυνση της κίνησης των σχετικών τιμών των εμπορευμάτων, συναρτήσει του ποσοστού κέρδους, καθορίζεται όχι μόνον από τις διαφορές στις σχετικές εντάσεις κεφαλαίου, αλλά και από την κίνηση των σχετικών εντάσεων κεφαλαίου που προκύπτουν από τις αλλαγές στις σχετικές τιμές των εμπορευμάτων.

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (10), $\mathbf{p}^T = (1 - \rho)\mathbf{v}^T + \rho\mathbf{p}^T\mathbf{J}$, ως προς ρ καταλήγουμε²⁷

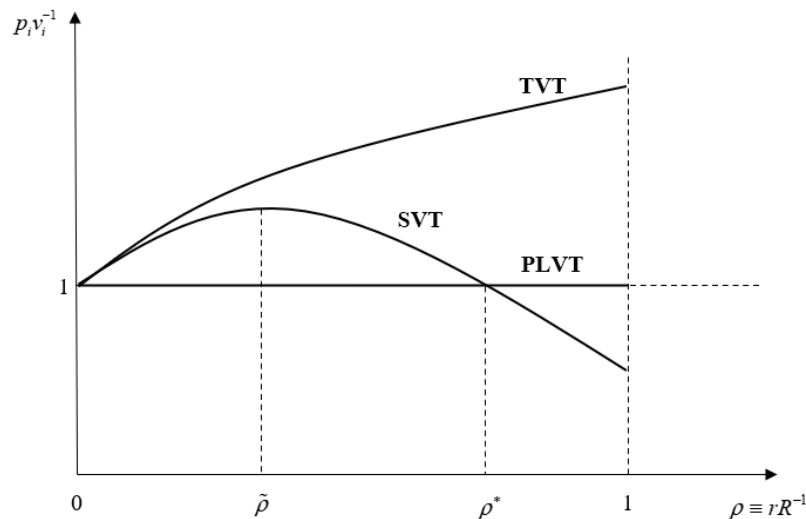
$$\dot{p}_i \equiv dp_i / d\rho = v_i R(\text{CIE} + \rho \text{VE})$$

όπου το $\text{CIE} \equiv \kappa_i - R^{-1}$ δηλώνει το αποτέλεσμα της έντασης κεφαλαίου (*capital-intensity effect*), το $\kappa_i \equiv (\mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{e}_i) v_i^{-1}$ την ένταση κεφαλαίου στον καθέτως ολοκληρωμένο κλάδο ο οποίος παράγει το εμπόρευμα i , το R^{-1} την ένταση κεφαλαίου στο

²⁶ Η παρούσα ενότητα στηρίζεται στο Mariolis (2021d, pp. 7–8).

²⁷ Για μια αναλυτική παρουσίαση βλ. Mariolis & Tsoulfidis (2016a, pp. 40–45, 2016b).

Πρότυπο σύστημα, η οποία είναι ανεξάρτητη από τις τιμές των εμπορευμάτων και την κατανομή του εισοδήματος (επειδή, στην περίπτωση μας, έχει επιλεγεί ως *numéraire* το Πρότυπο εμπόρευμα) και, τέλος, το $VE \equiv \dot{K}_i$ δηλώνει το Σραφφαϊανό αποτέλεσμα, ή το αποτέλεσμα τιμής, το οποίο εξαρτάται από ολόκληρο το οικονομικό σύστημα και, επομένως, δεν είναι *a priori* γνωστό σε επίπεδο οποιουδήποτε μεμονωμένου κλάδου παραγωγής.



Σχήμα 1. Η καμπύλη τιμών–σχετικού ποσοστού κέρδους και Θεωρίες της Αξίας.

Συνεπώς, όταν τα δύο παραπάνω αποτελέσματα έχουν αντίθετο πρόσημο, δηλαδή όταν $CIE > (<) 0$ και $VE < (>) 0$, η παραδοσιακή θεώρηση σχετικά με την κατεύθυνση της κίνησης των σχετικών τιμών των εμπορευμάτων δεν αληθεύει απαραίτητα, ενώ τα ζητήματα που παρατηρούνται απαιτούν μια διαφορετική προσέγγιση στη θεωρία της αξίας και, ως εκ τούτου, αποτελούν τη βάση της «Σραφφαϊανής Θεωρίας της Αξίας (*Sraffian Value Theory*)» (SVT).

Ως αποτέλεσμα, όλες οι θεωρήσεις και οι σχέσεις οι οποίες εξάγονται από το πλαίσιο της παραδοσιακής θεωρίας δεν δύνανται, γενικά, να επεκταθούν πέρα από έναν κόσμο όπου, πρώτον, δεν υπάρχουν παραγόμενα μέσα παραγωγής ή, δεύτερον, υπάρχουν παραγόμενα μέσα παραγωγής, αλλά το ποσοστό κέρδους επί της χρηματικής αξίας των εν λόγω μέσων παραγωγής είναι μηδέν ή, τρίτον, το ποσοστό κέρδους είναι θετικό, αλλά η οικονομία παράγει ένα και μόνον ένα, απλό ή σύνθετο, εμπόρευμα, το οποίο χρησιμοποιείται τόσο ως μέσο παραγωγής όσο και ως μέσο κατανάλωσης. Συνεπώς, συμπεραίνεται ότι, οι δυσκολίες της παραδοσιακής θεωρίας προκύπτουν από

την αντικειμενική ύπαρξη πολύπλοκων διακλαδικών συνδέσεων στην πραγματοκρατική περίπτωση της παραγωγής εμπορευμάτων μέσω εμπορευμάτων και θετικών κερδών. Στο Σχήμα 1 φαίνονται οι κινήσεις των τιμών συναρτήσει του σχετικού ποσοστού κέρδους, ανάλογα με την εκάστοτε θεωρία.

4.2 Φασματική ανακατασκευή της θεωρίας της αξίας

Προκειμένου να γίνουν περισσότερο κατανοητά όλα όσα ελέχθησαν, στρεφόμαστε στην «αποσύνθεση» της μήτρας $\mathbf{J}$ βάσει της «φασματικής της αναπαράστασης (*spectral representation*)»²⁸

$$\mathbf{J} = (\mathbf{y}_{J1}^T \mathbf{x}_{J1})^{-1} \mathbf{x}_{J1} \mathbf{y}_{J1}^T + \sum_{k=2}^n \lambda_{Jk} (\mathbf{y}_{Jk}^T \mathbf{x}_{Jk})^{-1} \mathbf{x}_{Jk} \mathbf{y}_{Jk}^T \quad (44)$$

ή, διαφορετικά

$$\mathbf{J} = \mathbf{X}_J \hat{\lambda}_J \mathbf{X}_J^{-1}$$

όπου $\mathbf{X}_J$ είναι η μήτρα που περιλαμβάνει τα δεξιά ιδιοδιανύσματα της μήτρας $\mathbf{J}$, $\hat{\lambda}_J$, η διαγώνια μήτρα με τις ιδιοτιμές της $\mathbf{J}$, ενώ $\mathbf{X}_J^{-1}$ είναι η μήτρα που σχηματίζεται από τα αριστερά ιδιοδιανύσματα της μήτρας $\mathbf{J}$.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις εξισώσεις (7α), (7β), (40) και (41) προκύπτει ότι υπάρχουν ορισμένες, ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, οι οποίες απορρέουν όταν οι μη-δεσπόμενες ιδιοτιμές της μήτρας $\mathbf{J}$ είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, δηλαδή $\lambda_{Jk} \approx \lambda \equiv \alpha \pm i\beta$, όπου $i \equiv \sqrt{-1}$, ή συγκεντρώνονται γύρω από συγκεκριμένες τιμές. Από την οπτική της θεωρίας της αξίας αρκεί να επικεντρωθεί κανείς στις ακόλουθες έξι²⁹ ιδεατές περιπτώσεις (Mariolis & Veltsistas, 2022, pp. 15–18).

Περίπτωση 1. Όταν το διάνυσμα $\mathbf{v}^T$ αποτελεί αριστερό P–F ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\mathbf{J}$, δηλαδή $\mathbf{v}^T \mathbf{J} = \mathbf{v}^T$, τότε λαμβάνουμε $v_k^* = 0$ (για κάθε δύο διακριτές ιδιοτιμές μιας μήτρας, το αριστερό ιδιοδιάνυσμα της μίας ιδιοτιμής είναι ορθογώνιο στο δεξί ιδιοδιάνυσμα της άλλης) και $rank[\mathbf{K}] = 1$, επομένως το οικονομικό σύστημα είναι ελέγξιμο τάξης 1, ανεξαρτήτως από την τάξη της μήτρας $\mathbf{J}$. Συνεπώς, οι τιμές, σε όρους ωρομισθίου, των μη-Σραφαιϊανών Προτύπων εμπορευμάτων ισούνται με μηδέν και, όπως σε έναν κόσμο με ένα μόνον εμπόρευμα, η καμπύλη χρηματικού ωρομισθίου–σχετικού ποσοστού κέρδους είναι γραμμική, $w(\rho) = 1 - \rho$, ενώ το διάνυσμα των τιμών ισούται

²⁸ Για μια αναλυτική παρουσίαση βλ. Meyer (2001, pp. 517–518).

²⁹ Αναλυτικά βλ. Mariolis & Tsoulfidis (2016a, pp. 152–157) και Mariolis (2021d).

με το διάνυσμα των εργασιακών αξιών, $\mathbf{p}^T(\rho) = \mathbf{v}^T = \mathbf{p}^T(1)$. Αυτή είναι, ουσιαστικά, η περίπτωση των «ίσων αξιακών συνθέσεων κεφαλαίου» κατά Ricardo–Marx–Dmitriev–Samuelson. Επιπλέον, ανεξάρτητα από την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}^T$, το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει προσεγγιστικά και στην περίπτωση όπου η μήτρα $\mathbf{J}$ τείνει να είναι ίδια με τον μοναδιαίο πίνακα (Mariolis & Tsoulfidis, 2011, p. 97; Mariolis & Tsoulfidis, 2016, p. 154).

Περίπτωση 2. Όταν το Πρότυπο εμπόρευμα του Sraffa επιλέγεται ως *numéraire*, δηλαδή $\mathbf{s} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{x}_{A1} (> \mathbf{0})$, όπου το $\mathbf{x}_{A1}$ κανονικοποιείται έτσι ώστε $\mathbf{I}^T \mathbf{x}_{A1} = 1$, προκύπτει $\mathbf{J}\mathbf{s} = \mathbf{s}$, $s_k^* = 0$ και $\text{rank}[\mathbf{K}^0] = 1$, η οικονομία είναι παρατηρήσιμη τάξης 1 ανεξάρτητα από την τάξη της μήτρας $\mathbf{J}$. Συνεπώς, η καμπύλη χρηματικού ωρομισθίου–σχετικού ποσοστού κέρδους είναι γραμμική, και οι τιμές των μη-Σραφφαιανών Προτύπων εμπορευμάτων είναι γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις του ποσοστού κέρδους, σύμφωνα με το θεώρημα Stolper–Samuelson (αυτό αφορά όχι μόνο τις τιμές των πραγματικών εμπορευμάτων, αλλά και των μιγαδικών συζυγών εμπορευμάτων) (Mariolis & Tsoulfidis, 2011, pp. 93–96).

Περίπτωση 3. Όταν $\mathbf{v}^T \mathbf{J} \neq \mathbf{v}^T$, $\mathbf{J}\mathbf{z} \neq \mathbf{z}$ και $\text{rank}[\mathbf{J}] = 1$, δηλαδή $\mathbf{J} = (\mathbf{y}_{J1}^T \mathbf{x}_{J1})^{-1} \mathbf{x}_{J1} \mathbf{y}_{J1}^T$ με $\lambda_{jk} = 0$, τότε ισχύει $\mathbf{J}^\kappa = \mathbf{J}$, $\kappa = 1, 2, \dots$, και, ως εκ τούτου $\text{rank}[\mathbf{K}] = \text{rank}[\mathbf{K}^0] = 2$. Σε αυτή την περίπτωση η οικονομία είναι ταυτόχρονα ελέγξιμη και παρατηρήσιμη τάξης 2 ανεξάρτητα από τις διευθύνσεις των διανυσμάτων $\mathbf{v}^T$ και $\mathbf{z}$, ενώ οι καμπύλες μισθού–τιμών–σχετικού ποσοστού κέρδους είναι όλες ρητές συναρτήσεις βαθμού 1. Αυτή η οικονομία είναι ισοδύναμη, μέσω της τριγωνοποίησης Schur, με ένα οικονομικά σημαντικό και γενικευμένο σύστημα Marx–Fel’dman–Mahalanobis (γενικευμένο υπόδειγμα «*corn-tractor*») (Mariolis, 2013, pp. 5195–5196), συμπεριφερόμενο ως διασπώμενο σύστημα δύο κλάδων χωρίς μη-αυτοαναπαραγόμενα μη-βασικά αγαθά, και, επομένως, η παραδοσιακή θεωρία της αξίας ισχύει (εξαιρουμένων πιθανών «αρνητικών αποτελεσμάτων τιμής κατά Wicksell» και υπό την προϋπόθεση ύπαρξης μιας μόνο τεχνικής παραγωγής). Θα πρέπει, ωστόσο, να προστεθεί ότι η παραδοσιακή θεωρία ισχύει επίσης όταν όλες οι μη-δεσπύζουσες ιδιοτιμές είναι πραγματικές, μη-μηδενικές και ίσες μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή, η οικονομία είναι τόσο ελέγξιμη όσο και παρατηρήσιμη τάξης 2 και συμπεριφέρεται ως μια οικονομία δύο κλάδων με μόνο βασικά εμπορεύματα.

Περίπτωση 4. Όταν $\mathbf{v}^T \mathbf{J} \neq \mathbf{v}^T$ και η $\mathbf{J}$ έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικές, μη-μηδενικές, μη-δεσπόζουσες ιδιοτιμές (ή μία μιγαδική), η οικονομία συμπεριφέρεται ως οικονομία με τουλάχιστον τρεις βασικούς κλάδους. Τότε, οι καμπύλες μισθού (τιμών)–ποσοστού κέρδους μπορεί να παρουσιάζουν σημεία καμπής (μπορεί να είναι μη-μονότονες), και επομένως, η παραδοσιακή θεωρία δεν ισχύει απαραίτητα (Mariolis & Tsoulfidis, 2011, pp. 97–101 και 2016, p. 156). Αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί γενικά στη Σραφφαϊανή Θεωρία της Αξίας.

Περίπτωση 5: Όταν $\mathbf{v}^T \mathbf{J} \neq \mathbf{v}^T$ και η $\mathbf{J}$ είναι παρόμοια με μία κυκλοτερή (*circulant*) διπλά στοχαστική (ήτοι $\mathbf{e}^T \mathbf{J} = \mathbf{e}^T$ και $\mathbf{J}\mathbf{e} = \mathbf{e}$) μήτρα της μορφής

$$\mathbf{J} \approx \mathbf{C} \equiv c\mathbf{I} + (1-c)\mathbf{\Pi}$$

όπου $0 \leq c < 1$, $\mathbf{\Pi} \equiv \text{circ}[0, 1, 0, \dots, 0]$ είναι η βασική κυκλοτερής μήτρα μετάθεσης (μετά από κάθε πολλαπλασιασμό οποιασδήποτε μήτρας με την μήτρα $\mathbf{\Pi}$, μετατίθενται οι στήλες της μία θέση δεξιά), και $\mathbf{\Pi}^n = \mathbf{I}$. Παραβλέποντας το σφάλμα προσέγγισης, οι τιμές σε όρους του Σραφφαϊανού Πρότυπου εμπορεύματος ανάγονται σε μία πεπερασμένη σειρά χρονολογημένων ποσοτήτων εργασίας, και η σχέση τιμών–ποσοστού κέρδους είναι μη-μονότονη ανεξάρτητα από την διεύθυνση του $\mathbf{v}^T$. Έτσι, αυτές οι ιδεατές «κυκλοτερείς οικονομίες», που είναι σχεδόν πάντα πλήρως ελέγξιμες και παρατηρήσιμες, μοιάζουν με το Σραφφαϊανό παράδειγμα του κρασιού που παλιώνει στο κελάρι και της παλιάς δρυός που γίνεται σεντούκι και αντιστοιχούν στην «Σραφφαϊανή Πολική Θεωρία της Αξίας (*Sraffian Polar Theory*)» (Mariolis, 2021d, pp. 10–16).

Περίπτωση 6. Όταν $\mathbf{v}^T \mathbf{J} \neq \mathbf{v}^T$, $\mathbf{J}\mathbf{z} \neq \mathbf{z}$, $n \geq 4$, μόνο ένα αγαθό είναι βασικό, τα υπόλοιπα είναι μη-αυτοαναπαράγομενα μη-βασικά, κ εμπορεύματα, όπου $2 \leq \kappa \leq n-2$, δεν εισέρχονται στην παραγωγή κανενός εμπορεύματος (καθαρά καταναλωτικά εμπορεύματα), και $\text{rank}[\mathbf{J}] \geq 2$. Συνεπώς, η μήτρα $\mathbf{J}$ είναι τριγωνική με το πολύ $2^{-1}n(n-1)$ θετικά στοιχεία, η διάσταση του ιδιοχώρου που συνδέεται με την ιδιοτιμή $\lambda_{jk} = 0$ είναι κ , $\text{rank}[\mathbf{J}] = n - \kappa$, το διάνυσμα $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^{n-\kappa}$ (το διάνυσμα $\mathbf{J}^{n-\kappa} \mathbf{z}$) ισούται με το αριστερό (δεξιό) P–F ιδιοδιάνυσμα της $\mathbf{J}$ και, ως εκ τούτου, $\text{rank}[\mathbf{K}] = \text{rank}[\mathbf{K}^0] = n - \kappa + 1$. Επιπλέον, η εφαρμογή της αντίστροφης (*inverse*) τριγωνοποίησης Schur, καταδεικνύει ότι η εν λόγω οικονομία είναι αυστηρά ισοδύναμη με ορισμένες μη-διασπώμενες οικονομίες, $\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}$ και $\mathbf{v}^T \mathbf{T}^{-1}$. Επομένως, μπορεί να λεχθεί ότι το σύστημα $[\mathbf{J}, \mathbf{v}^T]$ περιλαμβάνει το υπερ-βασικό αγαθό 1, το οποίο δεν είναι άλλο από το Σραφφαϊανό Πρότυπο εμπόρευμα αυτών των μη-διασπώμενων οικονομιών και $n-1$ υπερ-μη-

αυτοαναπαραγόμενα και μη-βασικά εμπορεύματα, εκ των οποίων κ είναι καθαρά καταναλωτικά.

Αν και η Περίπτωση 6 εμφανίζεται ως μία γενίκευση της Περίπτωσης 3 (όταν για $\kappa = n - 2$, λαμβάνουμε $\text{rank}[\mathbf{J}] = 2$ και $\text{rank}[\mathbf{K}] = \text{rank}[\mathbf{K}^0] = 3$), εμπεριέχει μία μη-διαγωνοποιήσιμη μήτρα $\mathbf{J}$ και, ως εκ τούτου, ομοιάζει περισσότερο με το παράδειγμα της οικονομίας του Pasinetti (1966), όπου $\kappa = 1$, η διάσταση του συνδεδεμένου ιδιοχώρου με την ιδιοτιμή $\lambda_{jk} = 0$ είναι 1, η μήτρα $\mathbf{J}$ είναι μη-διαγωνοποιήσιμη, η τάξη της είναι $\text{rank}[\mathbf{J}] = n - 1$, το διάνυσμα $\mathbf{v}^T \mathbf{J}^{n-1}$ (το διάνυσμα $\mathbf{J}^{n-1} \mathbf{z}$) ισούται με το αριστερό (το δεξί) P-F ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\mathbf{J}$ και, τέλος, $\text{rank}[\mathbf{K}] = \text{rank}[\mathbf{K}^0] = n$. Επιπλέον, στην Περίπτωση 6, το διάνυσμα τιμών εκφρασμένο σε όρους του Σραφφαϊανού Πρότυπου εμπορεύματος δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{p}^T(\rho) = \left[(1 - \rho) \mathbf{v}^T \sum_{h=0}^{n-\kappa-1} \rho^h \mathbf{J}^h \right] + \rho^{n-\kappa} \mathbf{p}^T(1)$$

ή, πιο συγκεκριμένα, $p_1 = v_1$ και

$$\mathbf{p}_2^T(\rho) = \left[\rho v_1 \mathbf{J}_{12} + (1 - \rho) \mathbf{v}_2^T \right] \sum_{h=0}^{n-\kappa-1} \rho^h \mathbf{J}_{22}^h \quad (45)$$

όπου το σύστημα $[\mathbf{J}_{22}, \mathbf{v}_2^T, \mathbf{p}_2^T]$ αναφέρεται στα μη-βασικά εμπορεύματα, το $\mathbf{J}_{12}$ δηλώνει το $1 \times (n - 1)$ διάνυσμα των ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών του βασικού εμπορεύματος που εισέρχεται στην παραγωγή των μη-βασικών εμπορευμάτων, και η $\mathbf{J}_{22}$ είναι μία $(n - 1) \times (n - 1)$ αυστηρά τριγωνική και, ως εκ τούτου, μηδενοδύναμη μήτρα (*nilpotent matrix*), της μορφής $[\mathbf{J}_{22}]^{n-\kappa} = \mathbf{0}$ (όπως στα αυστριακού τύπου οικονομικά μοντέλα απλής παραγωγής, όπου ολόκληρο το σύστημα παραγωγής μπορεί να αναπαρασταθεί από μια απλή διαδικασία ροής εισροών-εκροών πεπερασμένης διάρκειας). Η εξίσωση (45) δηλώνει ότι η πολυωνυμική προσέγγιση Bienenfeld (1988) τάξης $n - \kappa$ είναι ακριβής για όλα τα ρ (δηλαδή, όχι μόνο για $\rho = 0$ και $\rho = 1$). Το παραπάνω συνεπάγεται ότι:

- i. Υφίστανται αντιστροφές (*reversals*) μεταξύ των εργασιακών αξιών και των τιμών παραγωγής. Ωστόσο, η δυνατότητα ύπαρξης καμπυλών τιμών-ποσοστού κέρδους με περισσότερα από ένα σημεία καμπής φαίνεται να είναι περιορισμένη (και μάλλον μειώνεται με την αύξηση του κ), δεδομένου ότι, στο δεξί μέλος της εξίσωσης (45):

- a. το άθροισμα των δύο ομάδων των ρ -όρων αυξάνεται με την αύξηση του ρ ,
 - b. κάθε όρος, $\rho\rho^h$, της πρώτης ομάδας αυξάνεται με την αύξηση του ρ και
 - c. στη δεύτερη ομάδα, $(1-\rho)\rho^h$, υπάρχει μόνο ένας αυστηρά φθίνων όρος (στην περίπτωση όπου $h=0$), ο οποίος είναι επίσης μεγαλύτερος από το άθροισμα όλων των υπόλοιπων όρων για $\rho < 0.5$, ενώ οι υπόλοιποι αυτοί όροι παίρνουν τις μέγιστες τιμές τους $h^h(1+h)^{-1-h}$ (αυξάνονται με το h , και μειώνονται με το n , τείνοντας στο μηδέν) στο $\rho = h(1+h)^{-1}$.³⁰
- ii. Όταν ο πίνακας των «επαυξημένων» (με μισθολογικά εμπορεύματα) συντελεστών εισροών τυχαίνει να έχει την παραπάνω δομή, η λεγόμενη Μαρξική επαναληπτική διαδικασία «μετασχηματισμού» του εργασιακών αξιών σε τιμές, παράγει το σωστό ζεύγος $[\mathbf{p}^T, \rho]$ σε ακριβώς $n-k$ βήματα³¹.

³⁰ Ο Steedman (1999a) παρέχει λεπτομερή ανάλυση της δεύτερης ομάδας ρ -όρων. Επιπλέον, βλ. Mariolis (2010). Για ένα αριθμητικό παράδειγμα διπλής αντιστροφής, βλ. Mariolis & Veltsistas (2022, pp. 29–31).

³¹ Βλ. Mariolis & Veltsistas (2022, pp. 16–18) και τις εκεί αναφορές.

Κεφάλαιο 5. Εμπειρική διερεύνηση

5.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται και αναλύονται τα αποτελέσματα της μελέτης που διεξήχθη με στόχο την εξέταση της ελεγχσιμότητας και παρατηρησιμότητας των πραγματικών οικονομικών συστημάτων των πινάκων εισροών–εκροών. Ιδιαίτερη έμφαση δίδεται τόσο σε οικονομίες απλής παραγωγής³² όσο και στη συμπαραγωγή, αναδεικνύοντας τη σημασία της ευρύτερης κατανόησης των λειτουργιών και ιδιομορφιών αυτών των δύο συστημάτων.

Το σύστημα τιμών και το ποσοστό κέρδους αποτελούν θεμελιώδη στοιχεία της οικονομικής ανάλυσης, έχοντας μελετηθεί εκτενώς στο πλαίσιο της πολιτικής οικονομίας και της ανάλυσης των παραγωγικών συστημάτων. Εντούτοις, η παρούσα έρευνα εστιάζει στην επέκταση της σχετικής βιβλιογραφίας, διερευνώντας πτυχές που μέχρι στιγμής είτε έχουν εξεταστεί αποσπασματικά είτε έχουν λάβει περιορισμένη εμπειρική τεκμηρίωση όπως, λόγου χάριν, ο βαθμός ελεγχσιμότητας και παρατηρησιμότητας στα συστήματα συμπαραγωγής. Ο στόχος είναι η παροχή νέων εμπειρικών αποτελεσμάτων που θα εμπλουτίσουν τη θεωρητική κατανόηση του τρόπου λειτουργίας αυτών των συστημάτων.

Στο πλαίσιο αυτό, η μελέτη εστιάζει σε δύο διακριτές, αλλά αλληλοσυμπληρούμενες προσεγγίσεις. Πρώτον, σε συνέχεια προηγούμενης έρευνας³³, αναλύονται οι οικονομίες απλής παραγωγής και, δεύτερον, εξετάζονται οι οικονομίες συμπαραγωγής, όπου οι σύνθετες διακλαδικές συνδέσεις μεταξύ εμπορευμάτων και παραγωγικών διαδικασιών επιτρέπουν την ανάλυση πολυπλοκότερων συστημάτων. Μέσω αυτών των δύο κατευθύνσεων, η μελέτη φιλοδοξεί να συμβάλει στην κατανόηση της δομής και της λειτουργίας των πραγματικών οικονομικών συστημάτων.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου, παρουσιάζονται αναλυτικά τα εμπειρικά δεδομένα που συλλέχθηκαν και αναλύθηκαν, ενώ περιγράφονται τα κύρια ευρήματα της μελέτης. Η παρουσίαση αυτή συνοδεύεται από την κατάλληλη ερμηνεία των αποτελεσμάτων, με στόχο τη σύνδεση τους με το θεωρητικό πλαίσιο που αναλύθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια.

³² Η περίπτωση της απλής παραγωγής έχει λεπτομερώς αναλυθεί στα Βελτισίστας (2020), Μαριόλης & Βελτισίστας (2021) και Mariolis & Veltsistas (2022).

³³ Βλ. Βελτισίστας (2020).

5.2 Επεξεργασία δεδομένων

Στο πλαίσιο της απλής παραγωγής, τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν προέρχονται από εθνικούς πίνακες εισροών–εκροών οι οποίοι αφορούν σαράντα τρεις (43) οικονομίες και καλύπτουν την περίοδο από το 2000 έως το 2014. Για κάθε μία από αυτές τις οικονομίες εξετάστηκαν τα έτη 2000, 2005, 2010 και 2014. Πρόκειται για συμμετρικούς πίνακες εισροών–εκροών (*Symmetric Input–Output Tables, SIOTs*)³⁴, οι οποίοι προέρχονται από τη *World Input–Output Database (2016 Release)* και είναι διαθέσιμοι μέσω του διαδικτυακού ιστοτόπου *Groningen Growth and Development Centre (GGDC)*^{35,36}. Η βάση δεδομένων καλύπτει τα 28 κράτη–μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης, καθώς και 15 ακόμη χώρες³⁷. Τα δεδομένα παρουσιάζουν 56 συνολικά κλάδους, ταξινομούνται σύμφωνα με το *International Standard Industrial Classification 4 (ISIC Rev. 4)* και οι πίνακες είναι σε συμφωνία με το Σύστημα Εθνικών Λογαριασμών του 2008 (*SNA 2008*). Συνεπώς, τα στοιχεία που παρέχονται δίνουν πίνακες και διανύσματα διαστάσεων έως 56×56 και 1×56 , αντίστοιχα³⁸. Για την κατασκευή του διανύσματος της εργασίας χρησιμοποιήθηκε, από τον ίδιο ιστότοπο, ο πίνακας *Socio-Economic Accounts* και, συγκεκριμένα η μεταβλητή *EMPE* («*Number of employees (thousands)*»). Ωστόσο, για τη Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας, χρησιμοποιήθηκε η μεταβλητή *EMP* («*Number of persons engaged (thousands)*»), καθώς για τη μεταβλητή *EMPE* δεν δίνονται στοιχεία.

Στο πλαίσιο της εξέτασης της συμπαραγωγής εμπορευμάτων, τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν προέρχονται από εθνικούς πίνακες Προσφοράς και Χρήσεων (*Supply and Use Tables, SUTs*)³⁹ οι οποίοι αφορούν πέντε (5) οικονομίες και

³⁴ Οι Συμμετρικοί Πίνακες Εισροών–Εκροών αναπαριστούν τις διακλαδικές σχέσεις μιας οικονομίας στην οποία ο αριθμός των εμπορευμάτων ισούται με τον αριθμό των κλάδων της και κάθε εμπόρευμα παράγεται από έναν μόνον κλάδο. Επομένως, εκ κατασκευής, οι συμμετρικοί πίνακες εισροών–εκροών αποκλείουν την συμπαραγωγή εμπορευμάτων.

³⁵ <https://www.rug.nl/ggdc/valuechain/wiod/wiod-2016-release>.

³⁶ Για τις βασικές έννοιες, τις μεθόδους κατασκευής και τις πηγές δεδομένων, βλ. Timmer et al. (2015).

³⁷ Αυστραλία, Αυστρία, Βέλγιο, Βουλγαρία, Βραζιλία, Γαλλία, Γερμανία, Δανία, Δημοκρατία της Κορέας, Δημοκρατία της Σλοβακίας, Ελβετία, Ελλάδα, Εσθονία, Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής, Ηνωμένο Βασίλειο της Μεγάλης Βρετανίας και Βορείου Ιρλανδίας, Ιαπωνία, Ινδία, Ινδονησία, Ιρλανδία, Ισπανία, Ιταλία, Καναδάς, Κάτω Χώρες, Κροατία, Κύπρος, Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας, Λετονία, Λιθουανία, Λουξεμβούργο, Μάλτα, Μεξικό, Νορβηγία, Ουγγαρία, Πολωνία, Πορτογαλία, Ρουμανία, Ρωσική Ομοσπονδία, Σλοβενία, Σουηδία, Ταϊβάν, Τουρκία, Τσεχική Δημοκρατία και Φινλανδία

³⁸ Για μια αναλυτική παρουσίαση σχετικά με την εμπειρική διερεύνηση στην περίπτωση της απλής παραγωγής, βλ. Βελτσίστας (2020).

³⁹ Οι Πίνακες Προσφοράς και Χρήσεων είναι ένα ζεύγος πινάκων και αποτελούν βασικό εργαλείο των Εθνικών Λογαριασμών, καταγράφοντας τη ροή αγαθών και υπηρεσιών σε μια οικονομία. Ο Πίνακας Προσφοράς (*Supply Table*) περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο παράγονται και διατίθενται τα αγαθά και οι υπηρεσίες της οικονομίας, αναλύοντας την παραγωγή ανά κλάδο. Το τμήμα του πίνακα προσφοράς που περιγράφει την εγχώρια παραγωγή των διαφόρων κλάδων καλείται «μήτρα παραγωγής (*make*

καλύπτουν, την περίοδο από το 2000 έως το 2014. Για κάθε μία από αυτές τις οικονομίες εξετάστηκαν τα έτη 2000, 2005, 2010 και 2014. Τα δεδομένα προέρχονται, όπως και στην περίπτωση της απλής παραγωγής, από τη *WIOD*. Οι χώρες οι οποίες εξετάστηκαν είναι η Γερμανία, η Ελλάδα, οι Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής, η Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας και η Ρωσία. Επομένως, ερευνήθηκαν 20 διαφορετικές περιπτώσεις, δείγμα επαρκές προκειμένου να οδηγήσει σε ασφαλή συμπεράσματα. Τα παρεχόμενα στοιχεία δίνουν πίνακες διαστάσεων 64×64 . Ωστόσο, καθώς για τη δημιουργία του διανύσματος της εργασίας δεν παρέχονται διαφορετικά στοιχεία από τον πίνακα *Socio-Economic Accounts*, έχουμε προβεί στην συνάθροιση κλάδων από τους πίνακες προσφοράς και χρήσεων, προκειμένου να δημιουργηθούν πίνακες και διανύσματα ίδιων διαστάσεων⁴⁰. Και στην περίπτωση της συμπαραγωγής, για την κατασκευή του διανύσματος της εργασίας χρησιμοποιήθηκε η μεταβλητή *EMPE* και για τη Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας χρησιμοποιήθηκε η μεταβλητή *EMP*. Στην περίπτωση των Ηνωμένων Πολιτειών και για το έτος 2005 χρησιμοποιήθηκε και η μεταβλητή *H_EMPE* («*Total hours worked by employees (millions)*»), χωρίς ωστόσο να παρουσιάζεται διαφοροποίηση στα αποτελέσματα.

5.3 Παρουσίαση αποτελεσμάτων

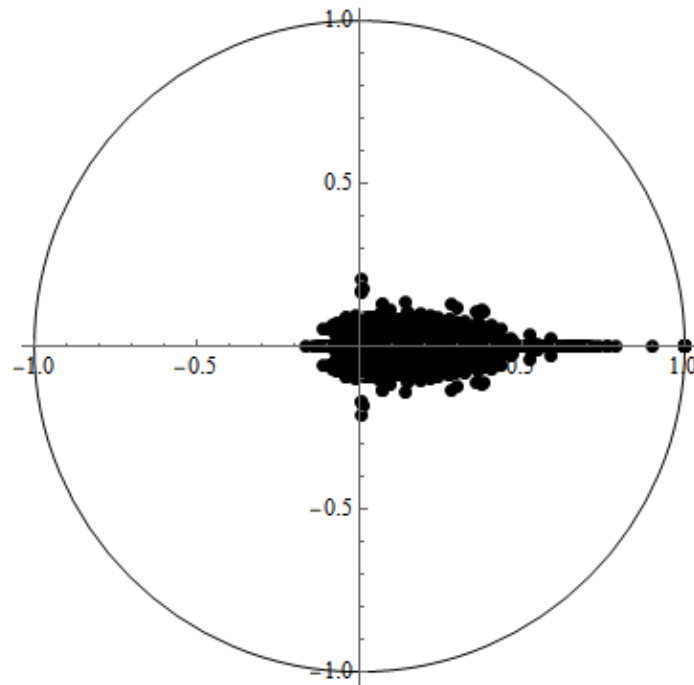
5.3.1 Απλή Παραγωγή

Η πλειονότητα των αποτελεσμάτων σχετικά με την απλή παραγωγή, έχει παρουσιαστεί σε προγενέστερες μελέτες, και συγκεκριμένα στα Βελτσίστας (2020), Μαριόλης & Βελτσίστας (2021) και Mariolis & Veltsistas (2022). Παρακάτω συνοψίζονται και επεκτείνονται, βάση της παρούσας έρευνας, τα βασικότερα ευρήματα ($33 \leq n \leq 55$, 8966 ιδιοτιμές).

matrix)». Κάθε γραμμή του πίνακα παραγωγής δίνει τις ποσότητες (σε χρηματικούς όρους) κάθε προϊόντος που παράγεται από τους διάφορους κλάδους, ενώ κάθε στήλη δίνει τις ποσότητες των διαφόρων προϊόντων που παράγονται από κάθε κλάδο. Ο Πίνακας Χρήσεων (*Use Table*) καταγράφει τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα αγαθά και οι υπηρεσίες, είτε για ενδιάμεση κατανάλωση (από άλλους κλάδους) είτε για τελική χρήση (κατανάλωση, επενδύσεις, εξαγωγές). Το τμήμα του πίνακα χρήσεων που περιγράφει την ενδιάμεση κατανάλωση ανά προϊόν και ανά κλάδο ονομάζεται «μήτρα ενδιάμεσων χρήσεων (*use matrix*)» της οικονομίας. Κάθε γραμμή της μήτρας των ενδιάμεσων χρήσεων δίνει τις ποσότητες (σε χρηματικούς όρους) κάθε προϊόντος που χρησιμοποιείται από τους διάφορους κλάδους, ενώ κάθε στήλη δίνει τις ποσότητες των διαφόρων προϊόντων που χρησιμοποιούνται από κάθε κλάδο. Οι πίνακες αυτοί επιτρέπουν την ανάλυση διασυνδέσεων μεταξύ κλάδων, δείχνοντας τον τρόπο με τον οποίο η παραγωγή ενός τομέα εξαρτάται από εισροές άλλων και πώς συνεισφέρει στην οικονομία. Για μια αναλυτικότερη παρουσίαση των εν λόγω πινάκων, αλλά και τους τρόπους μετατροπής των πινάκων προσφοράς και χρήσεων σε συμμετρικούς πίνακες εισροών-εκροών, βλ. Soklis (2021b).

⁴⁰ Σχετικά με την ταξινόμηση των κλάδων και τις συναθροίσεις που πραγματοποιήθηκαν στην περίπτωση της συμπαραγωγής, βλ. Παράρτημα IV.

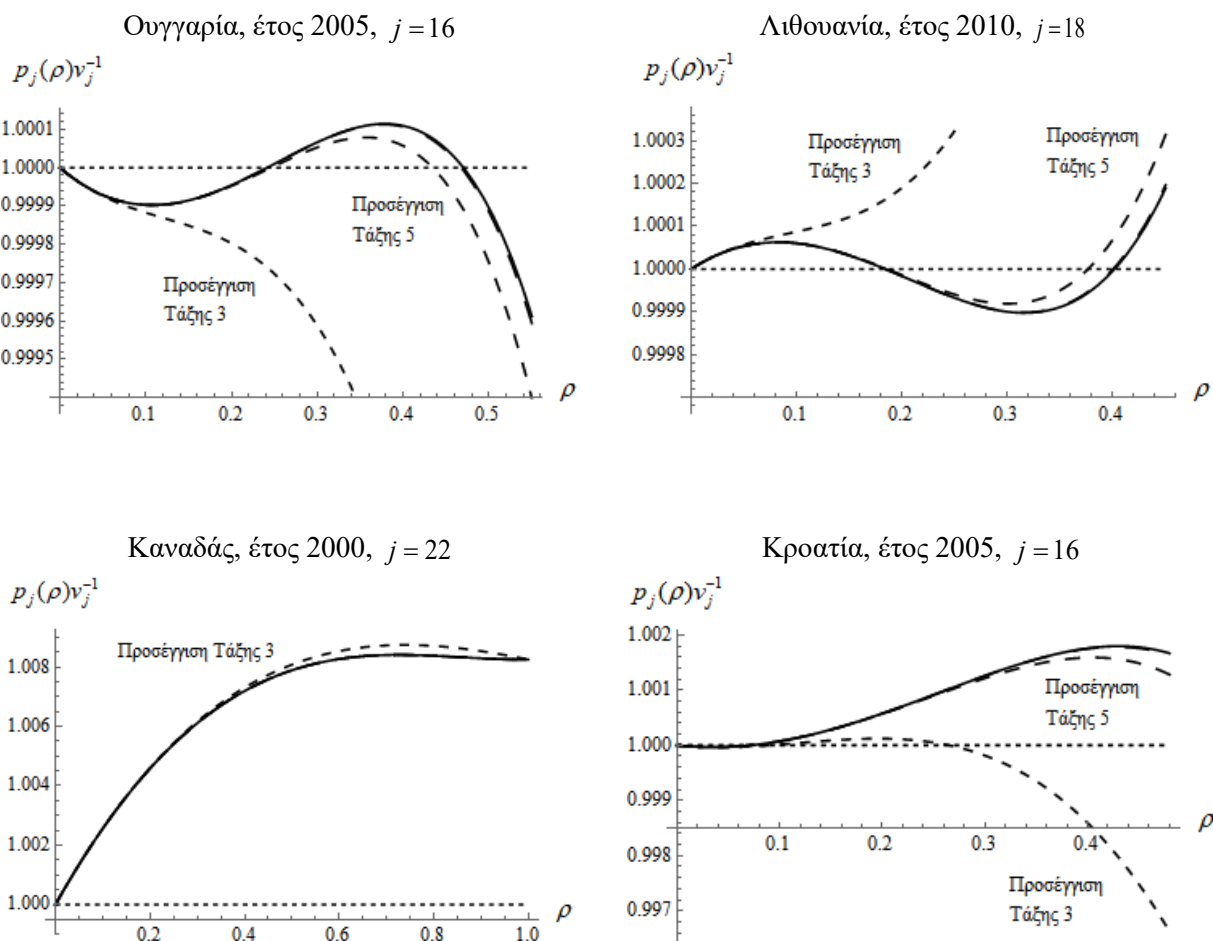
1. Ο αριθμητικός μέσος όρος των γεωμετρικών μέσων των απόλυτων τιμών των μη-δεσποζουσών ιδιοτιμών της μήτρας $\mathbf{J}$ είναι της τάξης του 0,033. Οι αριθμητικοί μέσοι των απόλυτων τιμών των δύο πρώτων υποδεσποζουσών ιδιοτιμών είναι 0,516 και 0,406, αντίστοιχα, και η διάμεσος είναι 0,5 και 0,4, αντίστοιχα. Η απόλυτη τιμή των μικρότερων ιδιοτιμών κυμαίνεται μεταξύ του 10^{-14} και του 10^{-3} . Ο λόγος μεταξύ των μικρότερων και των μεγαλύτερων ιδιοζουσών της μήτρας $\mathbf{J}$ κυμαίνεται μεταξύ 10^{-14} και 10^{-4} . Στο Σχήμα 2 παρουσιάζεται η θέση των ιδιοτιμών όλων των μητρών $\mathbf{J}$ στο μιγαδικό επίπεδο, όπου παρατηρείται ότι η τεράστια πλειονότητα των μη-δεσποζουσών ιδιοτιμών συγκεντρώνεται σε μια στενή «ζώνη» χαμηλών τιμών γύρω από τον άξονα των πραγματικών αριθμών.



Σχήμα 2. Η θέση των ιδιοτιμών των κανονικοποιημένων μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών στο μιγαδικό επίπεδο στην περίπτωση της απλής παραγωγής (8966 ιδιοτιμές).

2. Η απόλυτη τιμή του ορίζουσας της μήτρας ελεγκσιμότητας, $|\det[\mathbf{K}]|$, κυμαίνεται μεταξύ 10^{-824} και 10^{-354} . Ο βαθμός ελεγκσιμότητας, DC , κυμαίνεται μεταξύ 10^{-21} και 10^{-18} . Για ανοχή (*tolerance*) 10^{-4} (10^{-2}), η αριθμητική τάξη της μήτρας $\mathbf{K}$ είναι μεταξύ 4 και 7 (μεταξύ 2 και 4), ενώ η κανονικοποιημένη αριθμητική τάξη της ελεγκσιμότητας βρίσκεται στο εύρος 7–18% (4–9%). Η μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ δύο διαδοχικών ιδιοζουσών τιμών της μήτρας $\mathbf{K}$ βρίσκεται στο εύρος 0,005–0,105 (ο αριθμητικός μέσος όρος είναι 0,063 και η διάμεσος είναι 0,065). Η

φασματική νόρμα της μήτρας *companion* της **J** είναι μεταξύ 4,697 και 800,285 (ο αριθμητικός μέσος είναι 85,111 και η διάμεσος είναι 50,590), και το άνω όριο για την απόσταση από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο σύστημα βρίσκεται στο εύρος 0,237–58,193 (ο αριθμητικός μέσος είναι 5,707 και η διάμεσος είναι 3,166)⁴¹.



Σχήμα 3. Τέσσερις περιπτώσεις διπλής αντιστροφής τιμής–καθέτως ολοκληρωμένης εργασίας. «Πραγματικές» καμπύλες (συνεχείς καμπύλες) και οι Bienefeld προσεγγίσεις τους τάξης 3, 5 και 7 (διακεκομμένες καμπύλες).

3. Οι μη-μονότονες καμπύλες τιμών–ποσοστού κέρδους, οι οποίες εκφράζονται σε όρους του Σραφφαϊανού Πρότυπου εμπορεύματος, για $0 \leq \rho \leq 1$, εντοπίζονται στο 18% των περιπτώσεων (1611 στις συνολικά 8966), ενώ αντιστροφές (*reversals*) μεταξύ τιμών και καθέτως ολοκληρωμένων συντελεστών εργασίας εντοπίζονται στο 10% των περιπτώσεων (912 στις 8966) ή, διαφορετικά, στο

⁴¹ Αναλυτικά βλ. Παράρτημα I, VI και VII.

57% των μη-μονότονων καμπυλών⁴². Στο Σχήμα 3 δίνονται οι περιπτώσεις στις οποίες εμφανίζεται διπλό *reversal*, καθώς και η αντίστοιχη προσέγγιση Bienenfeld⁴³.

5.3.2 Συμπαράγωγη

Η συμπαράγωγή εμπορευμάτων αποτελεί, όπως έχει ήδη επισημανθεί, την πλέον πραγματοκρατική περίπτωση, καθώς οι κλάδοι των οικονομιών παράγουν περισσότερα του ενός διαφορετικά εμπορεύματα, ενώ τα εμπορεύματα της οικονομίας παράγονται από περισσότερους του ενός κλάδους. Ως εκ τούτου, αποτελεί επιβεβλημένη ανάγκη η μελέτη της ελεγχσιμότητας–παρατηρησιμότητας στην περίπτωση της συμπαράγωγής.

Για την κατασκευή της μήτρας ελεγχσιμότητας, $\mathbf{K}$, έχουν χρησιμοποιηθεί δύο διαφορετικοί τρόποι⁴⁴.

1. Η μήτρα $\mathbf{K}$ έχει διαμορφωθεί από το διάνυσμα των προσθετικών εργασιακών αξιών, $\mathbf{I}^T[\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1}$, και τη μήτρα των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών, $\mathbf{A}[\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1}$ (συμβολίζουμε αυτή τη μήτρα με $\mathbf{K}_1$).
2. Η μήτρα $\mathbf{K}$ έχει διαμορφωθεί από το διάνυσμα $\mathbf{I}^T\mathbf{B}^{-1}$ και τη μήτρα $\mathbf{AB}^{-1}$ (συμβολίζουμε αυτή τη μήτρα με $\mathbf{K}_2$).

Κατά αντιστοιχία, για την κατασκευή της μήτρας παρατηρησιμότητας, $\mathbf{K}^O$, έχουν χρησιμοποιηθεί και εδώ δύο διαφορετικοί τρόποι:

1. Ένα τυχαίο διάνυσμα, $\mathbf{z}$, και τη μήτρα $\mathbf{A}[\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1}$ (συμβολίζουμε αυτή τη μήτρα με $\mathbf{K}_1^O$).
2. Ένα τυχαίο διάνυσμα, $\mathbf{z}$, και τη μήτρα $\mathbf{AB}^{-1}$ (συμβολίζουμε αυτή τη μήτρα με $\mathbf{K}_2^O$).

Κατά την εξέταση της οικονομίας των Η.Π.Α. και για το έτος 2005 χρησιμοποιήθηκαν δέκα διαφορετικά τυχαία διανύσματα για την κατασκευή της μήτρας παρατηρησιμότητας και όλα οδήγησαν σε όμοια αποτελέσματα⁴⁵.

⁴² Στην περίπτωση της Ελλάδας για το έτος 2014, στο διάστημα $0 \leq \rho \leq 1$ υπάρχουν 14 (26%) περιπτώσεις μη-μονότονων καμπυλών τιμών και 9 (17%) περιπτώσεις αντιστροφής, ενώ στο διάστημα $-\mathbf{R}^{-1} \cong -0.764 \leq \rho \leq 1$ υπάρχουν 20 (37%) και 13 (24%) περιπτώσεις, αντίστοιχα.

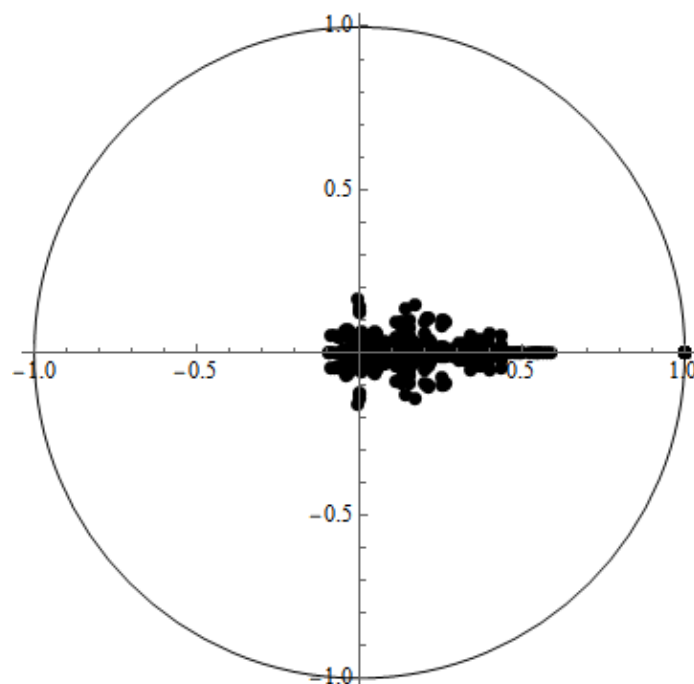
⁴³ Για μια αναλυτική περιγραφή της προσέγγισης Bienenfeld, βλ. Iliadi et al., (2014).

⁴⁴ Ως εκ τούτου, λαμβάνουμε 40 μήτρες ελεγχσιμότητας και 40 μήτρες παρατηρησιμότητας.

⁴⁵ Τόσο τα ψευδο-τυχαία διανύσματα όσοι και οι τυχαίες μήτρες που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία, δημιουργήθηκαν μέσω του προγράμματος *Mathematica*, <https://reference.wolfram.com/language/tutorial/PseudorandomNumbers.html>.

Στη συνέχεια εκτίθενται/αναλύονται τα αποτελέσματα από την εξέταση κάθε οικονομίας ($33 \leq n \leq 54$, 968 ιδιοτιμές)⁴⁶.

1. Οι κανονικοποιημένες ιδιοτιμές της μήτρας των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών, $\mathbf{H}$, έχουν πτωτική τάση και, συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι η τεράστια πλειονότητα των μη-δεσποζουσών ιδιοτιμών συγκεντρώνεται πολύ κοντά στο μηδέν (βλ. Παράρτημα V) και η φασματική νόρμα της μήτρας *companion* της $\mathbf{H}$ βρίσκεται μεταξύ 10,62 και 1654 (ο αριθμητικός μέσος είναι 364,7 και η διάμεσος είναι 82,65). Στο Σχήμα 4 παρουσιάζεται η θέση των κανονικοποιημένων ιδιοτιμών όλων των μητρών $\mathbf{H}$ στο μιγαδικό επίπεδο⁴⁷.



Σχήμα 4. Η θέση των κανονικοποιημένων ιδιοτιμών των μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών στο μιγαδικό επίπεδο στην περίπτωση της συμπαραγωγής (968 ιδιοτιμές).

2. Η απόλυτη τιμή του ορίζουσας της μήτρας ελεγκσιμότητας $\mathbf{K}_1$, $|\det[\mathbf{K}_1]|$, κυμαίνεται μεταξύ 10^{-819} και 10^{-246} , με μέσο όρο 10^{-248} , γεωμετρικό μέσο 10^{-550} και διάμεσο 10^{-617} . Ο βαθμός ελεγκσιμότητας, DC_1 , κυμαίνεται μεταξύ 10^{-26} και 10^{-19} , με μέσο όρο 10^{-20} , γεωμετρικό μέσο και διάμεσο 10^{-21} . Για βαθμό ανοχής (*tolerance*) 10^{-4} (10^{-2}), η αριθμητική τάξη, NR_1 , της μήτρας $\mathbf{K}_1$ κυμαίνεται μεταξύ 1 και 7

⁴⁶ Αναλυτικά, βλ. και τα Παραρτήματα II, III, V, VIII, IX, X, XI, XII και XIII.

⁴⁷ Το Σχήμα 4 δεν διαφέρει από το Σχήμα 3, το οποίο αφορά την απλή παραγωγή.

- (μεταξύ 1 και 4), ενώ η κανονικοποιημένη αριθμητική τάξη είναι στο εύρος 2–15% (2–9%). Η μεγαλύτερη απόκλιση, $\min\{\sigma_{K_h}^{-1}\sigma_{K_{h+1}}\}$, μεταξύ δύο διαδοχικών ιδιοζουσών τιμών της μήτρας $\mathbf{K}_1$ βρίσκεται στο εύρος $3 \times 10^{-16} - 0,079$ (ο αριθμητικός μέσος όρος είναι 0,015 και η διάμεσος είναι 0,0006), ενώ το άνω όριο της απόστασης του ελέγξιμου από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο σύστημα, $\min\{(1 + \|\mathbf{C}_H\|\sigma_{K_h}^{-1})\sigma_{K_{h+1}}\}$, βρίσκεται στο εύρος 0,039–6,609 (ο αριθμητικός μέσος είναι 1,675 και η διάμεσος είναι 0,523) (βλ. Παράρτημα II, Πίνακας 7).
3. Η απόλυτη τιμή του ορίζουσας της μήτρας ελεγχσιμότητας $\mathbf{K}_2$, $|\det[\mathbf{K}_2]|$, κυμαίνεται μεταξύ 10^{-1182} και 10^{-541} , με μέσο όρο 10^{-542} , γεωμετρικό μέσο 10^{-926} και διάμεσο 10^{-1073} . Ο βαθμός ελεγχσιμότητας (DC_2) κυμαίνεται μεταξύ 10^{-35} και 10^{-25} με μέσο όρο 10^{-26} , γεωμετρικό μέσο 10^{-31} και διάμεσο 10^{-32} . Για βαθμό ανοχής 10^{-4} (10^{-2}), η αριθμητική τάξη, NR_1 , της μήτρας $\mathbf{K}_2$ κυμαίνεται μεταξύ 4 και 7 (μεταξύ 2 και 4), ενώ η κανονικοποιημένη αριθμητική τάξη είναι στο εύρος 9–15% (6–9%). Η μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ δύο διαδοχικών ιδιοζουσών τιμών της μήτρας $\mathbf{K}_2$ βρίσκεται στο εύρος 0,003–0,08 (ο αριθμητικός μέσος όρος είναι 0,058 και η διάμεσος είναι 0,065), ενώ το άνω όριο της απόστασης του ελέγξιμου από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο σύστημα βρίσκεται στο εύρος 0,038–88,59 (ο αριθμητικός μέσος είναι 24,4 και η διάμεσος είναι 5,487) (βλ. Παράρτημα II, Πίνακας 7).
4. Η απόλυτη τιμή του ορίζουσας της μήτρας παρατηρησιμότητας, $\mathbf{K}_1^O$, $|\det[\mathbf{K}_1^O]|$, κυμαίνεται μεταξύ 10^{-689} και 10^{-171} , με μέσο όρο 10^{-172} , γεωμετρικό μέσο 10^{-455} και διάμεσο 10^{-529} . Ο βαθμός παρατηρησιμότητας, DO_1 , κυμαίνεται μεταξύ 10^{-29} και 10^{-19} , με μέσο όρο 10^{-20} , γεωμετρικό μέσο 10^{-22} και διάμεσο 10^{-21} . Για βαθμό ανοχής 10^{-4} (10^{-2}), η αριθμητική τάξη, NRO_1 , της μήτρας $\mathbf{K}_1^O$ κυμαίνεται μεταξύ 1 και 7 (μεταξύ 1 και 5), ενώ η κανονικοποιημένη αριθμητική τάξη είναι στο εύρος 2–21% (2–15%).
5. Η απόλυτη τιμή του ορίζουσας της μήτρας παρατηρησιμότητας, $\mathbf{K}_2^O$, $|\det[\mathbf{K}_2^O]|$, κυμαίνεται μεταξύ 10^{-1040} και 10^{-396} , με μέσο όρο 10^{-398} , γεωμετρικό μέσο 10^{-815} και διάμεσο 10^{-966} . Ο βαθμός παρατηρησιμότητας κυμαίνεται μεταξύ 10^{-36} και 10^{-25} , με μέσο όρο 10^{-26} , γεωμετρικό μέσο 10^{-30} και διάμεσο 10^{-31} . Για βαθμό

ανοχής 10^{-4} (10^{-2}), η αριθμητική τάξη, NRO_2 , της μήτρας $\mathbf{K}_2^O$ κυμαίνεται μεταξύ 6 και 7 (μεταξύ 3 και 4), ενώ η κανονικοποιημένη αριθμητική τάξη είναι στο εύρος 11–18% (6–12%).

Στις επόμενους πίνακες παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα για κάθε χώρα και κάθε έτος.

Πίνακας 1. Αποτελέσματα ανάλυσης συστημάτων συμπαραγωγής, Γερμανία, $n = 54$

	2000	2005	2010	2014
$ \lambda_{H1} $	1,057	1,108	1,21	1,17
$ \lambda_{H2} $	0,596	0,601	0,648	0,642
$ \lambda_{AB_1^{-1}} $	0,519	0,526	0,548	0,539
$\ \mathbf{C}_H\ $	685,4	776	1227,9	977,6
$\sigma_{Hn}\sigma_{H1}^{-1}$	0,0002	0,002	0,0001	0,00007
$ \det[\mathbf{K}_1] $	10^{-687}	10^{-663}	10^{-616}	10^{-638}
DC_1	10^{-19}	10^{-20}	10^{-20}	10^{-21}
$NR_1, \tau = 10^{-4}$	5	3	1	1
$NR_1, \tau = 10^{-2}$	1	1	1	1
$ \det[\mathbf{K}_1^O] $	10^{-594}	10^{-567}	10^{-520}	10^{-541}
DO_1	10^{-20}	10^{-21}	10^{-21}	10^{-22}
$NRO_1, \tau = 10^{-4}$	5	4	1	1
$NRO_1, \tau = 10^{-2}$	2	1	1	1
$ \det[\mathbf{K}_2] $	10^{-1101}	10^{-1092}	10^{-1073}	10^{-1085}
DC_2	10^{-32}	10^{-33}	10^{-31}	10^{-32}
$NR_2, \tau = 10^{-4}$	6	6	6	6
$NR_2, \tau = 10^{-2}$	3	3	3	3
$ \det[\mathbf{K}_2^O] $	10^{-993}	10^{-978}	10^{-955}	10^{-968}
DO_2	10^{-33}	10^{-33}	10^{-31}	10^{-31}
$NRO_2, \tau = 10^{-4}$	6	6	6	6
$NRO_2, \tau = 10^{-2}$	3	3	3	3

Πίνακας 2. Αποτελέσματα ανάλυσης συστημάτων συμπαραγωγής, Ελλάδα, $n = 54$

	2000	2005	2010	2014
$ \lambda_{H1} $	1,236	1,122	1,167	1,165
$ \lambda_{H2} $	0,549	0,482	0,444	0,415
$ \lambda_{AB_1^{-1}} $	0,553	0,529	0,539	0,538
$\ C_H\ $	23,9	12,9	16,9	19,5
$\sigma_{Hn}\sigma_{H1}^{-1}$	10^{-21}	10^{-22}	10^{-22}	10^{-21}
$ \det[K_1] $	10^{-575}	10^{-676}	10^{-647}	10^{-646}
DC_1	10^{-21}	10^{-20}	10^{-21}	10^{-21}
$NR_1, \tau = 10^{-4}$	1	2	1	1
$NR_1, \tau = 10^{-2}$	1	1	1	1
$ \det[K_1^O] $	10^{-528}	10^{-563}	10^{-556}	10^{-558}
DO_1	10^{-22}	10^{-21}	10^{-22}	5×10^{-23}
$NRO_1, \tau = 10^{-4}$	1	3	1	1
$NRO_1, \tau = 10^{-2}$	1	1	1	1
$ \det[K_2] $	10^{-1030}	10^{-1089}	10^{-1084}	10^{-1081}
DC_2	10^{-32}	10^{-32}	10^{-32}	10^{-32}
$NR_2, \tau = 10^{-4}$	6	6	6	6
$NR_2, \tau = 10^{-2}$	3	3	3	3
$ \det[K_2^O] $	10^{-966}	10^{-977}	10^{-981}	10^{-978}
DO_2	10^{-31}	10^{-32}	10^{-32}	10^{-33}
$NRO_2, \tau = 10^{-4}$	6	7	6	6
$NRO_2, \tau = 10^{-2}$	4	4	4	4

Πίνακας 3. Αποτελέσματα ανάλυσης συστημάτων συμπαραγωγής, Η.Π.Α., $n = 54$

	2000	2005	2010	2014
$ \lambda_{H1} $	0,943	0,927	0,877	0,952
$ \lambda_{H2} $	0,446	0,455	0,503	0,560
$ \lambda_{AB_1^{-1}} $	0,485	0,481	0,467	0,488
$\ C_H\ $	99,6	81,4	56,3	83,9
$\sigma_{Hn}\sigma_{H1}^{-1}$	10^{-19}	10^{-19}	10^{-19}	10^{-19}
$ \det[K_1] $	10^{-767}	10^{-784}	10^{-819}	10^{-773}
DC_1	10^{-20}	10^{-21}	10^{-21}	10^{-19}
$NR_1, \tau = 10^{-4}$	6	6	6	7
$NR_1, \tau = 10^{-2}$	3	3	4	4
$ \det[K_1^O] $	10^{-661}	10^{-663}	10^{-689}	10^{-643}
DO_1	10^{-21}	10^{-22}	10^{-21}	10^{-20}
$NRO_1, \tau = 10^{-4}$	6	6	6	7
$NRO_1, \tau = 10^{-2}$	3	3	4	4
$ \det[K_2] $	10^{-1154}	10^{-1164}	10^{-1182}	10^{-1161}
DC_2	10^{-34}	10^{-34}	10^{-35}	10^{-35}
$NR_2, \tau = 10^{-4}$	6	5	5	6
$NR_2, \tau = 10^{-2}$	3	3	3	3
$ \det[K_2^O] $	10^{-1027}	10^{-1027}	10^{-1040}	10^{-1013}
DO_2	10^{-35}	10^{-34}	10^{-35}	10^{-36}
$NRO_2, \tau = 10^{-4}$	6	6	6	6
$NRO_2, \tau = 10^{-2}$	3	3	4	4

Κατά την εξέταση της παρατηρησιμότητας στην περίπτωση των Η.Π.Α., για το έτος 2000 χρησιμοποιήθηκαν δέκα διαφορετικά τυχαία διανύσματα. Βάσει των αποτελεσμάτων, δεν αντλήθηκαν διαφορετικά συμπεράσματα ή αποκλίσεις.

Πίνακας 4. Αποτελέσματα ανάλυσης συστημάτων συμπαραγωγής, Λ. Δ. της Κίνας, $n = 47$

	2000	2005	2010	2014
$ \lambda_{H1} $	1,881	2,246	2,204	2,23
$ \lambda_{H2} $	0,659	0,918	1,066	1,108
$ \lambda_{AB_1^{-1}} $	0,653	0,692	0,688	0,690
$\ C_H\ $	126,7	360,9	1041	1654
$\sigma_{Hn}\sigma_{H1}^{-1}$	10^{-20}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-5}
$ \det[K_1] $	10^{-314}	10^{-246}	10^{-257}	10^{-257}
DC_1	10^{-25}	10^{-26}	10^{-26}	10^{-26}
$NR_1, \tau = 10^{-4}$	1	1	1	1
$NR_1, \tau = 10^{-2}$	1	1	1	1
$ \det[K_1^O] $	10^{-295}	10^{-199}	10^{-187}	10^{-171}
DO_1	10^{-26}	10^{-29}	10^{-27}	10^{-27}
$NRO_1, \tau = 10^{-4}$	1	1	1	1
$NRO_1, \tau = 10^{-2}$	1	1	1	1
$ \det[K_2] $	10^{-768}	10^{-752}	10^{-755}	10^{-759}
DC_2	10^{-26}	10^{-26}	10^{-26}	10^{-25}
$NR_2, \tau = 10^{-4}$	6	7	7	7
$NR_2, \tau = 10^{-2}$	4	4	4	4
$ \det[K_2^O] $	10^{-727}	10^{-684}	10^{-659}	10^{-645}
DO_2	10^{-27}	10^{-25}	10^{-25}	10^{-25}
$NRO_2, \tau = 10^{-4}$	6	7	7	7
$NRO_2, \tau = 10^{-2}$	4	4	4	4

Πίνακας 5. Αποτελέσματα ανάλυσης συστημάτων συμπαραγωγής, Ρωσία, $n = 33$

	2000	2005	2010	2014
$ \lambda_{H1} $	0,848	1,124	1,141	1,212
$ \lambda_{H2} $	0,463	0,503	0,520	0,583
$ \lambda_{AB_1^{-1}} $	0,459	0,529	0,533	0,548
$\ C_H\ $	10,62	12,4	12,9	13,3
$\sigma_{Hn}\sigma_{H1}^{-1}$	10^{-21}	10^{-21}	10^{-20}	10^{-21}
$ \det[K_1] $	10^{-429}	10^{-399}	10^{-404}	10^{-402}
DC_1	10^{-21}	10^{-20}	10^{-19}	10^{-20}
$NR_1, \tau = 10^{-4}$	5	4	3	3
$NR_1, \tau = 10^{-2}$	3	2	1	1
$ \det[K_1^O] $	10^{-349}	10^{-289}	10^{-276}	10^{-259}
DO_1	10^{-21}	10^{-20}	10^{-19}	10^{-22}
$NRO_1, \tau = 10^{-4}$	7	6	7	3
$NRO_1, \tau = 10^{-2}$	5	4	4	1
$ \det[K_2] $	10^{-543}	10^{-541}	10^{-550}	10^{-555}
DC_2	10^{-30}	10^{-29}	10^{-27}	10^{-27}
$NR_2, \tau = 10^{-4}$	4	4	4	4
$NR_2, \tau = 10^{-2}$	2	2	2	2
$ \det[K_2^O] $	10^{-452}	10^{-419}	10^{-406}	10^{-396}
DO_2	10^{-28}	10^{-27}	10^{-28}	10^{-26}
$NRO_2, \tau = 10^{-4}$	6	6	6	6
$NRO_2, \tau = 10^{-2}$	4	4	4	4

5.4 Η καμπύλη ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους των πραγματικών οικονομιών στην περίπτωση της συμπαραγωγής

Από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε για τις πέντε χώρες και τα τέσσερα έτη για την καθεμία, λαμβάνουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Οι μήτρες $[\mathbf{B} - \mathbf{A}]$ είναι μη-ιδιάζουσες και, ως εκ τούτου, αντιστρέψιμες.
2. Οι μήτρες $[\mathbf{B} - \mathbf{A}]^{-1}$ περιέχουν και αρνητικά στοιχεία. Συνεπώς, τα υπό εξέταση συστήματα δεν είναι *all-productive* και, άρα, δεν παρουσιάζουν τις συνήθεις ιδιότητες των οικονομικών συστημάτων απλής παραγωγής.

Απόρροια των παραπάνω είναι η αναζήτηση εύρεσης ενός διαστήματος όπου το οικονομικό σύστημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως «*r₀-all-engaging*», δηλαδή να ισχύει $\mathbf{E}(r) > \mathbf{0}$ για ορισμένα $r_0 > -1$. Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2.2 της παρούσης, η $\mathbf{E}(r) > \mathbf{0}$ είναι μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη ενός εύρους του ποσοστού κέρδους στο οποίο το σύστημα συμπαραγωγής διατηρεί όλες τις ιδιότητες ενός μη-διασπώμενου συστήματος απλής παραγωγής. Ως εκ τούτου, η διερεύνηση μπορεί να βασιστεί στο ακόλουθο θεώρημα (Bidard 1996, p. 328). Θεωρούμε το ιδιοσύστημα που είναι συνδεδεμένο με το ζεύγος $\{\mathbf{B}, \mathbf{A}\}$, δηλαδή

$$\lambda \mathbf{B}\chi = \mathbf{A}\chi$$

$$\lambda \psi^T \mathbf{B} = \psi^T \mathbf{A}.$$

Από την εξέταση των χαρακτηριστικών τιμών και διανυσμάτων για τις υπό διερεύνηση οικονομίες, διαπιστώθηκε ότι για καμία δεν εντοπίζεται θετικό δεξιό και αριστερό ιδιοδιάνυσμα και, επομένως, τα υπό θεώρηση συστήματα χαρακτηρίζονται ως *μη-«r₀-all-engaging*». Εντούτοις, αξίζει να σημειωθεί ότι, η P–F ιδιοτιμή για τις χώρες Γερμανία, Η.Π.Α. Κίνα και Ρωσία για το ζεύγος $\{\mathbf{B}, \mathbf{A}\}$ είναι θετική και συνδεδεμένη με θετικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα. Εφόσον η σχέση $\lambda \psi^T \mathbf{B} = \psi^T \mathbf{A}$ αντιστοιχεί στο σύστημα τιμών για μηδενικό ωρομισθίο, μπορούμε, *συμβατικά*, να αντιληφθούμε τα αντίστοιχα R ως ένα σημαντικό θεωρητικό μέγιστο ποσοστό κέρδους για τις εν λόγω χώρες.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το $\mathbf{E}(r) > \mathbf{0}$ είναι μία ικανή συνθήκη για την ύπαρξη ενός διαστήματος του ποσοστού κέρδους στο οποίο οι καμπύλες $w-r$ έχουν αρνητική κλίση. Ωστόσο, ακόμη και αν η $\mathbf{E}(r)$ εμπεριέχει αρνητικά στοιχεία, είναι

απολύτως δυνατόν να ισχύει $\mathbf{I}^T \mathbf{E}(r) > \mathbf{0}$ για μερικά r . Στον Πίνακα 6, αναφέρονται αναλυτικά τα εν λόγω διαστήματα⁴⁸.

Πίνακας 6. Οικονομικά σημαντικά διαστήματα του ποσοστού κέρδους

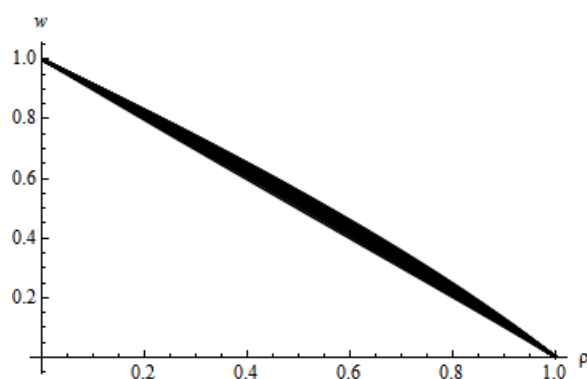
Χώρα	Έτος	$\mathbf{I}^T \mathbf{E}(r) > \mathbf{0}^T$
Γερμανία	2000	$0 \leq r \leq 0.9459$
	2005	$0 \leq r \leq 0.9027$
	2010	$0 \leq r \leq 0.82637$
	2014	$0 \leq r \leq 0.855045$
Ελλάδα	2000	$0.451 \leq r \leq 0.473$
	2005	$0 \leq r \leq 0.026$
	2010	-
	2014	-
ΗΠΑ	2000	$0 \leq r \leq 1.06078$
	2005	$0 \leq r \leq 1.0785$
	2010	$0 \leq r \leq 1.14058$
	2014	$0 \leq r \leq 1.0503$
Λ. Δημ. της Κίνας	2000	$0 \leq r \leq 0.531$
	2005	$0 \leq r \leq 0.445$
	2010	$0 \leq r \leq 0.4536$
	2014	$0 \leq r \leq 0.448$
Ρωσία	2000	$0 \leq r \leq 1.16$
	2005	$0 \leq r \leq 0.69$
	2010	$0 \leq r \leq 0.649$
	2014	$0 \leq r \leq 0.62$

⁴⁸ Στο Παράρτημα XIII και XII δίνονται οι καμπύλες ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους και οι τιμές εκφρασμένες σε όρους ωρομισθίου, αντίστοιχα.

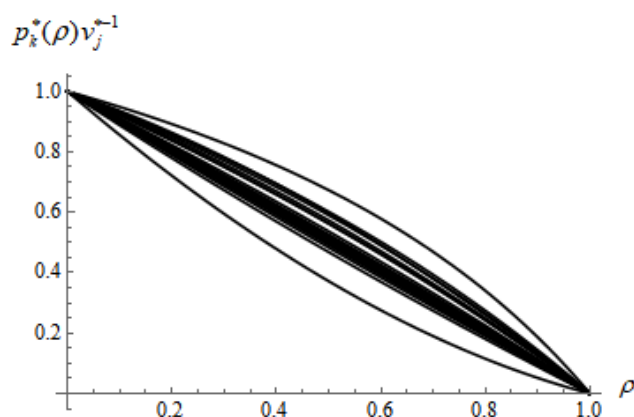
5.5 Παρατηρήσεις εμπειρικής έρευνας

Αναλύοντας τα ευρήματα της έρευνας, τα οποία βρίσκονται σε συμφωνία και αντιστοιχία με όλες τις προγενέστερες σχετικές μελέτες, εξάγονται τα κάτωθι:

(i) Οι υπό εξέταση οικονομίες χαρακτηρίζονται από πολύ χαμηλούς βαθμούς ελεγχιμότητας–παρατηρησιμότητας, χαμηλές κανονικοποιημένες αριθμητικές τάξεις, καθώς και από κοντινές αποστάσεις από τα πλησιέστερα μη-ελέγξιμα–μη-παρατηρήσιμα συστήματα. Αυτό το γεγονός αντανακλάται στο σχήμα των καμπυλών ωρομισθίου–τιμών–ποσοστού κέρδους.



(α) Καμπύλη ωρομισθίου–σχετικού ποσοστού κέρδους, εκατό ψευδο-τυχαία *numéraires*.

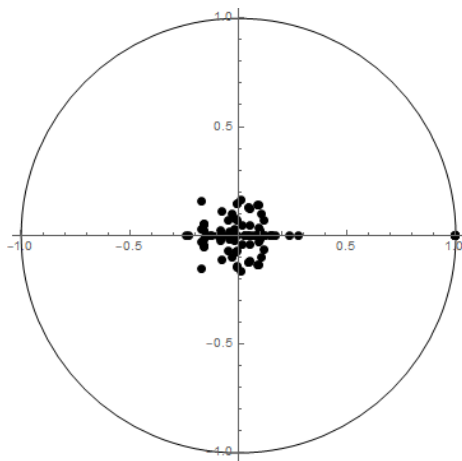


(β) Οι κανικοποιημένες τιμές των πραγματικών μη-Σραφφαϊανών Πρότυπων εμπορευμάτων και των μιγαδικών μη-Σραφφαϊανών Πρότυπων εμπορευμάτων, σε όρους του Πρότυπου Σραφφαϊανού Εμπορευμάτων, ως συναρτήσεις του σχετικού ποσοστού κέρδους.

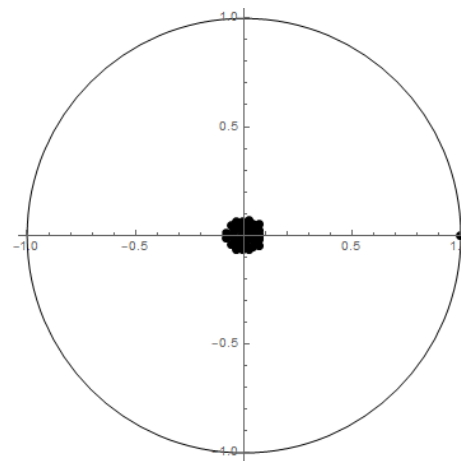
Σχήμα 5. Πτυχές των καμπυλών ωρομισθίου–τιμών–σχετικού ποσοστού κέρδους. Ελληνική οικονομία, 2014 (απλή παραγωγή).

Για παράδειγμα, τα γραφήματα στο Σχήμα 5 αντιστοιχούν στην ελληνική οικονομία και το έτος 2014 και εμφανίζουν (α) τις καμπύλες ωρομισθίου–σχετικού ποσοστού κέρδους ως προς εκατό ψευδο-τυχαία *numéraires* (το γράφημα είναι επαρκώς αντιπροσωπευτικό, καθώς προέκυψε από επαναλαμβανόμενα πειράματα) και, (β) τις

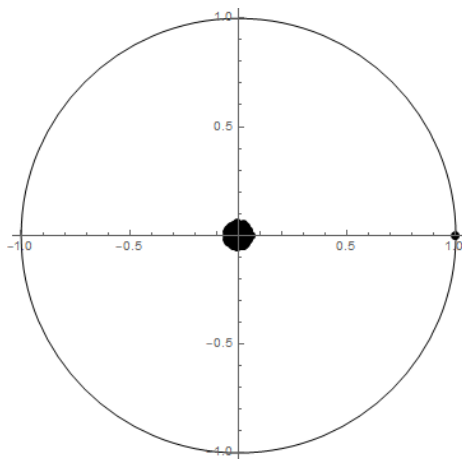
κανονικοποιημένες τιμές των μη-Σραφφαϊανών Προτύπων εμπορευμάτων σε όρους του Σραφφαϊανού Προτύπου εμπορεύματος, ως συναρτήσεις του σχετικού ποσοστού κέρδους (στην οικονομία υπάρχουν 19 ζεύγη μιγαδικών Προτύπων εμπορευμάτων και 16 πραγματικά). Όπως φαίνεται, οι καμπύλες τείνουν να βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους, ενώ οι Ευκλείδειες γωνίες μεταξύ του διανύσματος $\mathbf{J}^7 \mathbf{z}$, όπου το $\mathbf{z}$ συμβολίζει ψευδο-τυχαία *numéraires*, και του δεξιού ιδιοδιανύσματος P-F βρίσκονται στην περιοχή 0.1° – 0.3° .



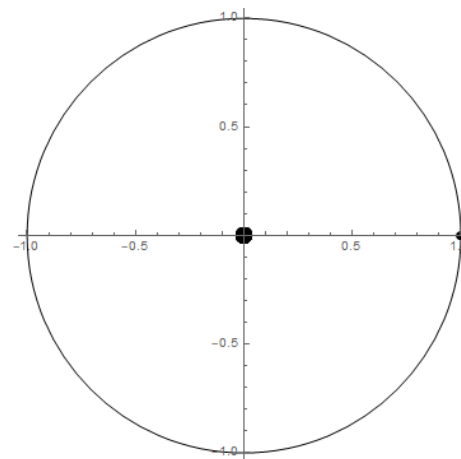
Δέκα ψευδο-τυχαίες μήτρες διαστάσεων 10x10



Δέκα ψευδο-τυχαίες μήτρες διαστάσεων 50x50



Δέκα ψευδο-τυχαίες μήτρες διαστάσεων
100x100



Δέκα ψευδο-τυχαίες μήτρες διαστάσεων
1000x1000

Σχήμα 6. Η θέση των ιδιοτιμών των κανονικοποιημένων ψευδο-τυχαίων θετικών μητρών στο μιγαδικό επίπεδο σε σχέση με τις διαστάσεις τους: $n = 10, 50, 100$ και 1000 .

(ii) Τα χαρακτηριστικά σχετικά με την ελεγχσιμότητα–παρατηρησιμότητα των πραγματικών οικονομιών των πινάκων εισροών–εκροών προκύπτουν εξαιτίας της δομικής σχεδόν μη-ελεγχσιμότητα–μη-παρατηρησιμότητα, με αποτέλεσμα τη λοξή κατανομή των ιδιοτιμών των μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών. Η κατανομή των ιδιοτιμών αυτών των οικονομιών δεν είναι παρόμοια με εκείνη των «μεγάλου μεγέθους τυχαίων» διαγωνοποιήσιμων μητρών, με ταυτόσημα και ανεξάρτητα κατανεμημένα στοιχεία, στα οποία ο λόγος του μέτρου της δεύτερης ως προς την πρώτη ιδιοτιμή τείνει στο μηδέν, με ταχύτητα $n^{-0.5}$, όταν το n τείνει στο άπειρο (Bródy, 1997)⁴⁹ και, στην πραγματικότητα, όλες οι ιδιοτιμές τείνουν να συγκεντρώνονται «κυκλικά» γύρω από την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου (βλ. Σχήμα 6, το οποίο είναι αρκετά αντιπροσωπευτικό και προέκυψε από επαναλαμβανόμενα πειράματα με ψευδο-τυχαίους θετικούς πίνακες, σε σύγκριση με το Σχήμα 1).

Ως εκ τούτου, οι κατά Bródy «τυχαίες οικονομίες απείρου μεγέθους» αντιστοιχούν στη θεωρητική Περίπτωση 3 και, επομένως, μπορούν να αναλυθούν με βάση την παραδοσιακή θεωρία της αξίας ή, με άλλα λόγια, η «υπόθεση της τυχειότητας (*randomness hypothesis*)» του Bródy μπορεί να χρησιμεύσει ως υποκατάστατη «θεωρία» της αξίας. Σε πλήρη αντίθεση, οι πραγματικές οικονομίες των πινάκων εισροών–εκροών παρουσιάζουν μη-μονότονες καμπύλες τιμών–ποσοστού κέρδους, αντιστροφές μεταξύ τιμών–καθέτως ολοκληρωμένων εργασιών και καμπύλες ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους με εναλλασσόμενη καμπυλότητα και, επομένως, μπορούν να αναλυθούν μόνο στη βάση της Σραφφαϊανής Θεωρίας της Αξίας.

(iii) Όταν η προσέγγιση Bienenfeld τάξης $n - \kappa$ είναι ακριβής για όλες τις τιμές του ποσοστού κέρδους (θεωρητική Περίπτωση 6), η οικονομία είναι ελέγξιμη–παρατηρήσιμη τάξης $n - \kappa + 1$, αυστηρά ισοδύναμη με μια τριγωνική μη-διαγωνοποιήσιμη οικονομία με μόνο ένα βασικό εμπόρευμα και κ καθαρά καταναλωτικά εμπορεύματα και, μπορεί να περιγραφεί (ωστόσο, όχι μοναδικά, με εξαίρεση το Σραφφαϊανό Πρότυπο σύστημα) με όχι περισσότερα από $[2^{-1}n(n-1)] + n = 2^{-1}(n^2 + n)$ θετικά μεγέθη. Για τις «πραγματικές» οικονομίες που ελέγχθηκαν στην παρούσα, διαπιστώθηκε ότι το $n - \kappa$ μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν ίσο με 6 ή 7 τόσο για τα συστήματα απλής παραγωγής όσο και για τα συστήματα συμπαραγωγής, πράγματα που βρίσκεται σε συνάφεια με τους βαθμούς και τις αριθμητικές τάξεις ελεγχσιμότητας–παρατηρησιμότητας.

⁴⁹ Βλ. επίσης Mariolis & Tsoulfidis (2016b, Ch. 6).

Εν κατακλείδι, ως αποτέλεσμα, οι πραγματικές οικονομίες πινάκων εισροών–εκροών εμφανίζουν πολύ χαμηλούς βαθμούς ελεγχσιμότητας–παρατηρησιμότητας και χαρακτηρίζονται *a posteriori* ως «δομικώς σχεδόν μη-ελέγξιμα και μη-παρατηρήσιμα συστήματα» (Mariolis et al., 2025). Πιο συγκεκριμένα, η διαπίστωση αυτή οφείλεται στα διαρθρωτικά χαρακτηριστικά των υπό εξέταση οικονομικών συστημάτων, καθώς και στο γεγονός ότι τα εν λόγω συστήματα είναι σχεδόν όμοια με τριγωνικές και μη-διαγωνοποιήσιμες οικονομίες, οι οποίες παράγουν μόνο ένα βασικό εμπόρευμα και μη-αυτοαναπαραγόμενα μη-βασικά εμπορεύματα, η πλειονότητα των οποίων είναι καθαρά καταναλωτικά.

Τέλος, η πλήρης ελεγχσιμότητα–παρατηρησιμότητα συνεπάγεται απρόβλεπτες κινήσεις στις σχετικές τιμές και τους μισθούς, που προκύπτουν από τις μεταβολές του ποσοστού κέρδους, ενώ η προβλεψιμότητα μειώνεται με την αύξηση του βαθμού ελεγχσιμότητας–παρατηρησιμότητας. Βάσει του παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι (i) υπάρχουν μεταβλητές κατάστασης οι οποίες δεν επηρεάζονται από την εισροή του συστήματος, δηλαδή, εν προκειμένω, οι τιμές των εμπορευμάτων δεν επηρεάζονται από το ωρομίσθιο, (ii) υπάρχουν εμπορεύματα των οποίων οι σχετικές τιμές δεν επηρεάζονται από μεταβολές της κατανομής του εισοδήματος και (iii) η καμπύλη ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους τείνει να είναι γραμμική, ανεξάρτητα από το επιλεγμένο *numéraire*.

5.6 Επισημάνσεις σχετικά με την εμπειρική βιβλιογραφία

Οι πραγματικές οικονομίες πινάκων εισροών–εκροών δεν ταυτίζονται με τις οικονομίες του πραγματικού κόσμου, καθώς διατρέχονται από αρκετούς περιορισμούς⁵⁰. Οι συνήθεις βασικές (απλουστευτικές) υποθέσεις (δηλαδή, γραμμική και κλειστή οικονομία που περιλαμβάνει μόνο μία μη-παραγόμενη εισροή, κυκλοφορούν κεφάλαιο, και ενιαία περίοδο παραγωγής και χρόνο καταβολής μισθών) των σχετικών εμπειρικών μελετών στερούνται γενικότητας⁵¹.

Οι μη-διαγωνοποιήσιμες οικονομίες είναι μηδενικού μέτρου στο σύνολο όλων των οικονομιών. Επομένως, τόσο οι θεωρητικές αναλύσεις όσο και οι ερμηνείες των εμπειρικών αποτελεσμάτων που παρέχονται από τις σχετικές μελέτες, συμπεριλαμβαν-

⁵⁰ Για πρόσφατες κριτικές συζητήσεις σχετικά με την εμπειρική συνάφεια της «συζήτησης για τη θεωρία του κεφαλαίου», βλ. Kurz (2020) και Petri (2021).

⁵¹ Βλ. Kurz & Salvadori (1995, Ch. 7–11), Mainwaring (1979), Mariolis (2021b) και Steedman (1977, Ch. 6–8, 12, 1979a, 1979b, 2000, 2008, 2020).

νομένων των Mariolis (2021a, 2021c, 2021d), βασίζονται στη ρητή υπόθεση ότι οι υποκείμενες πραγματικές οικονομίες είναι (ή «θα έπρεπε να είναι») διαγωνοποιήσιμες.

Οι πραγματικές οικονομίες Συμμετρικών Πινάκων Εισροών–Εκροών είναι το εμπειρικό αντίστοιχο των οικονομιών απλής παραγωγής, ενώ οι πραγματικές οικονομίες Πινάκων Προσφοράς και Χρήσεων είναι το εμπειρικό αντίστοιχο των οικονομιών συμπαραγωγής. Στην πραγματικότητα, οι Συμμετρικοί Πίνακες Εισροών–Εκροών προέρχονται από τους Πίνακες Προσφοράς και Χρήσεων κάτω από μη-πραγματοκρατικές υποθέσεις, ενώ οι πραγματικές οικονομίες Πινάκων Προσφοράς–Χρήσεων μπορεί να παρουσιάζουν πρόσθετα Στραφφαϊνά χαρακτηριστικά, όπως οικονομικά μη-σημαντικές «προσθετικές εργασιακές αξίες» και οικονομικά σημαντικές μη-μονότονες καμπύλες ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους (Mariolis & Soklis, 2010; Soklis, 2021).

Αν και η εμπειρική εγκυρότητα του φαινομένου της επαναχρησιμοποίησης τεχνικής δεν μπορεί ούτε να αποδειχθεί ούτε να διαψευσθεί βάσει των διαθέσιμων πινάκων εισροών–εκροών για τις πραγματικές οικονομίες, είναι ανάλογο με το φαινόμενο της αντιστροφής ανάμεσα στις τιμές και στις καθέτως ολοκληρωμένες εργασίες («συγχώνευε» το παράδειγμα «του κρασιού που παλιώνει στο κελάρι και της παλαιάς δρυός που έγινε κιβώτιο (*old wine–oak chest*)»), το οποίο αναλύει ο Sraffa (1960, pp. 37–38), με το παράδειγμα που αναλύει ο Pasinetti (1966, pp. 504–508), λαμβάνοντας υπόψη τη σχετική παρατήρηση του Sraffa (1960, pp. 81–82))⁵². Από αυτή την άποψη, οποιαδήποτε μη-μονότονη κίνηση των τιμών μπορεί να θεωρηθεί ότι ενέχει ένα δυνητικό φαινόμενο επαναχρησιμοποίησης τεχνικής, ενώ τόσο οι μη-μονότονες κινήσεις τιμών όσο και οι αντιστροφές ανάμεσα στις τιμές και στις καθέτως ολοκληρωμένες εργασίες δεν υποδηλώνουν απαραίτητα «αντιστροφές έντασης συντελεστών παραγωγής», και είναι επίσης ιδιαίτερα σημαντικές για τη θεωρία του διεθνούς εμπορίου⁵³.

Τέλος, σύμφωνα με ορισμένους μελετητές, στην περίπτωση της απλής παραγωγής το οικονομικά σημαντικό διάστημα του ποσοστού κέρδους βρίσκεται μεταξύ του μείον ένα και της μέγιστης εφικτής τιμής του (υπό την προϋπόθεση ότι οι αποταμιεύσεις από τους μισθούς είναι θετικές⁵⁴).

⁵² Για μια ευθεία ανάλυση, βλ. Mariolis (2021c, pp. 79–83), ενώ για μια έμμεση προσέγγιση, βλ. Aruka, (2000).

⁵³ Mainwaring (1976, 1978), Metcalfe & Steedman (1979), Parrinello (1970), και σύγκρινε με Minhas (1962).

⁵⁴ Βλ. π.χ., Bidard (1991, pp. 10–11 και Ch. 17).

Γενικά συμπεράσματα και παρατηρήσεις

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εξέτασε τη θεωρητική και εμπειρική διάσταση της σχέσης ελεγχσιμότητας–παρατηρησιμότητας και της θεωρίας της αξίας στα οικονομικά συστήματα, τόσο απλής παραγωγής όσο και συμπαραγωγής. Με βάση ένα εκτεταμένο εμπειρικό υλικό τόσο από 43 χώρες και 172 Εθνικούς Πίνακες Εισροών–Εκροών όσο και από 5 χώρες και 20 Πίνακες Προσφοράς και Χρήσεων, διατυπώθηκαν σημαντικά συμπεράσματα σχετικά με τη δομική συγκρότηση των πραγματικών οικονομικών συστημάτων. Παρακάτω συνοψίζονται τα κύρια ευρήματα και οι θεωρητικές προεκτάσεις αυτών.

Πρώτον, συμπεραίνεται η «δομική σχεδόν μη-ελεγχσιμότητα και μη-παρατηρησιμότητα» των οικονομικών συστημάτων. Η έρευνα ανέδειξε με συνέπεια και συνοχή, τόσο στα συστήματα απλής παραγωγής όσο και στα συστήματα συμπαραγωγής, ότι οι πραγματικές οικονομίες πινάκων εισροών–εκροών χαρακτηρίζονται από πολύ χαμηλούς βαθμούς ελεγχσιμότητας–παρατηρησιμότητας. Συγκεκριμένα, τα ακόλουθα εμπειρικά ευρήματα επιβεβαιώνουν αυτή τη θέση.

- i. Χαμηλοί βαθμοί ελεγχσιμότητας. Ο βαθμός ελεγχσιμότητας στις εξεταζόμενες οικονομίες κυμαίνεται μεταξύ 10^{-21} και 10^{-18} στην περίπτωση της απλής παραγωγής και μεταξύ 10^{-35} και 10^{-25} στην περίπτωση της συμπαραγωγής.
- ii. Χαμηλοί βαθμοί παρατηρησιμότητας. Αντίστοιχα, ο βαθμός παρατηρησιμότητας εμφανίζει παρόμοια συμπεριφορά (μεταξύ 10^{-36} και 10^{-25} στην περίπτωση της συμπαραγωγής).
- iii. Χαμηλές κανονικοποιημένες αριθμητικές τάξεις ελεγχσιμότητας–παρατηρησιμότητας. Στην περίπτωση επιπέδου ανοχής 10^{-4} (10^{-2}) για την απλή παραγωγή, η αριθμητική τάξη των μητρών ελεγχσιμότητας κυμαίνεται μεταξύ 4 και 7 (μεταξύ 2 και 4), ενώ η κανονικοποιημένη αριθμητική τάξη βρίσκεται στο εύρος 7–18% (4–9%). Στην περίπτωση επιπέδου ανοχής 10^{-4} (10^{-2}) για τη συμπαραγωγή, η αριθμητική τάξη των μητρών ελεγχσιμότητας–παρατηρησιμότητας κυμαίνεται μεταξύ 1 και 7 (μεταξύ 1 και 5), ενώ η κανονικοποιημένη αριθμητική τάξη βρίσκεται στο εύρος 2–21% (2–15%).
- iv. Μικρή απόσταση από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο σύστημα. Το άνω όριο της απόστασης των εξεταζόμενων συστημάτων από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο

σύστημα είναι εξαιρετικά μικρό, υποδηλώνοντας ότι οι πραγματικές οικονομίες βρίσκονται πολύ κοντά σε μη-ελέγξιμα συστήματα.

- v. Λοξή κατανομή ιδιοτιμών. Τόσο η κατανομή των ιδιοτιμών των κανονικοποιημένων μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών στην περίπτωση της απλής παραγωγής όσο η κατανομή των κανονικοποιημένων ιδιοτιμών των μητρών των καθέτως ολοκληρωμένων τεχνικών συντελεστών παρουσιάζει έντονη λοξότητα, με τεράστια πλειοψηφία των μη-δεσποζουσών ιδιοτιμών να συγκεντρώνεται σε μια στενή «ζώνη» χαμηλών τιμών γύρω στο μηδέν.

Τα παραπάνω ευρήματα συγκλίνουν προς ένα κρίσιμο συμπέρασμα. Οι πραγματικές οικονομίες συνιστούν αυτό που μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ως «δομικώς σχεδόν μη-ελέγξιμα–μη-παρατηρήσιμα συστήματα». Πρέπει να τονιστεί ότι αυτό το χαρακτηριστικό δεν αποτελεί τυχαία ιδιότητα, αλλά φαίνεται να είναι εγγενές χαρακτηριστικό των πραγματικών οικονομιών των πινάκων εισροών–εκροών.

Δεύτερον, η δομική σχεδόν μη-ελεγκσιμότητα και μη-παρατηρησιμότητα των οικονομικών συστημάτων δεν αποτελεί απλώς μια εμπειρική παρατήρηση, αλλά έχει βαθιές θεωρητικές προεκτάσεις.

- i. Η δομική σχεδόν μη-ελεγκσιμότητα και μη-παρατηρησιμότητα αναδεικνύεται στο γεγονός ότι στο μη-αρνητικό, οικονομικά σημαντικό διάστημα του ποσοστού κέρδους, αυτές οι οικονομίες n -εμπορευμάτων είναι σχεδόν όμοιες με μη-διαγωνοποιήσιμες, τριγωνικές και ελέγξιμες–παρατηρήσιμες οικονομίες τάξης $n - \kappa + 1$, όπου $n - \kappa$ είναι τάξης περίπου 7, οι οποίες (i) περιλαμβάνουν μόνο ένα βασικό εμπόρευμα, δηλαδή τα αντίστοιχα Στραφαϊανά Πρότυπα εμπορεύματα των οικονομιών, και $n - 1$ μη-αυτοαναπαραγόμενα μη-βασικά εμπορεύματα, εκ των οποίων τα κ είναι καθαρά καταναλωτικά εμπορεύματα (επομένως, το μερίδιο, κn^{-1} , αυτών των εμπορευμάτων βρίσκεται στο εύρος 79–87%), (ii) περιγράφονται ακριβώς από την πολυωνυμική προσέγγιση Bienenfeld τάξης $n - \kappa$, και (iii) υποδηλώνουν ότι οι πιθανότητες ύπαρξης μη-μονότονων καμπυλών τιμών–ποσοστού κέρδους (συγκεκριμένων μορφών) και επαναχρησιμοποίησης τεχνικών δεν είναι αμελητέες.
- ii. Η κατανομή των ιδιοτιμών των πραγματικών οικονομιών διαφέρει ουσιωδώς από αυτή των «τυχαίων οικονομιών απείρου μεγέθους» κατά Bródy, στις οποίες οι ιδιοτιμές τείνουν να συγκεντρώνονται «κυκλικά» γύρω από την αρχή των

αξόνων του μιγαδικού επιπέδου. Αυτή η διαφοροποίηση υποδηλώνει ότι η δομή των πραγματικών οικονομιών ακολουθεί συγκεκριμένα δομικά πρότυπα.

Τρίτον, η διαπίστωση της δομικής σχεδόν μη-ελεγχιμότητας και μη-παρατηρησιμότητας των οικονομικών συστημάτων έχει σημαντικές επιπτώσεις στην αξιολόγηση των διαφόρων θεωριών της αξίας.

- i. Οι μη-μονότονες καμπύλες τιμών–ποσοστού κέρδους και οι καμπύλες ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους μεταβαλλόμενης καμπυλότητας, που παρατηρούνται, αν και σε περιορισμένο βαθμό στις πραγματικές οικονομίες, είναι ερμηνεύσιμες μόνο στο πλαίσιο της Στραφφαϊανής Θεωρίας της Αξίας. Οι παραδοσιακές θεωρίες (Κλασική, Μαρξική, Αυστριακή, Νεοκλασική και Κεϋνσιανή) δεν μπορούν να προβλέψουν ούτε να εξηγήσουν αυτά τα φαινόμενα.
- ii. Παρότι οι πραγματικές οικονομίες χαρακτηρίζονται από παραγωγή μεγάλου πλήθους ετερογενών εμπορευμάτων, θετικά κέρδη, εναλλακτικές τεχνικές παραγωγής και πολύπλοκες διακλαδικές συνδέσεις, οι μη-μονότονες καμπύλες τιμών–ποσοστού κέρδους και οι αντιστροφές μεταξύ τιμών–καθέτως ολοκληρωμένων εργασιών δεν εκδηλώνονται σε μεγάλο βαθμό στην περίπτωση της απλής παραγωγής (μόλις 18% και 10% των περιπτώσεων αντιστοίχως).

Τέταρτον, υφίστανται ορισμένες θεωρητικές προεκτάσεις και κατευθύνσεις.

- i. Οι μη-διαγωνοποιήσιμες οικονομίες φαίνεται να αποτελούν συστήματα «μηδενικού μέτρου» στο σύνολο όλων των πιθανών συστημάτων, γεγονός που υποδηλώνει την ύπαρξη ισχυρών δομικών περιορισμών στη συγκρότησή τους.
- ii. Η «δομική σχεδόν μη-ελεγχιμότητα και μη-παρατηρησιμότητα» μπορεί να θεωρηθεί ως ένα «νέο τυποποιημένο γεγονός (*new stylized fact*)» της οικονομικής θεωρίας.
- iii. Η απόρριψη των παραδοσιακών θεωριών της αξίας καθίσταται αναγκαία υπό το πρίσμα των νέων ευρημάτων.

Συμπερασματικά, η παρούσα διδακτορική διατριβή προσφέρει ισχυρές εμπειρικές ενδείξεις ότι οι πραγματικές οικονομίες αποτελούν «δομικώς σχεδόν μη-ελέγξιμα και μη-παρατηρήσιμα συστήματα». Αυτό το χαρακτηριστικό φαίνεται να είναι εγγενές και όχι τυχαίο, και ανάγεται στην παραγωγική–καταναλωτική δομή του συστήματος, δηλαδή στο γεγονός ότι οι εξεταζόμενες οικονομίες είναι σχεδόν όμοιες με μη-διαγωνοποιήσιμες και τριγωνικές οικονομίες, οι οποίες παράγουν μόνο ένα βασικό εμπόρευμα και μη-αυτοαναπαραγόμενα μη-βασικά εμπορεύματα, η συντριπτική πλειονότητα των οποίων είναι καθαρά καταναλωτικά εμπορεύματα.

Βιβλιογραφία

- Aruka, Y. (1991). Generalized Goodwin's theorems on general coordinates. *Structural Change and Economic Dynamics*, 2(1), pp. 69–91.
- Aruka, Y. (2011). Possibility theorems on reswitching of techniques and the related issues of price variations. In Y. Aruka, *Complexities of production and interacting human behaviour* (pp. 79–119). Heidelberg: Physica.
- Bidard, C. (1991). *Prix, reproduction, rareté*. Paris: Dunod.
- Bidard, C. (1996). All-engaging systems. *Economic Systems Research*, 8(4), pp. 323–340.
- Bidard, C., & Salvadori, N. (1996). Solutions to linear equations depending on a parameter. *Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali/Decisions in Economics and Finance*, 19(1), pp. 103–112.
- Bienenfeld, M. (1988). Regularity in price changes as an effect of changes in distribution. *Cambridge Journal of Economics*, 12(2), pp. 247–255.
- Boley, D. L., & Lu, W.-S. (1984). Quasi-Kalman decomposition and its relation to state feedback. *American Control Conference* (pp. 772–775). San Diego: Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Automatic Control.
- Boley, D. L., & Lu, W.-S. (1986). Measuring how far a controllable system is from an uncontrollable one. *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Automatic Control*, 31(3), pp. 249–251.
- Bródy, A. (1970). *Proportions, prices and planning. A mathematical restatement of the labor theory of value*. Amsterdam, North-Holland and Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Bródy, A. (1997). The second eigenvalue of the Leontief matrix. *Economic Systems Research*, 9(3), pp. 253–258.
- Clotet, J., García-Planas, M. I., & Magret, M. D. (2001). Estimating distances from quadruples satisfying stability properties to quadruples not satisfying them. *Linear Algebra and its Applications*, 332–334, pp. 541–567.
- Datta, B. N. (2004). *Numerical methods for linear control systems. Design and analysis*. Amsterdam: Elsevier Academic Press.
- Dmitriev, V. K. (1974). *Economic essays on value, competition and utility*. London: Cambridge University Press. (Original work published 1898).
- Filippini, C., & Filippini, L. (1982). Two theorems on joint production. *The Economic Journal*, 92(366), pp. 386–390.

- Ford, D. A., & Johnson, C. D. (1968). Invariant subspaces and the controllability and observability of linear dynamical systems. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Control*, 6(4), 553-558.
- Friedland, B. (1975). Controllability index based on conditioning number. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 97(4), pp. 444-445.
- Gilbert, E. G. (1963). Controllability and observability in multivariable control systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control*, 1(2), pp. 128-151.
- Groningen Growth and Development Centre. (2016). *World Input-Output Database (WIOD) [Data set]*. Retrieved from <https://www.rug.nl/ggdc/valuechain/wiod/wiod-2016-release>
- Iliadi, F., Mariolis, T., Soklis, G., & Tsoulfidis, L. (2014). Bienenfeld's approximation of production prices and eigenvalue distribution: Further evidence from five European economies. 33(1), σσ. 35-54.
- Kahn, R. (1931). The relation of home investment to unemployment. *The Economic Journal*, 41(162), pp. 173-198.
- Kalman, R. E. (1960). On the general theory of control systems. *International Federation of Automatic of Control Proceedings Volumes*, 1(1), pp. 491-502.
- Kalman, R. E. (1963). Mathematical description of linear dynamical systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control*, 1(2), pp. 152-192.
- Kalman, R. E., Narendra, K. S., & Ho, Y.-C. (1963). Controllability of linear dynamical systems. *Contributions to Differential Equations*, 1(2), pp. 189-213.
- Kurz, H. D. (2020). The theory of value and distribution and the problem of capital. *European Journal of Economics and Economic Policies: Intervention*, 17(2), pp. 241-264.
- Kurz, H. D., & Salvadori, N. (1995). *Theory of production. A long-period analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lin, C.-T. (1974). Structural Controllability. *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Automatic Control*, 19(3), pp. 201-208.
- Lorenzen, G. (1981). Zur Charakterisierung der industriellen Verflechtung und der Endnachfragestruktur einer Volkswirtschaft/On economic interrelatedness and the structure of final demand. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 196(6), pp. 503-510.

- Luenberger, D. G. (1979). *Introduction to dynamic systems. Theory, models and applications*. New York: John Wiley and Sons.
- Mainwaring, L. (1978). The interest rate equalisation theorem with non-traded goods. *Journal of International Economics*, 8(1), pp. 11–19.
- Mainwaring, L. (1979). The wage–profit relation without constant returns. *Metroeconomica*, 31(3), pp. 335–348.
- Mariolis, T. (2003). Controllability, observability, regularity, and the so-called problem of transforming values into prices of production. *Asian African Journal of Economics and Econometrics*, 3(2), pp. 113–127.
- Mariolis, T. (2010). Norm bounds for a transformed price vector in Sraffian systems. *Applied Mathematical Sciences*, 4(12), pp. 551–574.
- Mariolis, T. (2011). A simple measure of price–labour value deviation. *Metroeconomica*, 62(4), pp. 605–611.
- Mariolis, T. (2013). Applying the mean absolute eigen-deviation of labour commanded prices from labour values to actual economies. *Applied Mathematical Sciences*, 7(104), pp. 5193–5204.
- Mariolis, T. (2021a). The capital theory debate and the almost uncontrollability and unobservability of actual economies. In T. Mariolis, N. Rodousakis, & G. Soklis, *Spectral theory of value and actual economies. Controllability, effective demand, and cycles* (Vol. 24, pp. 111–144). Singapore: Springer, Evolutionary Economics and Social Complexity Science.
- Mariolis, T. (2021b). Value theory, joint production, and international trade issues. In T. Mariolis, N. Rodousakis, & G. Soklis, *Spectral theory of value and actual economies. Controllability, effective demand, and cycles* (Vol. 24, pp. 145–181). Singapore: Springer, Evolutionary Economics and Social Complexity Science.
- Mariolis, T. (2021c). Controllability, observability and spectral post-construction of the value. In T. Mariolis, N. Rodousakis, & G. Soklis, *Spectral theory of value and actual economies. Controllability, effective demand, and cycles* (Vol. 24, pp. 35–110). Singapore: Springer, Evolutionary Economics and Social Complexity Science.
- Mariolis, T. (2021d). Competing theories of value: A spectral analysis. *Contributions to Political Economy*, 40(1), pp. 1–25.

- Mariolis, T., & Soklis, G. (2010). Additive labour values and prices: Evidence from the supply and use tables of the French, German and Greek economies. *Economic Issues*, 15(2), pp. 87–107.
- Mariolis, T., & Tsoulfidis, L. (2011). Eigenvalue distribution and the production price-profit rate relationship: Theory and empirical evidence. *Evolutionary and Institutional Economics Review*, 8(1), 87–122.
- Mariolis, T., & Tsoulfidis, L. (2014). On Bródy's conjecture: Theory, facts and figures about instability of the US economy. *Economic Systems Research*, 26(2), 209–223.
- Mariolis, T., & Tsoulfidis, L. (2016a). Capital theory 'paradoxes' and paradoxical results: resolved or continued? *Evolutionary and Institutional Economics Review*, 13(2), pp. 297–322.
- Mariolis, T., & Tsoulfidis, L. (2016b). *Modern classical economics and reality. A spectral analysis of the theory of value and distribution* (Vol. 2). Tokyo: Springer, Evolutionary Economics and Social Complexity Science.
- Mariolis, T., & Tsoulfidis, L. (2018). Less is more: Capital theory and almost irregular–uncontrollable actual economies. *Contributions to Political Economy*, 37(1), pp. 65–88.
- Mariolis, T., & Veltsistas, P. (2022). Zero measure Sraffian economies: New insights from actual input–output tables. *Contributions to Political Economy*, 41(1), pp. 1–28.
- Mariolis, T., Ntemiroglou, N., & Palantzidis, C. (2025). Spectral evidence for the structural almost uncontrollability of the income multiplier process in actual economies. *Journal of Systems Science and Complexity*, forthcoming, pp. 1–32.
- Metcalf, J., & Steedman, I. (1979). Heterogeneous capital and the Heckscher–Ohlin–Samuelson theory of trade. In I. Steedman, *Fundamental Issues in Trade Theory* (pp. 64–75). London: Macmillan.
- Meyer, C. D. (2001). *Matrix analysis and applied linear algebra*. New York: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Miller, R. E., & Blair, P. D. (2009). *Input–output analysis, foundations and extensions* (2nd ed.). New York: Cambridge University Press.
- Minhas, B. S. (1962). The homohypallagic production function, factor-intensity reversals, and the Heckscher–Ohlin theorem. *Journal of Political Economy*, 70(2), pp. 138–156.

- Miyao, T. (1977). A generalization of Sraffa's standard commodity and its complete characterization. *18*(1), pp. 151–162.
- Parrinello, S. (1970). Introduzione ad una teoria neoricardiana del commercio internazionale. *Studi Economici*, 25(2), pp. 267–321.
- Pasinetti, L. L. (1966). Changes in the rate of profit and switches of techniques. *The Quarterly Journal of Economics*, 80(4), pp. 503–517.
- Pasinetti, L. L. (1973). The notion of vertical integration in economic analysis. *Metroeconomica*, 25(1), pp. 1–29.
- Pasinetti, L. L. (1977). *Lectures on the theory of production*. New York: Columbia University Press.
- Petri, F. (2022). What remains of the Cambridge critique? On professor Schefold's theses. *Contributions to Political Economy*, 41(1), pp. 77–109.
- Salvadori, N., & Steedman, I. (1988). Joint production analysis in a Sraffian framework. *Buffetin of Economic Research*, 40(3), pp. 165–195.
- Schefold, B. (1971). *Mr Sraffa on Joint Production*. PhD. Thesis, University of Basle, Basle.
- Schefold, B. (1976). Relative prices as a function of the rate of profit: A mathematical note. *Zeitschrift Für Nationalökonomie/Journal of Economics*, 36(1/2), pp. 21–48.
- Schefold, B. (1978a). Multiple product techniques with properties of single product systems. *Zeitschrift Für Nationalökonomie/Journal of Economics*, 38(1/2), pp. 29–53.
- Schefold, B. (1978b). On counting equations. *Zeitschrift Für Nationalökonomie/Journal of Economics*, 38(3/4), pp. 253–285.
- Soklis, G. (2021a). Empirical pitfalls of the traditional value theory: Joint production and actual economies. In T. Mariolis, N. Rodousakis, & G. Soklis, *Spectral theory of value and actual economies. Controllability, effective demand, and cycles* (Vol. 24, pp. 183–224). Singapore: Springer, Evolutionary Economics and Social Complexity Science.
- Soklis, G. (2021b). Empirical input–output representations and transmutations of actual economies. In T. Mariolis, N. Rodousakis, & G. Soklis, *Spectral Theory of Value and Actual Economies. Controllability, Effective Demand, and Cycles* (Vol. 24, pp. 1–33). Singapore: Springer, Evolutionary Economics and Social Complexity Science.

- Sraffa, P. (1960). *Production of Commodities by Means of Commodities: Prelude to a Critique of Economic Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Steedman, I. (1975). Positive profits with negative surplus value. *The Economic Journal*, 85(337), pp. 114–123.
- Steedman, I. (1977). *Marx after Sraffa*. London: New Left Books.
- Steedman, I. (1979a). *Trade amongst growing economics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Steedman, I. (1979b). *Fundamental issues in trade theory*. London: Macmillan.
- Steedman, I. (1999a). Vertical integration and ‘reduction to dated quantities of labour’. In G. Mongiovi, & F. Petri, *Value, Distribution, and Capital: Essays in Honour of Pierangelo Garegnani* (pp. 314–318). London: Routledge.
- Steedman, I. (1999b). Values do follow a simple rule! *Economic Systems Research*, 11(1), pp. 5–11.
- Steedman, I. (2000). Income distribution, foreign trade and the value-added vector. *Economic Systems Research*, 12(2), pp. 221–230.
- Steedman, I. (2008). Marx after Sraffa and the open economy. *Bulletin of Political Economy*, 2(2), pp. 165–174.
- Steedman, I. (2020). Fixed capital in the corn–tractor model. *Metroeconomica*, 71(1), pp. 49–56.
- Timmer, M. P., Dietzenbacher, E., Los, B., Stehrer, R., & de Vries, G. J. (2015). An illustrated user guide to the World Input–Output Database: The case of global automotive production. 23(3), pp. 575–605.
- Tsoufidis, L., & Mariolis, T. (2007). Labour values, prices of production and the effects of income distribution: Evidence from the Greek economy. 19(4), pp. 425–437.
- von Charasoff, G. (1910). *Das system des Marxismus: Darstellung und kritik*. Berlin: H. Bondy.
- von Neumann, J. (1945). A model of general economic equilibrium. *The Review of Economic*, 13(1), pp. 1–9.
- Βελτσίστας, Π. (2020). *Κατανομή ιδιοτιμών και βαθμός κανονικότητας–ελεγκσιμότητας των πραγματικών οικονομιών: Ευρήματα από την WIOD 2000–2014*. Διπλωματική Εργασία, Πάντειον Πανεπιστήμιο, Τμήμα Δημόσιας Διοίκησης, Αθήνα.

- Μαριόλης, Θ. (2012). *Δοκίμια στη λογική ιστορία της πολιτικής οικονομίας*. Αθήνα: Matura.
- Μαριόλης, Θ., & Βελτσίστας, Π. (2021). Η σχεδόν μη-ελεγχσιμότητα και μη-παρατηρησιμότητα των οικονομιών του πραγματικού κόσμου. *Διάλογοι στη Δημόσια Διοίκηση*, 1(1), σσ. 38–50.
- Ρικάρντο, Ν. (1938). *Αρχαί πολιτικής οικονομίας και φορολογίας*. Αθήνα: Εκδόσεις Γκοβόστη. (Original work published 1817).
- Σώκλης, Γ. (2012). *Εργασιακές αξίες, εμπορευματικές αξίες, τιμές και κατανομή του εισοδήματος: Διερεύνηση βάσει εμπειρικών πινάκων εισροών–εκροών*. Διδακτορική Διατριβή, Πάντειον Πανεπιστήμιο, Αθήνα.

Παράρτημα Ι. Αποκλίσεις ιδιαζουσών τιμών της μήτρας ελεγκσιμότητας και οι αποστάσεις από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο σύστημα στην περίπτωση της απλής παραγωγής

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται το άνω όριο της Ευκλείδειας απόστασης του πλήρως ελέγξιμου συστήματος από το κοντινότερο μη-ελέγξιμο σύστημα, ο μικρότερος από τους λόγους των ιδιαζουσών τιμών της μήτρας $\mathbf{K}$ και η *spectral norm* της μήτρας $\mathbf{J}$.

Πίνακας 7. Μέτρηση απόστασης από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο οικονομικό σύστημα στην περίπτωση της απλής παραγωγής

		$\min \{(1 + \ \mathbf{C}_J\ \sigma_{\mathbf{K}h}^{-1}) \sigma_{\mathbf{K}h+1}\}$	$\min \{\sigma_{\mathbf{K}h}^{-1} \sigma_{\mathbf{K}h+1}\}$	$\ \mathbf{C}_J\ $
Αυστραλία	2000	1,218	0,061	19,835
	2005	1,274	0,069	18,392
	2010	1,595	0,072	22,064
	2014	1,711	0,078	22,051
Αυστρία	2000	58,193	0,073	800,285
	2005	30,069	0,07	430,206
	2010	32,435	0,086	375,524
	2014	42,466	0,088	484,17
Βέλγιο	2000	5,893	0,064	91,482
	2005	5,943	0,066	89,548
	2010	8,188	0,063	130,102
	2014	6,571	0,061	106,626
Βουλγαρία	2000	1,144	0,07	16,451
	2005	1,006	0,059	17,118
	2010	1,823	0,063	28,837
	2014	2,033	0,065	31,052

Βραζιλία	2000	2,429	0,062	39,044
	2005	0,278	0,008	36,989
	2010	2,63	0,065	40,167
	2014	3,055	0,081	37,63
Γαλλία	2000	8,645	0,062	138,573
	2005	8,24	0,06	137,168
	2010	9,64	0,076	126,722
	2014	6,766	0,058	116,177
Γερμανία	2000	15,255	0,066	231,46
	2005	14,417	0,069	206,906
	2010	12,452	0,067	185,782
	2014	12,467	0,066	188,896
Δανία	2000	3,956	0,062	62,516
	2005	3,172	0,063	49,91
	2010	3,895	0,064	59,989
	2014	4,211	0,066	63,536
Δημ. της Κορέας	2000	10,811	0,087	124,082
	2005	8,631	0,085	100,979
	2010	2,032	0,082	24,748
	2014	1,603	0,066	24,317
Δημ. της Σλοβακίας	2000	6,917	0,068	102,225
	2005	0,899	0,008	115,795
	2010	7,349	0,057	129,39
	2014	6,521	0,071	87,494

Ελβετία	2000	15,678	0,066	238,346
	2005	4,755	0,046	103,065
	2010	5,395	0,061	88,615
	2014	4,416	0,046	96,896
Ελλάδα	2000	1,28	0,084	15,314
	2005	0,691	0,071	9,714
	2010	0,591	0,05	11,746
	2014	1,194	0,077	15,578
Εσθονία	2000	3,22	0,068	47,143
	2005	4,596	0,076	60,696
	2010	5,861	0,077	75,921
	2014	4,912	0,073	67,723
Η.Π.Α.	2000	5,204	0,071	72,776
	2005	5,474	0,078	69,89
	2010	3,679	0,057	64,134
	2014	4,774	0,088	54,407
Ηνωμένο Βασίλειο	2000	12,653	0,059	214,397
	2005	13,729	0,059	232,65
	2010	16,64	0,071	235,912
	2014	14,603	0,06	245,057
Ιαπωνία	2000	5,122	0,072	71,383
	2005	4,086	0,075	54,243
	2010	1,655	0,043	38,211
	2014	2,492	0,067	37,242

Ινδία	2000	1,858	0,075	24,876
	2005	1,542	0,06	25,897
	2010	1,823	0,076	23,868
	2014	1,528	0,071	21,532
Ινδονησία	2000	2,203	0,064	34,574
	2005	8,414	0,098	86,081
	2010	2,292	0,043	53,041
	2014	3,186	0,071	44,879
Ιρλανδία	2000	24,067	0,094	255,246
	2005	41,236	0,105	390,519
	2010	2,713	0,066	41,055
	2014	0,388	0,048	8,039
Ισπανία	2000	4,348	0,069	61,454
	2005	3,176	0,068	46,074
	2010	5,969	0,07	84,868
	2014	4,682	0,067	70,095
Ιταλία	2000	3,289	0,067	49,111
	2005	2,701	0,059	45,968
	2010	4,49	0,079	56,724
	2014	4,674	0,075	62,078
Καναδάς	2000	7,478	0,074	100,442
	2005	1,139	0,012	92,14
	2010	5,398	0,067	80,857
	2014	5,611	0,075	74,174

Κάτω Χώρες	2000	7,916	0,06	131,272
	2005	6,815	0,058	116,903
	2010	13,629	0,07	194,748
	2014	5,462	0,043	126,849
Κροατία	2000	3,678	0,072	51,27
	2005	2,812	0,074	38,033
	2010	2,784	0,087	32,171
	2014	2,67	0,076	34,939
Κύπρος	2000	0,775	0,065	11,873
	2005	6,5	0,103	62,882
	2010	5,127	0,078	65,012
	2014	1,639	0,076	21,542
Λ. Δ. της Κίνας	2000	0,509	0,044	11,511
	2005	0,733	0,058	12,57
	2010	1,191	0,061	19,648
	2014	1,263	0,057	22,184
Λετονία	2000	1,438	0,062	23,036
	2005	4,705	0,089	52,701
	2010	3,723	0,076	47,458
	2014	2,343	0,059	39,392
Λιθουανία	2000	1,884	0,017	107,727
	2005	9,382	0,089	105,626
	2010	6,279	0,088	71,427
	2014	5,871	0,088	66,706

Λουξεμβούργο	2000	0,438	0,034	12,756
	2005	0,276	0,036	7,6
	2010	0,363	0,042	8,644
	2014	0,242	0,033	7,361
Μάλτα	2000	0,543	0,037	14,775
	2005	0,808	0,047	17,111
	2010	1,18	0,05	23,593
	2014	1,192	0,053	22,396
Μεξικό	2000	1,309	0,049	26,593
	2005	1,195	0,052	23,156
	2010	1,06	0,044	24,302
	2014	2,1	0,071	29,488
Νορβηγία	2000	2,154	0,07	29,845
	2005	1,908	0,059	32,095
	2010	1,972	0,067	29,1
	2014	1,72	0,063	27,141
Ουγγαρία	2000	1,586	0,061	25,81
	2005	2,964	0,077	38,592
	2010	1,893	0,049	38,526
	2014	2,334	0,051	46,022
Πολωνία	2000	4,747	0,067	67,866
	2005	3,705	0,058	64,07
	2010	4,768	0,064	74,319
	2014	6,042	0,077	78,304

Πορτογαλία	2000	23,994	0,074	320,863
	2005	21,169	0,079	267,514
	2010	18,842	0,075	252,301
	2014	17,44	0,091	190,832
Ρουμανία	2000	0,237	0,038	6,184
	2005	0,342	0,056	6,076
	2010	0,255	0,051	4,967
	2014	0,248	0,047	5,268
Ρωσική Ομοσπονδία	2000	1,008	0,067	15,033
	2005	0,573	0,061	9,316
	2010	0,471	0,053	8,805
	2014	0,451	0,056	8,107
Σλοβενία	2000	11,918	0,061	191,81
	2005	1,18	0,005	230,084
	2010	3,117	0,018	172,616
	2014	13,059	0,064	203,396
Σουηδία	2000	1,119	0,057	19,471
	2005	1,265	0,062	19,995
	2010	1,518	0,06	24,968
	2014	0,699	0,03	23,173
Ταϊβάν	2000	8,917	0,055	161,052
	2005	6,633	0,082	81,317
	2010	2,649	0,058	45,581
	2014	2,293	0,051	44,573

Τουρκία	2000	3,31	0,063	52,575
	2005	2,374	0,056	42,761
	2010	2,452	0,056	43,852
	2014	2,362	0,057	41,747
Τσεχική Δημοκρατία	2000	8,331	0,057	141,737
	2005	8,324	0,061	134,03
	2010	10,333	0,065	157,891
	2014	4,042	0,027	149,11
Φινλανδία	2000	1,776	0,054	32,752
	2005	2,573	0,071	35,923
	2010	3,159	0,068	46,199
	2014	2,826	0,068	41,424
Μέσος Όρος		5,707	0,063	85,111
Διάμεσος		3,166	0,065	50,59
Μέγιστο		58,193	0,105	800,285
Ελάχιστο		0,237	0,005	4,697

Παράρτημα II. Αποκλίσεις ιδιαζουσών τιμών της μήτρας ελεγκσιμότητας και οι αποστάσεις από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο σύστημα στην περίπτωση της συμπαγωγής

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται το άνω όριο της Ευκλείδειας απόστασης του πλήρως ελέγξιμου συστήματος από το κοντινότερο μη-ελέγξιμο σύστημα και ο μικρότερος από τους λόγους των ιδιαζουσών τιμών των μητρών ελεγκσιμότητας.

Πίνακας 8. Μέτρηση απόστασης από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο οικονομικό σύστημα στην περίπτωση της συμπαγωγής

Χώρα	Έτος	K_1		K_2	
		$\min\{\sigma_{K_h}^{-1}\sigma_{K_{h+1}}\}$	$\min\{(1+\ C_H\ \sigma_{K_h}^{-1})\sigma_{K_{h+1}}\}$	$\min\{\sigma_{K_h}^{-1}\sigma_{K_{h+1}}\}$	$\min\{(1+\ C_H\ \sigma_{K_h}^{-1})\sigma_{K_{h+1}}\}$
Γερμανία	2000	0,0095	6,604	0,072	49,317
	2005	0,001	0,960	0,067	51,769
	2010	0,00001	0,089	0,072	88,588
	2014	0,00008	0,147	0,079	77,461
Ελλάδα	2000	3×10^{-6}	0,546	0,080	1,915
	2005	0,0003	0,155	0,050	0,649
	2010	0,00003	0,092	0,064	1,077
	2014	0,00004	0,107	0,060	1,161
Η.Π.Α.	2000	0,062	6,136	0,067	6,707
	2005	0,013	1,035	0,065	5,323
	2010	0,071	3,992	0,058	3,288
	2014	0,079	6,609	0,067	5,651
Λ. Δημοκρατία της Κίνας	2000	2×10^{-13}	0,345	0,049	6,234
	2005	3×10^{-16}	0,893	0,079	28,432
	2010	1×10^{-15}	1,171	0,071	73,821

Ρωσική Ομοσπονδία	2014	4×10^{-15}	3,759	0,052	85,384
	2000	0,047	0,499	0,025	0,284
	2005	0,016	0,204	0,003	0,038
	2010	0,008	0,127	0,037	0,475
	2014	0,001	0,039	0,039	0,452
Μέσος Όρος		0,015	1,675	0,058	24,4
Διάμεσος		0,0006	0,523	0,065	5,487
Μέγιστο		0,079	6,609	0,08	88,588
Ελάχιστο		3×10^{-16}	0,039	0,003	0,038

Παράρτημα III. Προσθετικές εργασιακές αξίες

Σχετικά με τις προσθετικές εργασιακές αξίες, στα οικονομικά συστήματα συμπαραγωγής παρατηρείται η ύπαρξη και αρνητικών στοιχείων. Συγκεκριμένα, για τις χώρες που εξετάστηκαν, βρέθηκαν αρνητικές αξίες μόνον για την Ελλάδα και, πιο συγκεκριμένα για τα έτη 2000 (κωδικός C26 και C30), 2010 (κωδικός C33) και 2014 (κωδικός C33)⁵⁵. Να σημειωθεί δε ότι, και σε προγενέστερες έρευνες έχουν εντοπιστεί αρνητικές εργασιακές αξίες⁵⁶. Παρακάτω δίνονται οι προσθετικές εργασιακές αξίες στην περίπτωση της συμπαραγωγής για τις χώρες και τα έτη που ερευνήθηκαν.

Πίνακας 9. Προσθετικές εργασιακές αξίες, Γερμανία, $n = 54$

Κλάδος	2000	2005	2010	2014
A01	0,016	0,017	0,016	0,016
A02	0,027	0,017	0,017	0,014
A03	0,017	0,015	0,015	0,015
B	0,020	0,017	0,014	0,013
C10-C12	0,019	0,018	0,017	0,017
C13-C15	0,022	0,019	0,017	0,016
C16	0,020	0,017	0,017	0,016
C17	0,016	0,015	0,014	0,013
C18	0,019	0,017	0,017	0,016
C19	0,016	0,015	0,012	0,012
C20	0,013	0,012	0,011	0,011
C21	0,010	0,007	0,006	0,006
C22	0,017	0,015	0,014	0,013
C23	0,017	0,016	0,015	0,014
C24	0,016	0,014	0,014	0,013
C25	0,019	0,017	0,016	0,015
C26	0,013	0,012	0,012	0,011
C27	0,015	0,015	0,013	0,012
C28	0,016	0,014	0,014	0,013

⁵⁵ Σχετικά με την ταξινόμηση των κλάδων βλ. Παράρτημα IV.

⁵⁶ Για παράδειγμα, βλ. Σώκλης (2012) και Soklis (2021a).

C29	0,016	0,013	0,012	0,011
C30	0,016	0,013	0,012	0,013
C31_C32	0,022	0,019	0,016	0,015
C33	0,017	0,015	0,015	0,014
D35	0,011	0,009	0,008	0,009
E36	0,010	0,009	0,008	0,007
E37-E39	0,015	0,013	0,012	0,011
F	0,021	0,018	0,016	0,014
G45	0,018	0,015	0,016	0,016
G46	0,021	0,016	0,015	0,014
G47	0,026	0,024	0,024	0,024
H49	0,019	0,017	0,016	0,015
H50	0,013	0,010	0,010	0,010
H51	0,016	0,015	0,014	0,013
H52	0,020	0,015	0,014	0,013
H53	0,025	0,024	0,023	0,022
I	0,026	0,027	0,027	0,026
J58	0,019	0,019	0,016	0,014
J59_J60	0,011	0,011	0,010	0,009
J61	0,009	0,009	0,009	0,008
J62_J63	0,013	0,011	0,011	0,009
K64	0,014	0,010	0,010	0,011
K65	0,012	0,011	0,011	0,010
K66	0,012	0,011	0,013	0,012
L68	0,005	0,004	0,004	0,004
M69_M70	0,012	0,012	0,013	0,013
M71	0,013	0,014	0,014	0,013
M72	0,012	0,011	0,010	0,009
M73	0,013	0,016	0,015	0,014
M74_M75	0,011	0,011	0,012	0,011
N	0,021	0,020	0,021	0,019
O84	0,021	0,019	0,017	0,014
P85	0,022	0,020	0,020	0,018

Q	0,027	0,025	0,023	0,021
R_S_T	0,026	0,024	0,022	0,021

Πίνακας 10. Προσθετικές εργασιακές αξίες, Ελλάδα, $n = 54$

Κλάδος	2000	2005	2010	2014
A01	0,041	0,007	0,009	0,009
A02	0,259	0,102	0,045	0,045
A03	0,048	0,015	0,006	0,007
B	0,044	0,012	0,011	0,013
C10-C12	0,045	0,012	0,012	0,012
C13-C15	0,066	0,020	0,016	0,018
C16	0,070	0,023	0,021	0,031
C17	0,050	0,015	0,015	0,014
C18	0,026	0,010	0,017	0,018
C19	0,038	0,012	0,010	0,012
C20	0,038	0,014	0,013	0,013
C21	0,040	0,013	0,013	0,016
C22	0,043	0,015	0,015	0,019
C23	0,038	0,013	0,014	0,014
C24	0,029	0,010	0,012	0,010
C25	0,049	0,011	0,015	0,017
C26	-0,500	0,017	0,159	0,206
C27	0,025	0,012	0,016	0,018
C28	0,024	0,014	0,028	0,028
C29	0,031	0,012	0,018	0,020
C30	-0,478	0,023	0,207	0,264
C31_C32	0,062	0,019	0,017	0,017
C33	0,491	0,004	-0,124	-0,136
D35	0,034	0,007	0,008	0,008
E36	0,050	0,015	0,011	0,014
E37-E39	0,041	0,007	0,004	0,004
F	0,043	0,014	0,014	0,015
G45	0,047	0,011	0,011	0,012
G46	0,045	0,014	0,012	0,013
G47	0,046	0,018	0,017	0,022
H49	0,065	0,013	0,011	0,014

H50	0,020	0,006	0,008	0,010
H51	0,064	0,011	0,009	0,011
H52	0,038	0,011	0,009	0,009
H53	0,061	0,021	0,018	0,021
I	0,048	0,012	0,013	0,013
J58	0,045	0,011	0,009	0,012
J59_J60	0,041	0,013	0,016	0,022
J61	0,016	0,007	0,005	0,007
J62_J63	0,035	0,011	0,012	0,013
K64	0,030	0,008	0,007	0,009
K65	0,022	0,008	0,004	0,005
K66	0,094	0,020	0,014	0,016
L68	0,005	0,002	0,001	0,001
M69_M70	0,035	0,010	0,007	0,009
M71	0,029	0,010	0,010	0,013
M72	0,020	0,011	0,010	0,008
M73	0,028	0,010	0,008	0,013
M74_M75	0,020	0,008	0,010	0,013
N	0,046	0,016	0,016	0,019
O84	0,066	0,018	0,015	0,017
P85	0,052	0,023	0,019	0,021
Q	0,048	0,014	0,013	0,019
R_S_T	0,064	0,020	0,021	0,021

Πίνακας 11. Προσθετικές εργασιακές αξίες, Η.Π.Α., $n = 54$

Κλάδος	2000	2005	2010	2014
A01	0,011	0,008	0,007	0,006
A02	0,018	0,014	0,015	0,014
A03	0,018	0,014	0,015	0,014
B	0,008	0,005	0,003	0,003
C10-C12	0,011	0,009	0,007	0,007
C13-C15	0,018	0,014	0,011	0,010
C16	0,017	0,013	0,012	0,010
C17	0,011	0,009	0,007	0,007
C18	0,017	0,013	0,011	0,011
C19	0,007	0,004	0,003	0,003
C20	0,008	0,006	0,004	0,003
C21	0,008	0,006	0,004	0,003
C22	0,012	0,010	0,007	0,007
C23	0,012	0,009	0,008	0,007
C24	0,012	0,008	0,007	0,006
C25	0,013	0,011	0,009	0,008
C26	0,009	0,007	0,005	0,004
C27	0,012	0,009	0,007	0,007
C28	0,012	0,010	0,008	0,007
C29	0,011	0,009	0,007	0,007
C30	0,011	0,008	0,006	0,006
C31_C32	0,014	0,011	0,009	0,008
C33	0,020	0,017	0,015	0,014
D35	0,007	0,005	0,003	0,003
E36	0,007	0,005	0,003	0,003
E37-E39	0,013	0,010	0,008	0,008
F	0,014	0,011	0,010	0,009
G45	0,012	0,011	0,010	0,009
G46	0,010	0,008	0,007	0,006
G47	0,021	0,016	0,014	0,013
H49	0,014	0,010	0,009	0,008

H50	0,011	0,008	0,006	0,006
H51	0,013	0,009	0,007	0,006
H52	0,018	0,014	0,011	0,012
H53	0,017	0,012	0,010	0,010
I	0,026	0,022	0,020	0,018
J58	0,011	0,006	0,005	0,004
J59_J60	0,009	0,007	0,004	0,004
J61	0,008	0,005	0,004	0,004
J62_J63	0,016	0,012	0,010	0,009
K64	0,007	0,007	0,006	0,005
K65	0,009	0,007	0,006	0,005
K66	0,011	0,007	0,006	0,006
L68	0,004	0,004	0,003	0,003
M69_M70	0,010	0,007	0,006	0,006
M71	0,012	0,010	0,008	0,008
M72	0,012	0,010	0,008	0,008
M73	0,012	0,010	0,008	0,008
M74_M75	0,012	0,010	0,008	0,008
N	0,024	0,018	0,015	0,014
O84	0,016	0,012	0,010	0,010
P85	0,023	0,019	0,015	0,013
Q	0,018	0,014	0,012	0,012
R_S_T	0,016	0,013	0,011	0,010

Πίνακας 12. Προσθετικές εργασιακές αξίες, Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας, $n = 47$

Κλάδος	2000	2005	2010	2014
A01	0,169	0,103	0,049	0,027
A02	0,174	0,100	0,041	0,023
A03	0,162	0,100	0,048	0,027
B	0,033	0,018	0,009	0,007
C10-C12	0,090	0,058	0,029	0,018
C13-C15	0,070	0,050	0,028	0,019
C16	0,071	0,051	0,025	0,016
C17	0,052	0,036	0,020	0,014
C18	0,043	0,030	0,017	0,013
C19	0,029	0,016	0,008	0,007
C20	0,036	0,020	0,011	0,009
C21	0,049	0,035	0,020	0,013
C22	0,052	0,030	0,017	0,012
C23	0,041	0,024	0,011	0,009
C24	0,034	0,016	0,009	0,007
C25	0,044	0,024	0,013	0,010
C26	0,036	0,023	0,012	0,010
C27	0,040	0,023	0,013	0,010
C28	0,038	0,020	0,012	0,010
C29	0,036	0,021	0,011	0,009
C30	0,037	0,020	0,010	0,008
C31_C32-C33	0,057	0,034	0,022	0,014
D35	0,032	0,017	0,009	0,007
E36	0,033	0,018	0,009	0,007
E37-E39	0,042	0,025	0,012	0,009
F	0,063	0,031	0,015	0,012
G45-G46	0,057	0,046	0,017	0,013
G47	0,057	0,046	0,017	0,013
H49	0,038	0,023	0,012	0,009
H50	0,036	0,022	0,011	0,009
H51	0,039	0,025	0,012	0,009

H52	0,074	0,034	0,016	0,011
H53	0,044	0,025	0,012	0,009
I	0,085	0,057	0,028	0,018
J58-J59_J60-J61	0,026	0,021	0,010	0,007
J62_J63	0,035	0,024	0,011	0,008
K64	0,015	0,018	0,008	0,006
K65-K66	0,030	0,027	0,013	0,009
L68	0,014	0,011	0,006	0,004
M69_M70	0,034	0,027	0,013	0,010
M71-M72-M73	0,032	0,026	0,014	0,010
M74_M75	0,029	0,022	0,011	0,008
N	0,030	0,031	0,014	0,010
O84	0,042	0,039	0,022	0,016
P85	0,090	0,047	0,025	0,018
Q	0,074	0,039	0,023	0,016
R_S-T-U	0,122	0,082	0,042	0,031

Πίνακας 13. Προσθετικές εργασιακές αξίες, Ρωσία, $n = 33$

Κλάδος	2000	2005	2010	2014
A	0,024	0,011	0,006	0,003
B	0,005	0,001	0,001	0,000
C10-C12	0,012	0,005	0,002	0,001
C13-C15	0,015	0,006	0,003	0,002
C16	0,010	0,004	0,002	0,001
C17-C18	0,008	0,003	0,002	0,001
C19	0,003	0,001	0,001	0,000
C20-C21	0,006	0,002	0,001	0,001
C22	0,007	0,003	0,001	0,001
C23	0,008	0,003	0,002	0,001
C24-C25	0,005	0,002	0,001	0,001
C26-C27	0,009	0,003	0,001	0,001
C28	0,013	0,005	0,002	0,001
C29-C30	0,008	0,004	0,002	0,001
C31_C32-C33	0,005	0,003	0,001	0,001
D-E	0,006	0,002	0,001	0,001
F	0,008	0,003	0,001	0,001
G45	0,005	0,002	0,001	0,001
G46	0,002	0,002	0,001	0,001
G47	0,009	0,004	0,002	0,002
H49	0,012	0,004	0,002	0,001
H50	0,007	0,003	0,002	0,001
H51	0,004	0,002	0,001	0,001
H52-H53	0,005	0,003	0,001	0,001
I	0,011	0,004	0,002	0,001
J	0,007	0,002	0,001	0,001
K	0,006	0,001	0,001	0,000
L68	0,005	0,001	0,001	0,000
M_N	0,006	0,002	0,001	0,001
O84	0,009	0,003	0,001	0,001
P85	0,030	0,009	0,004	0,002

Q	0,018	0,006	0,002	0,001
R_S_T_U	0,569	0,155	0,076	0,049

Παράρτημα IV. Ταξινόμηση κλάδων στην περίπτωση της συμπαραγωγής

Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 5.2, τα παρεχόμενα στοιχεία δίνουν πίνακες διαστάσεων 64×64 . Ωστόσο, καθώς για τη δημιουργία του διανύσματος της εργασίας δεν παρέχονται διαφορετικά στοιχεία από τον πίνακα *Socio-Economic Accounts*, έχει πραγματοποιηθεί συνάθροιση κλάδων από τους πίνακες προσφοράς και χρήσεων, προκειμένου να δημιουργηθούν πίνακες και διανύσματα ίδιων διαστάσεων. Ως εκ τούτου, έχουν πραγματοποιηθεί οι εξής συναθροίσεις:

- i. **Γερμανία.** Συναθροίστηκαν οι κλάδοι N77, N78, N79, N80-N82 στον κλάδο N, οι κλάδοι Q86, Q87_Q88 στον κλάδο Q και οι κλάδοι R90-R92, R93, S94, S95, S96, T και U στον κλάδο R_S_T_U. Ως εκ τούτου, δημιουργήθηκαν πίνακες και διανύσματα διαστάσεων 54×54 και 1×54 , αντίστοιχα.
- ii. **Ελλάδα.** Συναθροίστηκαν οι κλάδοι N77, N78, N79, N80-N82 στον κλάδο N, οι κλάδοι Q86, Q87_Q88 στον κλάδο Q και οι κλάδοι R90-R92, R93, S94, S95, S96, T και U στον κλάδο R_S_T_U. Ως εκ τούτου, δημιουργήθηκαν πίνακες και διανύσματα διαστάσεων 54×54 και 1×54 , αντίστοιχα.
- iii. **Η.Π.Α.** Συναθροίστηκαν οι κλάδοι N77, N78, N79, N80-N82 στον κλάδο N, οι κλάδοι Q86, Q87_Q88 στον κλάδο Q και οι κλάδοι R90-R92, R93, S94, S95, S96, T και U στον κλάδο R_S_T_U. Ως εκ τούτου, δημιουργήθηκαν πίνακες και διανύσματα διαστάσεων 54×54 και 1×54 , αντίστοιχα.
- iv. **Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας.** Συναθροίστηκαν οι κλάδοι C31_C32 και C33, οι κλάδοι G45 και G46, οι κλάδοι J58, J59_J60 και J61, οι κλάδοι K65 και K66, και οι κλάδοι M71, M72 και M73, Ως εκ τούτου, δημιουργήθηκαν πίνακες και διανύσματα διαστάσεων 47×47 και 1×47 , αντίστοιχα.
- v. **Ρωσία.** Συναθροίστηκαν οι κλάδοι A01, A02 και A03 στον κλάδο A, οι κλάδοι C17 και C18, οι κλάδοι C20 και C21, οι κλάδοι C24 και C25, οι κλάδοι C26 και C27, οι κλάδοι C29 και C30, οι κλάδοι C31_C32 και C33, οι κλάδοι D35, E36 και E37-E39 στον κλάδο D-E, οι κλάδοι H52 και H53, οι κλάδοι J58, J59_J60, J61 και J62_J63 στον κλάδο J, οι κλάδοι K64, K65 και K66 στον κλάδο K, οι κλάδοι M69_M70, M71, M72, M73, M74_M75, N77, N78, N79 και N80-N82 στον κλάδο M_N, οι κλάδοι Q86, Q87_Q88 στον κλάδο Q, και οι κλάδοι R90-R92, R93, S94, S95, S96, T και U στον κλάδο R_S_T_U. Ως εκ τούτου, δημιουργήθηκαν πίνακες και διανύσματα διαστάσεων 33×33 και 1×33 , αντίστοιχα.

Στον πίνακα 14 αναφέρονται οι κωδικοί και η περιγραφή του εκάστοτε κλάδου.

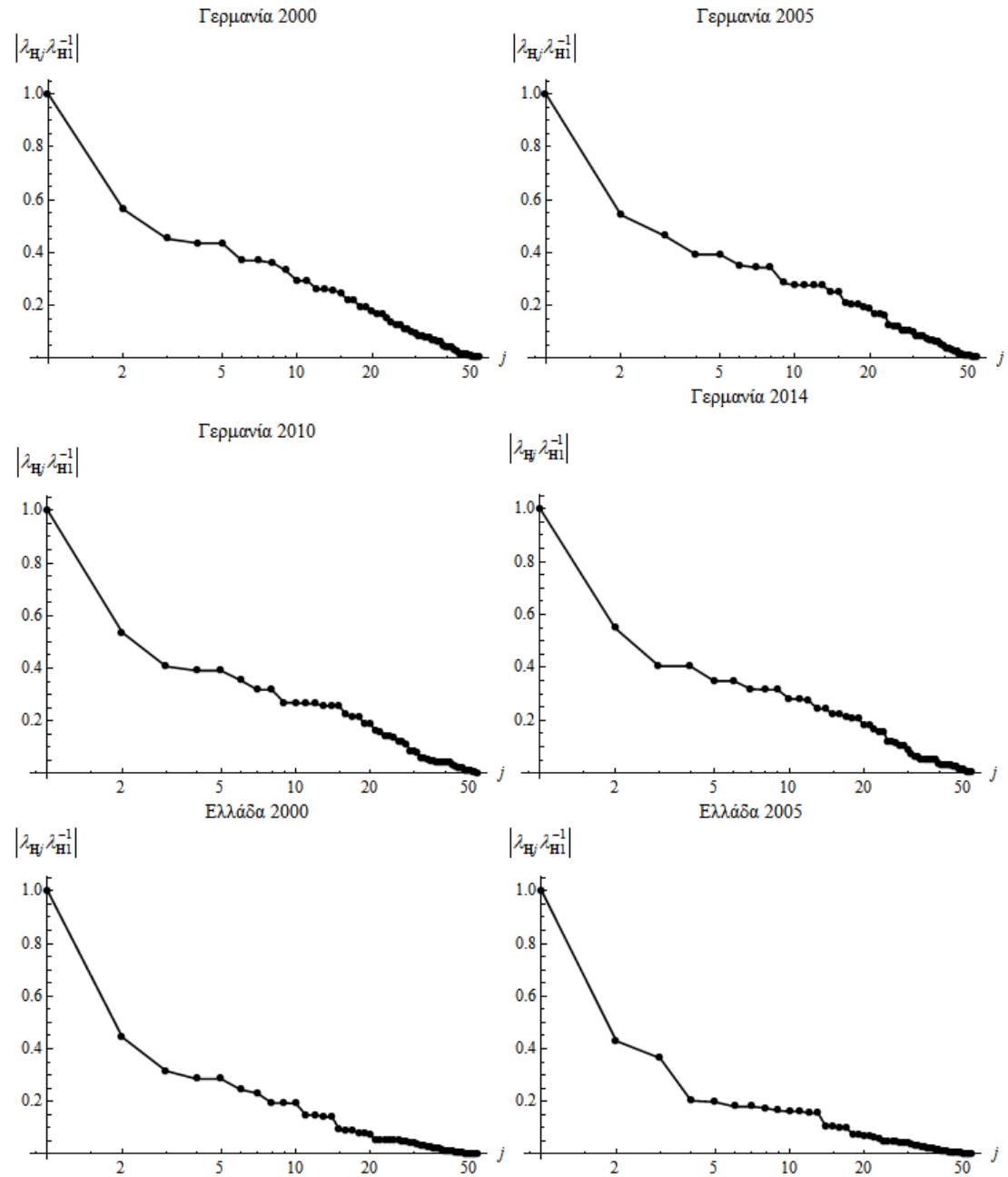
Πίνακας 14. Ταξινόμηση Κλάδων

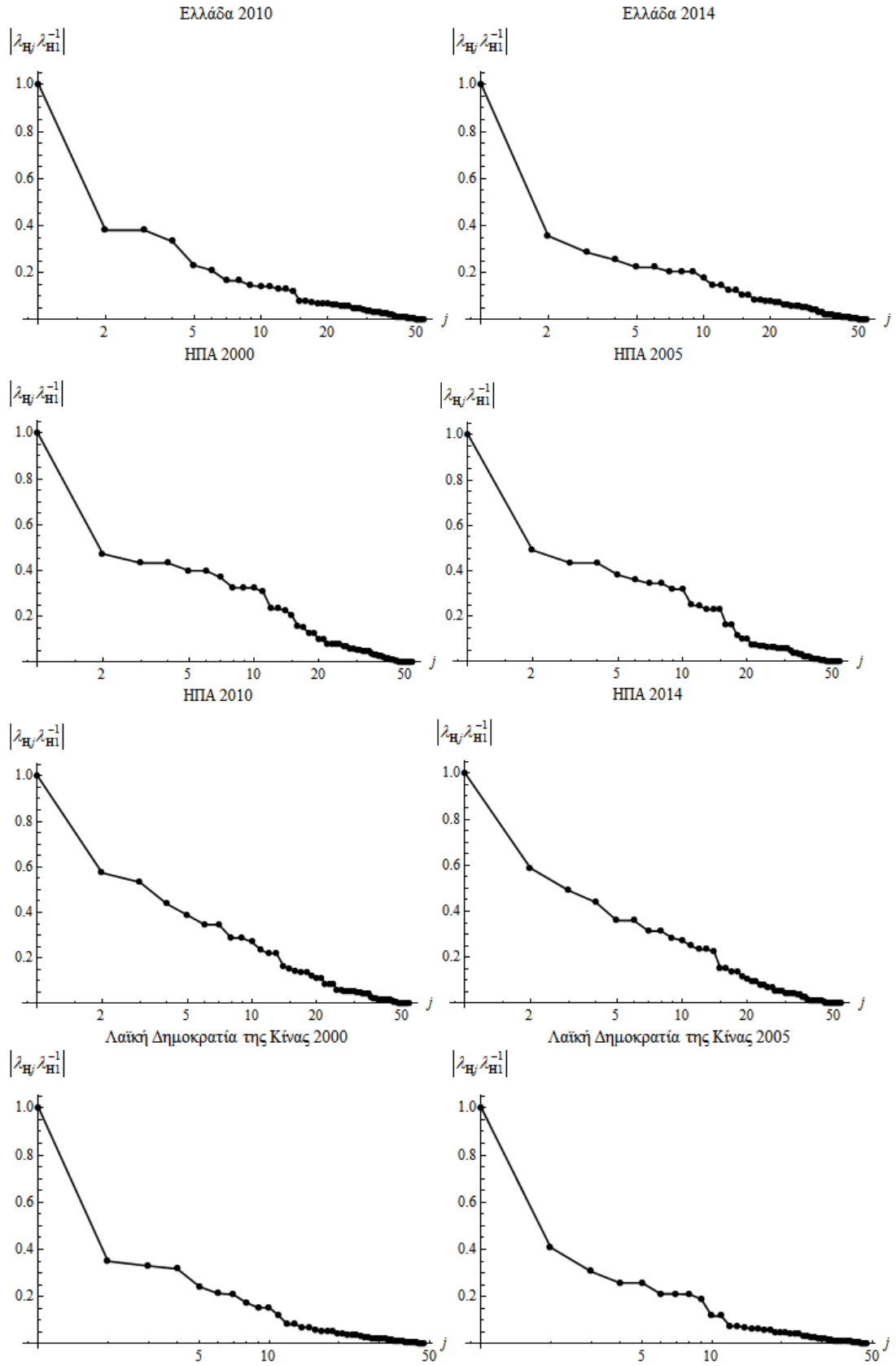
α/α	Κωδικός	Περιγραφή
1	A01	Crop and animal production, hunting and related service activities
2	A02	Forestry and logging
3	A03	Fishing and aquaculture
4	B	Mining and quarrying
5	C10-C12	Manufacture of food products, beverages and tobacco products
6	C13-C15	Manufacture of textiles, wearing apparel and leather products
7	C16	Manufacture of wood and of products of wood and cork, except furniture; manufacture of articles of straw and plaiting materials
8	C17	Manufacture of paper and paper products
9	C18	Printing and reproduction of recorded media
10	C19	Manufacture of coke and refined petroleum products
11	C20	Manufacture of chemicals and chemical products
12	C21	Manufacture of basic pharmaceutical products and pharmaceutical preparations
13	C22	Manufacture of rubber and plastic products
14	C23	Manufacture of other non-metallic mineral products
15	C24	Manufacture of basic metals
16	C25	Manufacture of fabricated metal products, except machinery and equipment
17	C26	Manufacture of computer, electronic and optical products
18	C27	Manufacture of electrical equipment
19	C28	Manufacture of machinery and equipment n.e.c.
20	C29	Manufacture of motor vehicles, trailers and semi-trailers
21	C30	Manufacture of other transport equipment
22	C31_C32	Manufacture of furniture; other manufacturing
23	C33	Repair and installation of machinery and equipment
24	D35	Electricity, gas, steam and air conditioning supply
25	E36	Water collection, treatment and supply
26	E37-E39	Sewerage; waste collection, treatment and disposal activities; materials recovery;
		Προϊόντα φυτικής και ζωικής παραγωγής, θήρας και συναφών δραστηριοτήτων
		Προϊόντα δασοκομίας και υλοτομίας
		Προϊόντα αλιείας και υδατοκαλλιέργειας
		Προϊόντα εξορυκτικής και λατομικής δραστηριότητας
		Τρόφιμα, ποτά και προϊόντα καπνού
		Κλωστοϋφαντουργικά προϊόντα, ενδύματα και δερμάτινα είδη
		Προϊόντα ξύλου (εκτός των επίπλων), είδη καλαθοποιίας και σπαρτοπλεκτικής
		Προϊόντα χαρτιού
		Εκτυπώσεις και αναπαραγωγή προεγγεγραμμένων μέσων
		Παραγωγή οπτάνθρακα και προϊόντων διύλισης πετρελαίου
		Χημικές ουσίες και προϊόντα
		Βασικά φαρμακευτικά προϊόντα και σκευάσματα
		Προϊόντα από ελαστικό (καουτσούκ) και πλαστικές ύλες
		Άλλα προϊόντα μη μεταλλικών ορυκτών
		Βασικά μέταλλα
		Μεταλλικά προϊόντα (εκτός μηχανημάτων)
		Ηλεκτρονικοί υπολογιστές, ηλεκτρονικά και οπτικά προϊόντα
		Ηλεκτρολογικός εξοπλισμός
		Μηχανήματα και είδη εξοπλισμού π.δ.κ.α.
		Μηχανοκίνητα οχήματα, ρυμουλκούμενα και ημιρυμουλκούμενα οχήματα
		Λοιπός εξοπλισμός μεταφορών
		Έπιπλα και προϊόντα λοιπών μεταποιητικών δραστηριοτήτων
		Υπηρεσίες επισκευής και εγκατάστασης μηχανημάτων και εξοπλισμού
		Ηλεκτρικό ρεύμα, φυσικό αέριο, ατμός και κλιματισμός
		Φυσικό νερό, υπηρεσίες επεξεργασίας και παροχής νερού
		Υπηρεσίες συλλογής, επεξεργασίας και διάθεσης απορριμμάτων, ανάκτησης υλικών,

		remediation activities and other waste management services	εξυγίανσης και άλλες υπηρεσίες διαχείρισης αποβλήτων
27	F	Construction	Κατασκευές
28	G45	Wholesale and retail trade and repair of motor vehicles and motorcycles	Υπηρεσίες χονδρικού και λιανικού εμπορίου και υπηρεσίες επισκευής μηχανοκίνητων οχημάτων και μοτοσυκλετών
29	G46	Wholesale trade, except of motor vehicles and motorcycles	Υπηρεσίες χονδρικού εμπορίου εκτός των μηχανοκίνητων οχημάτων και μοτοσυκλετών
30	G47	Retail trade, except of motor vehicles and motorcycles	Υπηρεσίες λιανικού εμπορίου εκτός των μηχανοκίνητων οχημάτων και μοτοσυκλετών
31	H49	Land transport and transport via pipelines	Υπηρεσίες χερσαίων μεταφορών και μεταφορών μέσω αγωγών
32	H50	Water transport	Υπηρεσίες πλωτών μεταφορών
33	H51	Air transport	Υπηρεσίες αεροπορικών μεταφορών
34	H52	Warehousing and support activities for transportation	Υπηρεσίες αποθήκευσης και υποστήριξης των μεταφορών
35	H53	Postal and courier activities	Ταχυδρομικές και ταχυμεταφορικές υπηρεσίες
36	I	Accommodation and food service activities	Υπηρεσίες παροχής καταλύματος και εστίασης
37	J58	Publishing activities	Εκδοτικές υπηρεσίες
38	J59_J60	Motion picture, video and television programme production, sound recording and music publishing activities; programming and broadcasting activities	Υπηρεσίες παραγωγής κινηματογραφικών ταινιών, βίντεο, τηλεοπτικών προγραμμάτων, ηχογραφήσεων, μουσικών εκδόσεων, προγραμματισμού και τηλεοπτικών εκπομπών
39	J61	Telecommunications	Τηλεπικοινωνιακές υπηρεσίες
40	J62_J63	Computer programming, consultancy and related activities; information service activities	Υπηρεσίες προγραμματισμού ηλεκτρονικών υπολογιστών, παροχής συμβουλών και άλλων συναφών δραστηριοτήτων, και υπηρεσίες πληροφοριών
41	K64	Financial service activities, except insurance and pension funding	Χρηματοπιστωτικές υπηρεσίες, με εξαίρεση τις ασφαλιστικές δραστηριότητες και τα συνταξιοδοτικά προγράμματα
42	K65	Insurance, reinsurance and pension funding, except compulsory social security	Υπηρεσίες ασφαλιστικών, αντασφαλιστικών και συνταξιοδοτικών ταμείων, εκτός από την υποχρεωτική κοινωνική ασφάλιση
43	K66	Activities auxiliary to financial services and insurance activities	Υπηρεσίες συναφείς προς τις χρηματοπιστωτικές υπηρεσίες και τις ασφαλιστικές δραστηριότητες
44	L68	Real estate activities	Υπηρεσίες διαχείρισης ακίνητης περιουσίας
45	M69_M70	Legal and accounting activities; activities of head offices; management consultancy activities	Νομικές και λογιστικές υπηρεσίες και υπηρεσίες κεντρικών γραφείων και παροχής συμβουλών διαχείρισης
46	M71	Architectural and engineering activities; technical testing and analysis	Αρχιτεκτονικές και μηχανολογικές υπηρεσίες και υπηρεσίες τεχνικών δοκιμών και αναλύσεων
47	M72	Scientific research and development	Υπηρεσίες επιστημονικής έρευνας και ανάπτυξης
48	M73	Advertising and market research	Υπηρεσίες διαφήμισης και έρευνας αγοράς
49	M74_M75	Other professional, scientific and technical activities; veterinary activities	Άλλες επαγγελματικές, επιστημονικές και τεχνικές υπηρεσίες, και κτηνιατρικές υπηρεσίες
50	N77	Rental and leasing activities	Υπηρεσίες ενοικίασης και μίσθωσης
51	N78	Employment activities	Υπηρεσίες απασχόλησης
52	N79	Travel agency, tour operator reservation service and related activities	Υπηρεσίες ταξιδιωτικών πρακτορείων, και συναφείς δραστηριότητες

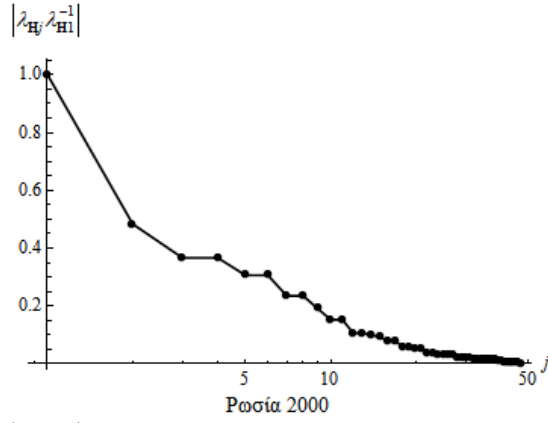
53	N80-N82	Security and investigation activities; services to buildings and landscape activities; office administrative, office support and other business support activities	Υπηρεσίες ασφάλειας και ερευνών- υπηρεσίες σε κτίρια και δραστηριότητες τοπίου- διοικητικές δραστηριότητες γραφείων, δραστηριότητες υποστήριξης γραφείων και άλλες δραστηριότητες υποστήριξης επιχειρήσεων
54	O84	Public administration and defence; compulsory social security	Υπηρεσίες δημόσιας διοίκησης και άμυνας, υπηρεσίες υποχρεωτικής κοινωνικής ασφάλισης
55	P85	Education	Υπηρεσίες εκπαίδευσης
56	Q86	Human health activities	Υπηρεσίες υγείας
57	Q87_Q88	Social work activities	Υπηρεσίες κοινωνικής εργασίας
58	R90-R92	Creative, arts and entertainment activities; libraries, archives, museums and other cultural activities; gambling and betting activities	Δημιουργικές, καλλιτεχνικές και ψυχαγωγικές υπηρεσίες- βιβλιοθήκες, αρχεία, μουσεία και άλλες πολιτιστικές υπηρεσίες- τυχερά παιχνίδια και στοιχήματα
59	R93	Sports activities and amusement and recreation activities	Αθλητικές υπηρεσίες και υπηρεσίας ψυχαγωγίας και αναψυχής
60	S94	Activities of membership organisations	Υπηρεσίες συνδρομών σε οργανισμούς
61	S95	Repair of computers and personal and household goods	Υπηρεσίες επισκευής ηλεκτρονικών υπολογιστών και προσωπικών και οικιακών ειδών
62	S96	Other personal service activities	Άλλες προσωπικές υπηρεσίες
63	T	Activities of households as employers; undifferentiated goods- and services-producing activities of households for own use	Υπηρεσίες νοικοκυριών ως εργοδοτών, μη διακριτά αγαθά και υπηρεσίες που παράγονται από νοικοκυριά για ιδία χρήση
64	U	Activities of extra-territorial organisations and bodies	Υπηρεσίες εξωεδαφικών οργανώσεων και φορέων

**Παράρτημα V. Διαγράμματα των κανονικοποιημένων ιδιοτιμών της μήτρας των
καθέτως ολοκληρωμένων τεχνολογικών συντελεστών στην περίπτωση της συμπα-
ραγωγής**

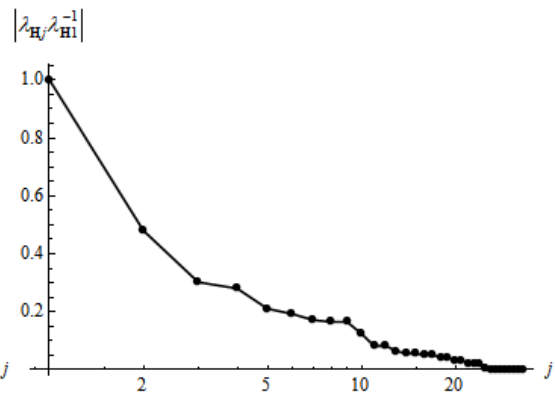
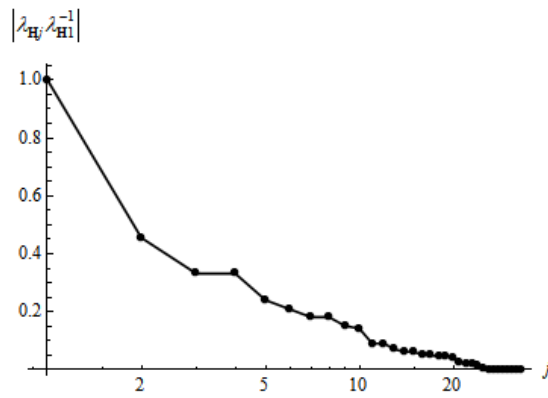
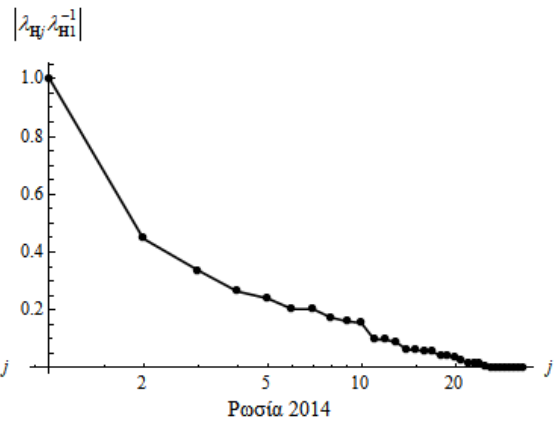
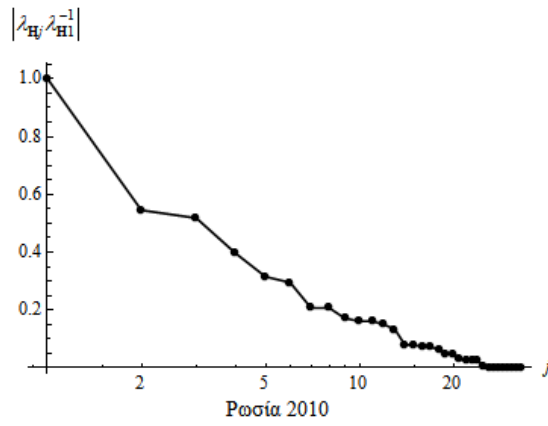
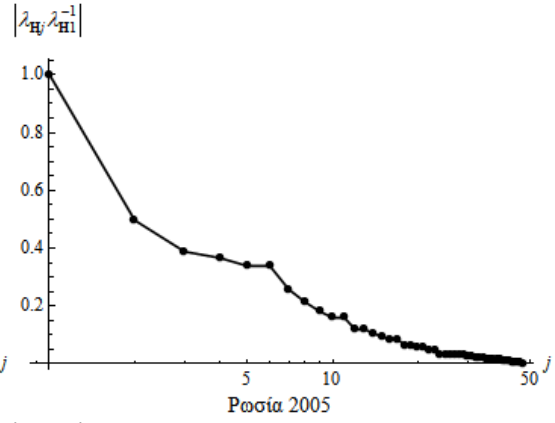




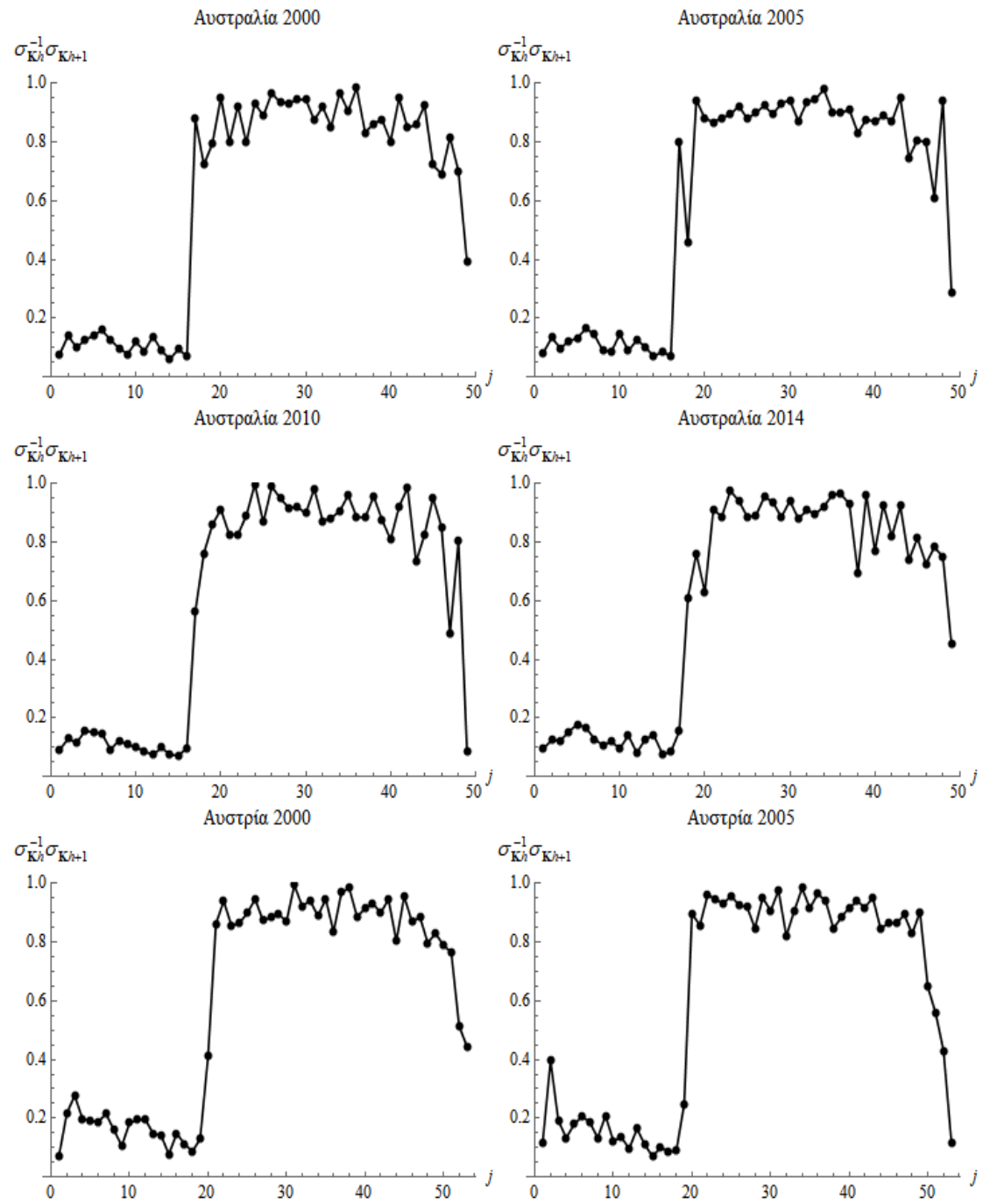
Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας 2010

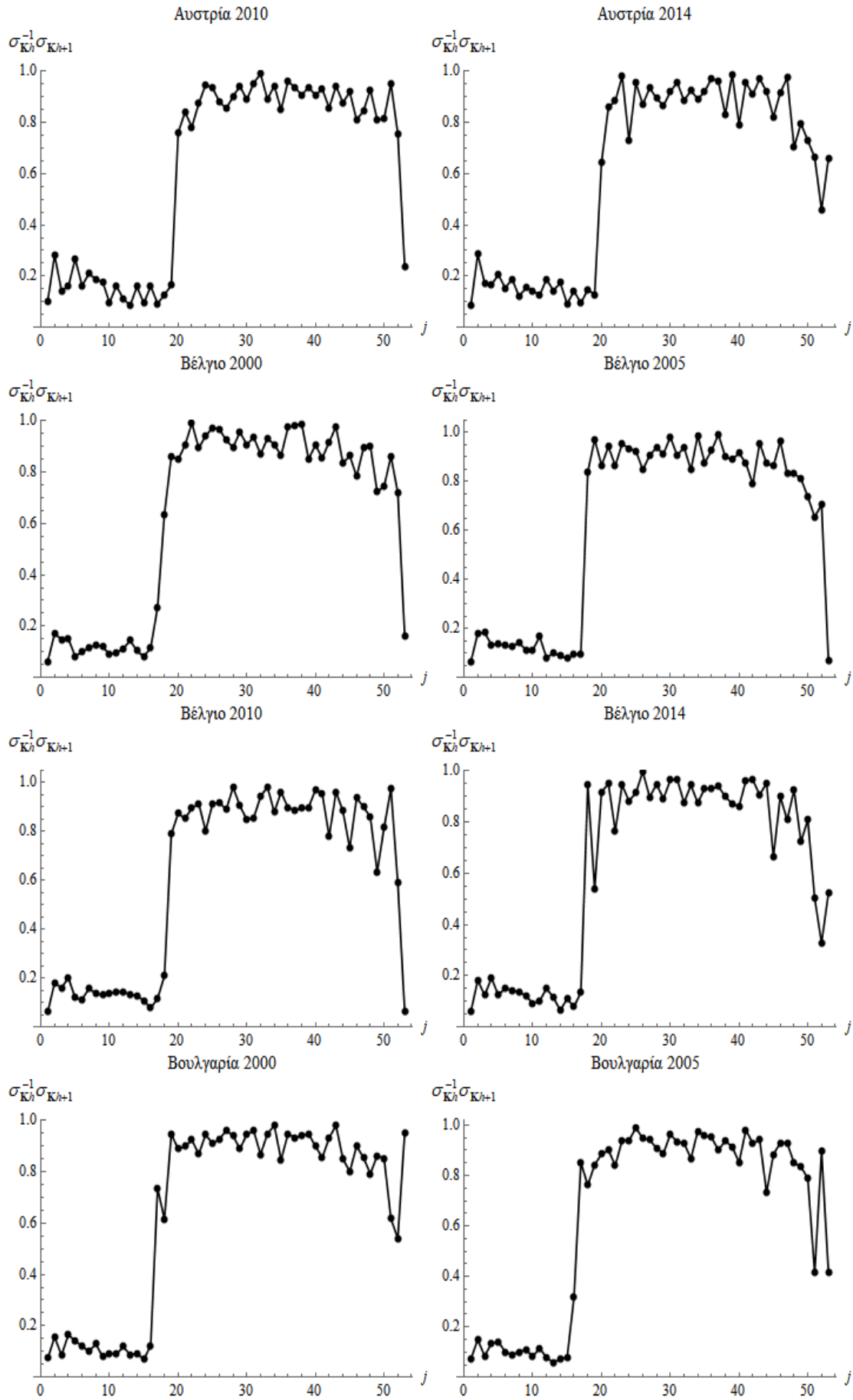


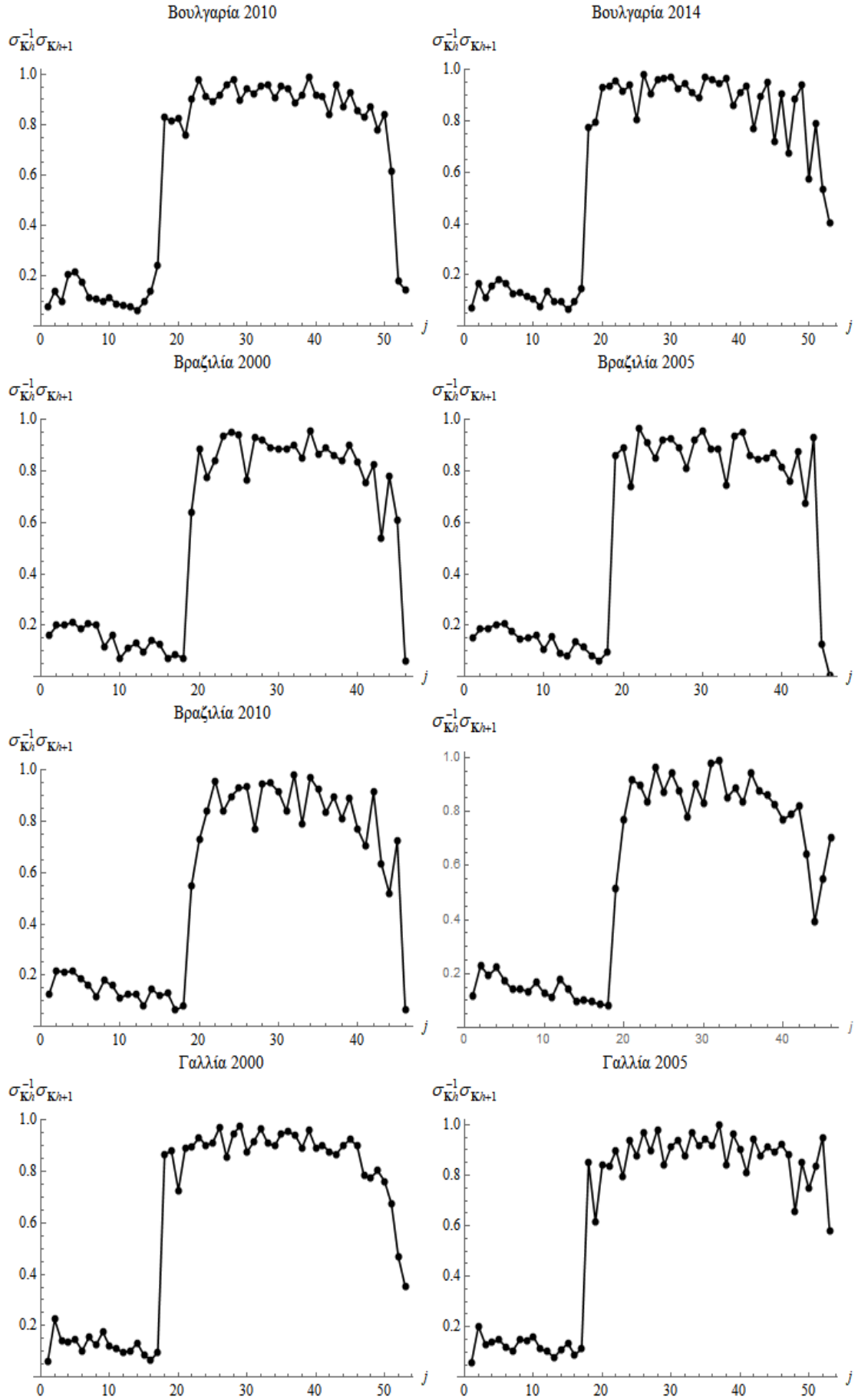
Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας 2014

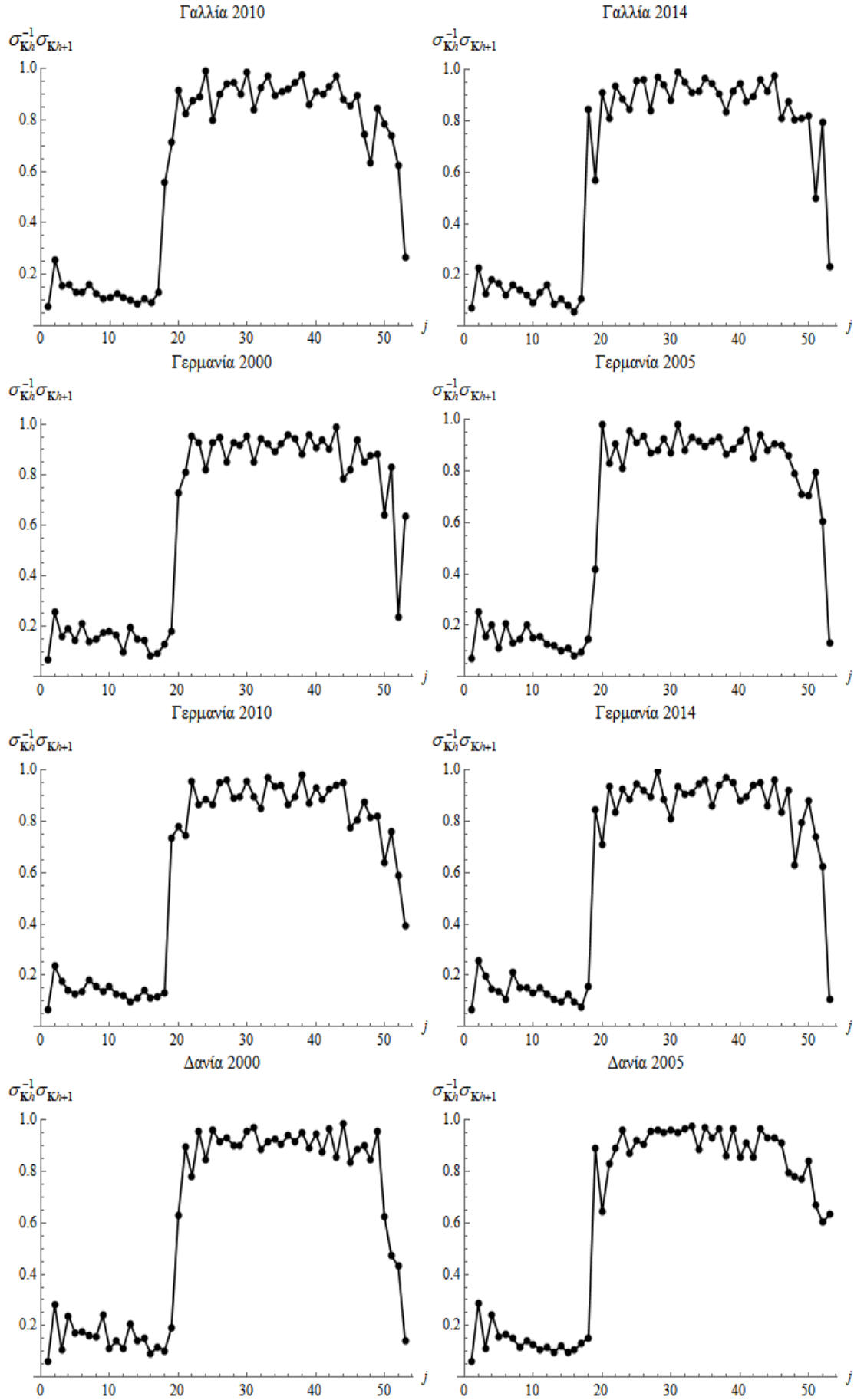


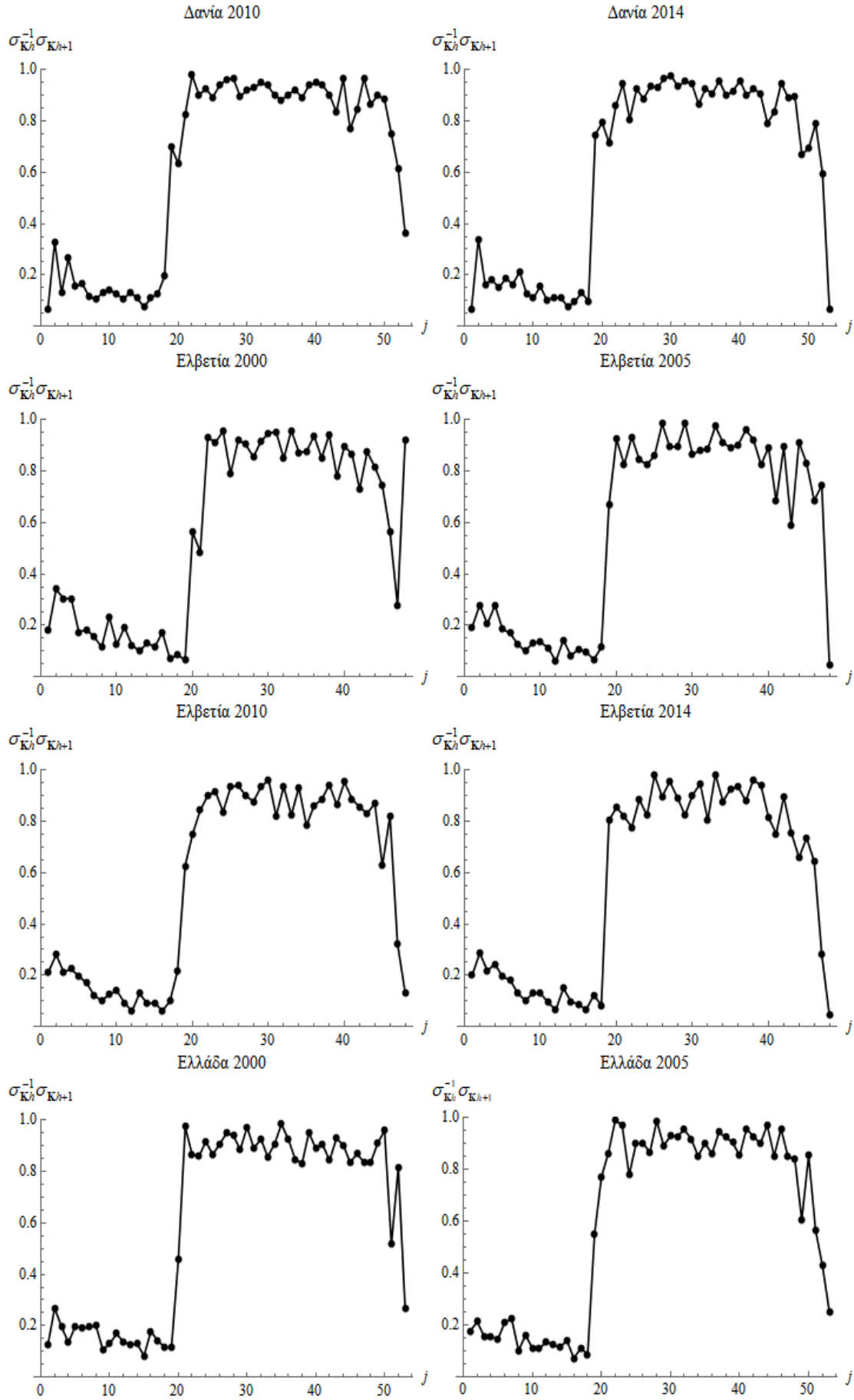
Παράρτημα VI. Διαγράμματα των λόγων των ιδιοζουσών τιμών της μήτρας ελεγχιμότητας στην περίπτωση της απλής παραγωγής

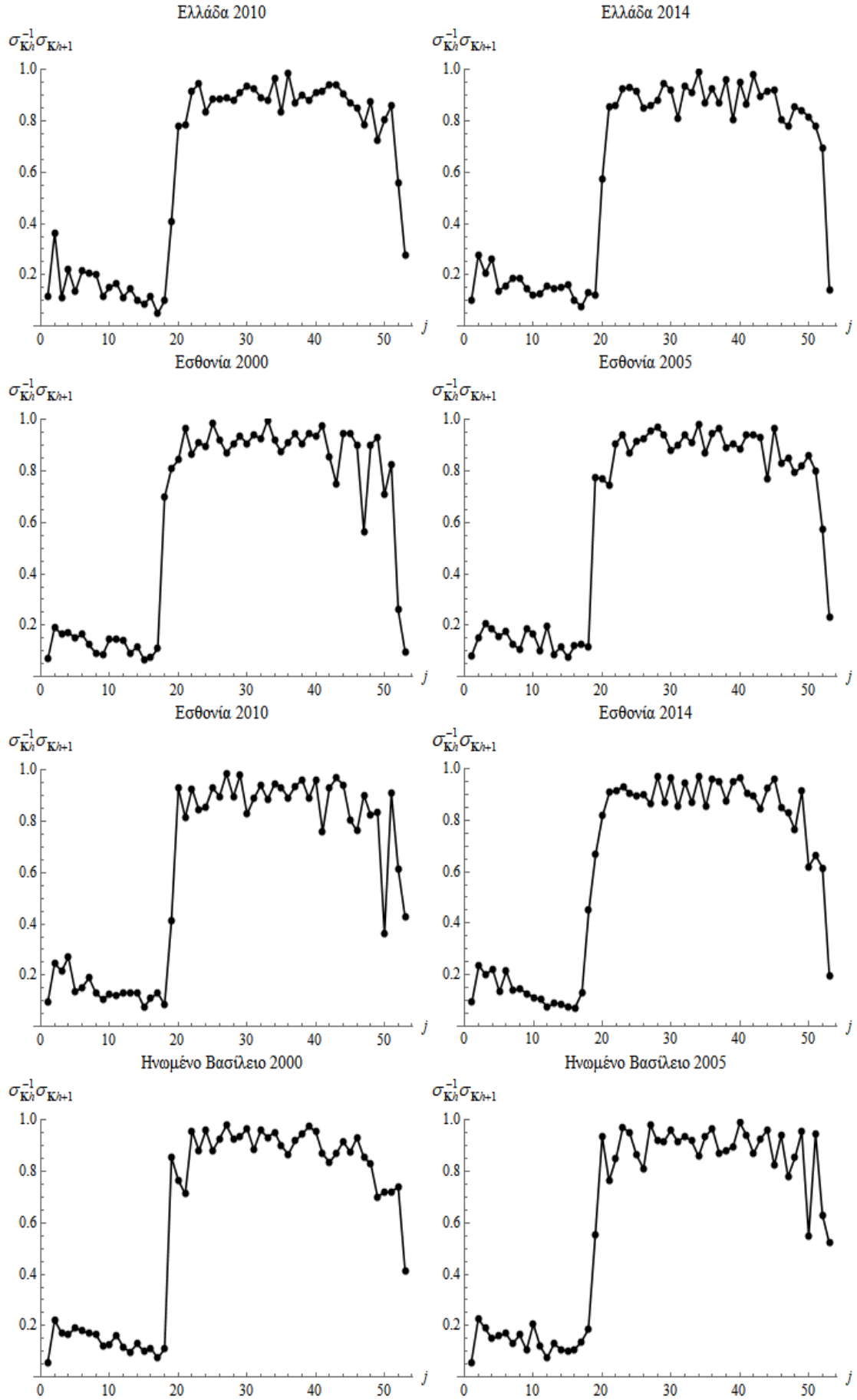


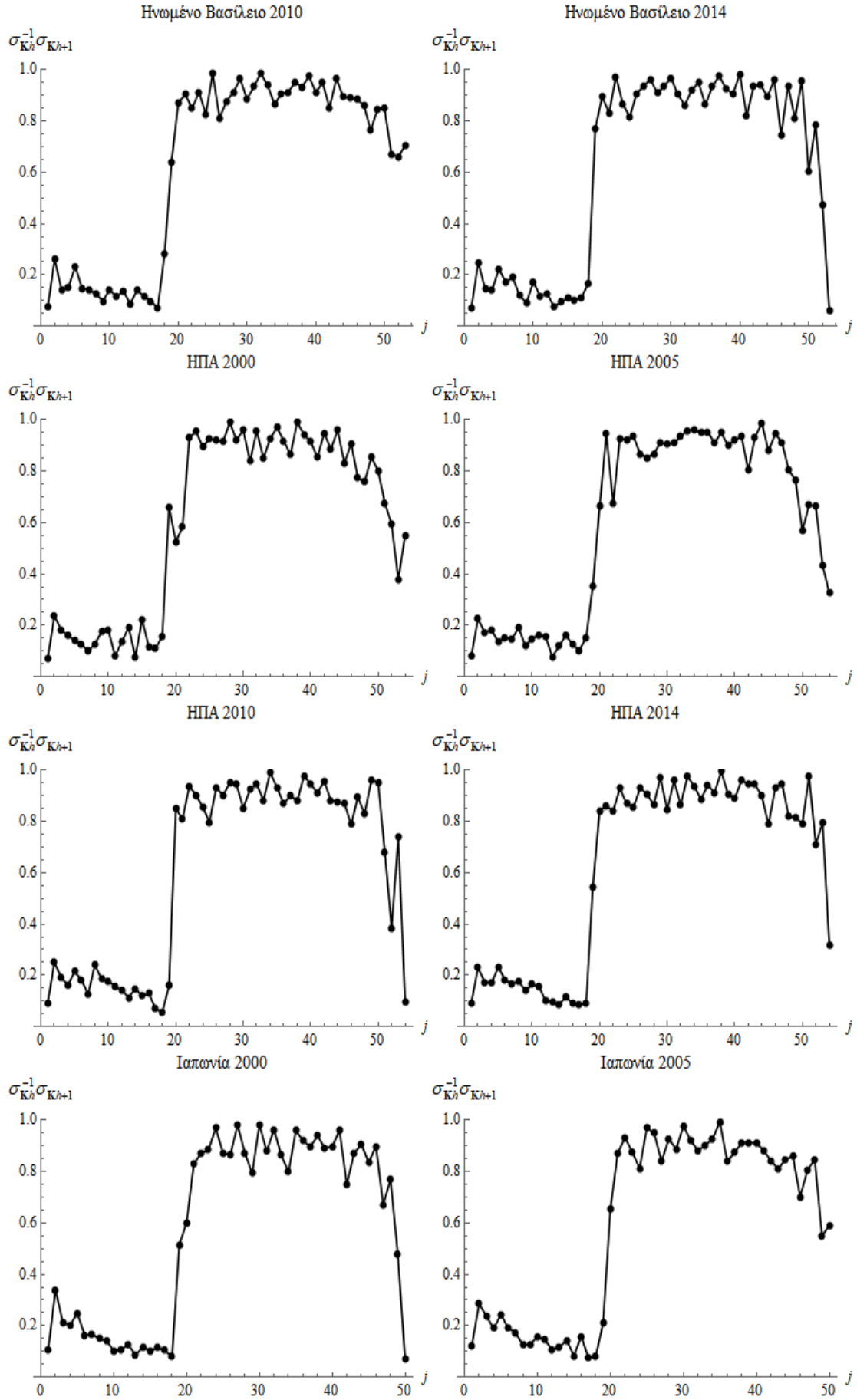


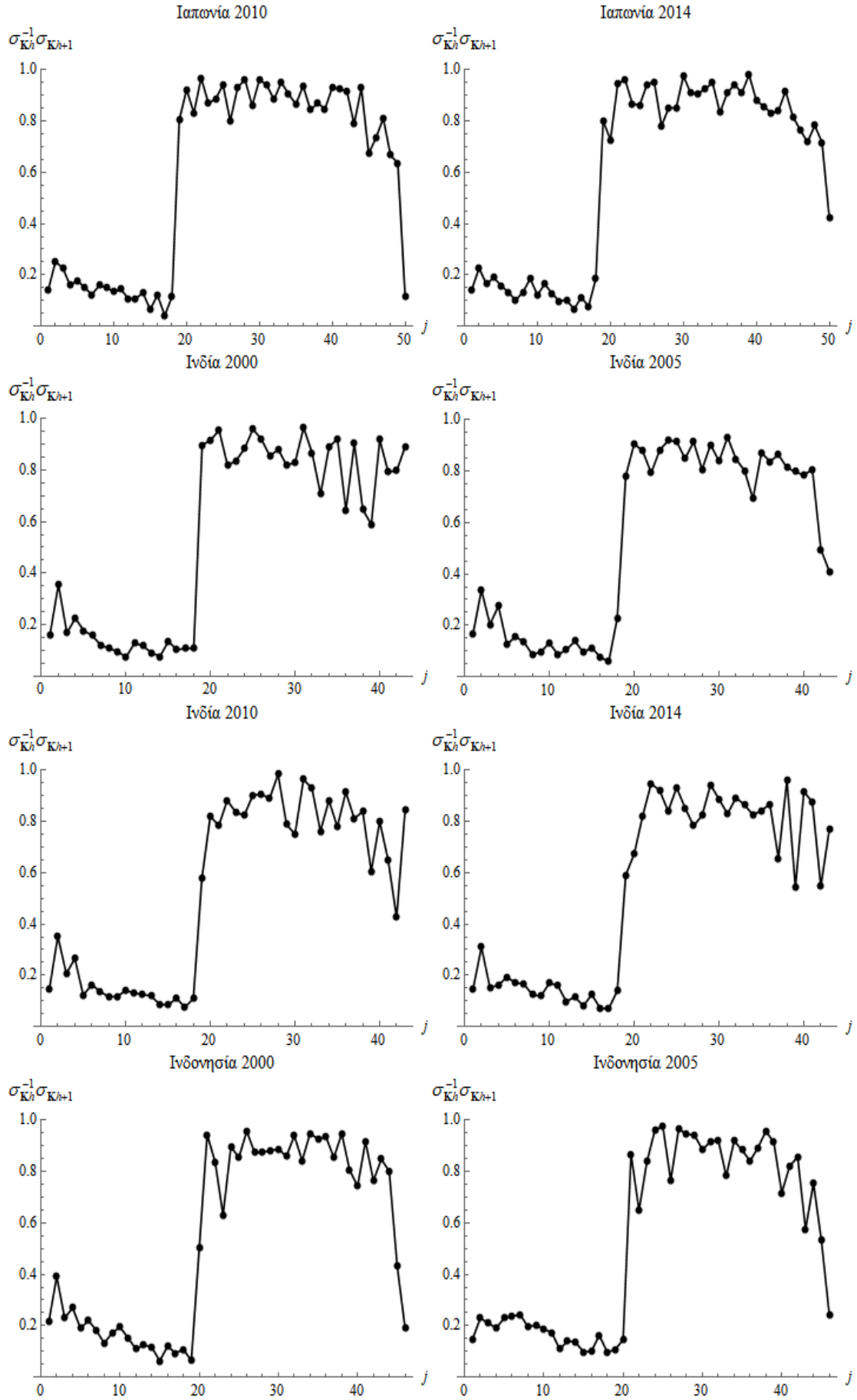


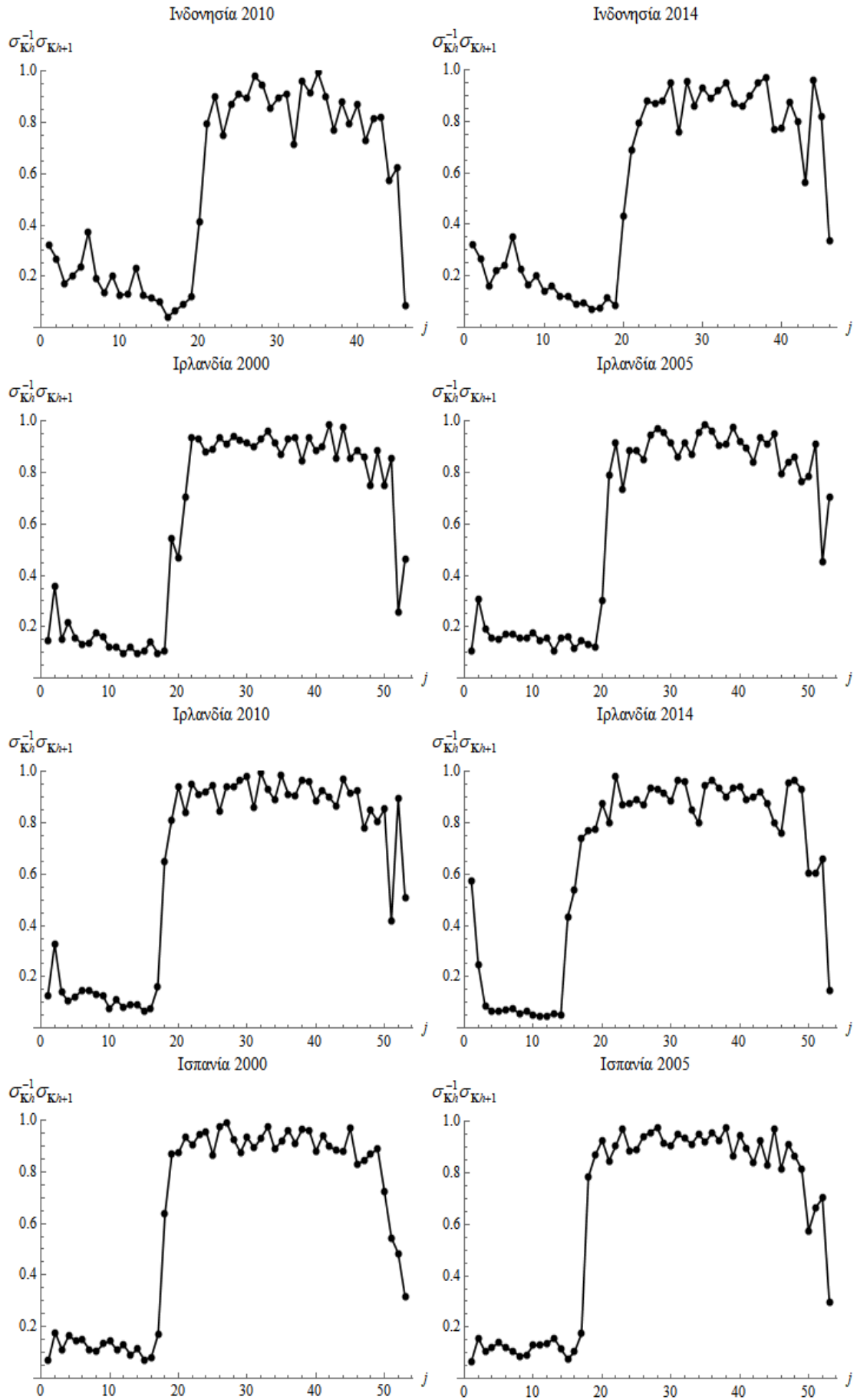


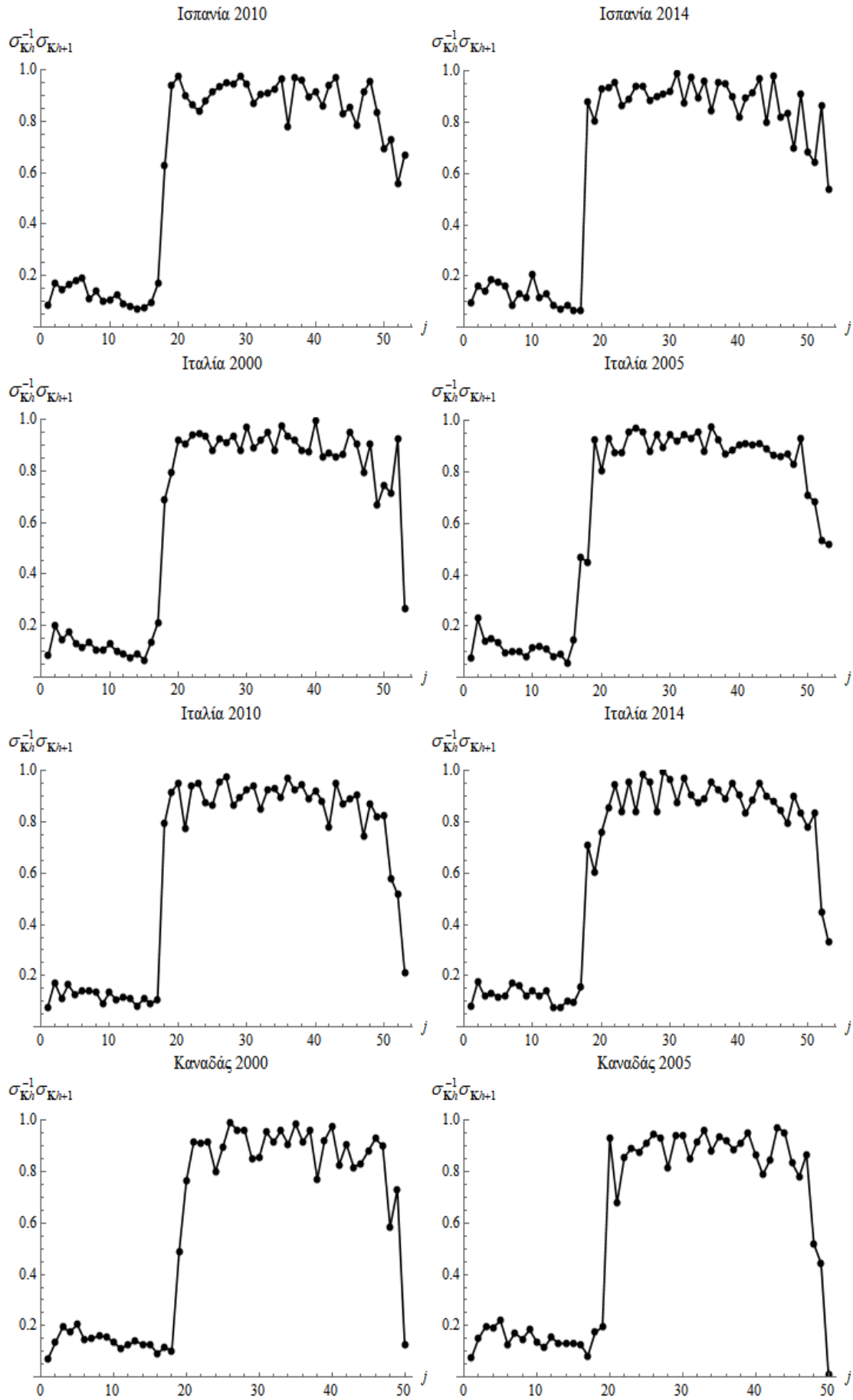


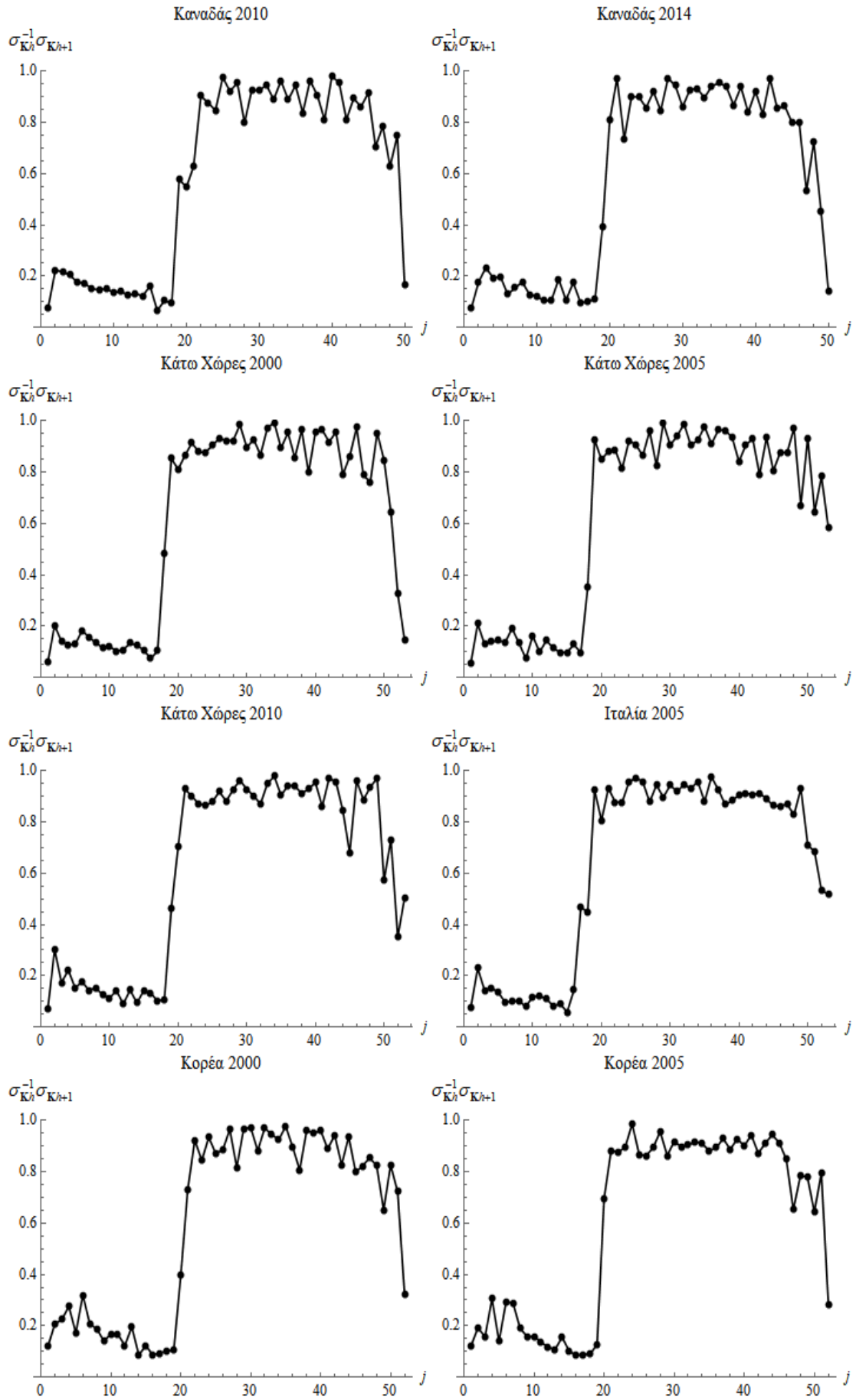


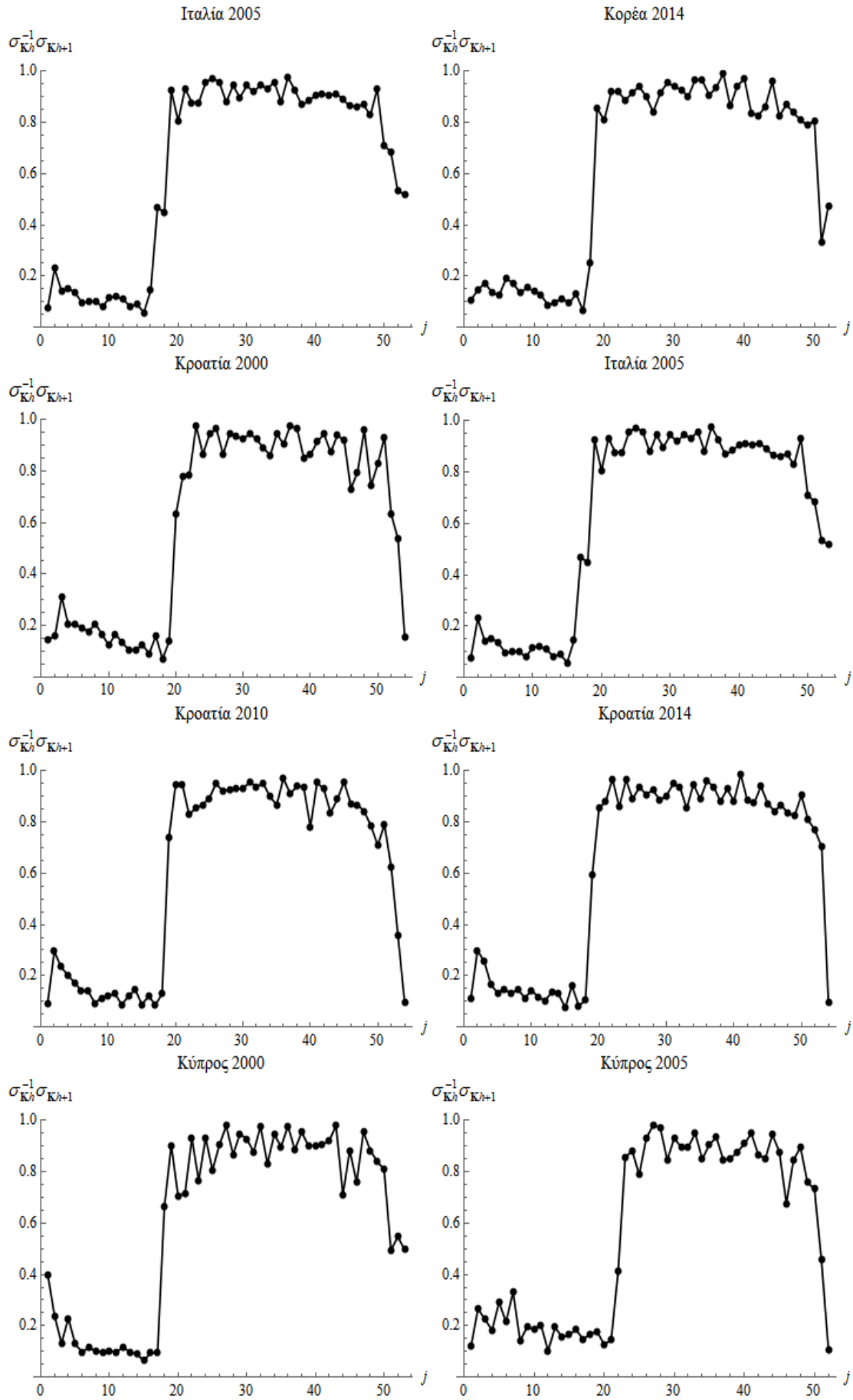


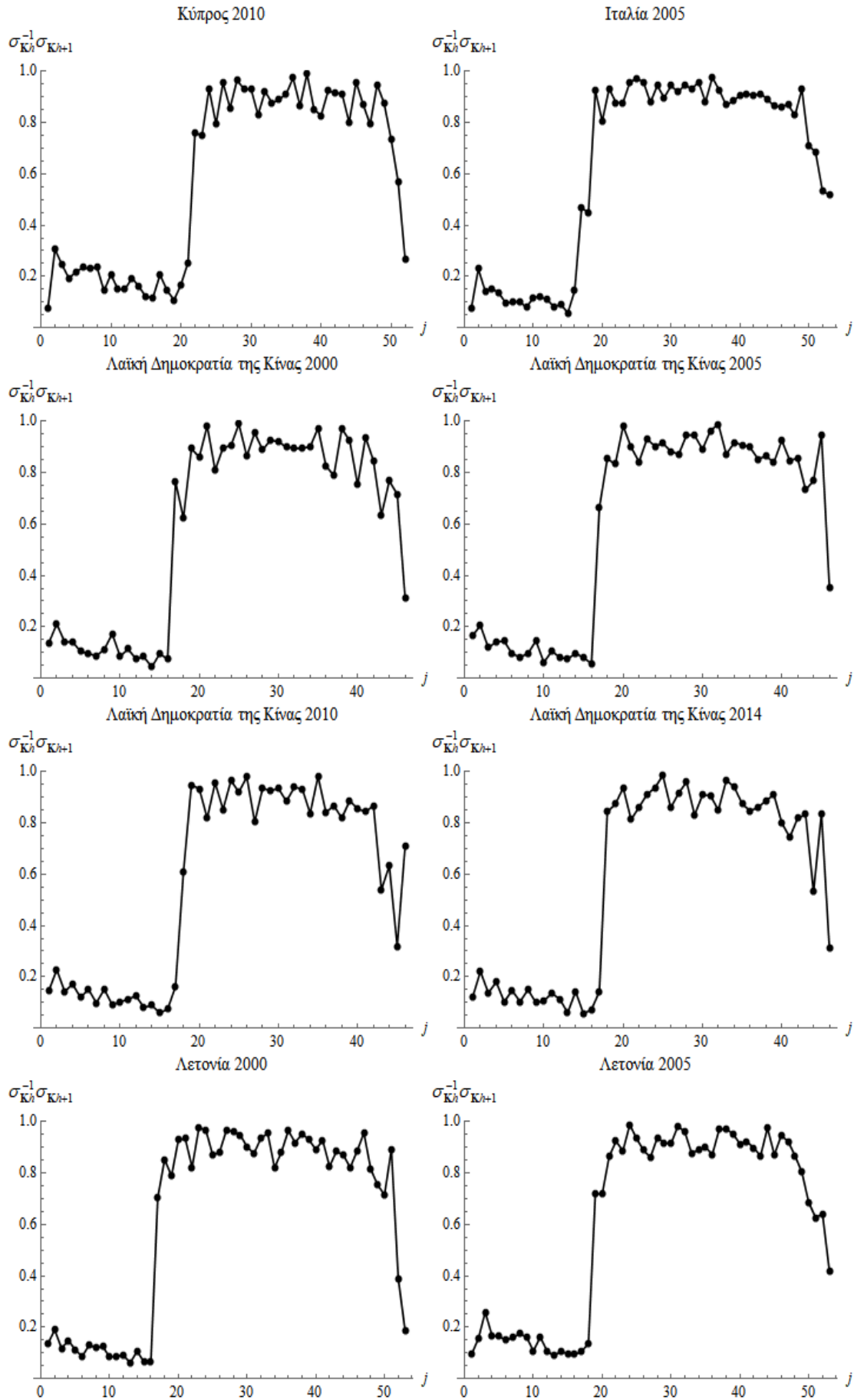


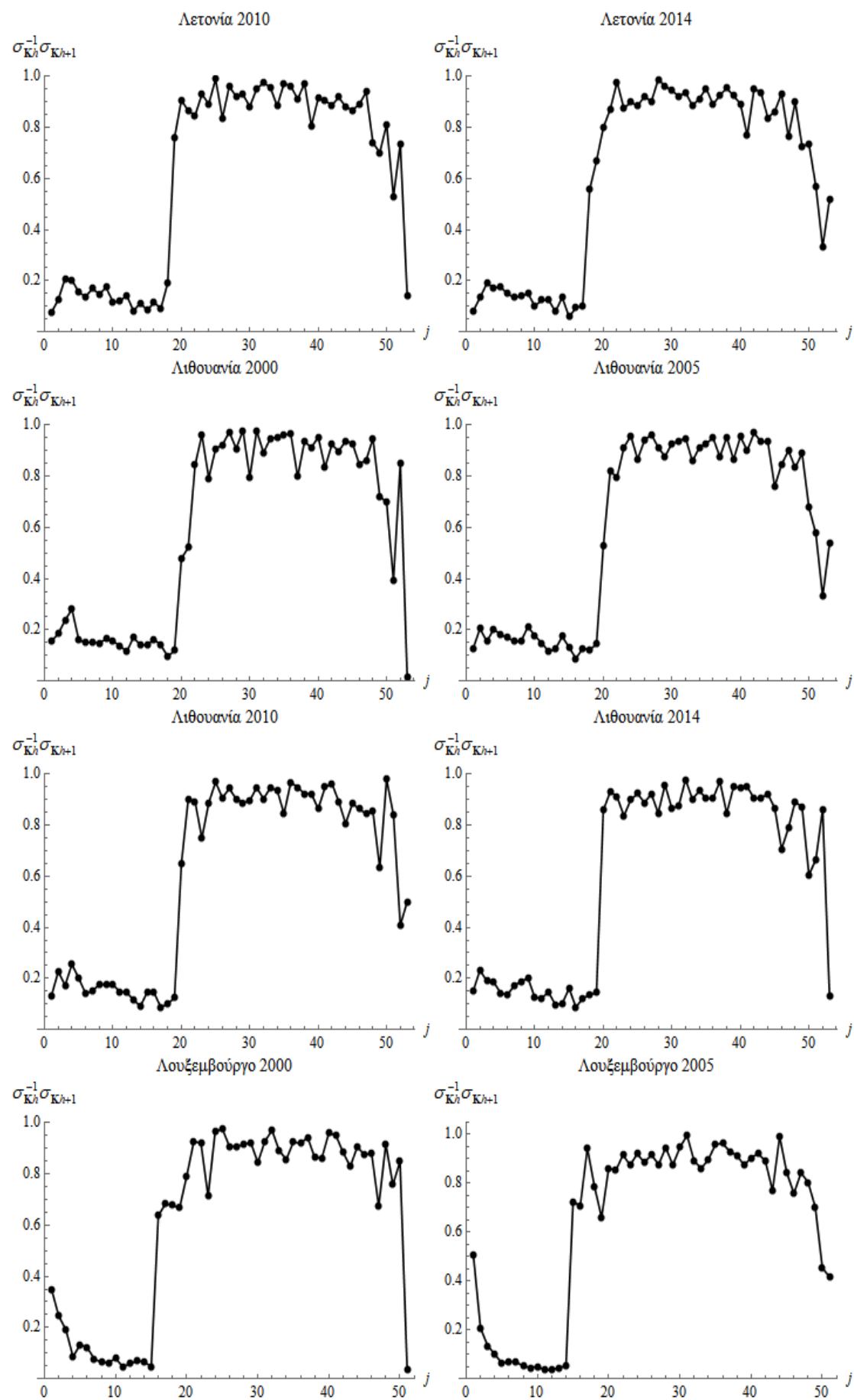


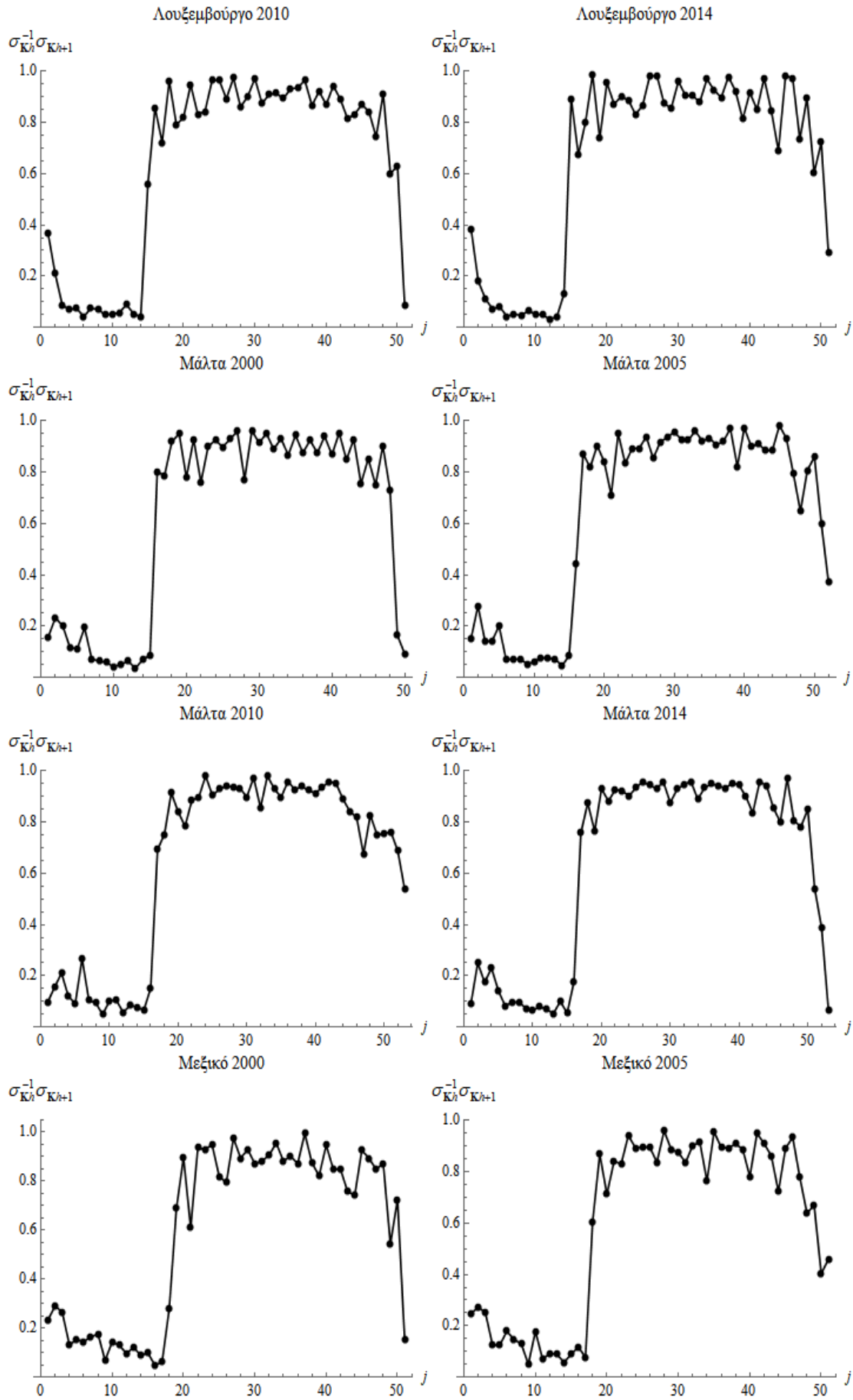


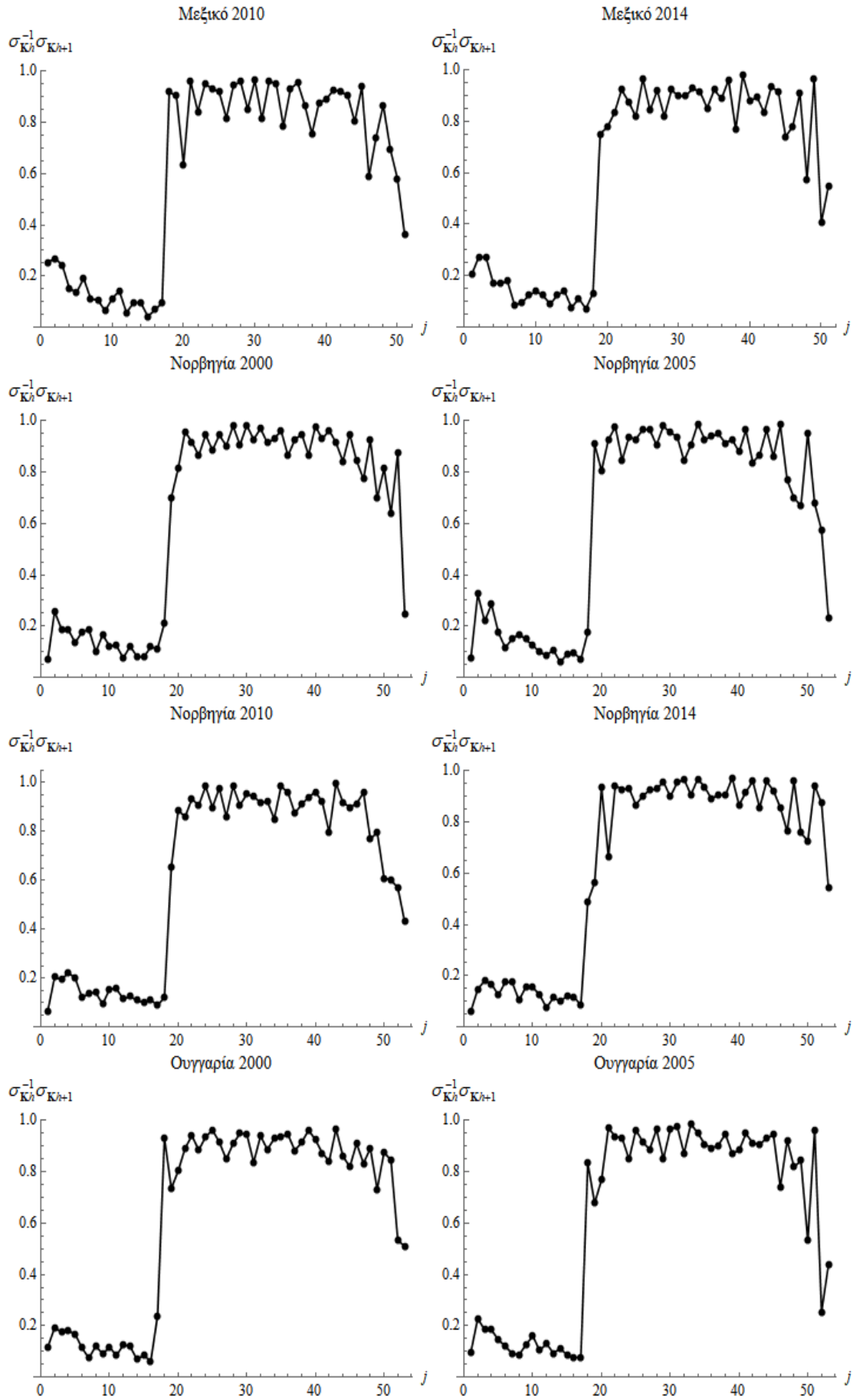


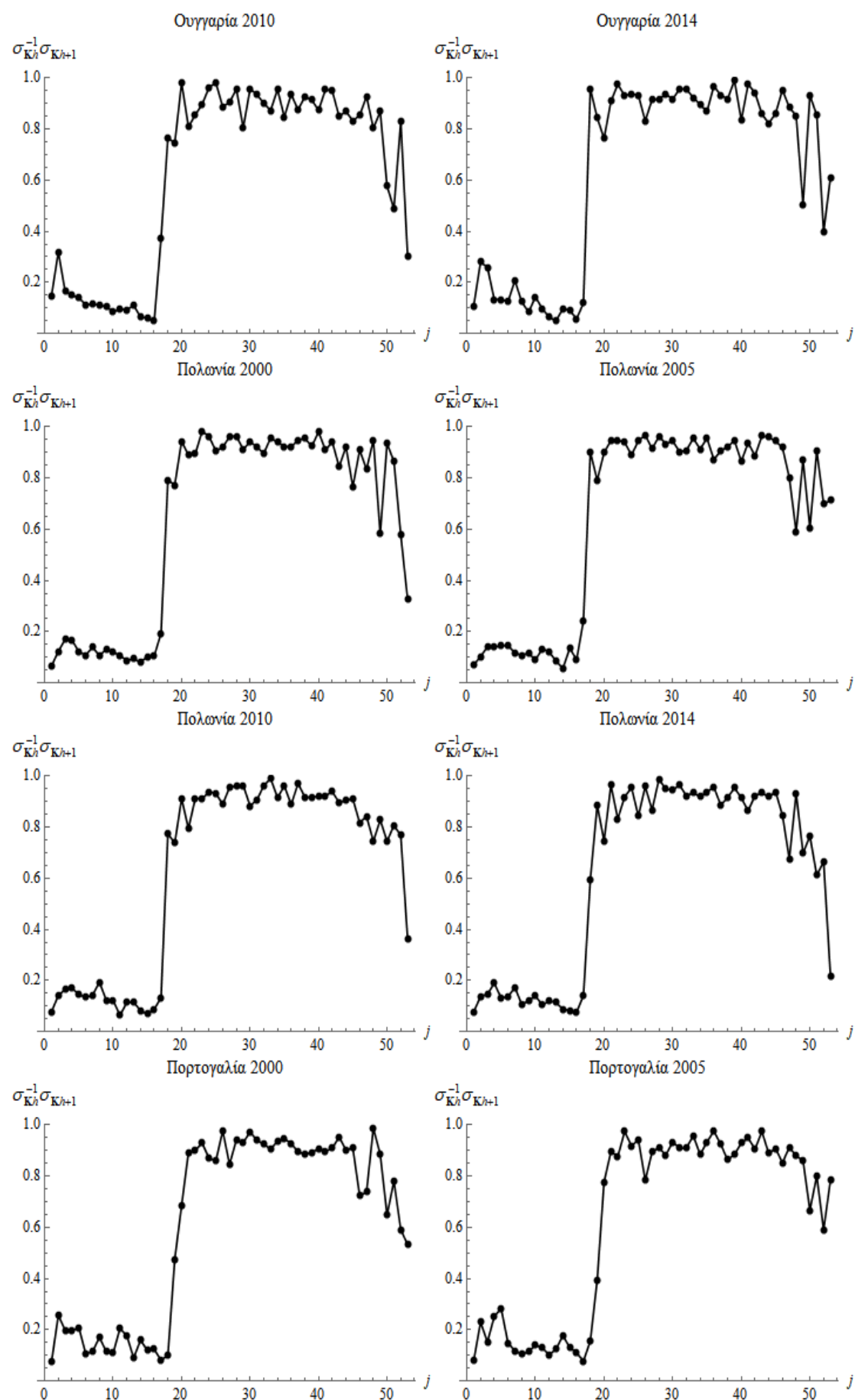


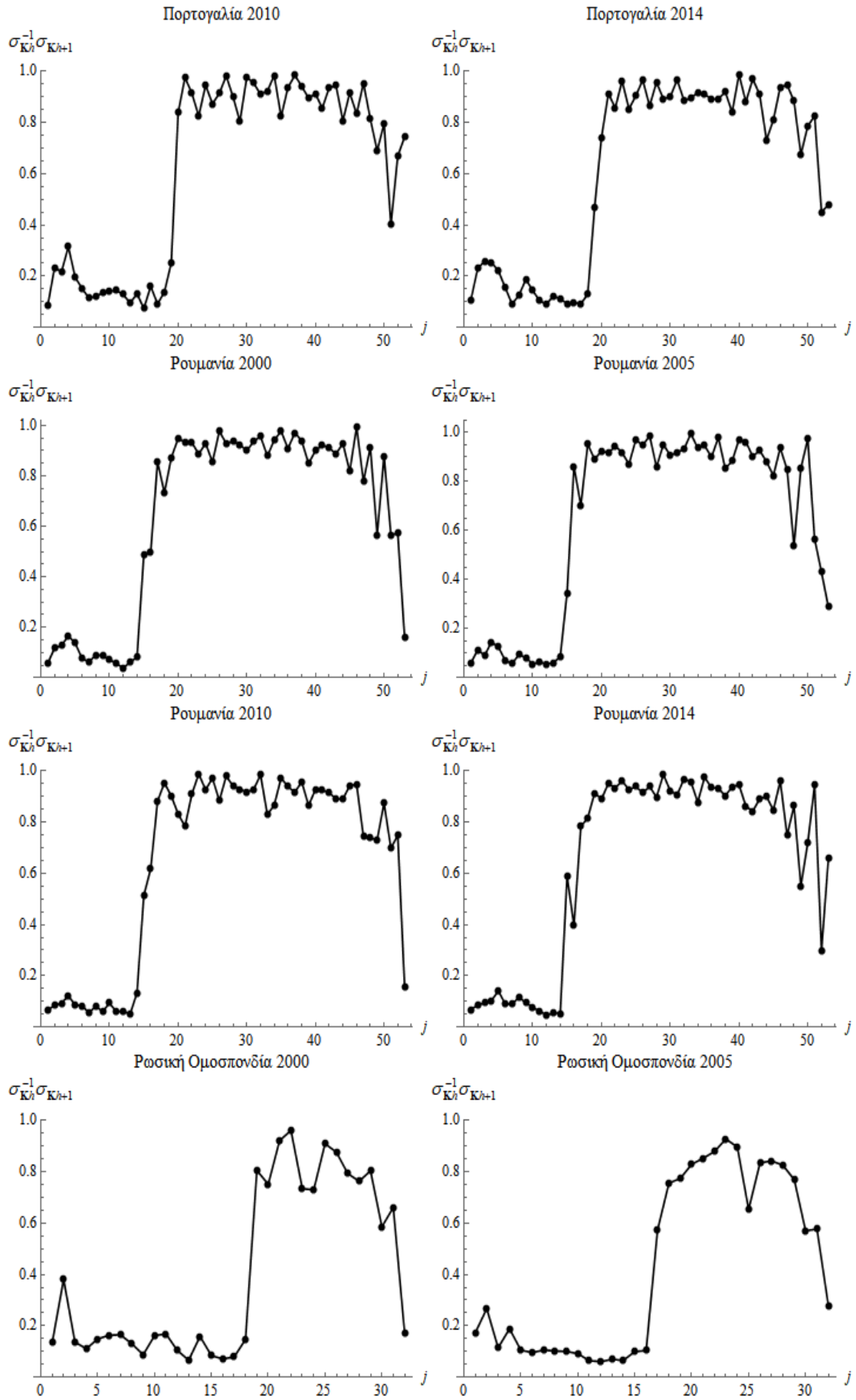


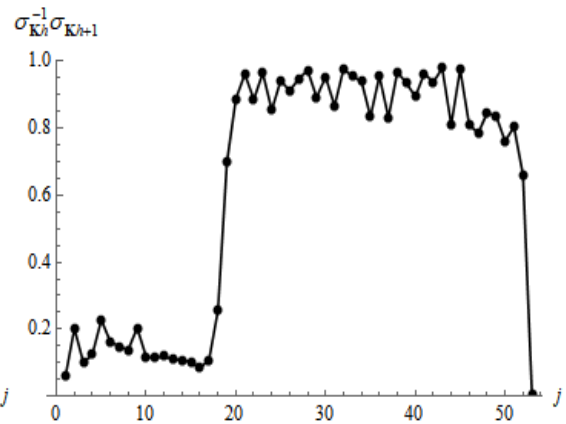
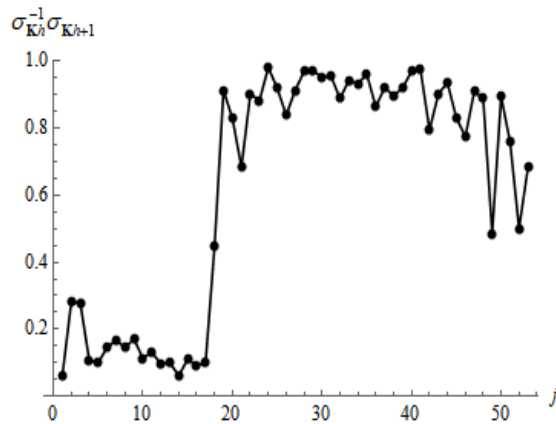
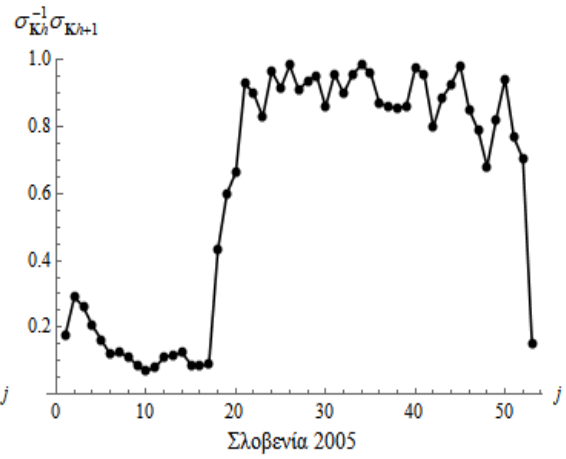
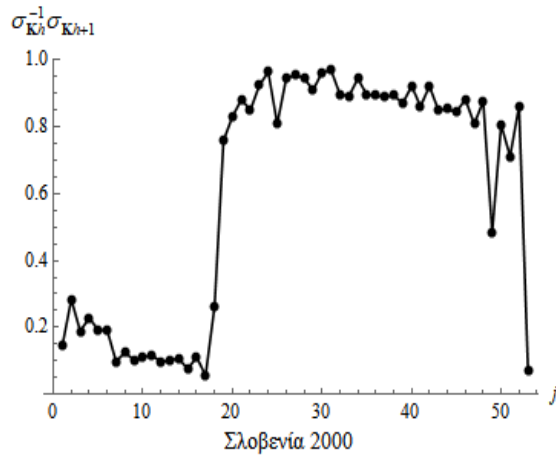
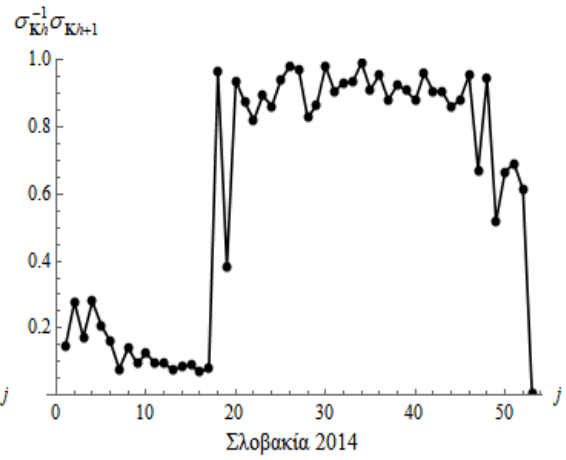
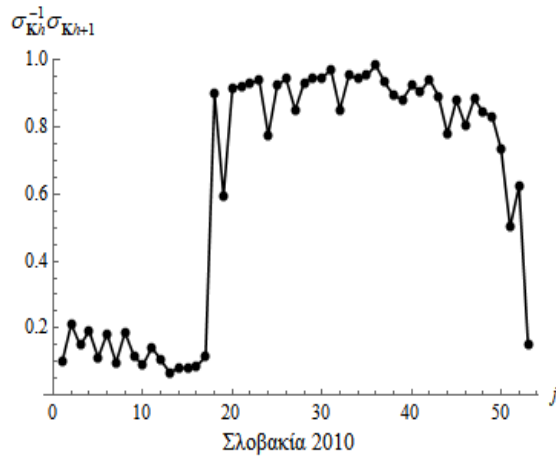
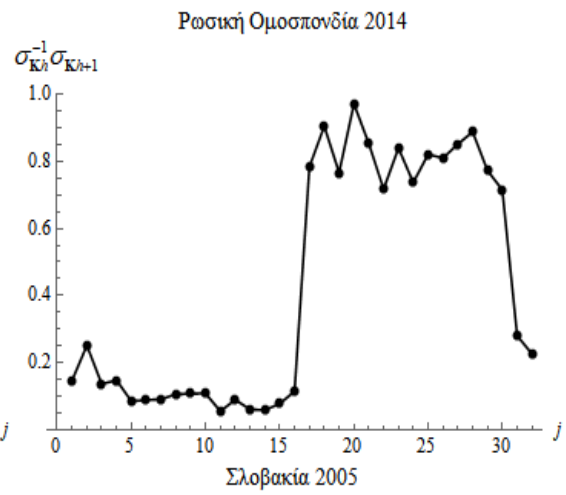
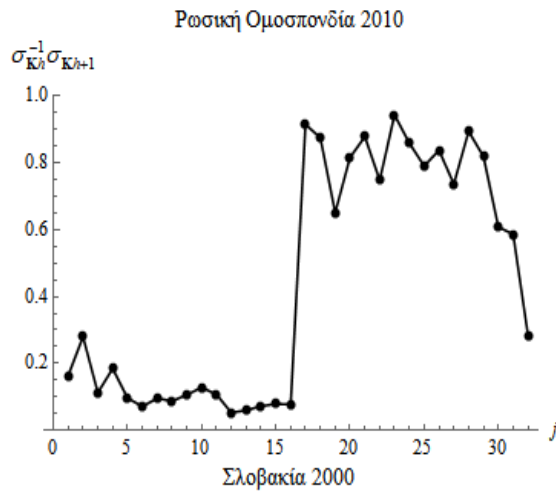


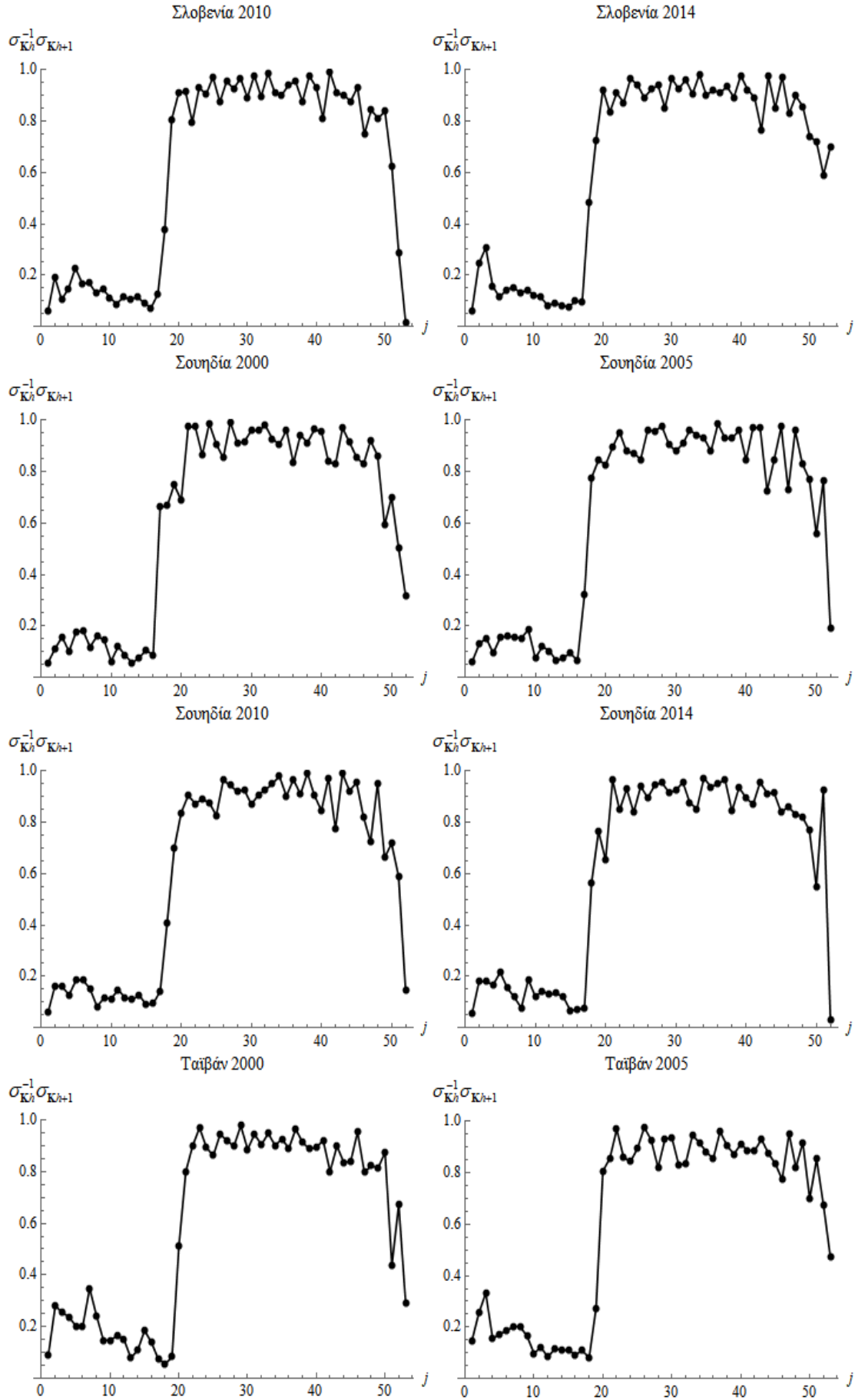


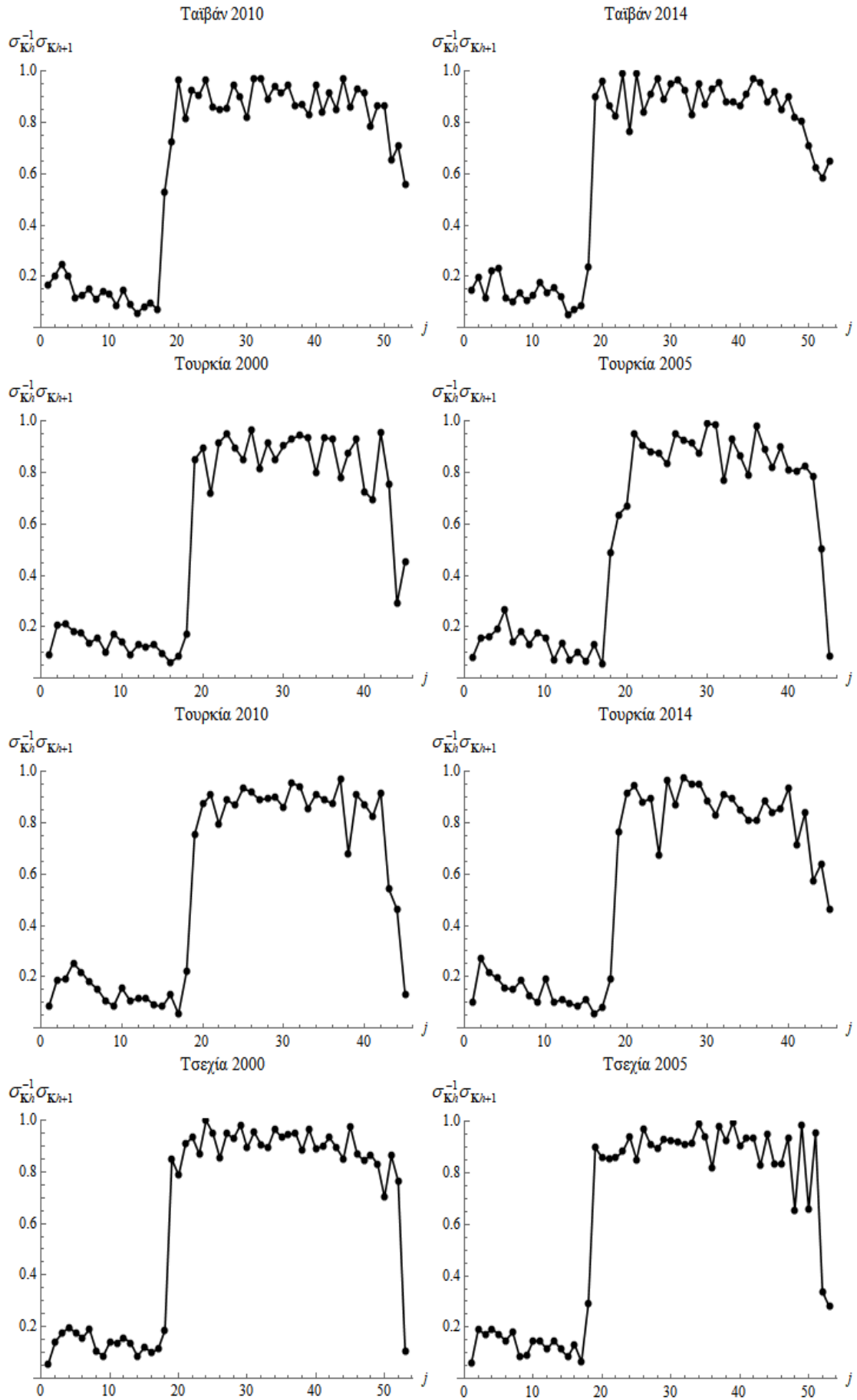


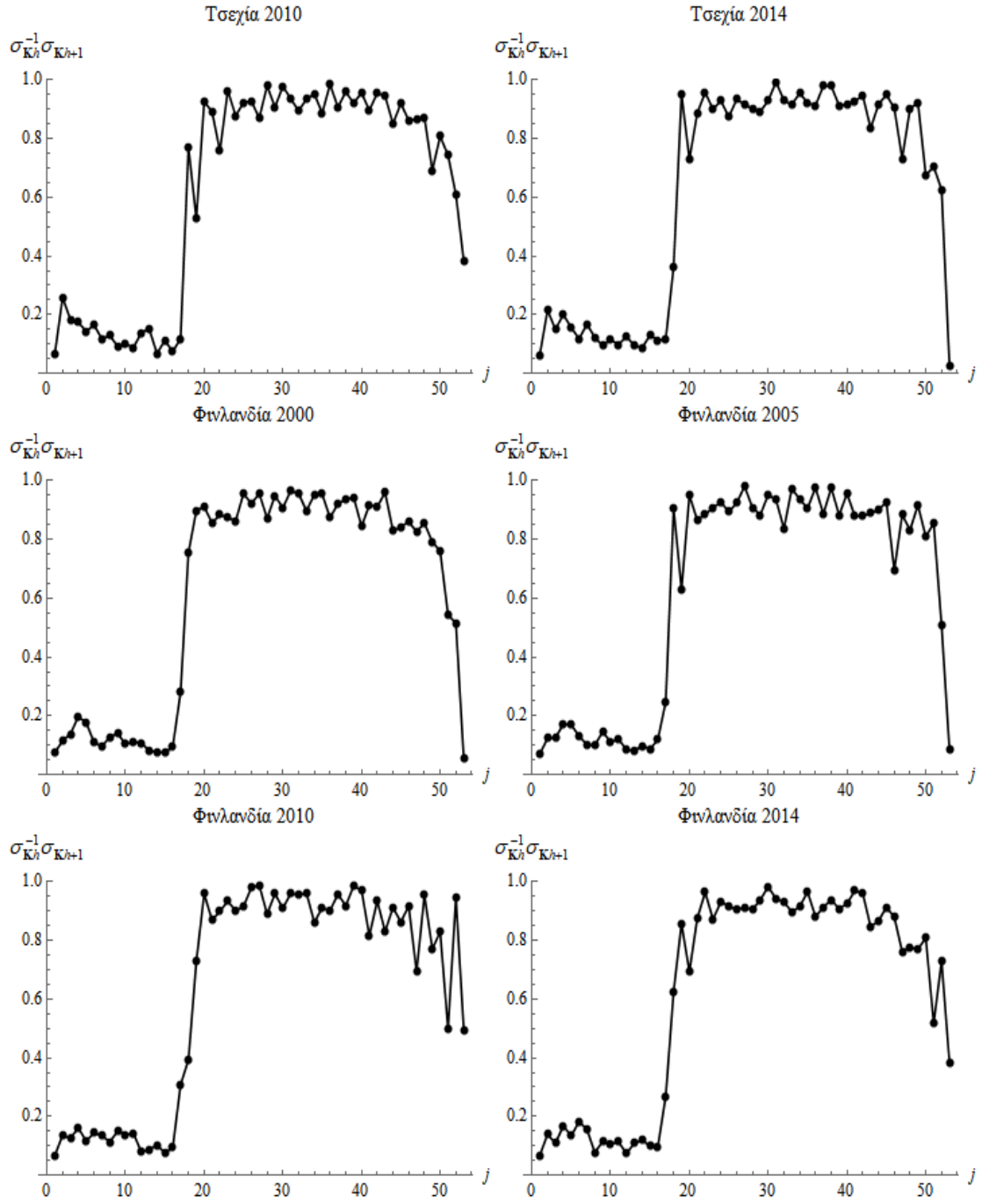




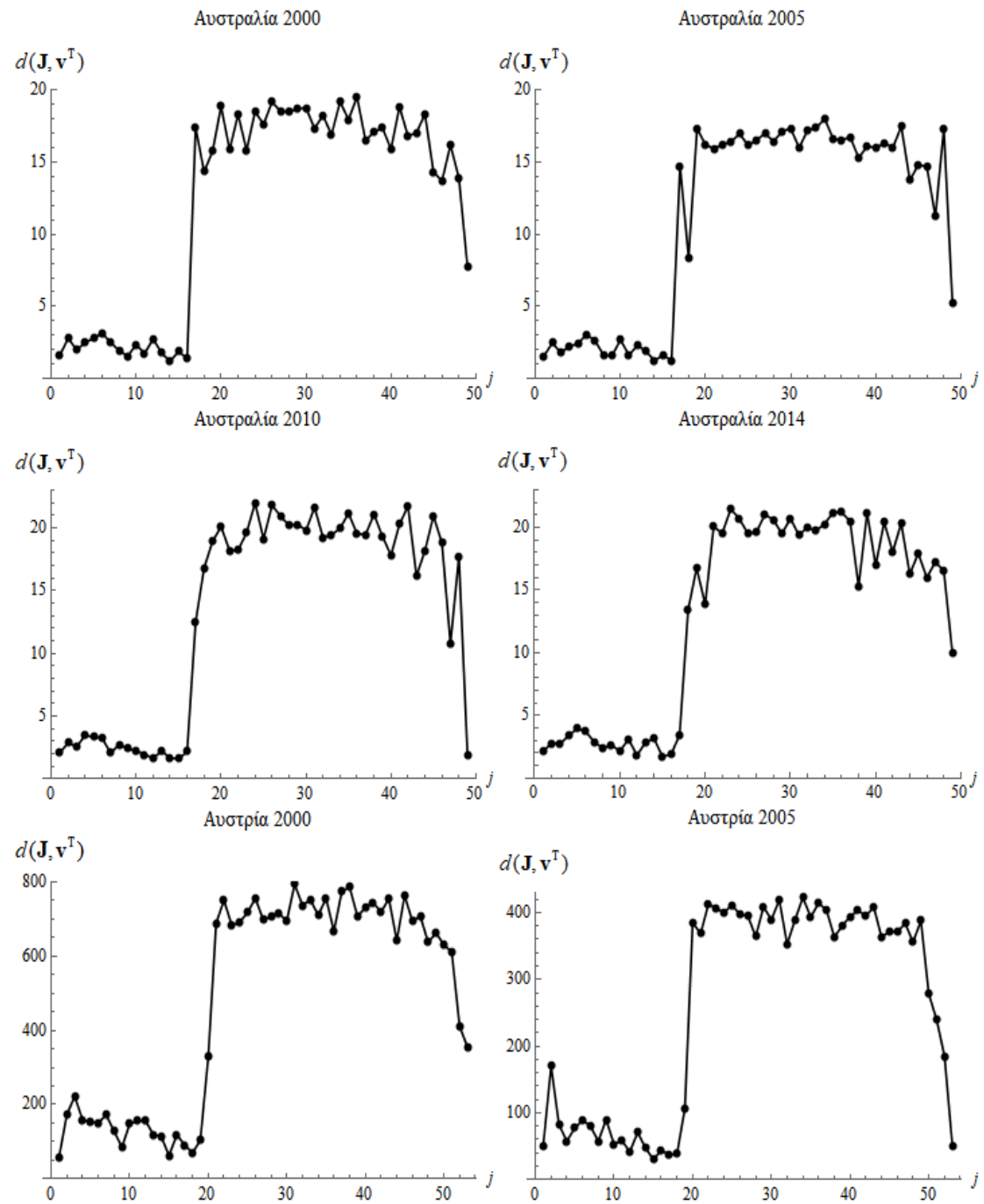




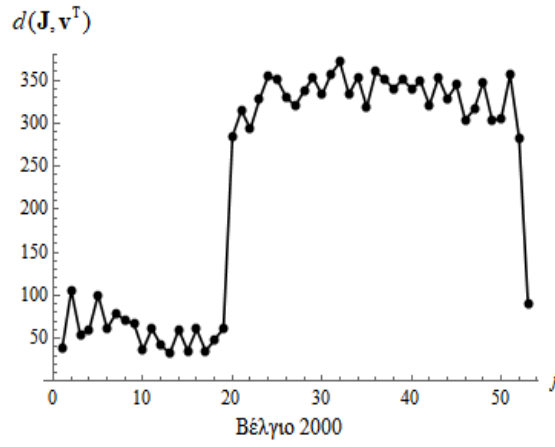




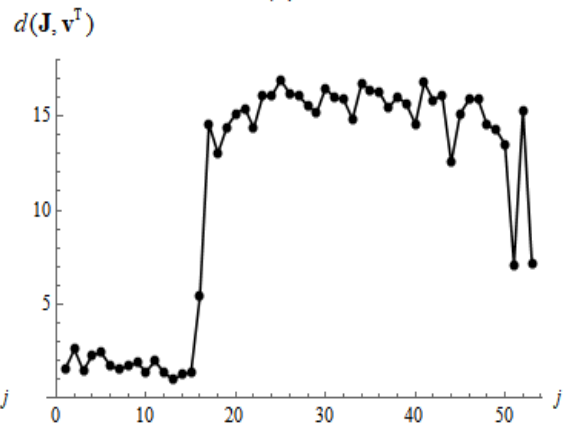
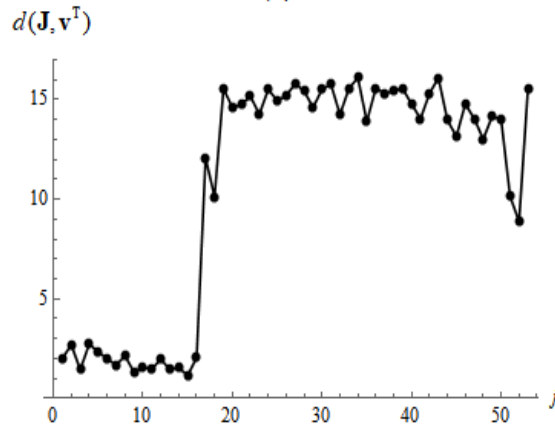
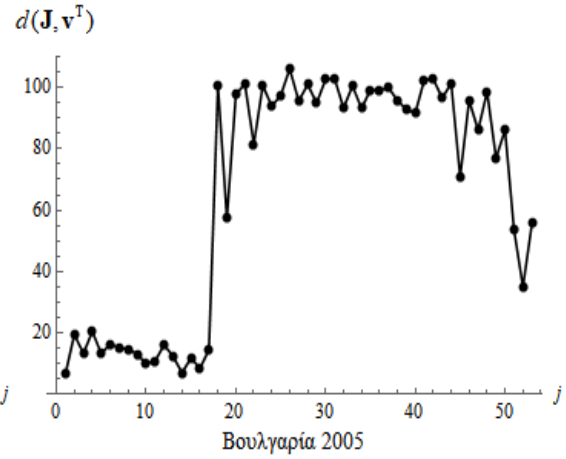
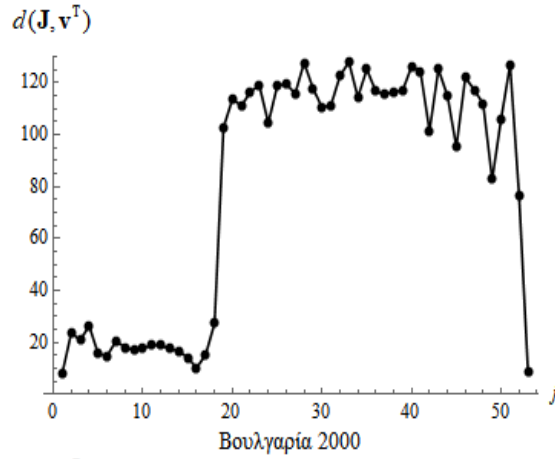
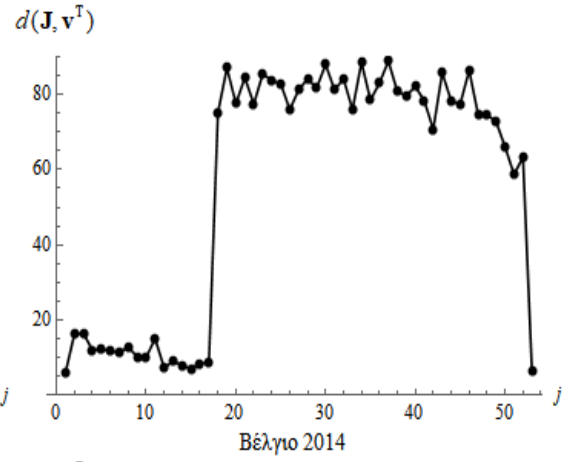
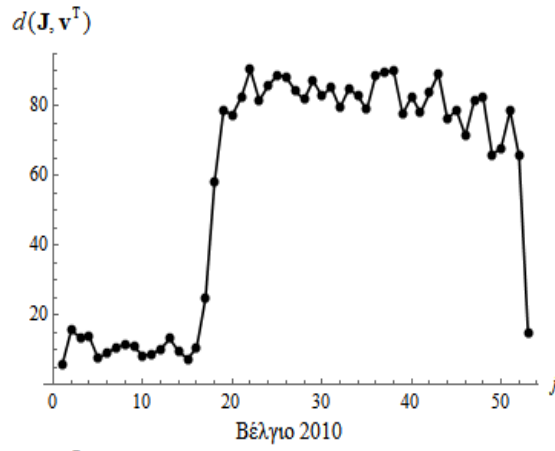
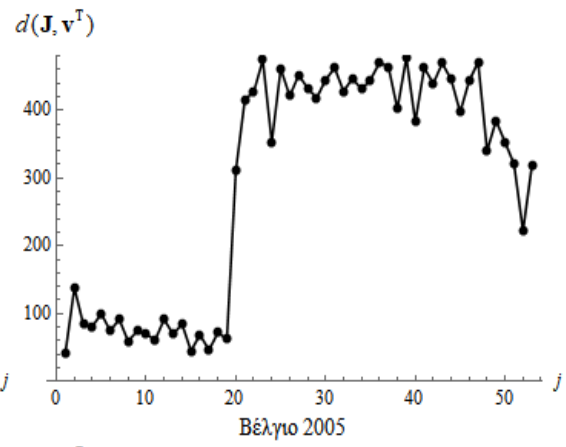
Παράρτημα VII. Διαγράμματα αποστάσεων από το πλησιέστερο μη-ελέγξιμο σύστημα στην περίπτωση της απλής παραγωγής

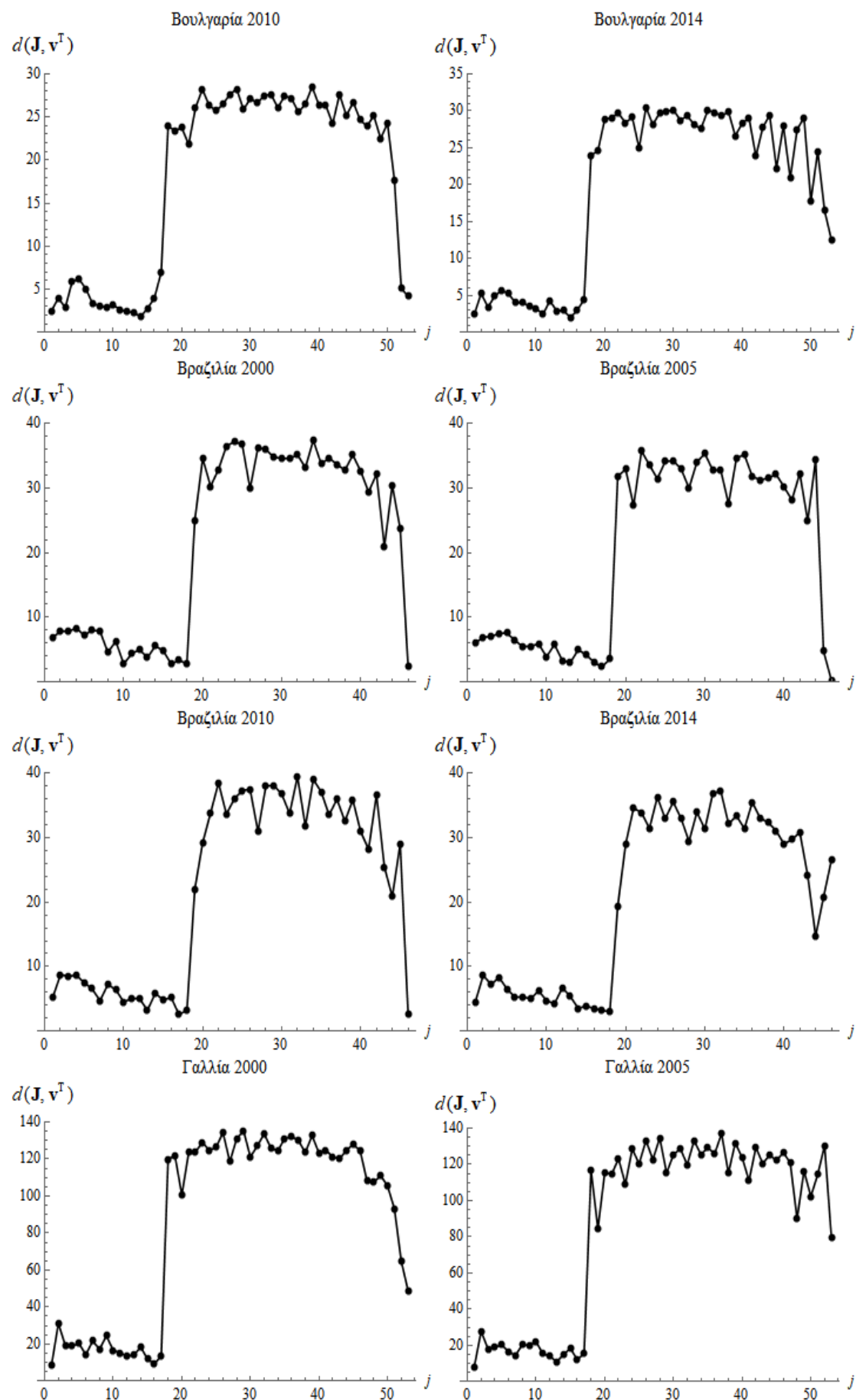


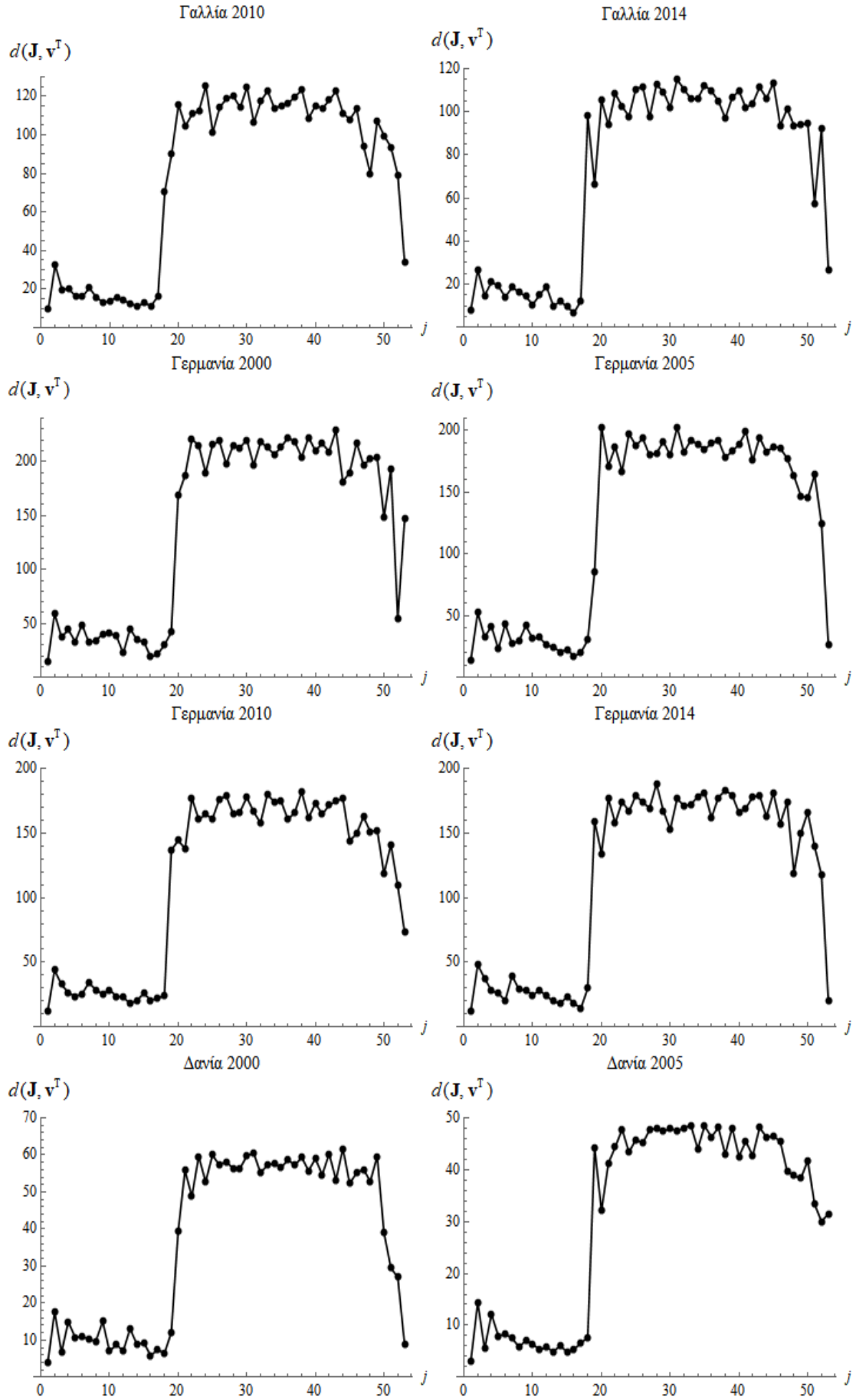
Αυστρία 2010

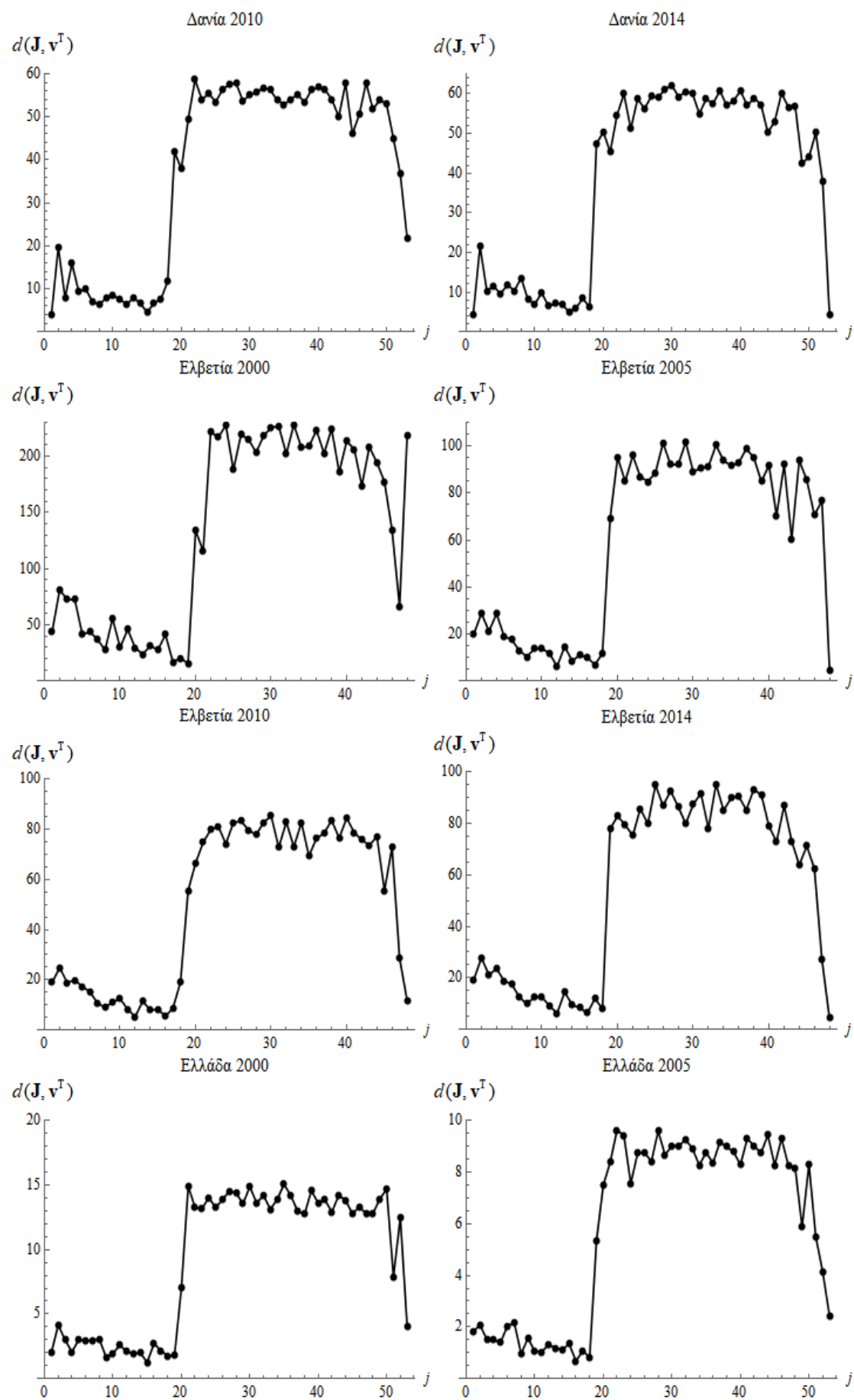


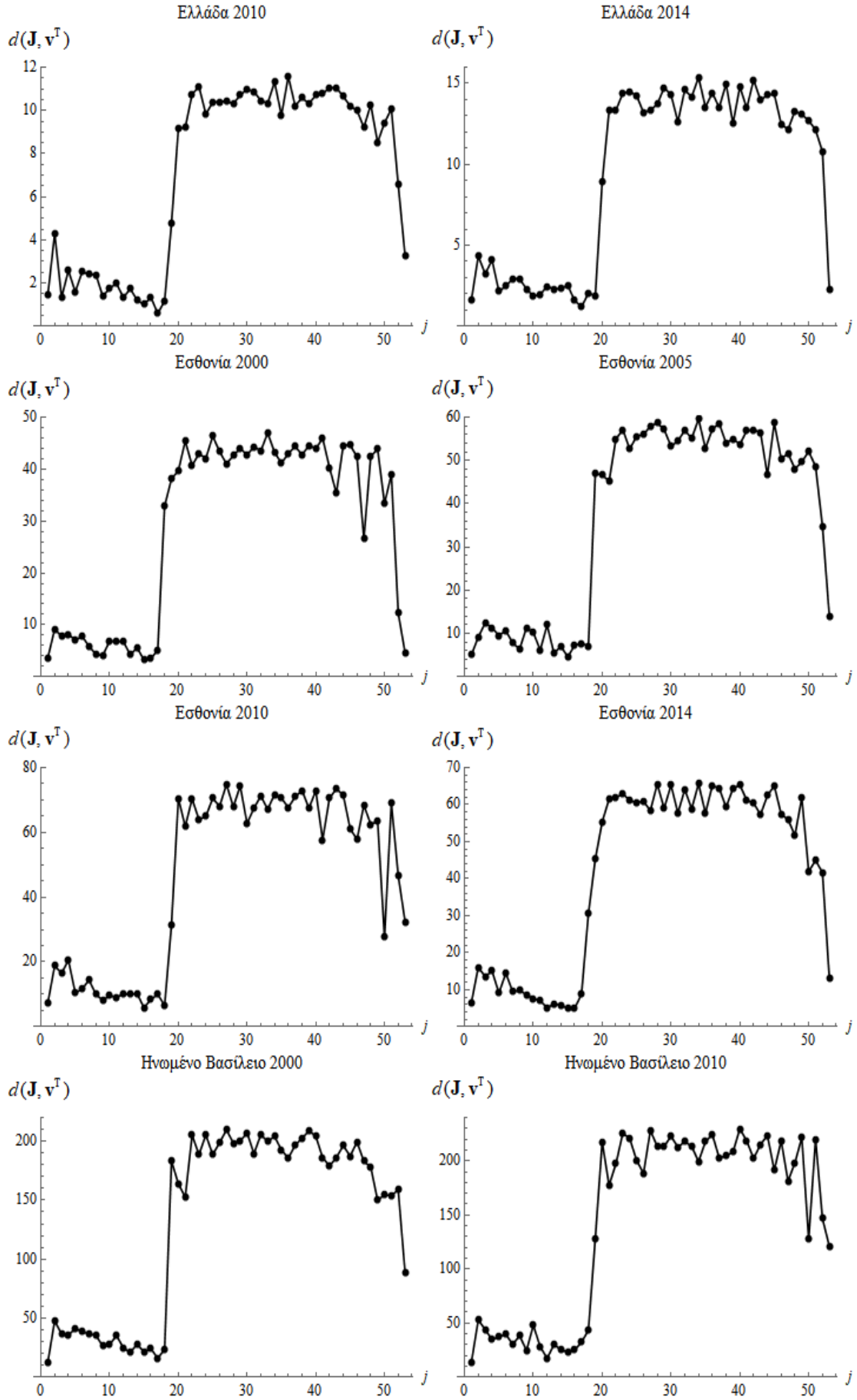
Αυστρία 2014

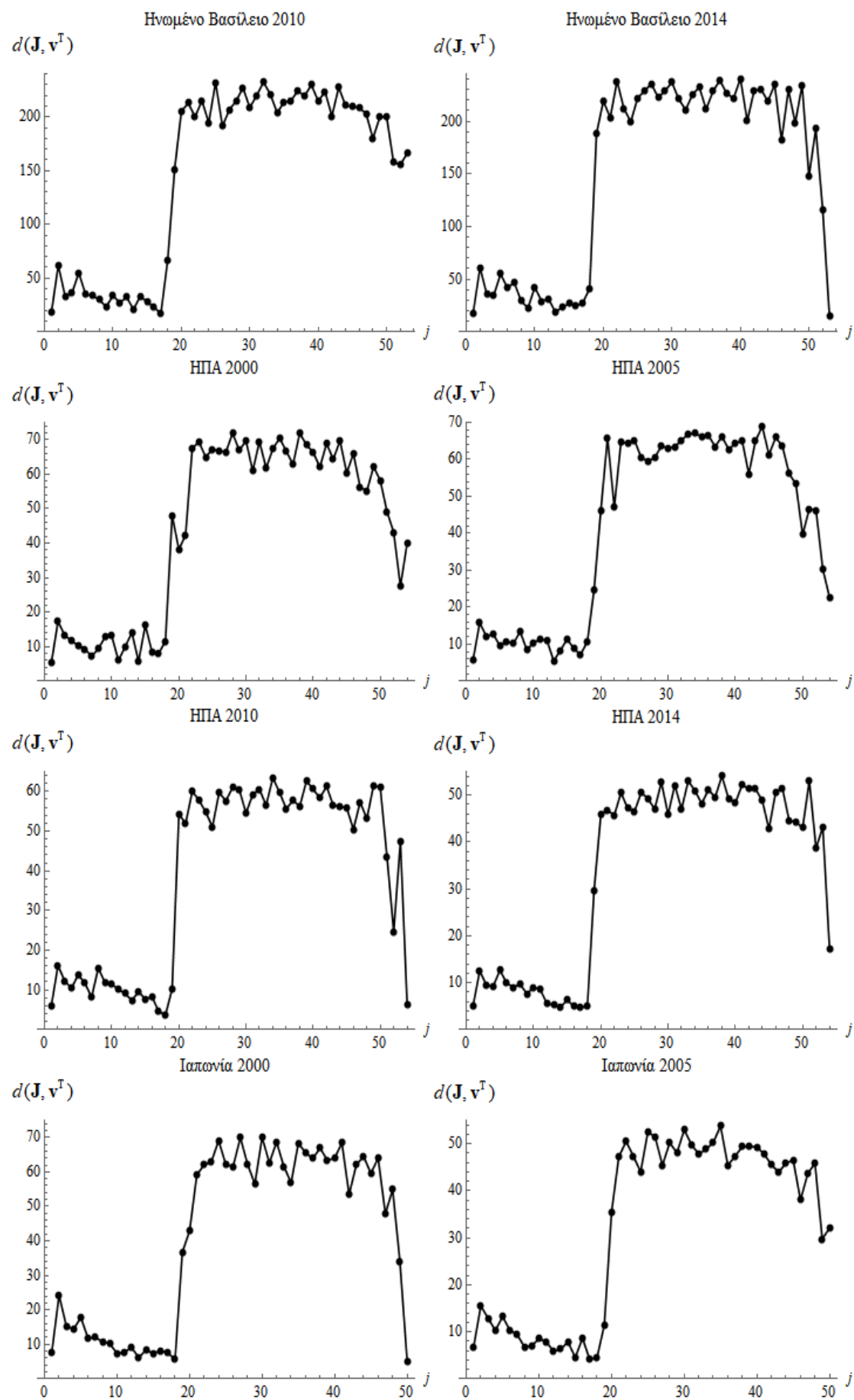


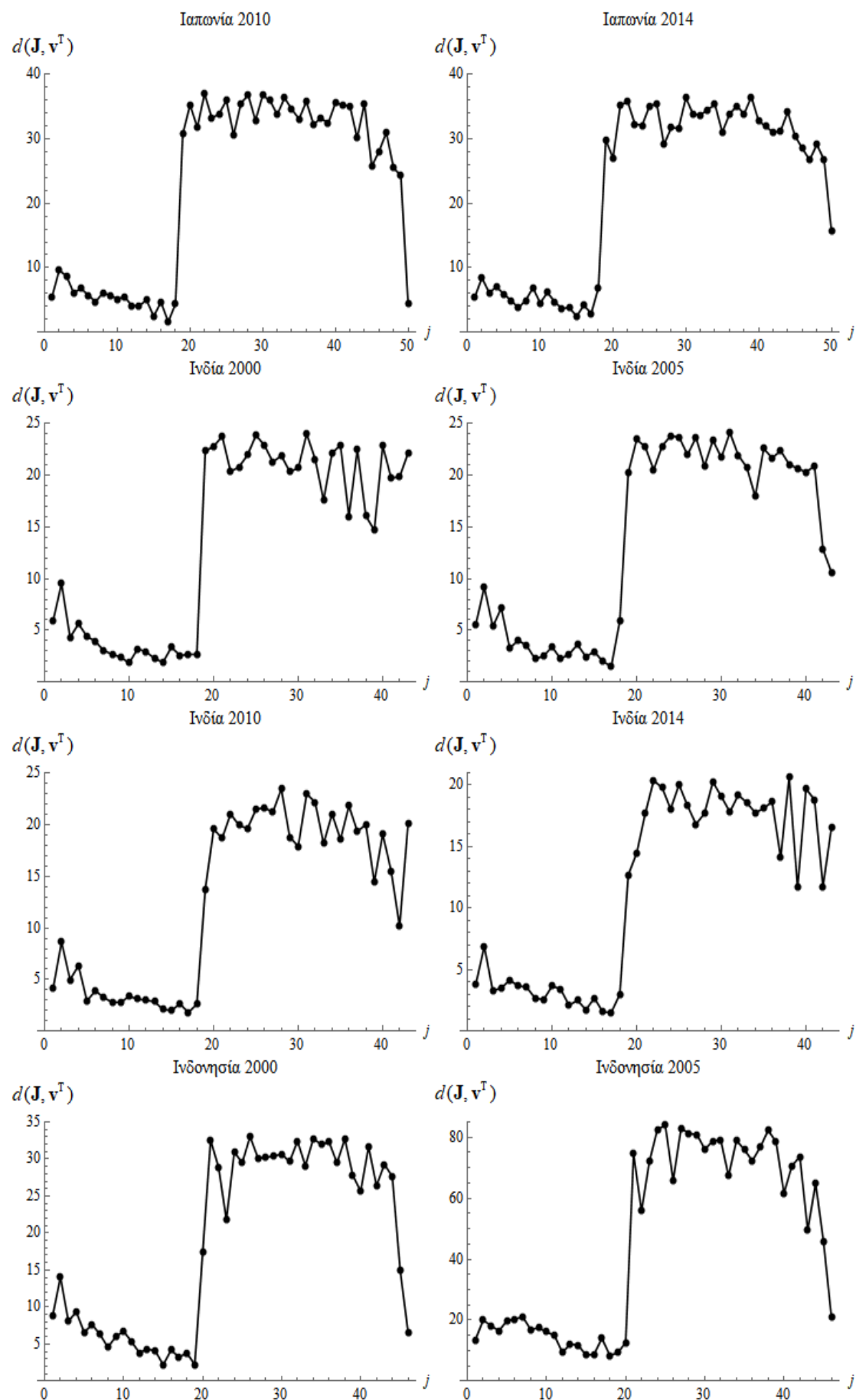


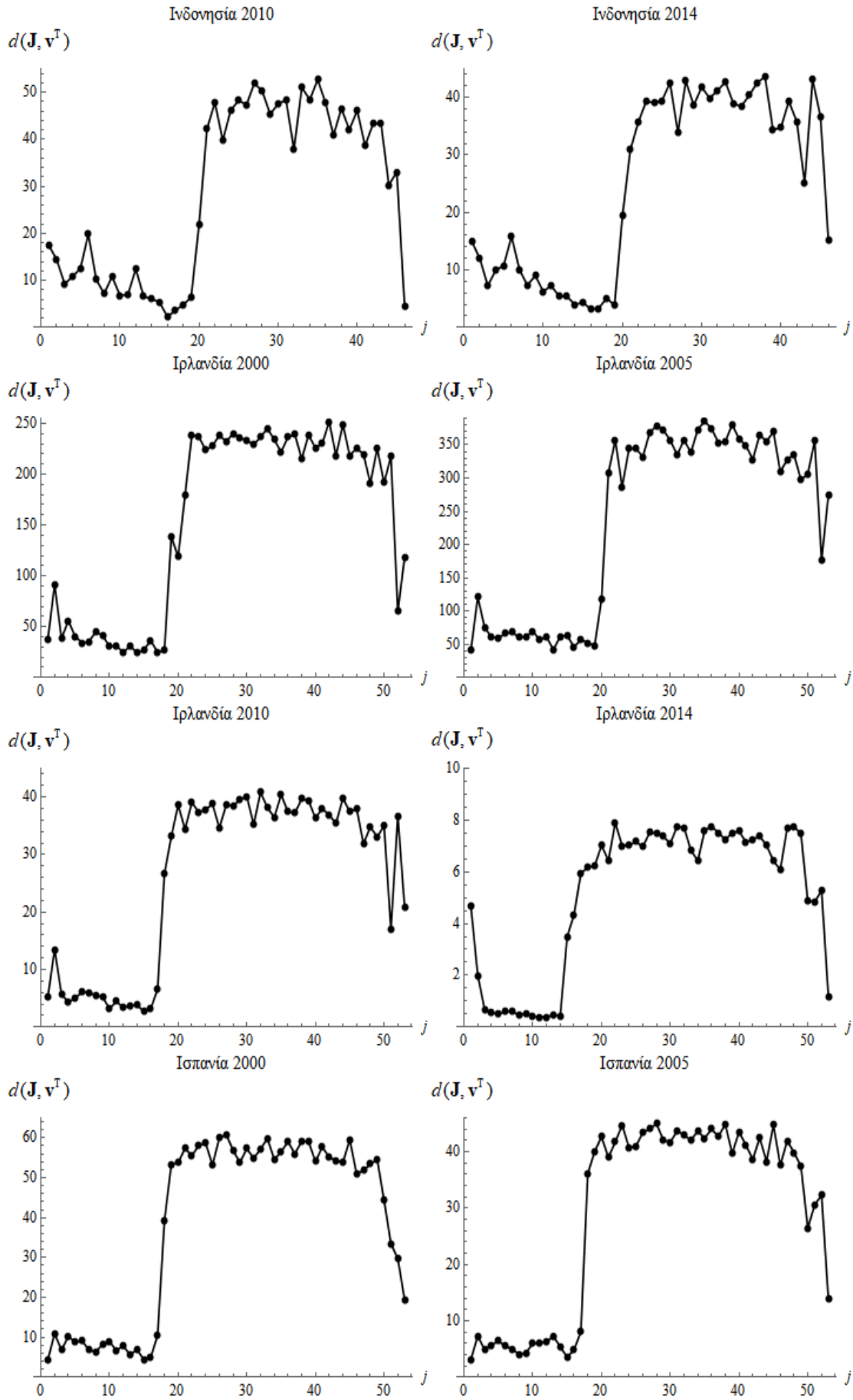


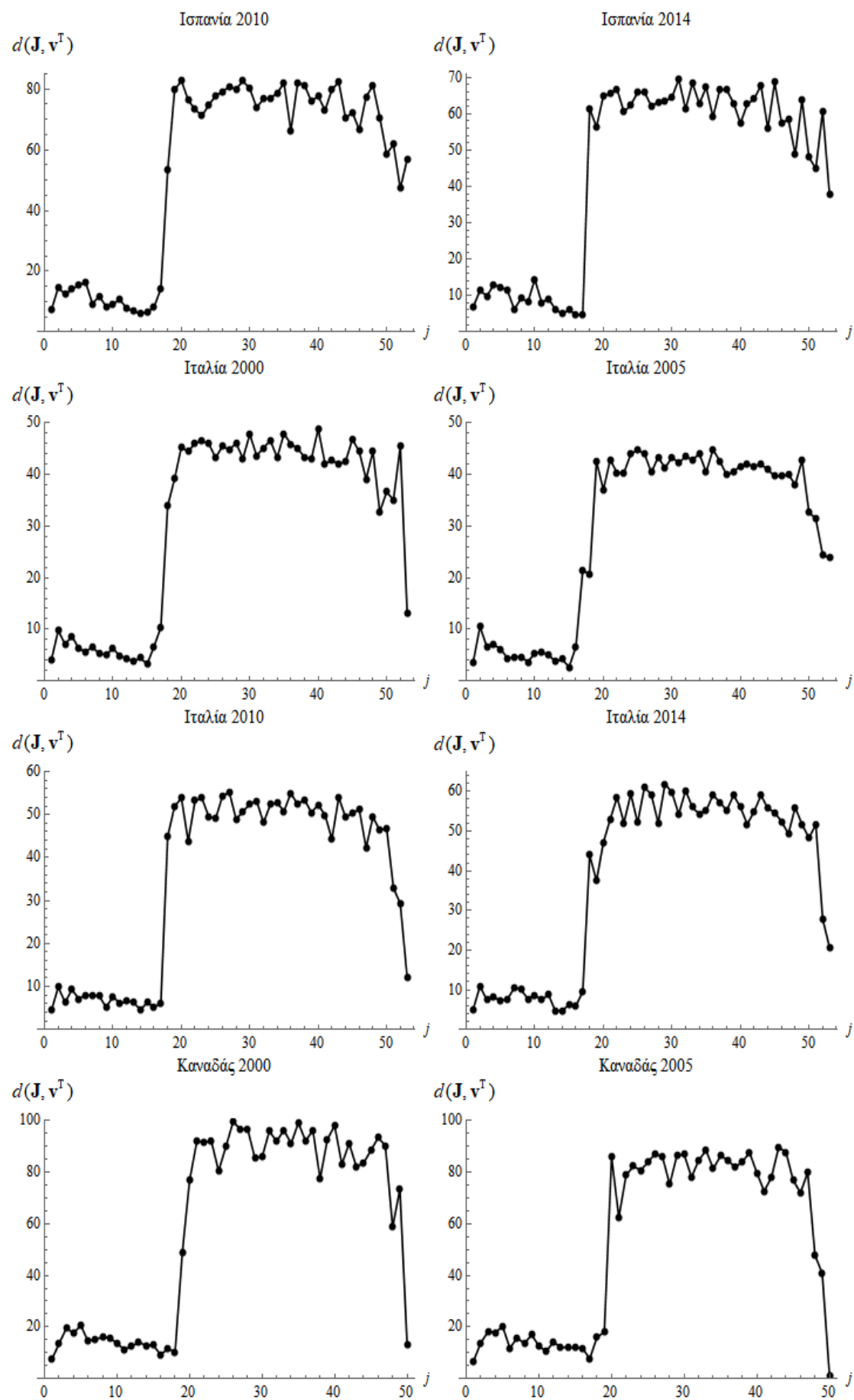


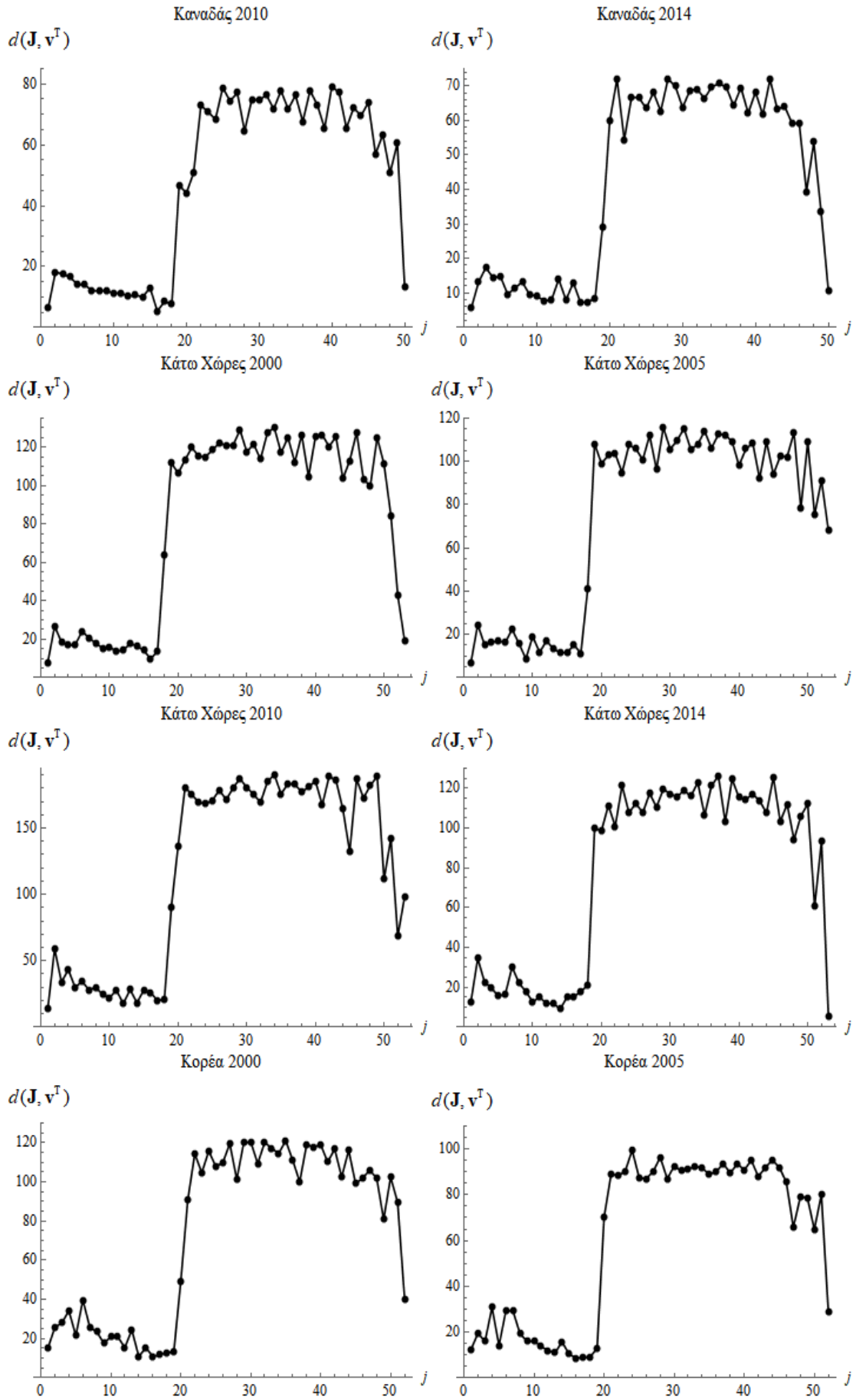


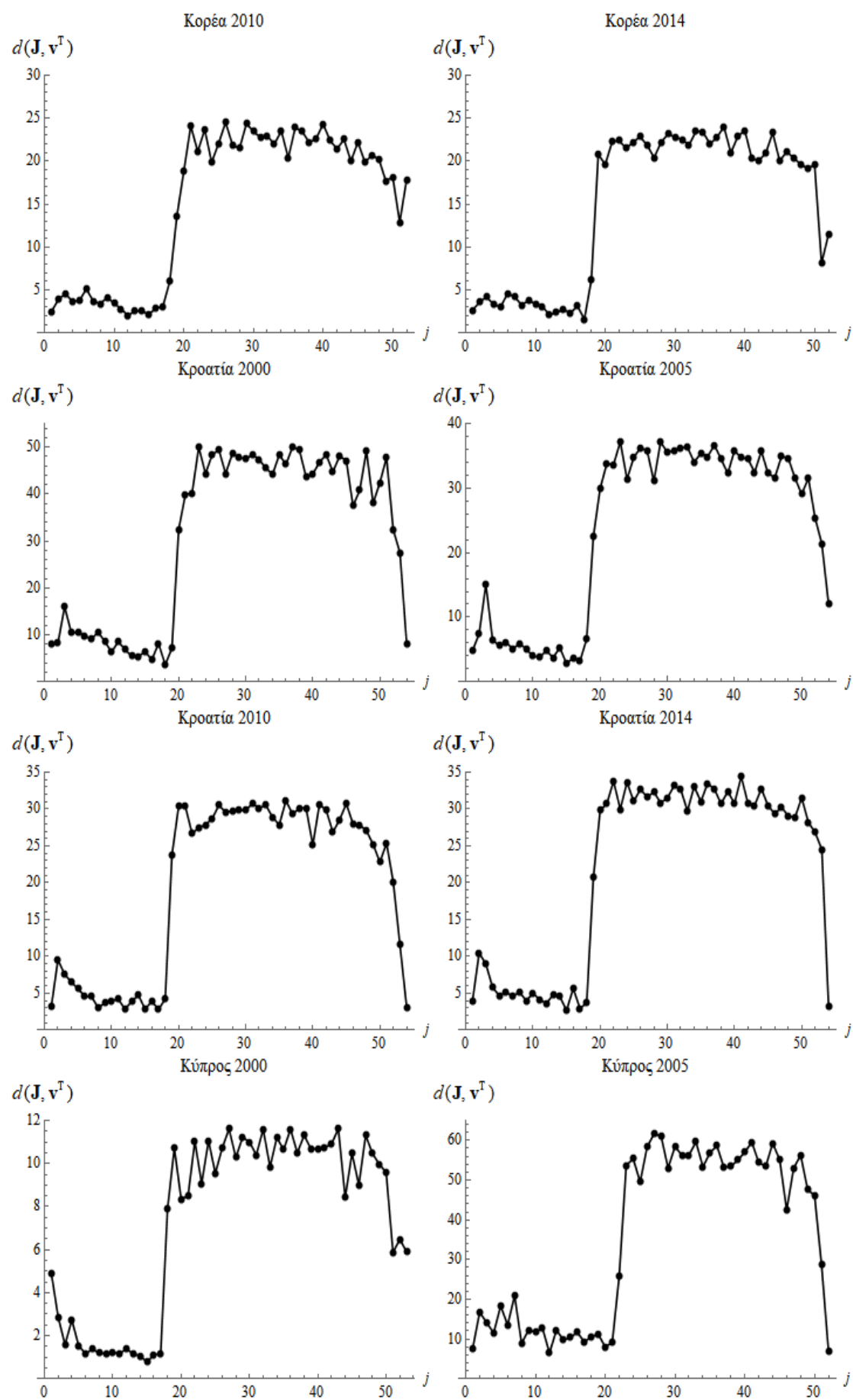


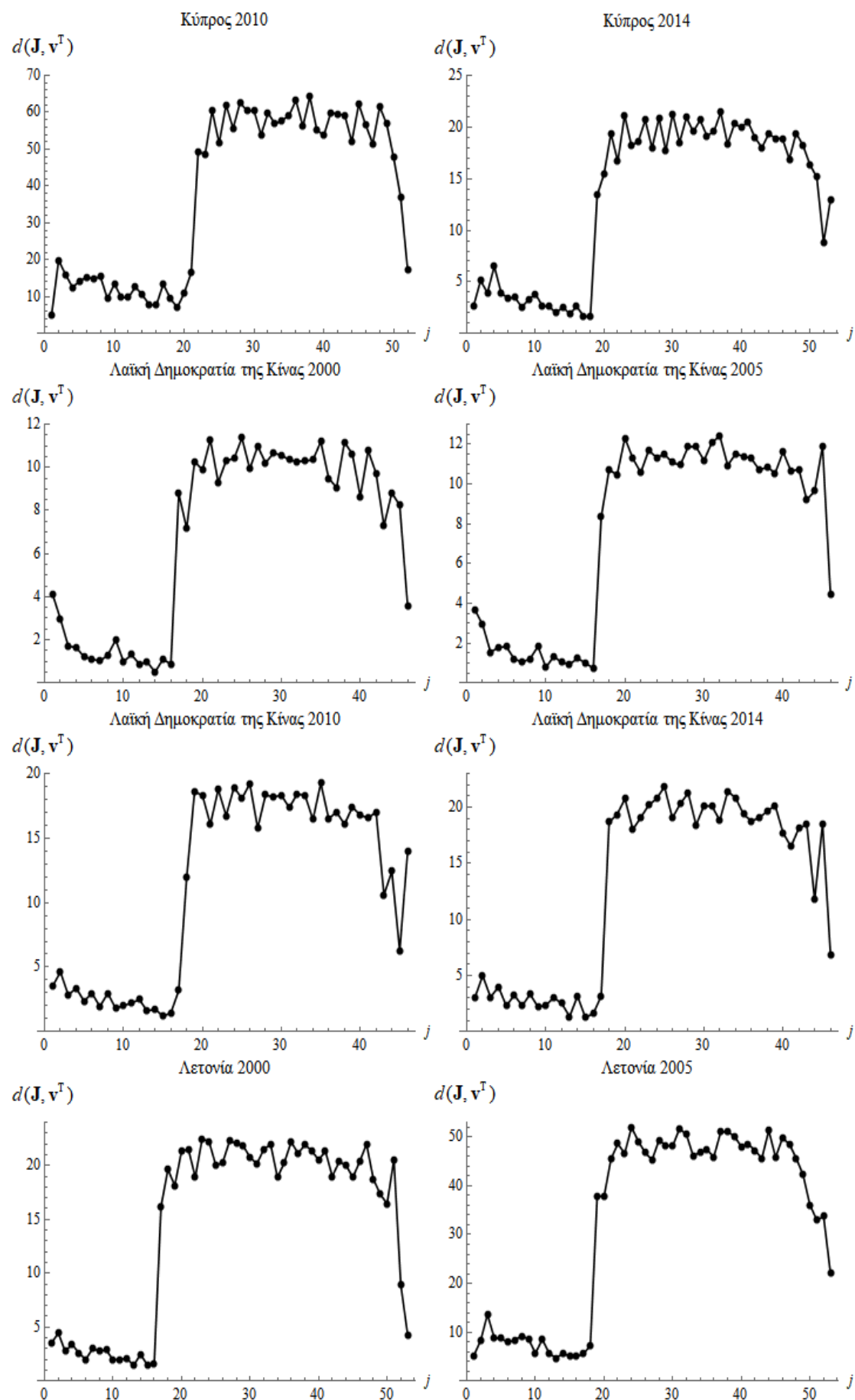


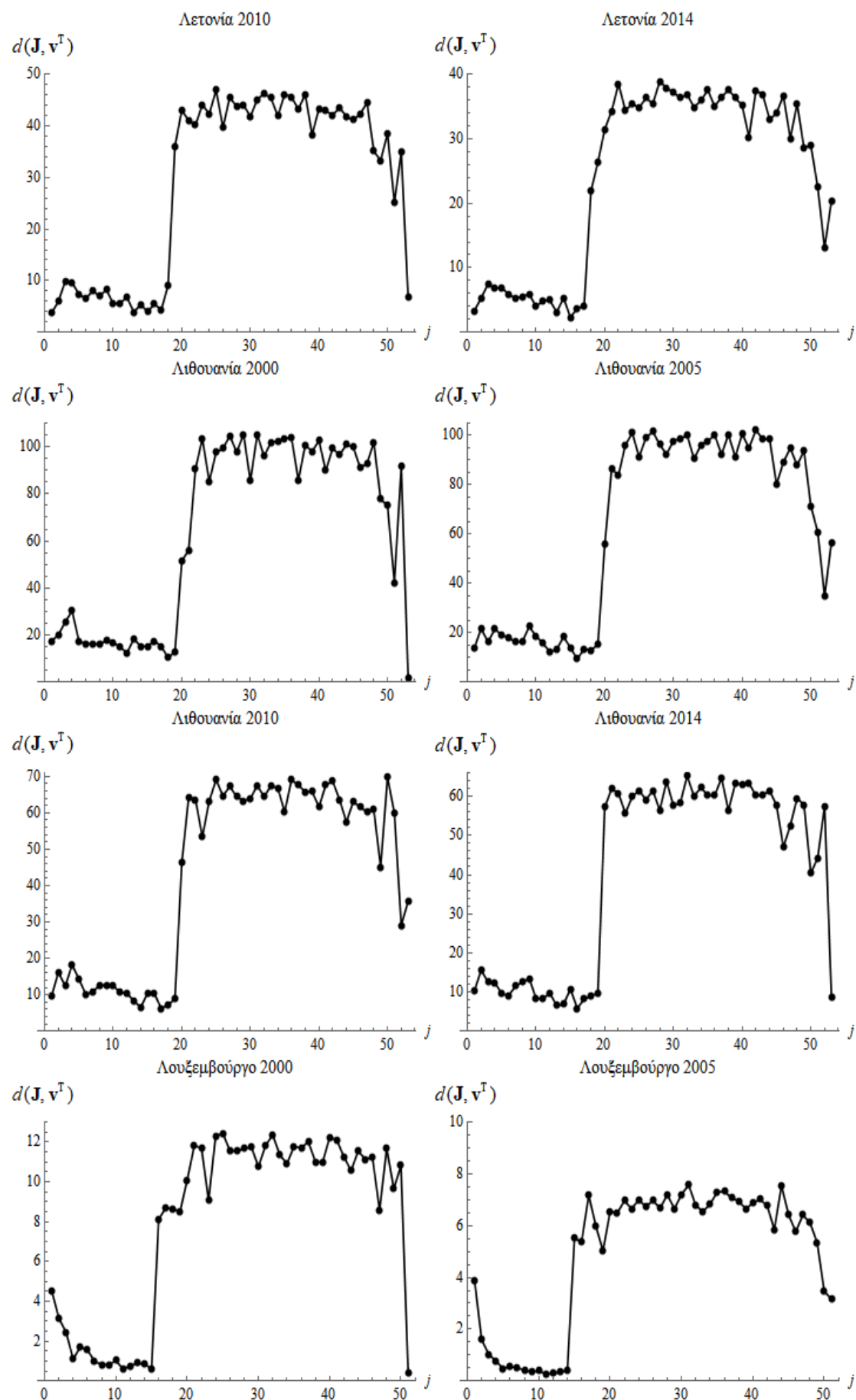


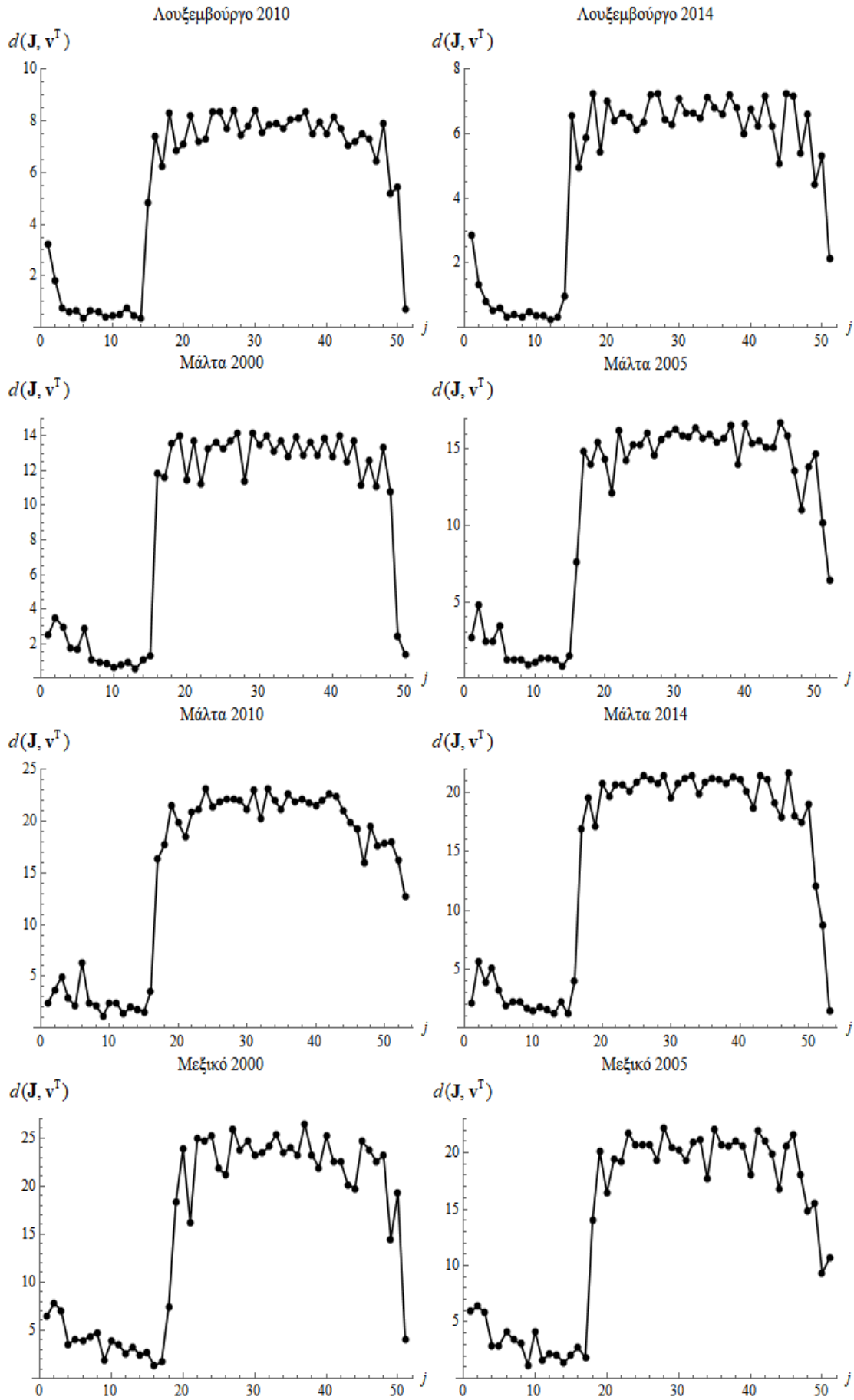


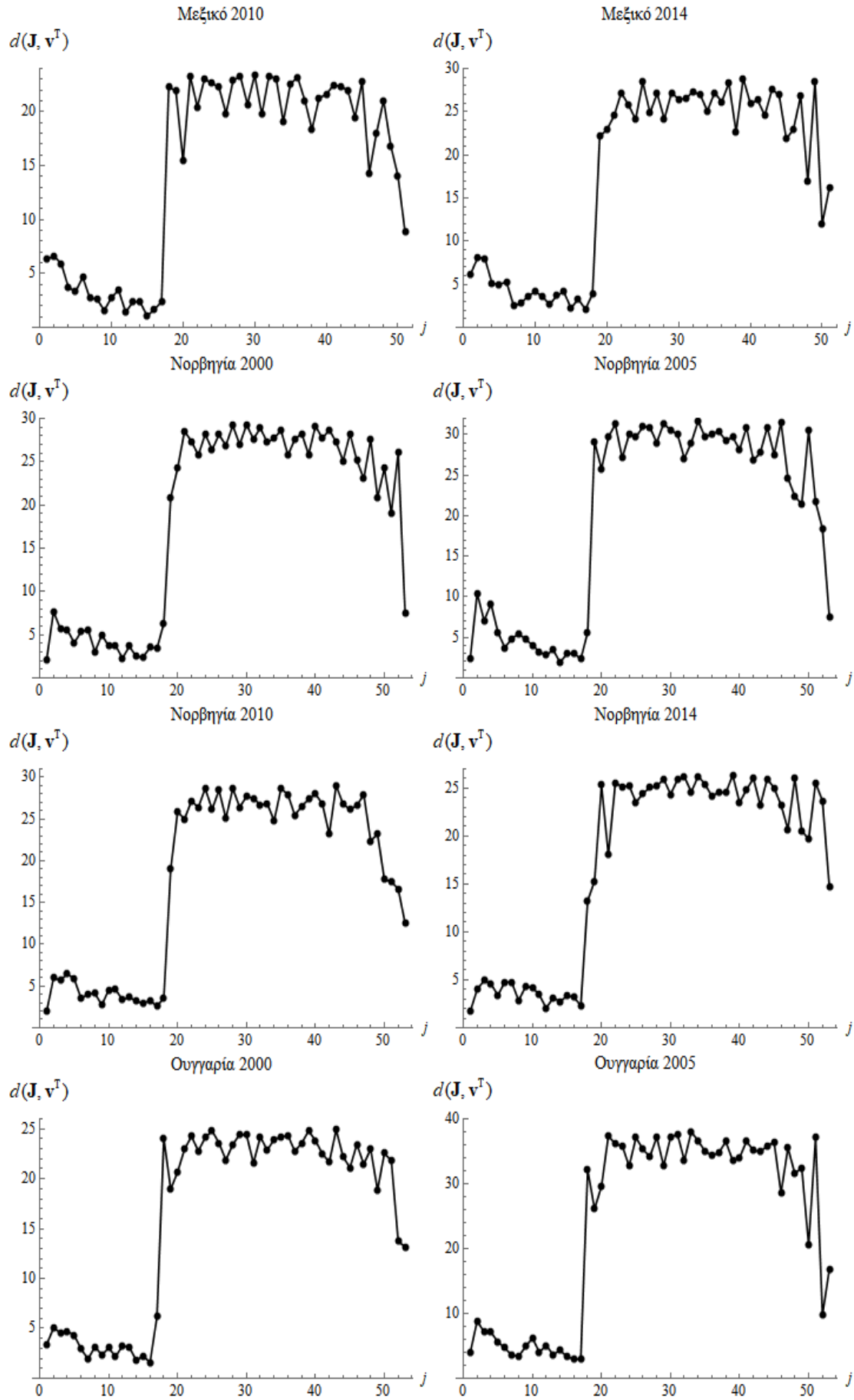


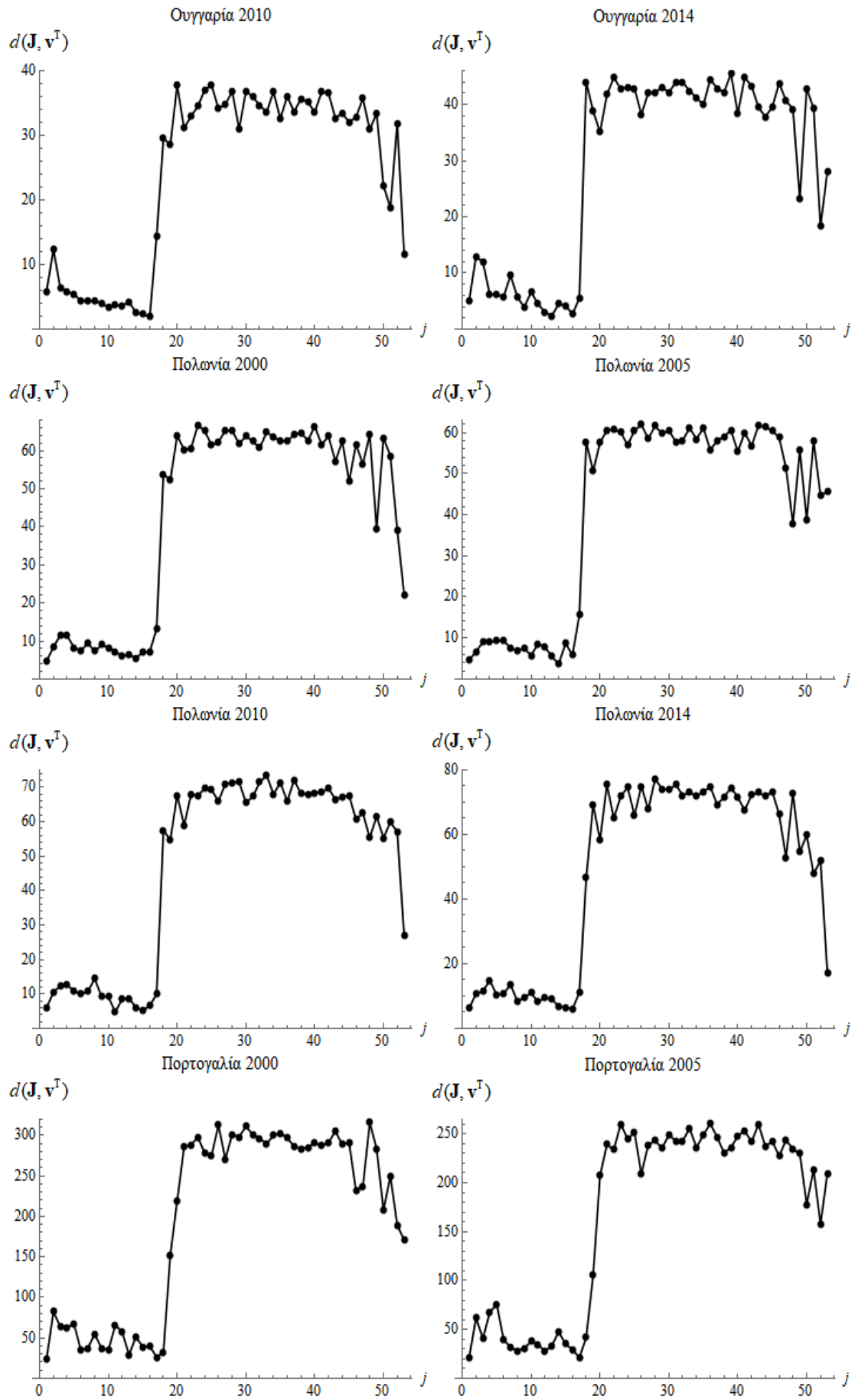


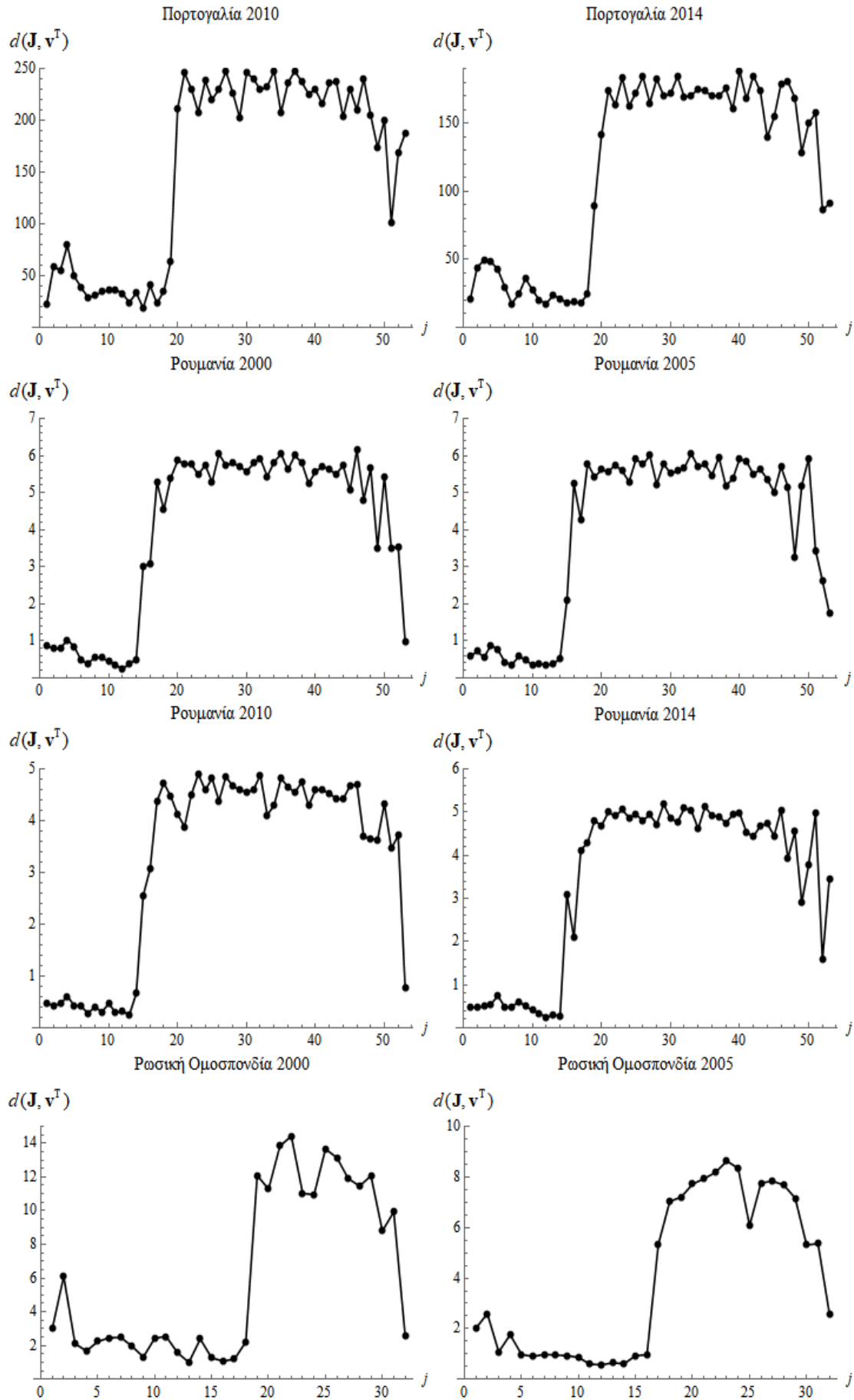




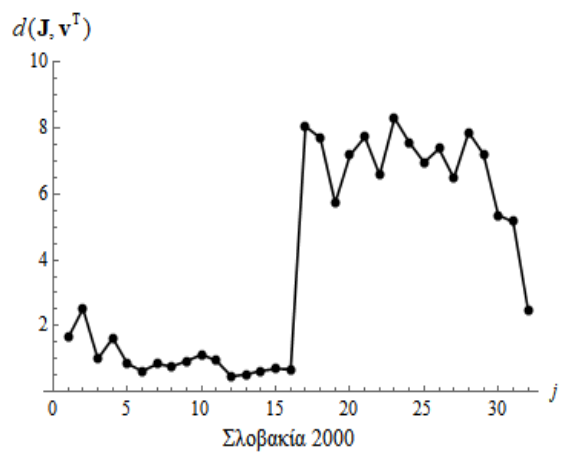




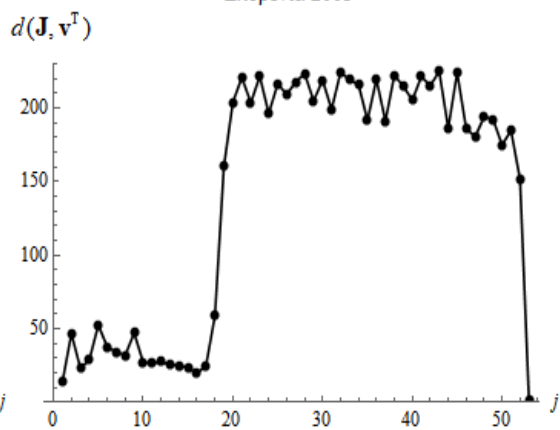
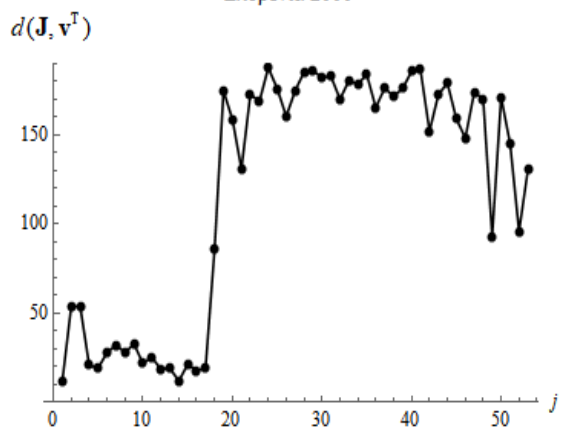
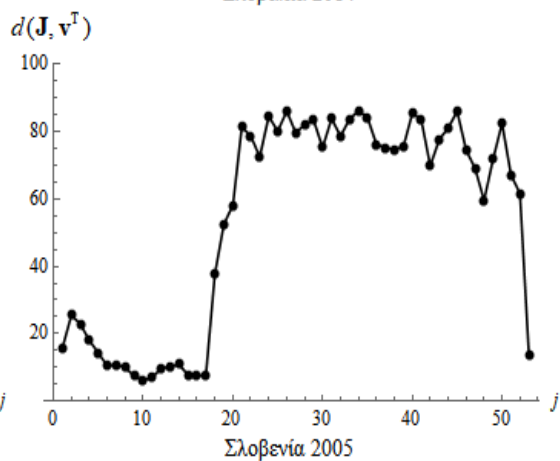
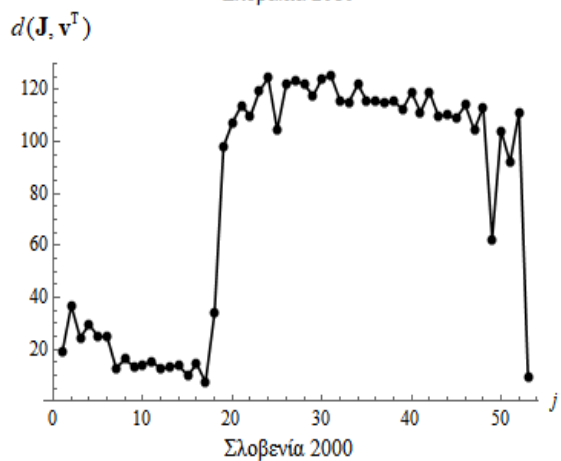
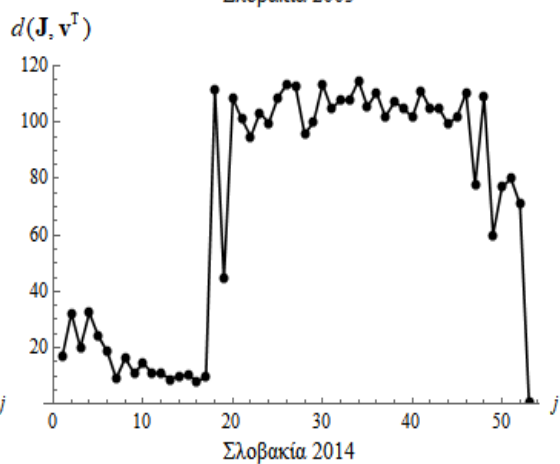
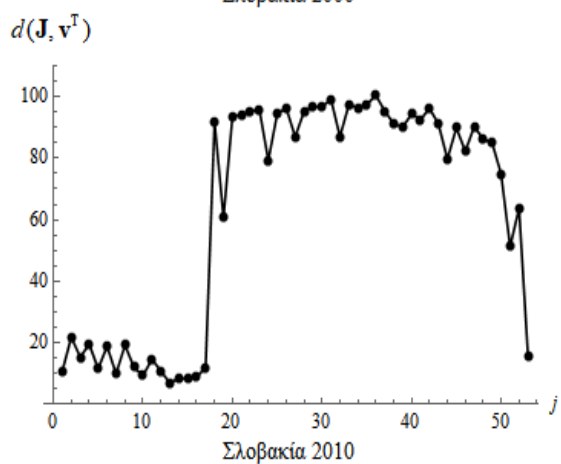
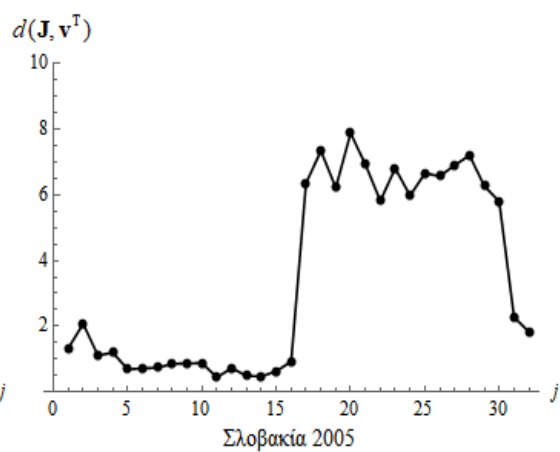


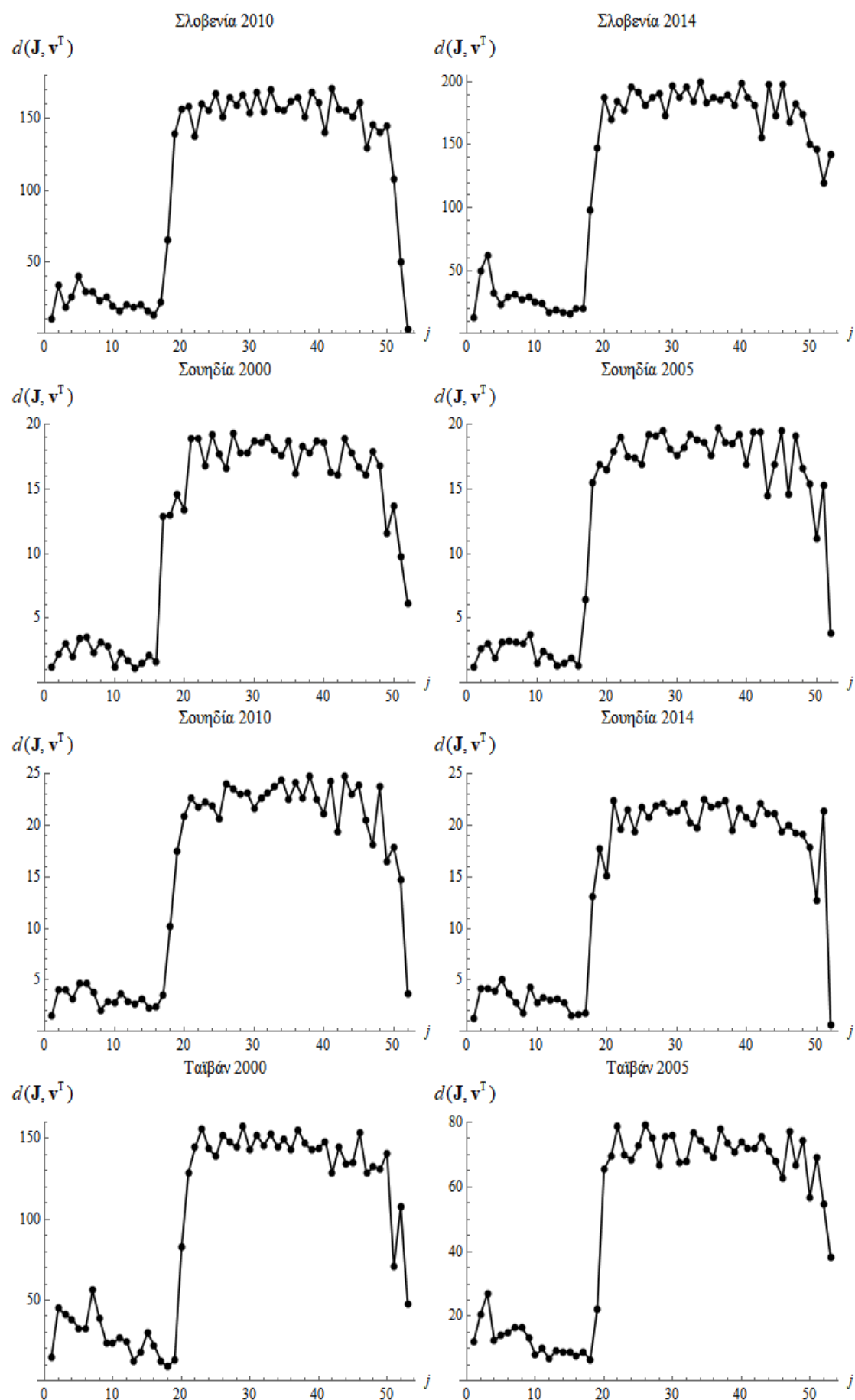


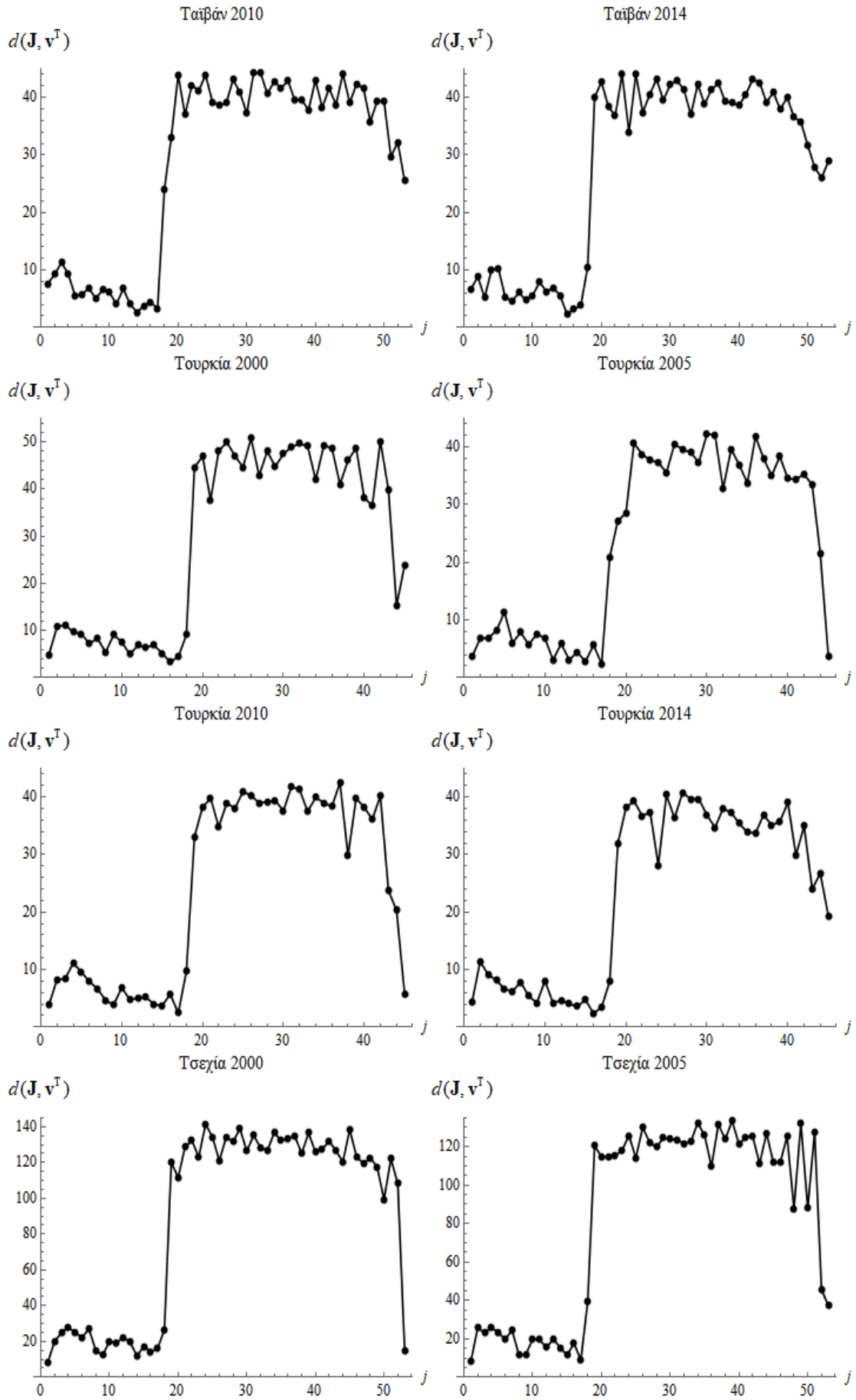
Ρωσική Ομοσπονδία 2010

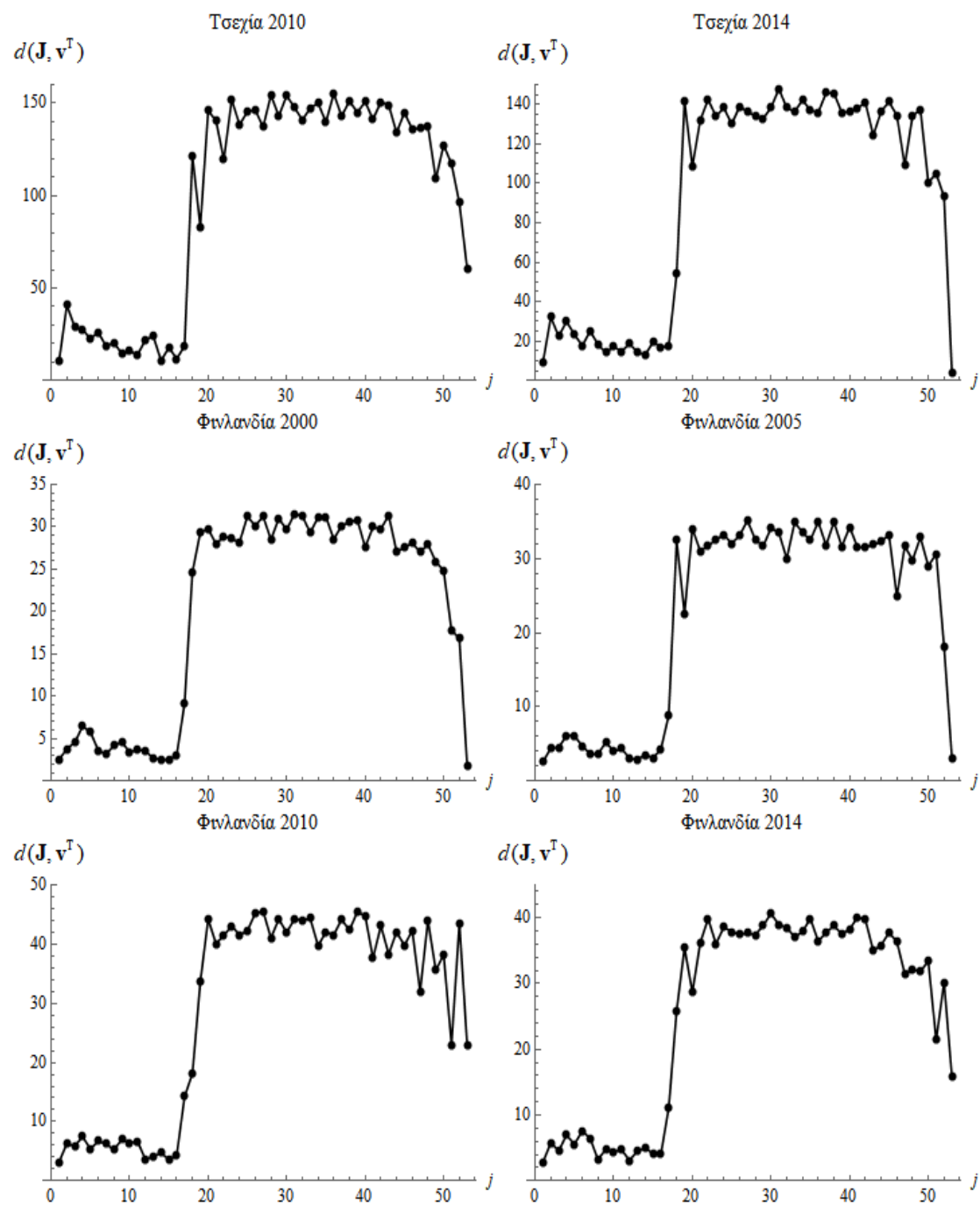


Ρωσική Ομοσπονδία 2014

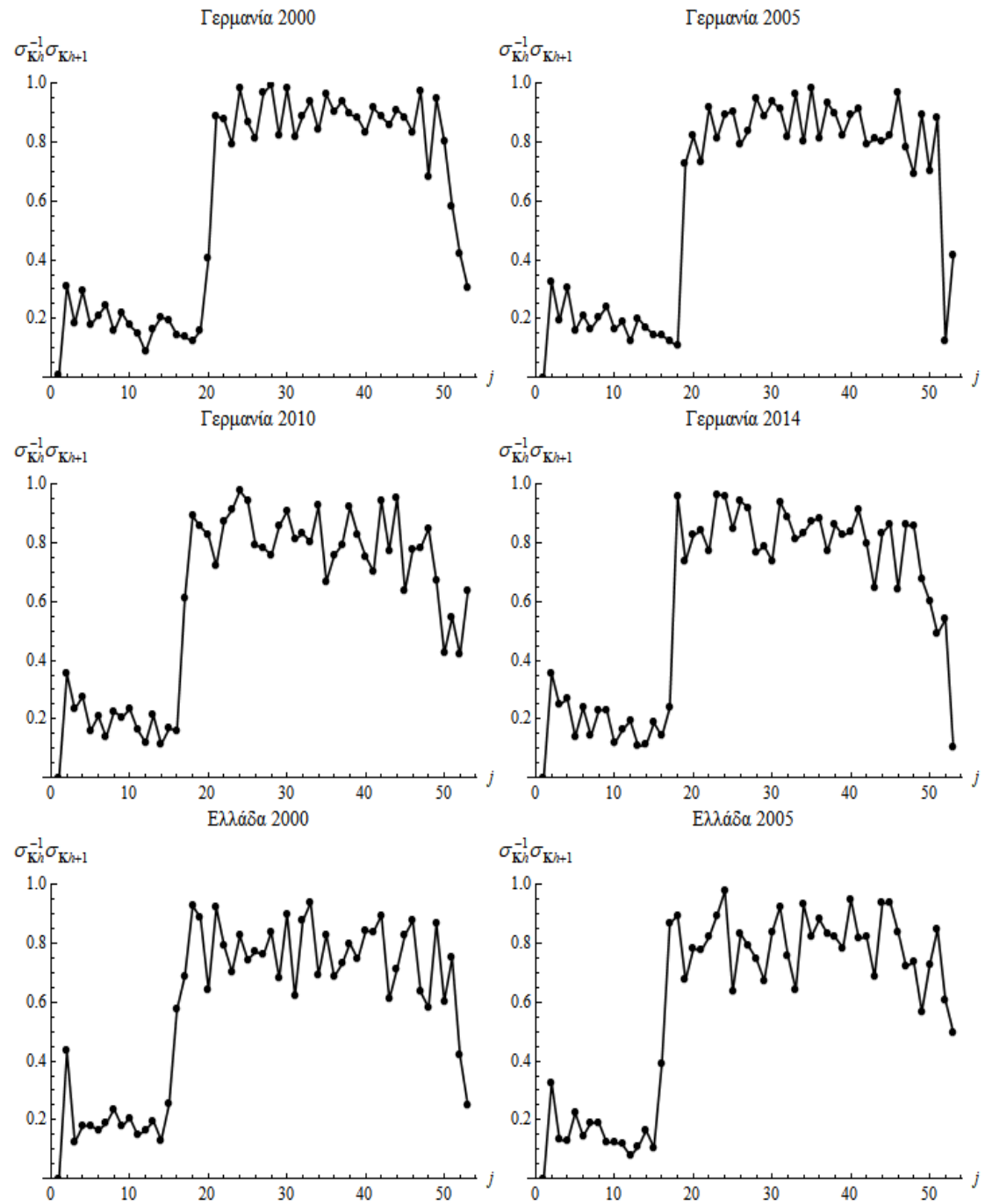


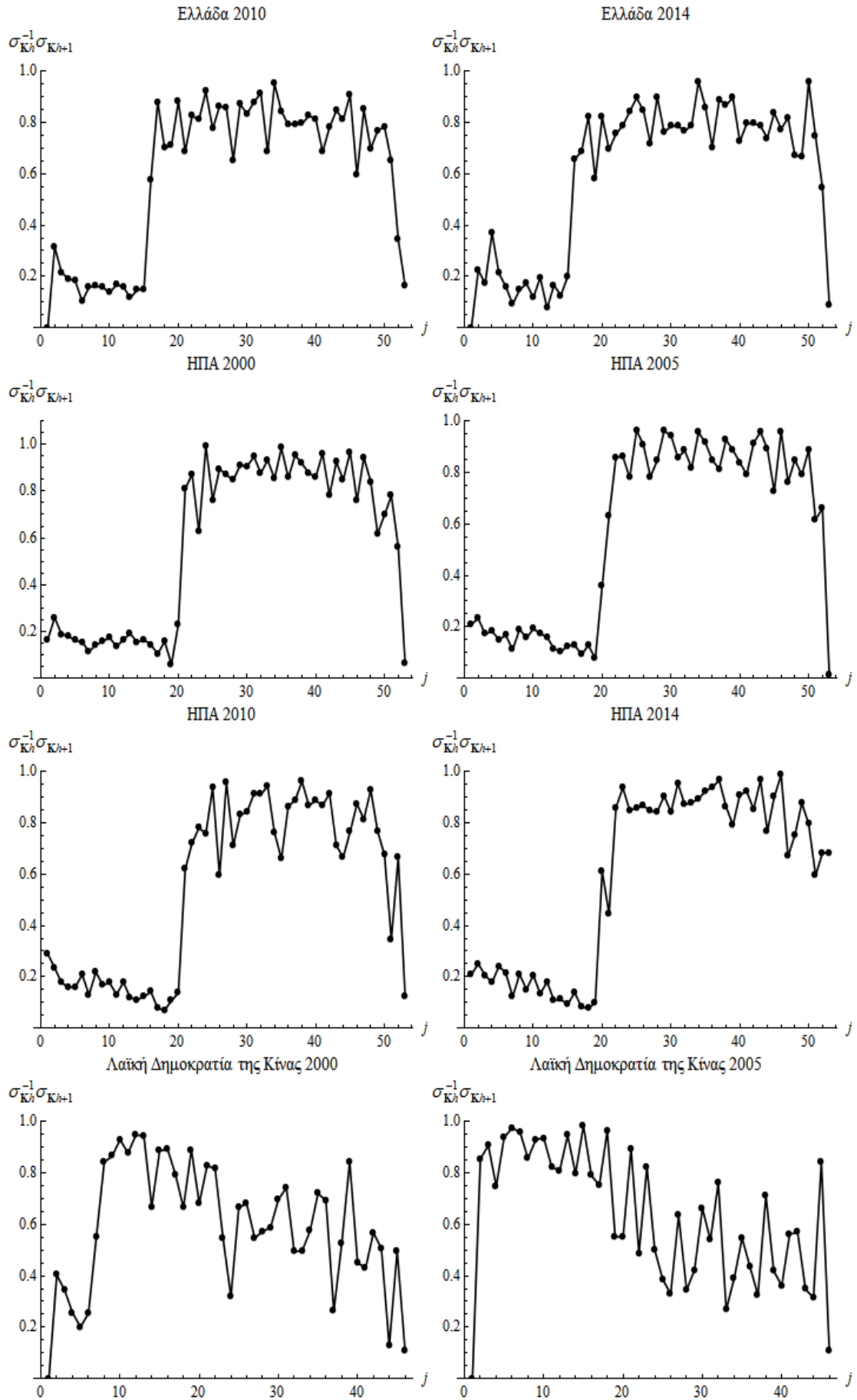




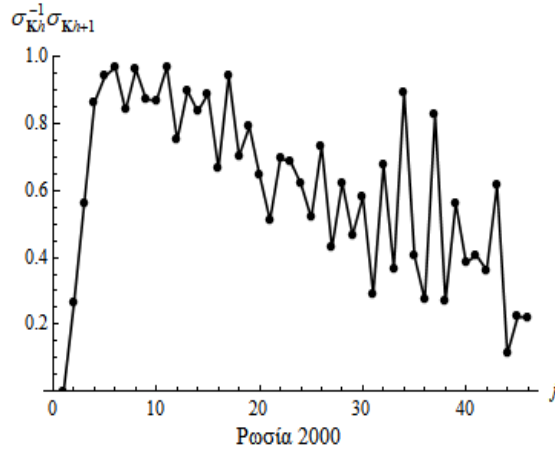


**Παράρτημα VIII. Διαγράμματα των λόγων των ιδιοζουσών τιμών της μήτρας ε-
λεγκσιμότητας, K_1 , στην περίπτωση της συμπαραγωγής**

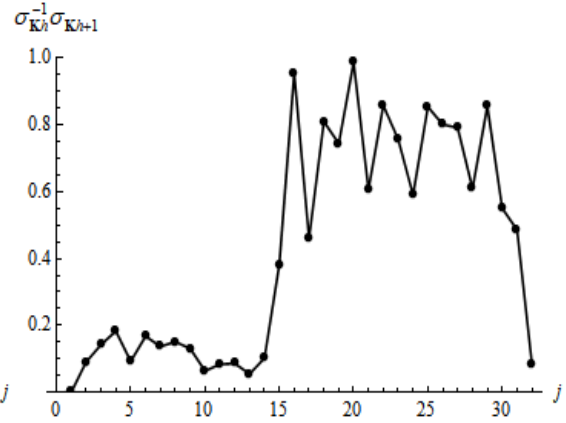
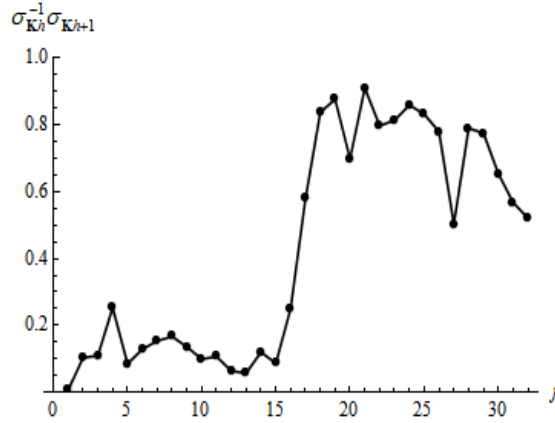
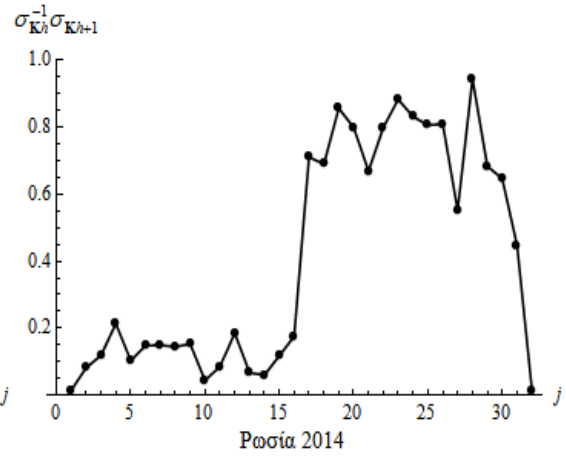
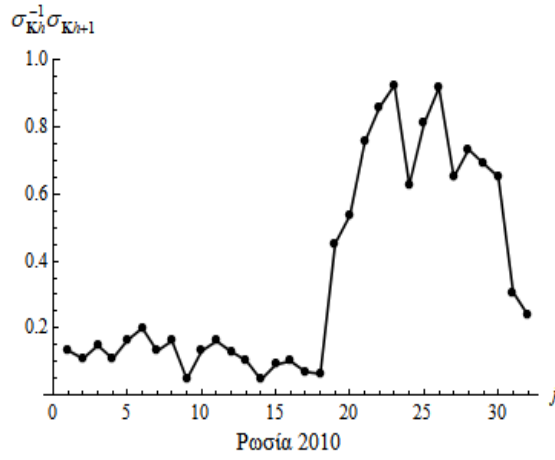
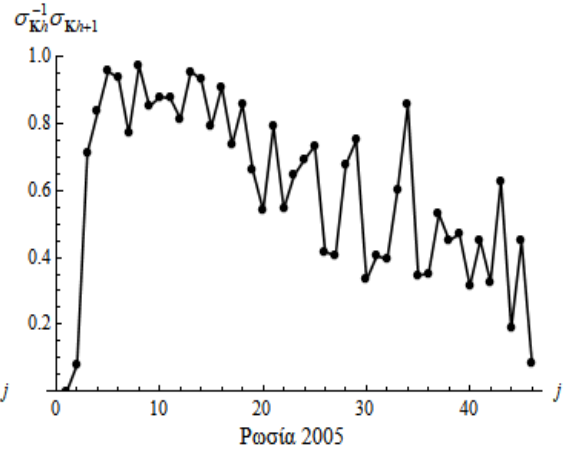




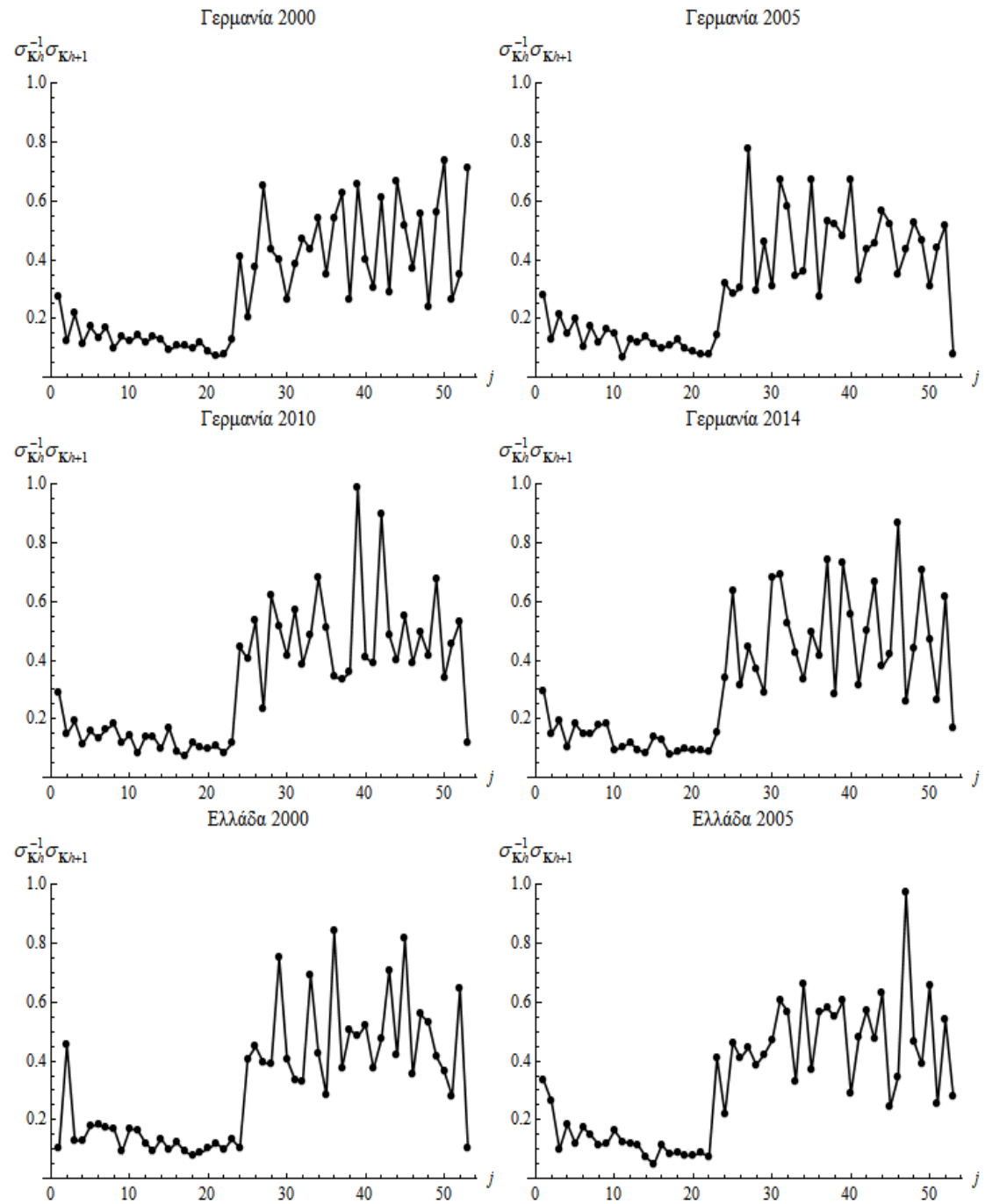
Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας 2010

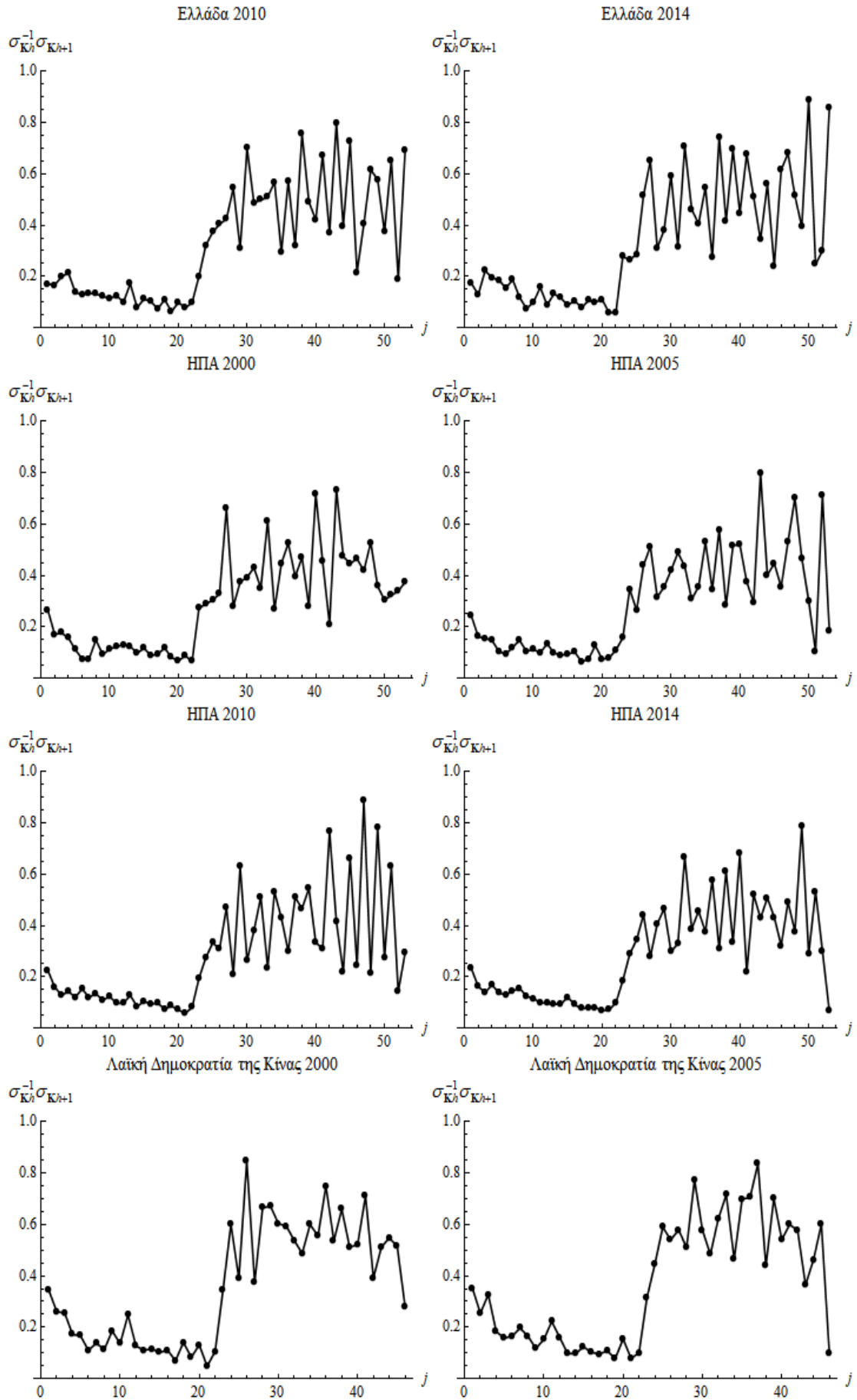


Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας 2014

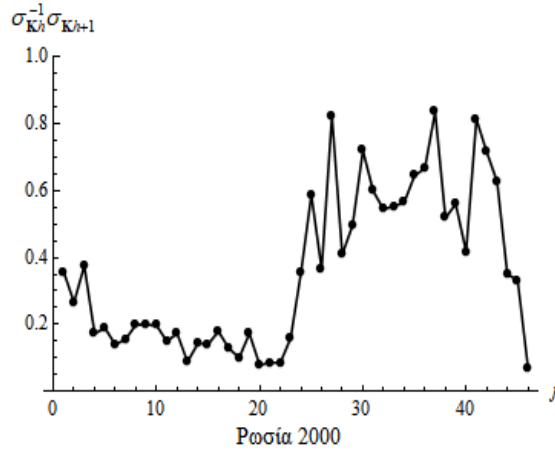


Παράρτημα ΙΧ. Διαγράμματα των λόγων των ιδιζουσών τιμών της μήτρας ελεγχιμότητας, K_2 , στην περίπτωση της συμπαραγωγής

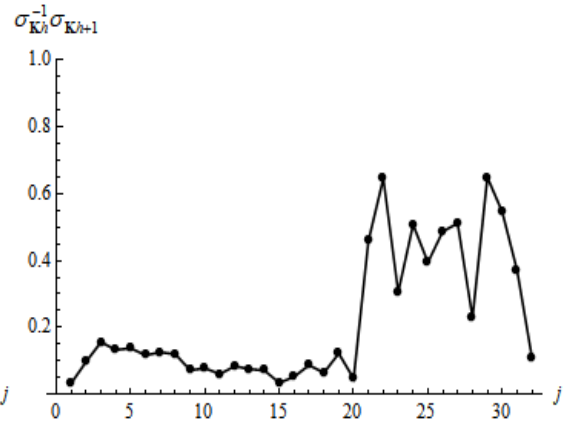
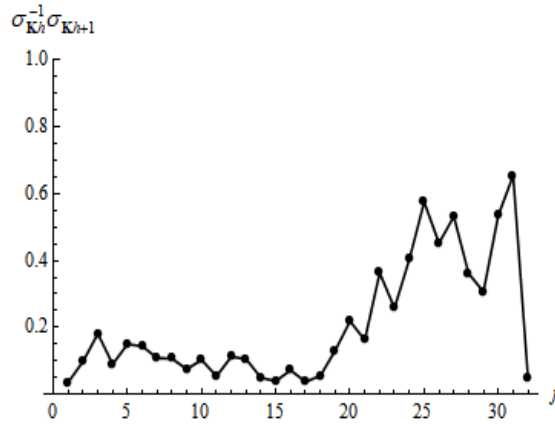
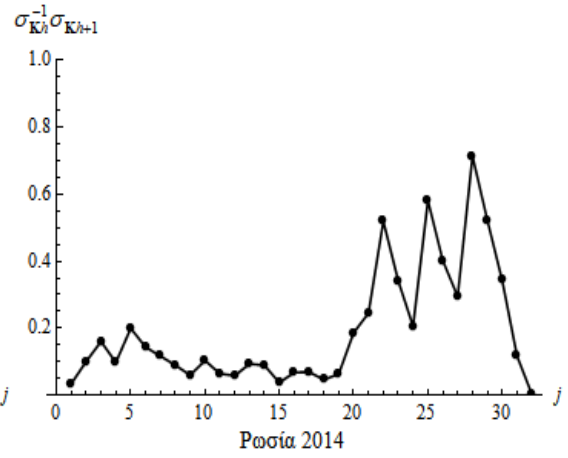
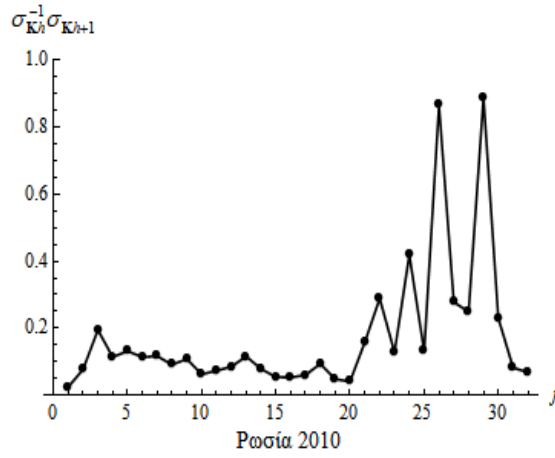
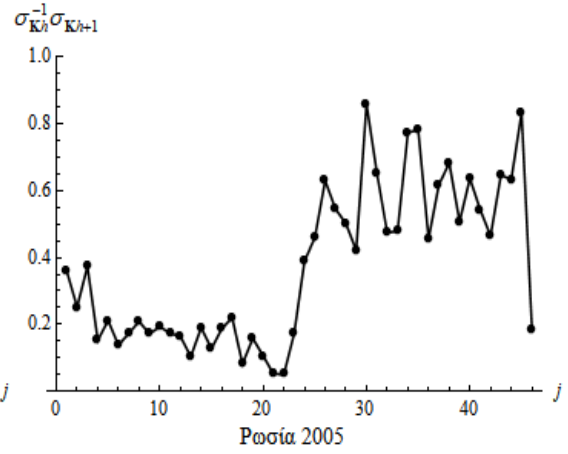




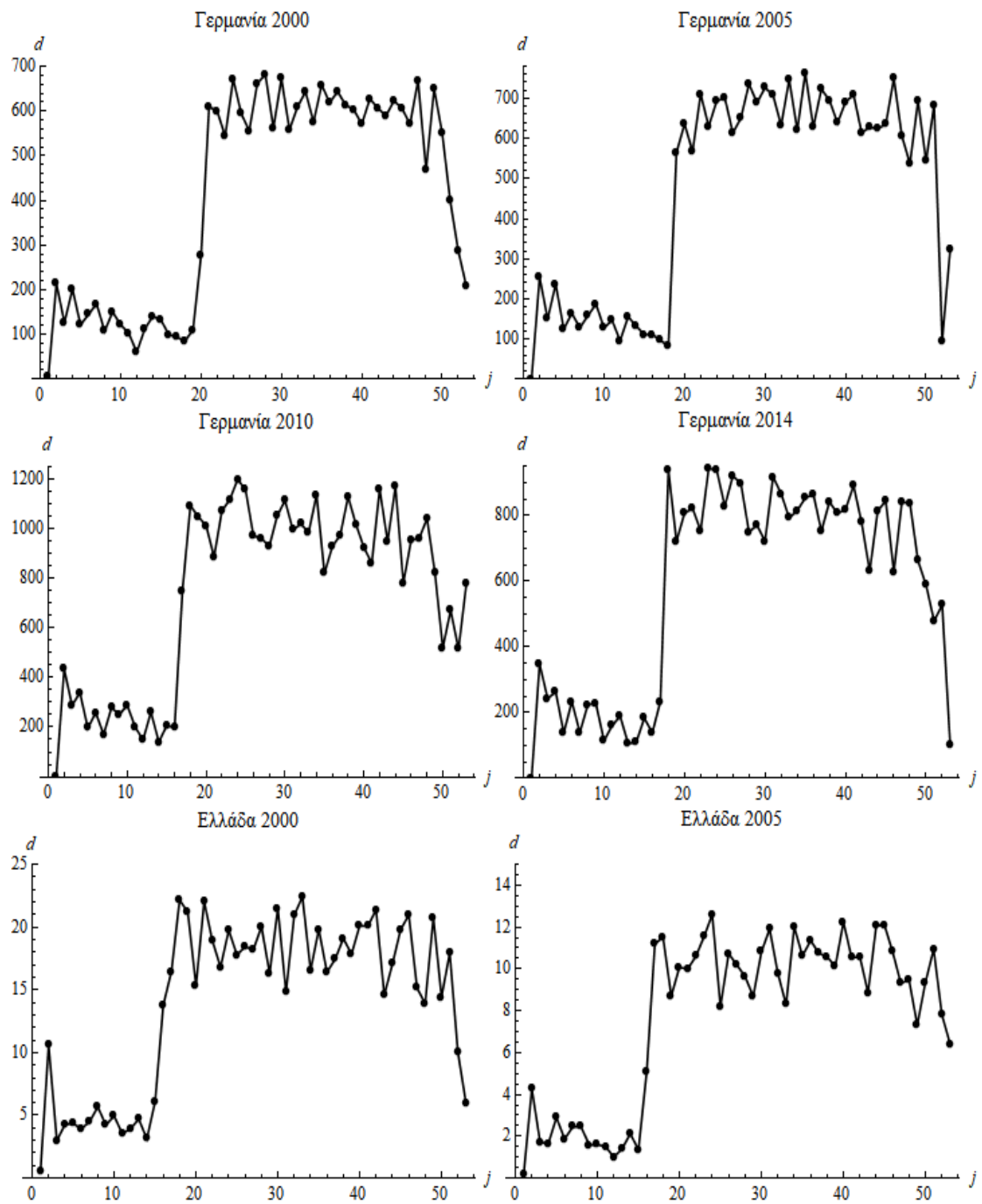
Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας 2010

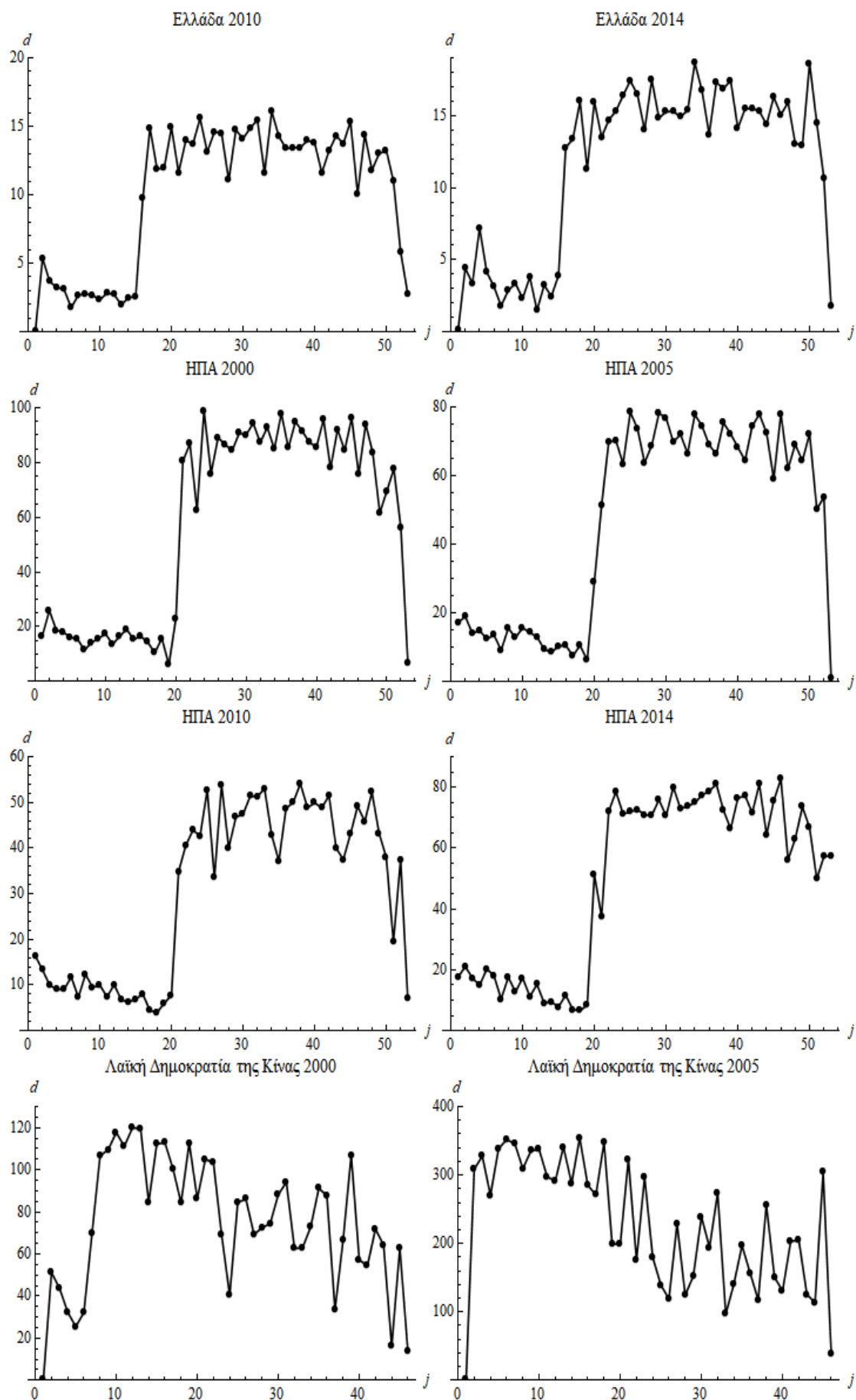


Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας 2014

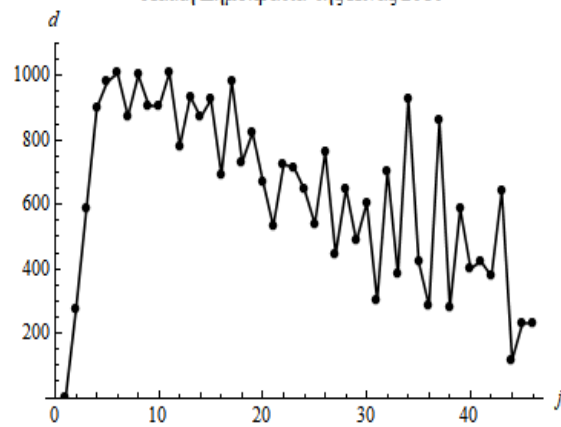


Παράρτημα Χ. Διαγράμματα των αποστάσεων της μήτρας ελεγκσιμότητας, K_1 , στην περίπτωση της συμπαραγωγής

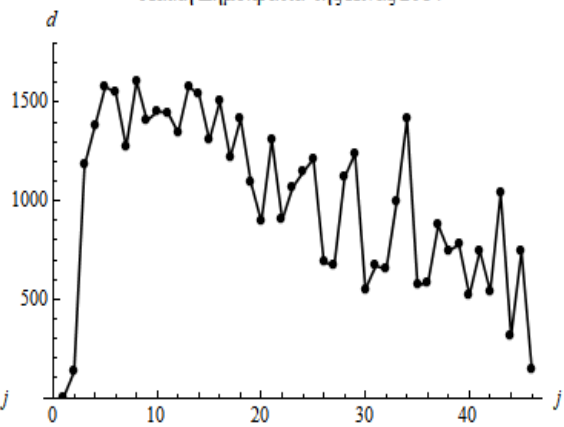




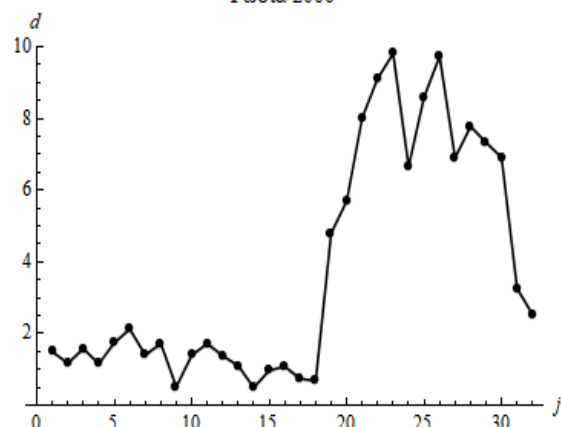
Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας 2010



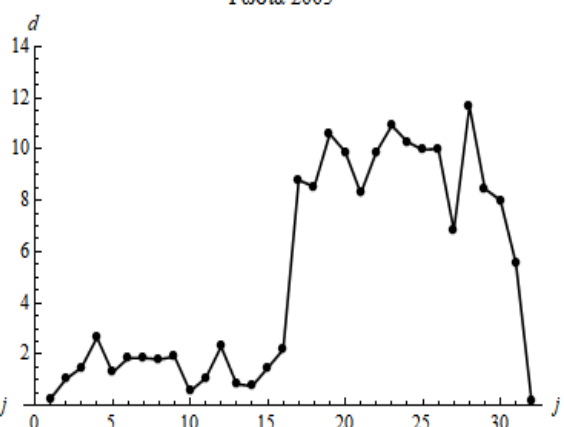
Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας 2014



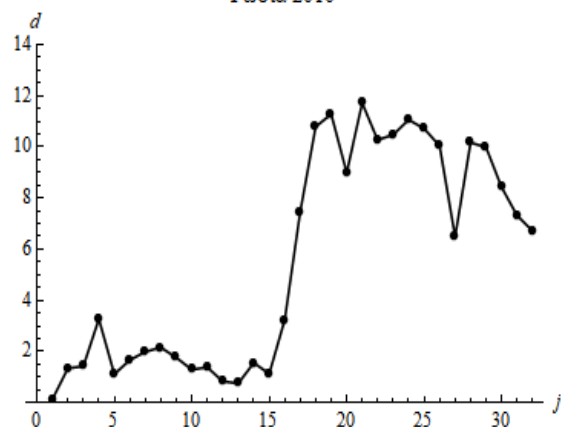
Ρωσία 2000



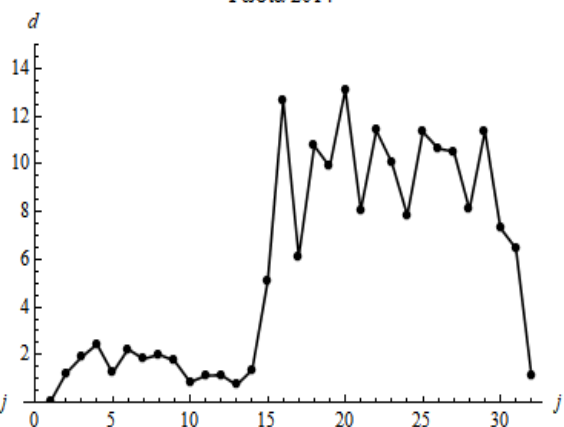
Ρωσία 2005



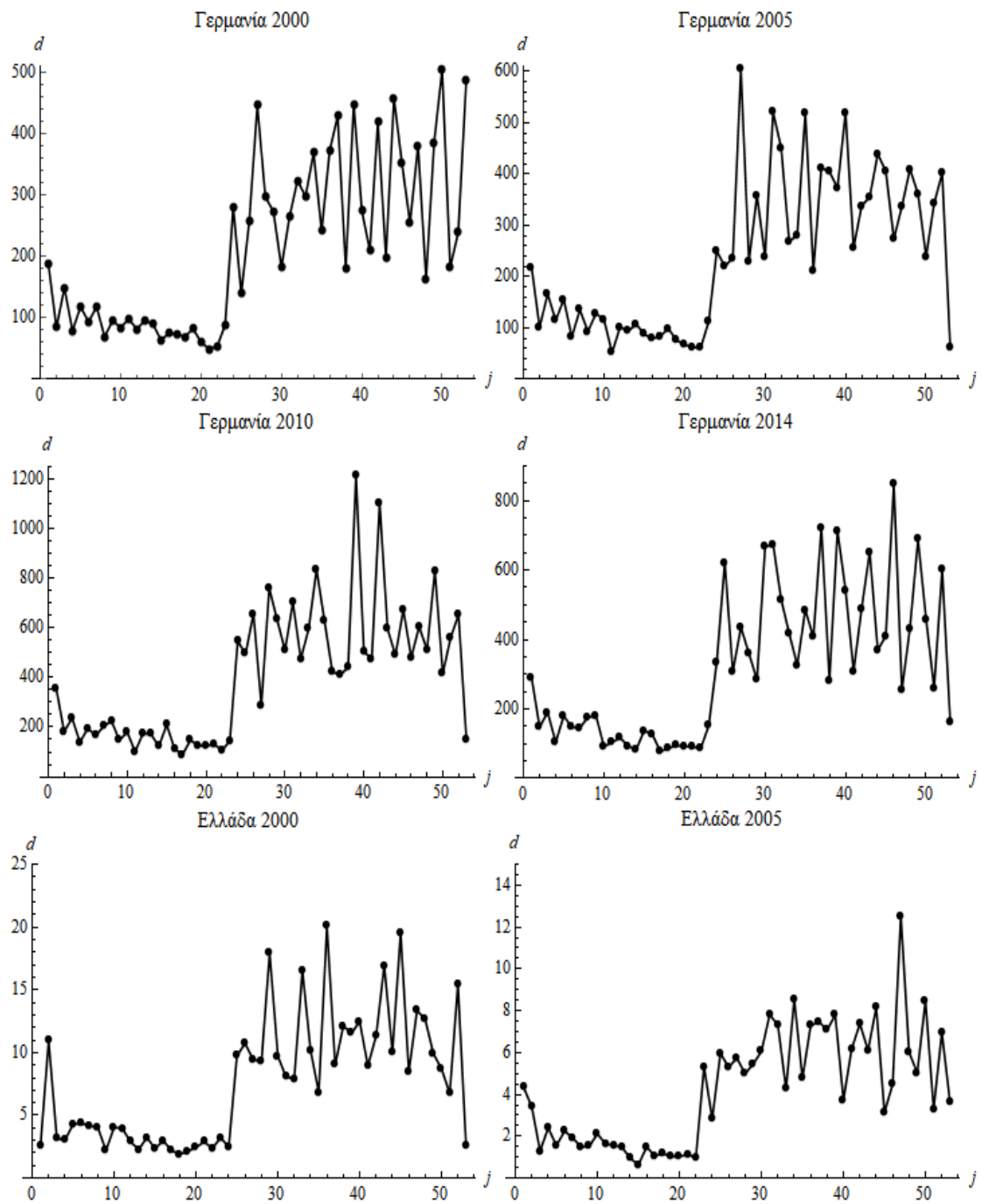
Ρωσία 2010

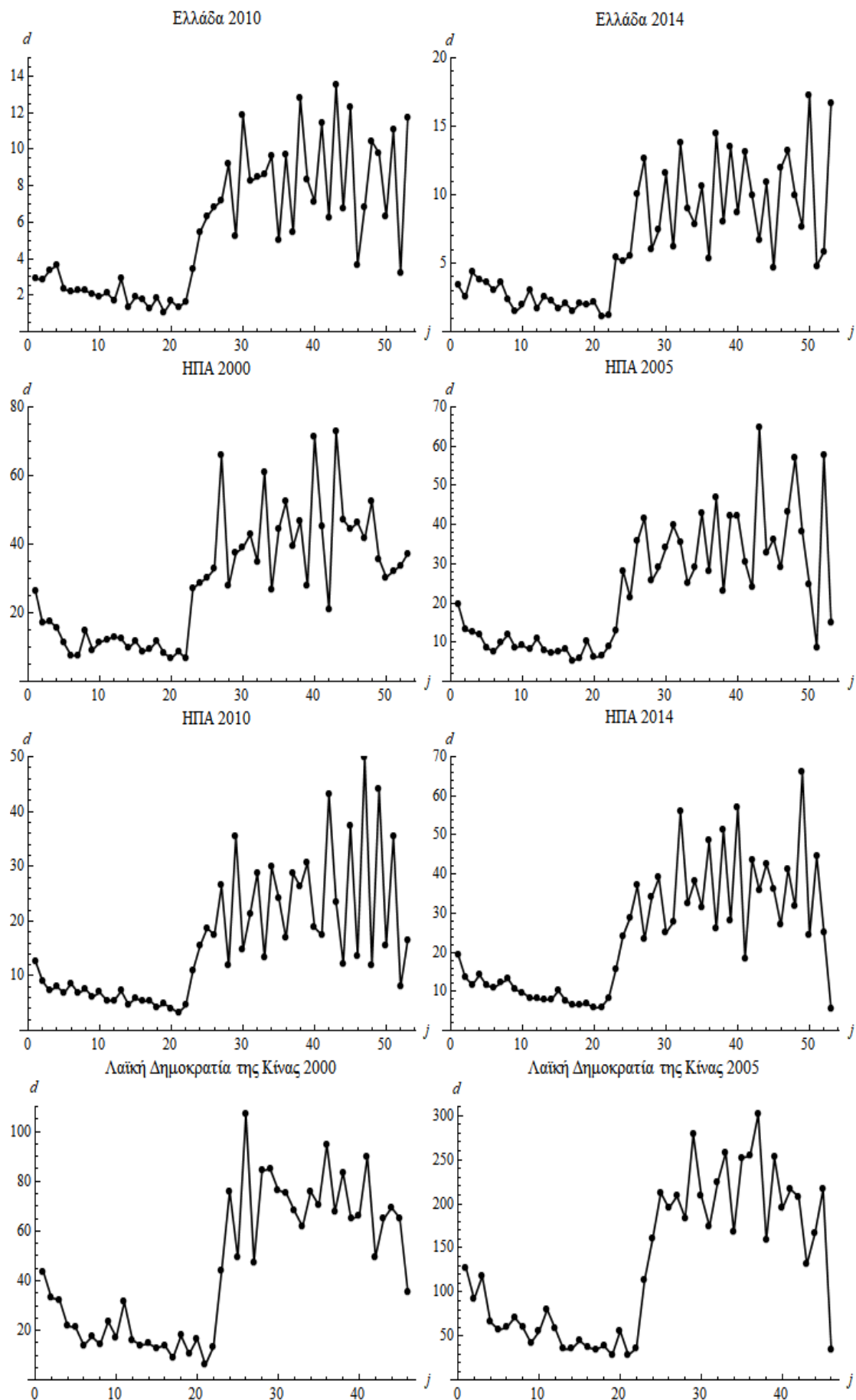


Ρωσία 2014

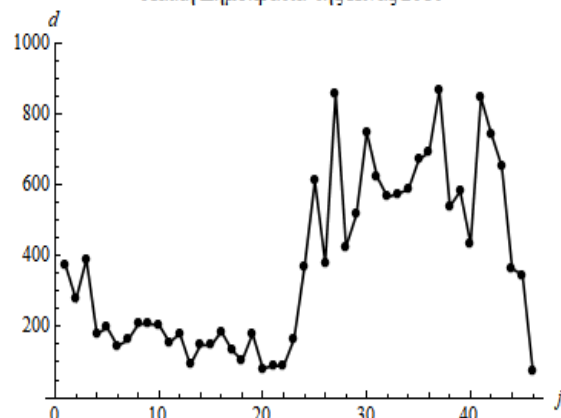


Παράρτημα XI. Διαγράμματα των αποστάσεων της μήτρας ελεγκσιμότητας, K_2 , στην περίπτωση της συμπαραγωγής

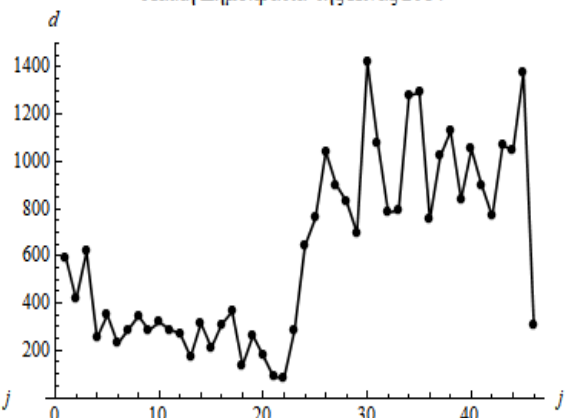




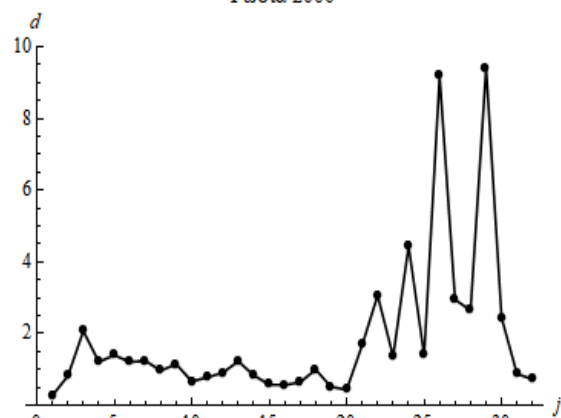
Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας 2010



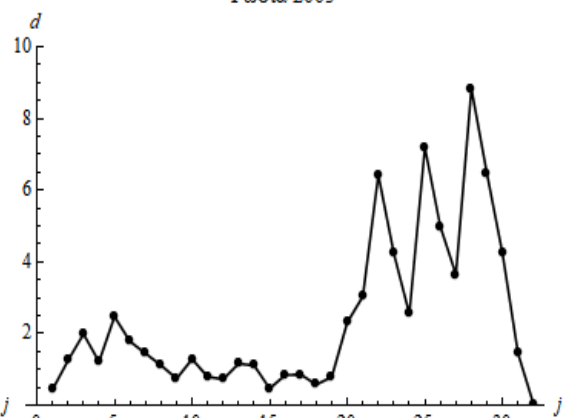
Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας 2014



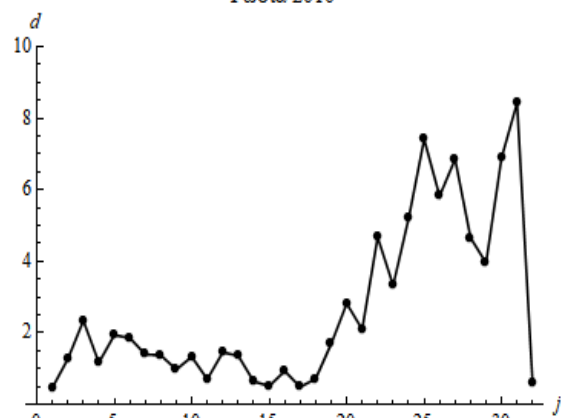
Ρωσία 2000



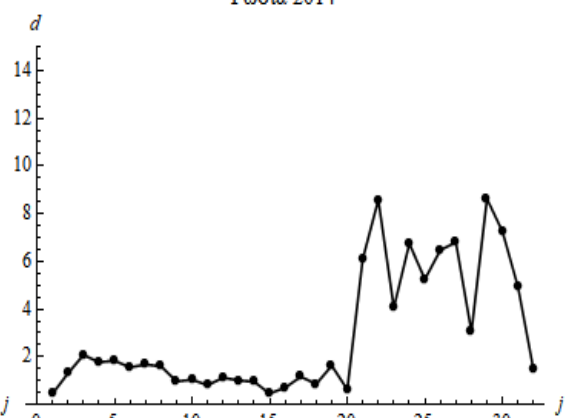
Ρωσία 2005



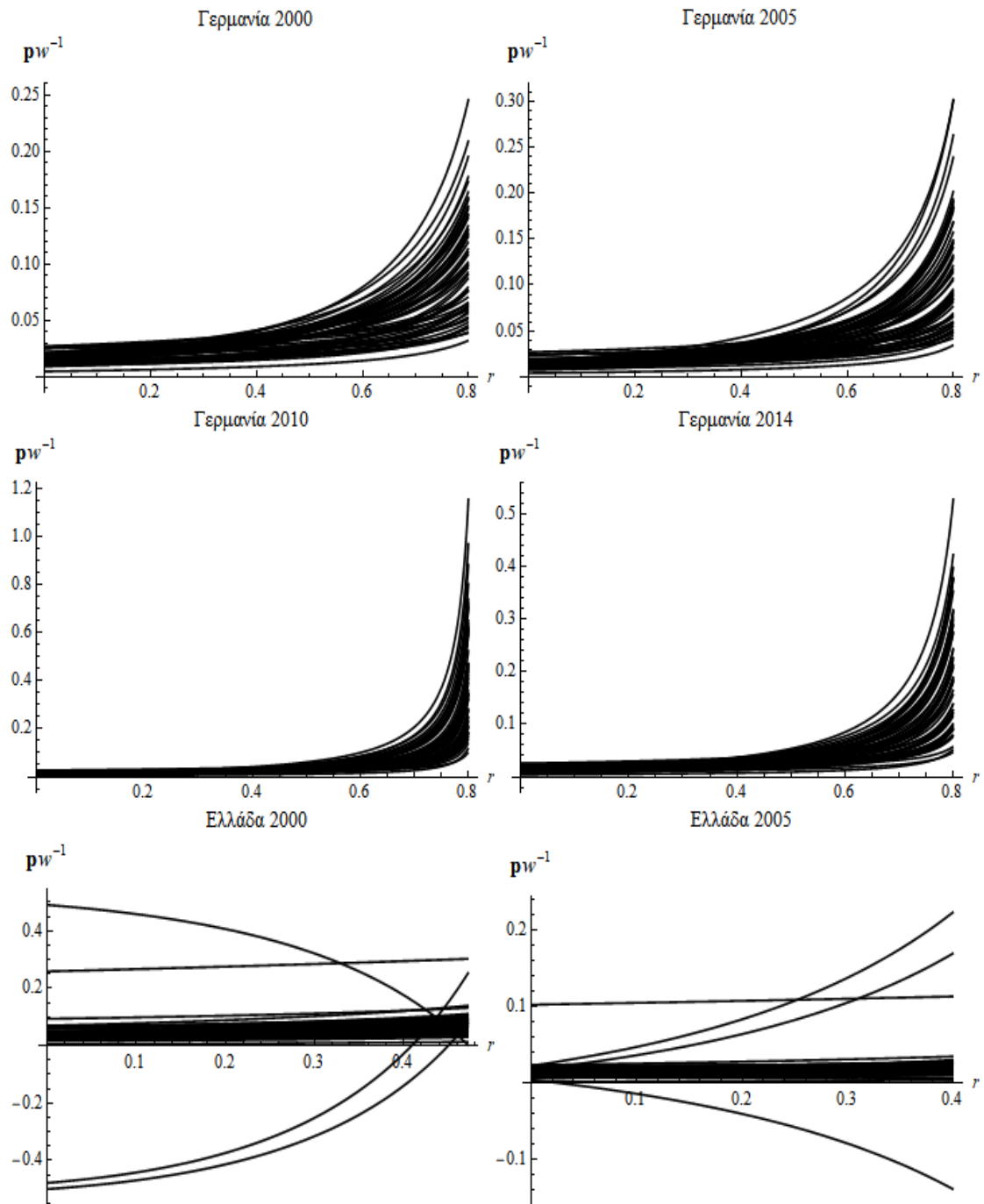
Ρωσία 2010

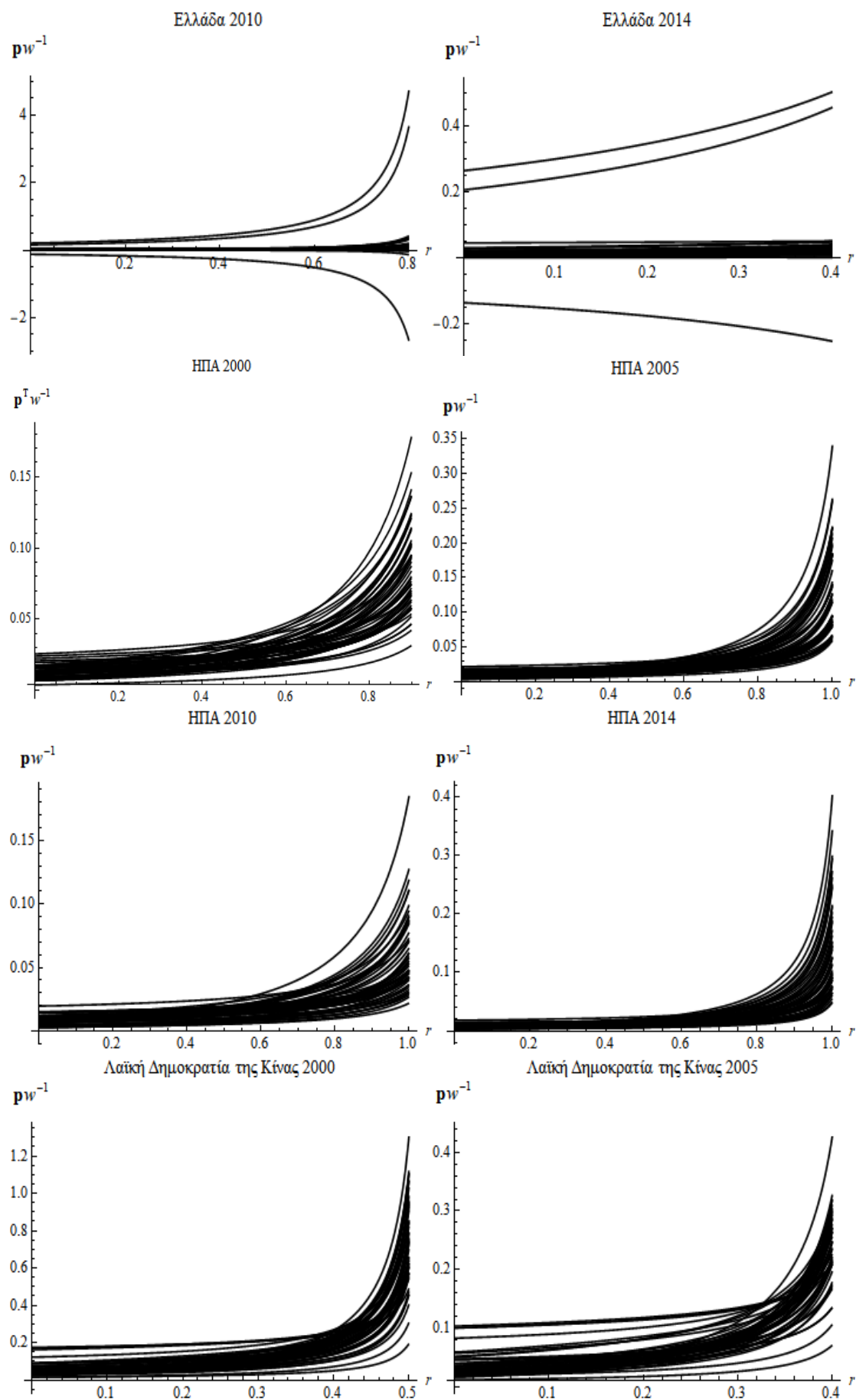


Ρωσία 2014

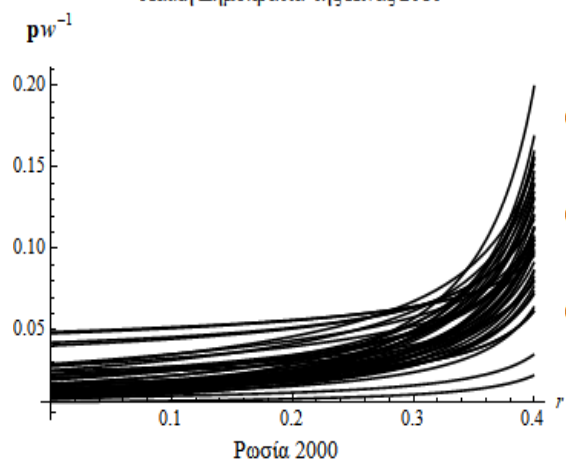


Παράρτημα XII. Διαγράμματα των «Labour-Commanded» τιμών στην περίπτωση της συμπαραγωγής

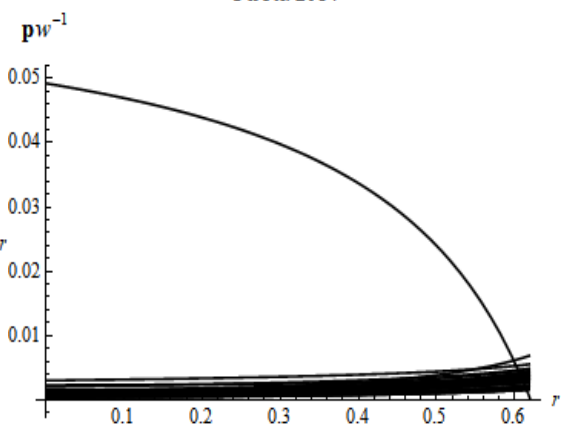
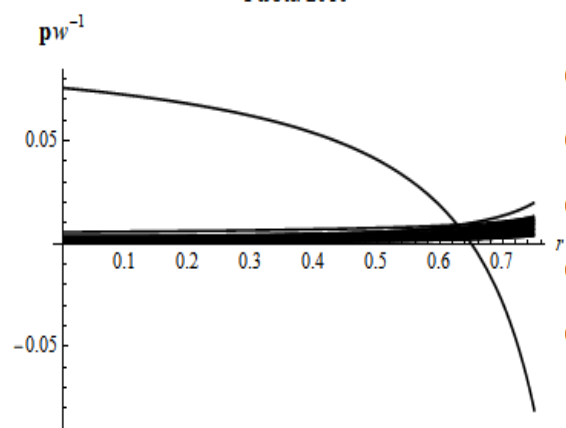
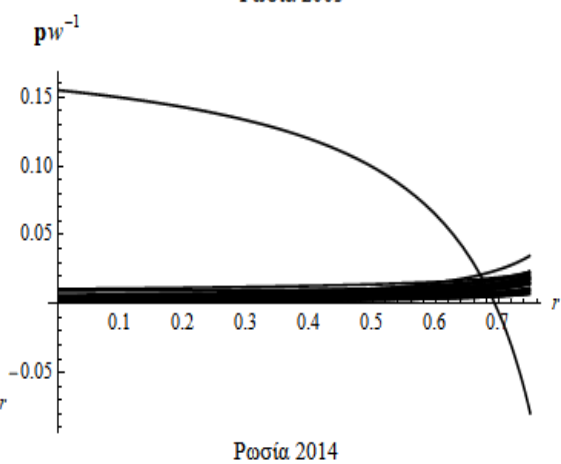
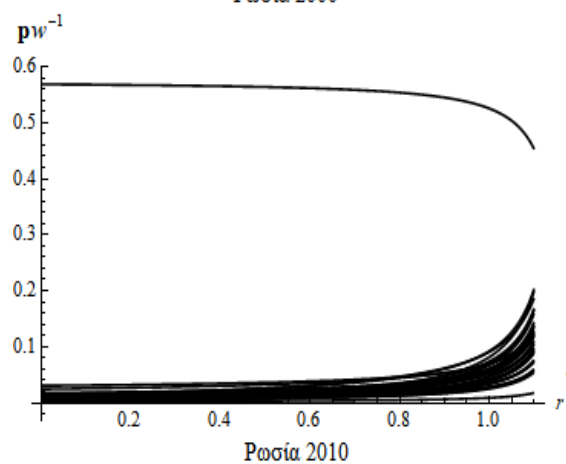
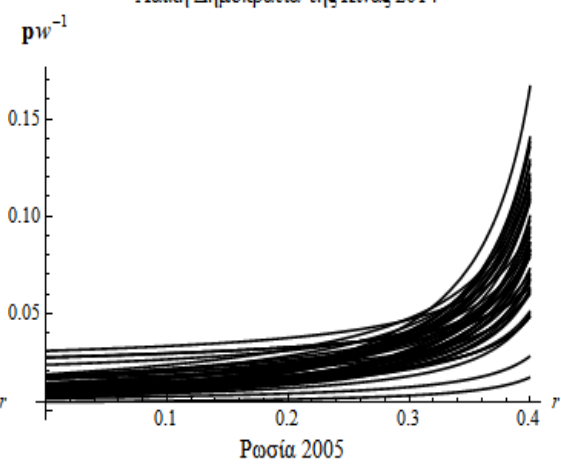




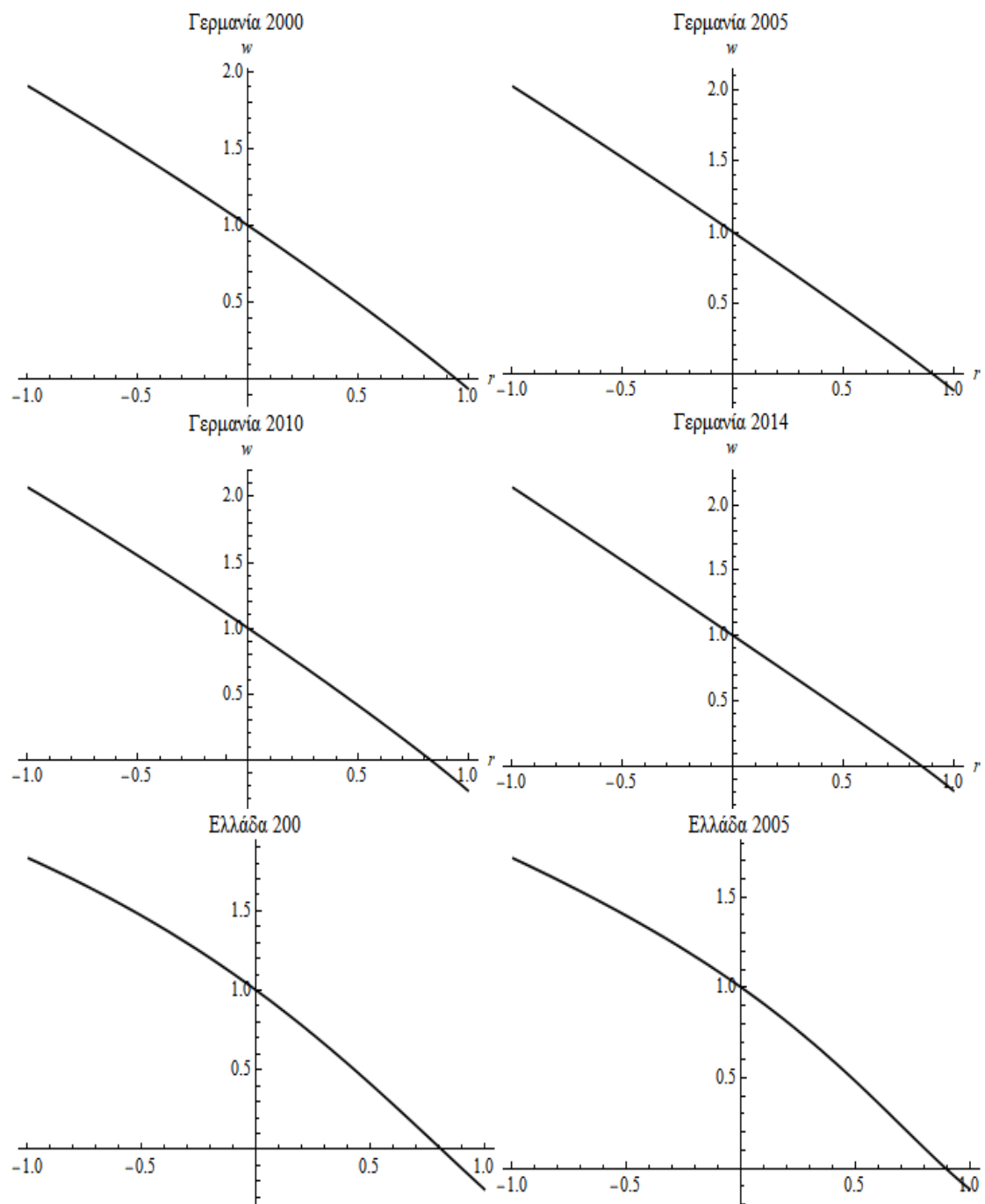
Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας 2010

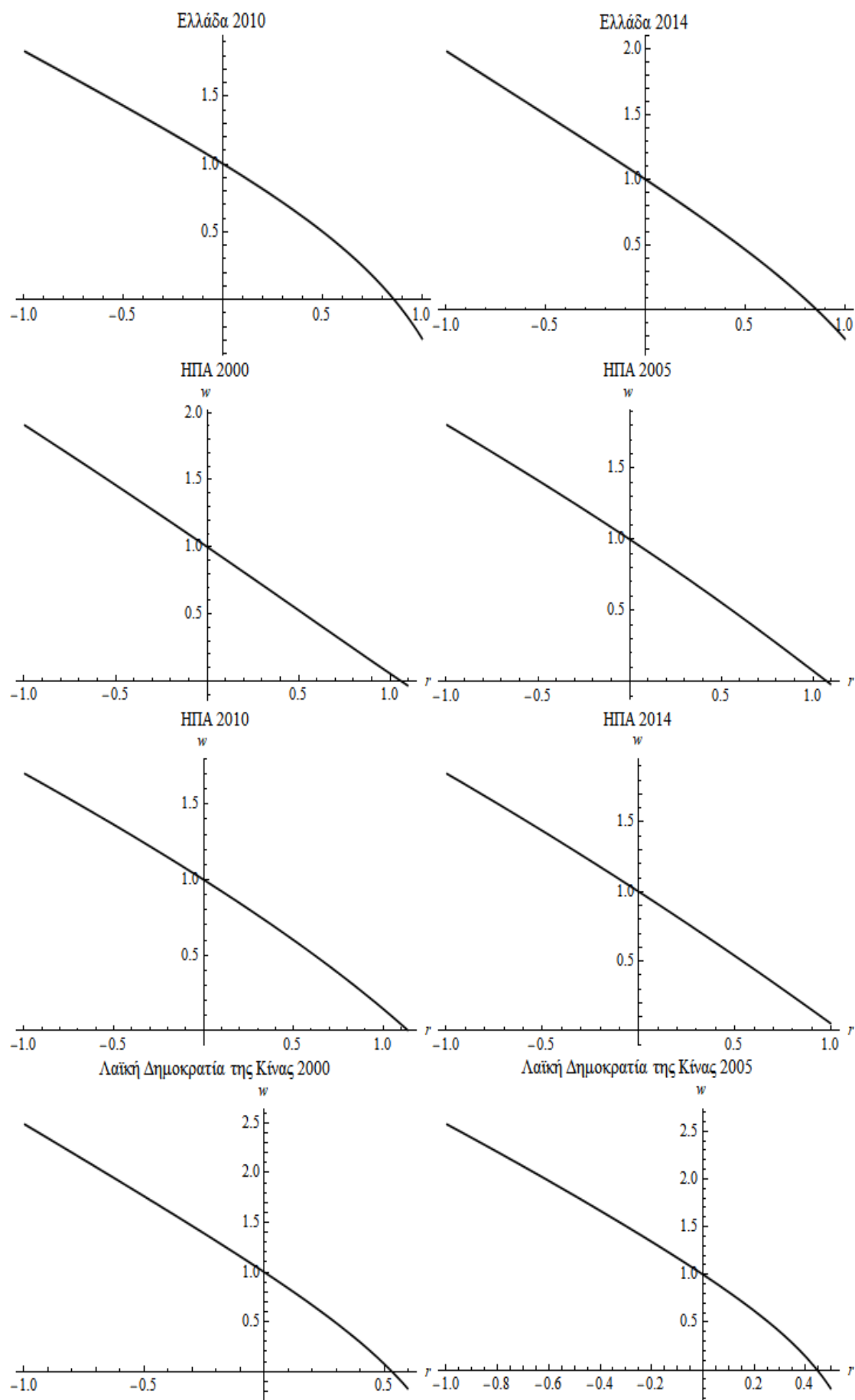


Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας 2014

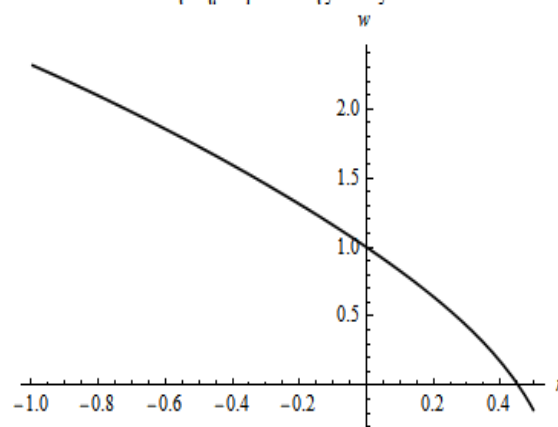


Παράρτημα XIII. Καμπύλες ωρομισθίου–ποσοστού κέρδους στην περίπτωση της συμπαραγωγής

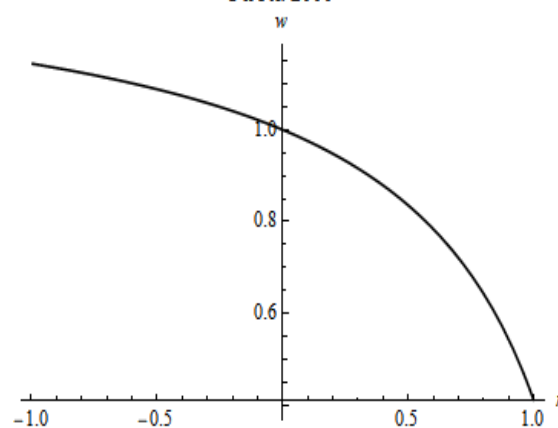




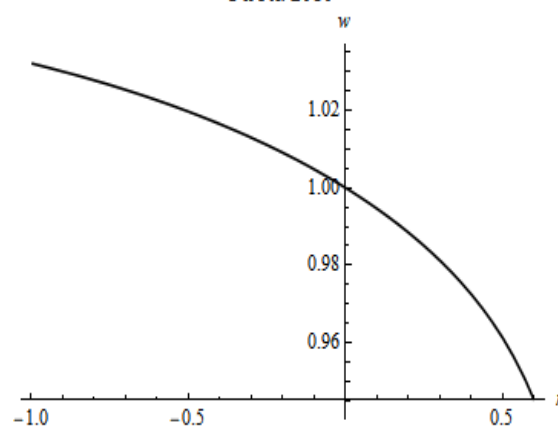
Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας 2010



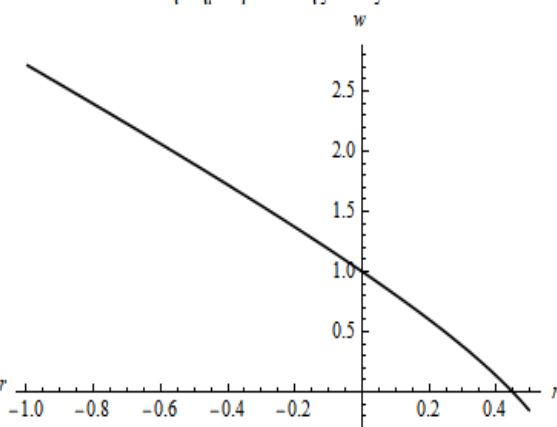
Ρωσία 2000



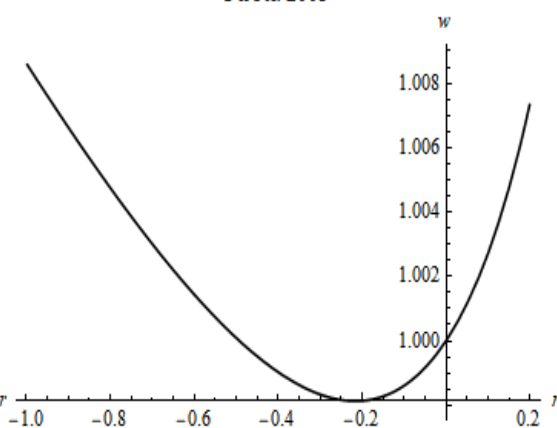
Ρωσία 2010



Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας 2014



Ρωσία 2005



Ρωσία 2014

