ΕΠΕΚΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΝ ΤΗ ΠΡΟΚΡΙΣΕΙ ΔΙ' ΕΜΜΕΣΟΥ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΟΣ

'Υπὸ Π. Ι. ΣΤΕΡΙΩΤΗ
'Υφηγητοῦ ἐν τῇ Α.Σ.Ο.Ε.Ε.

Εἰσαγωγή.— Εἰς προηγουμένην μελέτην μας [1], ἐδώσαμεν νέαν μέθοδον προκρίσεως συναλλαγῆς δι' ἀμέσου συναλλάγματος. Ἡ ἁπλότης τῆς μεθόδου ἤγαγεν ἡμᾶς εἰς τὴν γενίκευσιν τῆς μεθόδου ταύτης καὶ ἐν τῇ συναλλαγῇ δι' ἐμμέσου συναλλάγματος, καίτοι τοῦτο ἐκ πρώτης ὄψεως θὰ ἔδει νὰ θεωρηθῇ ὡς μὴ δυνατὸν λόγῳ τοῦ πολυπλόκου τῶν πράξεων εἰς ἃς ἄγει τὸ πρόβλημα.

Ἡ πρόκρισις συναλλαγῆς δι' ἐμμέσου συναλλάγματος, συνίσταται εἰς συνδυασμοὺς ἐπὶ τοῦ ἀμέσου καὶ ἐμμέσου συναλλάγματος. Τοῦτο ὅμως πολλαπλασιάζει τὰς πράξεις καὶ καθιστᾷ τὸ ὅλον πρόβλημα ἐξαιρετικῶς πολύπλοκον κατὰ τοὺς ὑπολογισμούς.

Ἡ ἐπέκτασις τῆς γεωμετρικῆς μεθόδου, ἐν τῇ προκρίσει δι' ἐμμέσου συναλλάγματος, ἐνισχύει τὴν ἄποψιν ὅτι ἡ νέα μέθοδος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πλεονεκτοῦσα τῆς κλασσικῆς ἀριθμητικῆς μεθόδου.

Ἡ νέα μέθοδος ἐξακολουθεῖ, καὶ ἐν τῇ περιπτώσει τῆς συναλλαγῆς δι' ἐμμέσου συναλλάγματος, νὰ κέκτηται τὰ προσόντα ἐκεῖνα ἅτινα ἐξεθέσαμεν ἐν τῇ προμνησθείσῃ ἐργασίᾳ.

'Ορισμοί.— Ὅταν πρὸς διακανονισμὸν χρεαπαιτήσεώς τινος μεταξὺ τῶν θέσεων (ἀγορῶν) Α καὶ Β χρησιμοποιῶμεν συν-

---

[1] Ἴδε Π. Ι. Στεριώτη, Ἡ πρόκρισις τοῦ ἀμέσου συναλλάγματος γεωμετρικῶς, «Ἀρχεῖον Οἰκονομικῶν καὶ Κοινωνικῶν Ἐπιστημῶν», τόμ. 37, Ἀθῆναι 1957. σελ. 393.

αλλαγματικὴν πρᾶξιν ἐπὶ τρίτης θέσεως (ἀγορᾶς) Γ, λέγομεν ὅτι ἐκτελοῦμεν πρᾶξιν ἐμμέσου συναλλάγματος [1].

Ὡς ἐνδιαμέσους θέσεις δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν καὶ πλείονας τῆς μιᾶς, πλὴν ἐν τῇ πράξει τοῦτο δὲν ἐφαρμόζεται διότι τὰ ἔξοδα αὐξάνονται καὶ οὕτω τὸ ἄμεσον συνάλλαγμα ἀποβαίνει εὐθηνότερον.

Τὴν ἐν τῇ θέσει Α τιμὴν τοῦ συναλλάγματος ἐπὶ τῆς θέσεως Β παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου Σ^{β}_{α}, τὴν ἐν τῇ θέσει Γ τιμὴν τοῦ συναλλάγματος ἐπὶ τῆς θέσεως Β παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου Σ^{β}_{γ}, κ.ο.κ.

Τὸν σταθερὸν διαιρέτην τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸ ἐπιτόκιον τῆς θέσεως Β, Γ, . . . παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου Δ_{β}, Δ_{γ}, . . . Τὰς ἡμέρας, ἤτοι τὴν προθεσμίαν δι' ἣν τὸ δελτίον τῆς θέσεως Α δίδει τὴν τιμὴν τοῦ συναλλάγματος ἐπὶ τῆς Β, παριστῶμεν διὰ N^{β}_{α}· διὰ N^{β}_{γ} παριστῶμεν τὴν προθεσμίαν δι' ἣν τὸ δελτίον τῆς θέσεως Γ δίδει τὴν τιμὴν τοῦ συναλλάγματος ἐπὶ τῆς Β κ.ο.κ.

Ἐὰν ἐν τῇ θέσει Α ἡ τιμὴ σταθερᾶς τινος ποσότητος νομισματικῶν μονάδων τῆς Β δίδεται ὑπὸ μεταβλητῆς ποσότητος ἐπιχωρίων νομισματικῶν μονάδων ὄψεως τῆς Α, λέγομεν ὅτι ἡ Α δίδει τὸ Ἀβέβαιον ἔναντι τῆς Β.

Ἐὰν ἐν τῇ θέσει Α ἡ τιμὴ σταθερᾶς ποσότητος ἐπιχωρίων νομισματικῶν μονάδων ὄψεως τῆς Α δίδεται ὑπὸ μεταβλητῆς ποσότητος νομισμάτων τῆς Β, λέγομεν ὅτι ἡ Α δίδει τὸ Βέβαιον ἔναντι τῆς Β.

Πρόκρισις συναλλαγῆς (arbitrage) καλεῖται [2] ἡ σύγκρισις διαφόρων οἰκονομικῶν πράξεων ἀγουσῶν εἰς τὸν αὐτὸν σκοπόν, ἡ εὕρεσις ἐκείνης ἥτις παρουσιάζει τὰ πλειότερα πλεονεκτήματα, καὶ ἡ ἐκλογὴ ταύτης πρὸς ἐκτέλεσιν διὰ τὴν ἀπόληψιν κέρδους ὅσον ἔνεστι μεγαλυτέρου.

Ἡ παρεμβολὴ τῆς τρίτης θέσεως δύναται νὰ γίνῃ κατὰ τοὺς κατωτέρω τέσσαρας τρόπους :

---

[1] Ἴδε Τ. Κεραμιδᾶ, Βραχυπρόθεσμοι οἰκονομικαὶ πράξεις, ἔκδ. 4η, Ἀθῆναι 1949, σελ. 244.

[2] Ἴδε Τ. Κεραμιδᾶ, ἔνθ' ἀνωτέρω, σελ. 253.

1. Ἡ ἐνδιαφερομένη θέσις ν' ἀγοράσῃ συνάλλαγμα τῆς Γ, τὸ ὁποῖον ν' ἀποστείλῃ εἰς τὴν ἑτέραν θέσιν, ἥτις πωλοῦσα τοῦτο νὰ τὸ μετατρέψῃ εἰς ἐπιχώριον νόμισμα. Ὁ τρόπος οὗτος καλεῖται μέθοδος τῆς συνθέτου ἰσοτιμίας (parité composée).

2. Ἡ ἐνδιαφερομένη θέσις ν' ἀγοράσῃ συνάλλαγμα τῆς θέσεως Γ, ν' ἀποστείλῃ τοῦτο εἰς τὸν ἀνταποκριτήν της ἐν τῇ Γ ἵνα δι' αὐτοῦ ἀγορασθῇ συνάλλαγμα ἐπὶ τῆς δευτέρας θέσεως ὅπερ καὶ θὰ ἀποσταλῇ εἰς ταύτην.

Ὁ τρόπος οὗτος καλεῖται μέθοδος τῶν δύο ἐμβασμάτων (prix de revient).

3. Ἡ ἐνδιαφερομένη θέσις δίδει ἐντολὴν εἰς τὸν ἐν τῇ θέσει Γ ἀνταποκριτήν της, ὅπως ἀγοράσῃ συνάλλαγμα ἐπὶ τῆς ἑτέρας θέσεως, ὅπερ ν' ἀποστείλῃ εἰς ταύτην καὶ διὰ νὰ καλυφθῇ νὰ σύρῃ τραβηκτικὴν ἐπὶ τῆς ἐντολοδόχου θέσεως.

Ὁ τρόπος οὗτος καλεῖται μέθοδος τοῦ ἐμβάσματος—τραβήγματος ἢ τῆς τραπεζιτικῆς ἐντολῆς (ordre de Banque).

4. Ἡ ἐνδιαφερομένη θέσις παραγγέλλει εἰς τὴν δευτέραν θέσιν νὰ σύρῃ τραβηκτικὴν ἐπὶ τοῦ ἀνταποκριτοῦ της ἐν τῇ θέσει Γ, ὅστις, πρὸς κάλυψίν του σύρει νέαν τραβηκτικὴν ἐπὶ τῆς ἐνδιαφερομένης θέσεως.

Ὁ τρόπος οὗτος ἐνεργείας καλεῖται μέθοδος τῶν δύο τραβηγμάτων (prix de vente).

Ἡ πρόκρισις συναλλαγῆς, γενικῶς, συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν:

α΄) τῆς μᾶλλον συμφερούσης μεθόδου μεταξὺ τῶν τεσσάρων τοῦ ἐμμέσου συναλλάγματος,

β΄) τῆς μᾶλλον συμφερούσης μεθόδου μεταξὺ τῶν προκριθεισῶν τοῦ ἀμέσου καὶ ἐμμέσου συναλλάγματος,

γ΄) τῆς ἐνδιαμέσου ἀγορᾶς, ἥτις διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μεθόδου τοῦ ἐμμέσου συναλλάγματος παρέχει τὸν συμφερώτερον διακανονισμὸν χρεαπαιτήσεώς τινος.

Αἱ πράξεις τοῦ συναλλάγματος εἶναι πραγματικαὶ οἰκονομικαὶ πράξεις [1] προκειμένου νὰ διακανονισθῇ μία χρεαπαίτησις

[1] Ἴδε Τ. Κεραμιδᾶ, ἔνθ' ἀνωτέρω, σελ. 254.

μετὰ τοῦ ἐξωτερικοῦ, καὶ πράξεις κερδοσκοπίας, ὅταν κατὰ διάφορον τόπον, χρόνον ἢ τρόπον γίνωνται ἐπὶ τῷ σκοπῷ κέρδους ἐκ τῆς διαφορᾶς τιμῶν.

Ἐν τῇ παρούσῃ μελέτῃ λαμβάνομεν μόνον τὴν περίπτωσιν τοῦ ἐν τῇ θέσει Α ὀφειλέτου μιᾶς νομισματικῆς μονάδος τῆς Β. Ὁ τρόπος σκέψεως εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ διὰ τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς ἐν τῇ θέσει Α εὑρίσκεται ὁ πιστωτὴς μιᾶς νομισματικῆς μονάδος τῆς Β ἢ ὁ κερδοσκοπῶν ἐπὶ τοῦ συναλλάγματος. Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς περιπτώσεις τὰς προκυπτούσας ἐκ τῆς ἐναλλαγῆς τῶν θέσεων Α καὶ Β. Δι' ὃ καὶ δὲν ἐξετάζομεν εἰμὴ μόνον τὴν α' περίπτωσιν.

Α' Πρόκρισις μεταξὺ τῶν τεσσάρων μεθόδων τοῦ ἐμμέσου συναλλάγματος.

Ι. Ὁ ἐν τῇ ἀγορᾷ Α ἐκτελεῖ τὴν πρόκρισιν καὶ αἱ τρεῖς ἀγοραὶ δίδουσι τὸ ἀβέβαιον.

Ἡ πληρωμὴ μιᾶς νομ. μονάδος τῆς Β θὰ στοιχίσῃ εἰς τὴν θέσιν Α,

$$\begin{aligned} &\text{διὰ τῆς συνθέτου ἰσοτιμίας}^{1}: && X_1 = \Sigma_\alpha^\gamma : \Sigma_\beta^\gamma. \\ &\text{διὰ τῶν δύο ἐμβασμάτων}: && X_2 = \Sigma_\alpha^\gamma\ \Sigma_\gamma^\beta. \\ &\text{διὰ τοῦ ἐμβάσματος—τραβήγματος}: && X_3 = \Sigma_\gamma^\beta : \Sigma_\gamma^\alpha. \\ &\text{διὰ τῶν δύο τραβηγμάτων}: && X_4 = 1 : \Sigma_\beta^\gamma\ \Sigma_\gamma^\alpha. \end{aligned} \qquad (A_1)$$

Πρὸς ἁπλοποίησιν, παριστῶμεν τὸ ἀποτέλεσμα ἑκάστης τῶν τεσσάρων μεθόδων διὰ τῶν ἀντιστοίχων συμβόλων X_1, X_2, X_3, X_4. Οὕτω, π.χ., γράφοντες X_1 θὰ ἐννοοῦμεν τὸ ἀποτέλεσμα διὰ τῆς συνθέτου ἰσοτιμίας, διὰ X_2 τὸ ἀποτέλεσμα διὰ τῆς μεθόδου τῶν δύο ἐμβασμάτων κ.ο.κ.

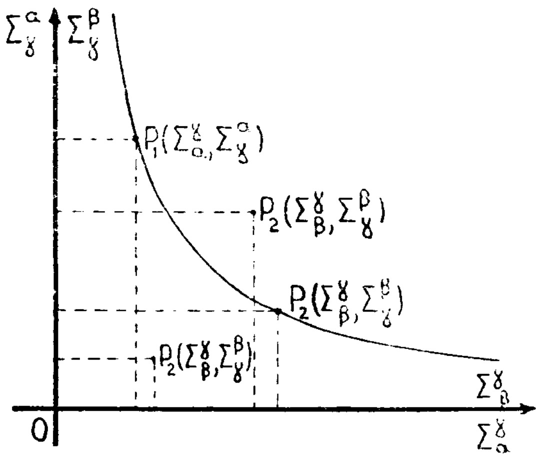
Θεωρήσωμεν ἤδη ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων ὡς διπλοῦν, ἤτοι ἐπὶ μὲν τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος λάβωμεν συγχρόνως τὰς τιμὰς τῶν Σ_α^γ καὶ Σ_β^γ ἐπὶ δὲ τοῦ κατακορύφου τὰς τιμὰς τῶν Σ_γ^α καὶ Σ_γ^β (Σχ. 1).

Κατασκευάσωμεν, ἐν συνεχείᾳ, ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν τῆς μορ-

[1] Ἴδε Τ. Κεραμιδᾶ, ἔνθ' ἀνωτέρω, σελ. 268.

φῆς $\chi\psi = 1$ καί, ἀκολούθως, καθορίσωμεν τὴν θέσιν τῶν σημείων P_1, P_2 τῶν ἐχόντων συντεταγμένας, ἀντιστοίχως, Σ_α^γ, Σ_γ^α καὶ Σ_β^γ, Σ_γ^β.

Ἡ θέσις εἰς ἣν εὑρίσκονται τὰ σημεῖα P_1, P_2 ἐν σχέσει πρὸς τὴν ὑπερβολὴν καθορίζουσι τὰς κάτωθι περιπτώσεις :



Σχ. 1.

α΄. Ἀμφότερα τὰ σημεῖα P_1 (Σ_α^γ, Σ_γ^α), P_2 (Σ_β^γ, Σ_γ^β) εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς, ἥτις θὰ εἶναι ἡ γραμμὴ ἰσοτιμίας[1]. Θὰ ἔχωμεν ἰσοτιμίαν μεταξὺ τῶν τριῶν θέσεων καί, κατὰ συνέπειαν, δὲν ὑφίσταται πρόκρισις μεθόδου.

Τῷ ὄντι, ἐφ' ὅσον τὰ σημεῖα P_1, P_2 εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς, θὰ ἔχωμεν :

$$\Sigma_\alpha^\gamma \cdot \Sigma_\gamma^\alpha = 1 \text{ καὶ } \Sigma_\beta^\gamma \cdot \Sigma_\gamma^\beta = 1$$

Ὡς συνέπειαν τῶν ἰσοτήτων τούτων εὑρίσκομεν :

$$X_1 : X_2 = 1 : \Sigma_\gamma^\beta \cdot \Sigma_\beta^\gamma = 1, \text{ ἤτοι } X_1 = X_2,$$

$$X_2 : X_3 = \Sigma_\alpha^\gamma \cdot \Sigma_\gamma^\alpha = 1, \text{ ἤτοι } X_2 = X_3,$$

$$X_3 : X_4 = \Sigma_\gamma^\beta : \Sigma_\gamma^\alpha : 1 : \Sigma_\beta^\gamma \cdot \Sigma_\gamma^\alpha = 1 \text{ ἤτοι } X_3 = X_4.$$

[1] Ἴδε Π. Ι. Στεριώτη, ἔνθ' ἀνωτέρω.

καὶ ἐκ τούτων λαμβάνομεν : $X_1 = X_2 = X_3 = X_4$, πρᾶγμα ὅπερ σημαίνει ὅτι καὶ διὰ τῶν τεσσάρων μεθόδων θὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ἤτοι πρόκρισις δὲν ὑφίσταται.

β'. Μόνον τὸ σημεῖον P_1 (Σ^γ_α, Σ^α_γ) εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας. Τότε θὰ ἔχωμεν δύο περιπτώσεις, καθοριζομένας ἐκ τῆς θέσεως εἰς ἣν θὰ εὑρεθῇ τὸ ἕτερον τῶν σημείων P_2 (Σ^γ_β, Σ^β_γ).

Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει θεωροῦμεν τὸ P_1 (Σ^γ_α, Σ^α_γ), (Σχ. 1), ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας καὶ τὸ P_2 (Σ^γ_β,Σ^β_γ) ἄνωθεν ταύτης. Βάσει τῆς ὑποθέσεως ταύτης θὰ ἔχωμεν :

$$\Sigma^\gamma_\alpha \cdot \Sigma^\alpha_\gamma = 1, \quad \Sigma^\gamma_\beta \cdot \Sigma^\beta_\gamma > 1$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{1}{\Sigma^\gamma_\beta\ \Sigma^\beta_\gamma > 1}, \quad \text{ἐξ ἧς } X_1 < X_2$$

$$\frac{X_2}{X_3} = \Sigma^\gamma_\alpha \cdot \Sigma^\alpha_\gamma = 1, \quad \text{» »} \quad X_2 = X_3$$

$$\frac{X_3}{X_4} = \Sigma^\gamma_\beta \cdot \Sigma^\beta_\gamma > 1, \quad \text{» »} \quad X_3 > X_4$$

$$\frac{X_4}{X_1} = \frac{1}{\Sigma^\gamma_\alpha \cdot \Sigma^\alpha_\gamma} = 1, \quad \text{» »} \quad X_4 = X_1$$

Ἀπορριπτομένων τῶν X_2, X_3 λαμβάνομεν τὰς X_1, X_4 καὶ ἐπειδὴ $X_1 = X_4$ ἑκατέρα τῶν δύο τελευταίων μεθόδων θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα. Οὕτως ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ πρόκρισις θὰ γίνῃ ἢ διὰ τῆς συνθέτου ἰσοτιμίας ἢ διὰ τῶν δύο τραβηγμάτων.

Ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει θεωροῦμεν τὸ P_1(Σ^γ_α, Σ^α_γ) ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας, καὶ τὸ ἕτερον P_2 (Σ^γ_β, Σ^β_γ) κάτωθεν ταύτης (Σχ. 1). Βάσει τῆς ὑποθέσεως ταύτης θὰ ἔχωμεν :

$$\Sigma^\gamma_\alpha \cdot \Sigma^\alpha_\gamma = 1, \quad \Sigma^\gamma_\beta \cdot \Sigma^\beta_\gamma < 1$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{1}{\Sigma^\gamma_\beta\ \Sigma^\beta_\gamma < 1}, \quad \text{ἐξ ἧς } X_1 > X_2$$

$$\frac{X_2}{X_3} = \Sigma^\gamma_\alpha\ \Sigma^\alpha_\gamma = 1, \quad \text{» »} \quad X_2 = X_3$$

$$\frac{X_3}{X_4} = \Sigma^{\gamma}_{\beta}\, \Sigma^{\beta}_{\gamma} < 1, \quad » \quad » \; X_3 < X_4$$

$$\frac{X_4}{X_1} = \frac{1}{\Sigma^{\gamma}_{\alpha}\, \Sigma^{\alpha}_{\gamma}} = 1, \quad » \quad » \; X_4 = X_1$$

'Ενταῦθα ἀπορριπτομένων τῶν X_1, X_4 λαμβάνομεν τὰς X_2, X_3 καὶ ἐπειδὴ $X_2 = X_3$ ἑκατέρα τούτων θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα. Οὕτως, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἡ πρόκρισις θὰ γίνῃ ἢ διὰ δύο ἐμβασμάτων ἢ δι' ἐμβάσματος—τραβήγματος.

'Εὰν εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἐναλλαχθῶσιν τὰ P_1 καὶ P_2, θὰ ἔχωμεν διὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ἔμβασμα—τράβηγμα ἢ δύο τραβήγματα διὰ δὲ τὴν δευτέραν σύνθετον ἰσοτιμίαν ἢ δύο ἐμβάσματα.

γ'. 'Αμφότερα τὰ σημεῖα εὑρίσκονται ἄνωθεν ἢ κάτωθεν τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας. Θὰ ἔχωμεν καὶ πάλιν δύο περιπτώσεις.

'Εν τῇ πρώτῃ περιπτώσει καθ' ἣν τὰ P_1 (Σ^{γ}_{α}, Σ^{α}_{γ}), P_2 (Σ^{γ}_{β}, Σ^{β}_{γ}) κεῖνται ἄνωθεν τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας, (Σχ. 2) ἐργαζόμενοι ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις λαμβάνομεν :

$$\Sigma^{\gamma}_{\alpha}.\, \Sigma^{\alpha}_{\gamma} > 1, \quad \Sigma^{\gamma}_{\beta}.\, \Sigma^{\beta}_{\gamma} > 1,$$

$$\frac{X_1}{X_2} < 1 \quad \text{ἤτοι} \quad X_1 < X_2$$

$$\frac{X_2}{X_3} > 1 \quad » \quad X_2 > X_3$$

$$\frac{X_3}{X_4} > 1 \quad » \quad X_3 > X_4$$

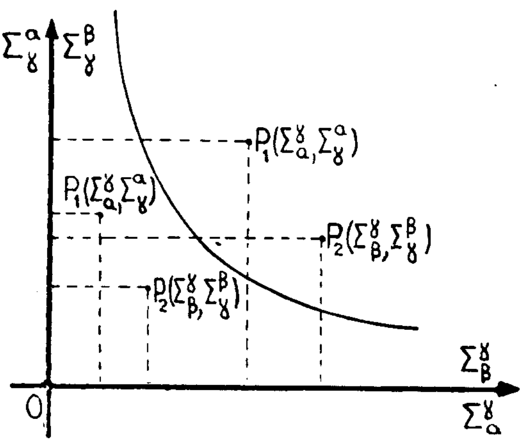
$$\frac{X_4}{X_1} < 1 \quad » \quad X_1 > X_4$$

Τὸ X_4 ἔχει τὴν μικροτέραν τιμὴν καὶ συνεπῶς θὰ προκριθῇ ἡ μέθοδος τῶν δύο τραβηγμάτων.

'Εν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει καθ' ἣν ἀμφότερα τὰ σημεῖα κεῖνται κάτωθεν τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας (Σχ. 2), θὰ ἔχωμεν :

$\Sigma^{\gamma}_{\alpha}.\Sigma^{\alpha}_{\gamma} < 1$, $\Sigma^{\gamma}_{\beta}.\Sigma^{\beta}_{\gamma} < 1$ καὶ ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω συνάγομεν εὐκόλως ὅτι θὰ προκριθῇ τὸ X_2, ἤτοι τὰ δύο ἐμβάσματα.

δ'. Ἐὰν τὸ ἓν τῶν δύο σημείων θεωρηθῇ ἄνωθεν καὶ τὸ ἕτερον κάτωθεν τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας.



Σχ. 2.

Καὶ ἐνταῦθα θὰ ἔχωμεν δύο περιπτώσεις. Τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ P_1 $(\Sigma^{\gamma}_{\alpha}, \Sigma^{\alpha}_{\gamma})$ κεῖται ἄνωθεν τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας καὶ τὸ P_2 $(\Sigma^{\gamma}_{\beta}, \Sigma^{\beta}_{\gamma})$ κάτωθεν ταύτης καὶ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ P_1 $(\Sigma^{\gamma}_{\alpha}, \Sigma^{\alpha}_{\gamma})$ κεῖται κάτωθεν καὶ τὸ P_2 $(\Sigma^{\gamma}_{\beta}, \Sigma^{\beta}_{\gamma})$ ἄνωθεν τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας.

Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει θὰ ἔχωμεν :

$\Sigma^{\gamma}_{\alpha}.\Sigma^{\alpha}_{\gamma} > 1$ καὶ $\Sigma^{\gamma}_{\beta}.\Sigma^{\beta}_{\gamma} < 1$ καί, συνεπείᾳ τούτων, $X_1 > X_2$, $X_2 > X_3$, $X_3 < X_4$, $X_4 < X_1$.

Ἄρα τὴν μικροτέραν τιμὴν ἔχει τὸ X_3 ἤτοι, ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, προκριτέον τὸ ἔμβασμα—τράβηγμα.

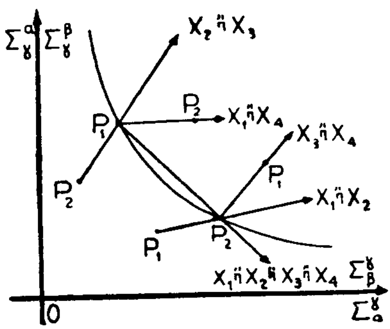
Ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει θὰ ἔχωμεν ἀντιστρόφως :

$\Sigma^{\gamma}_{\alpha}.\Sigma^{\alpha}_{\gamma} < 1$ καὶ $\Sigma^{\gamma}_{\beta}.\Sigma^{\beta}_{\gamma} > 1$ ὅτε

$$X_1 < X_2,\ X_2 < X_3,\ X_3 > X_4,\ X_4 > X_1$$

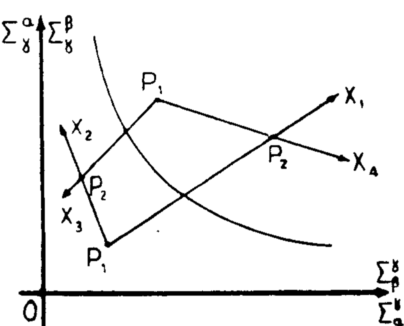
καὶ κατὰ συνέπειαν τὴν μικροτέραν τιμὴν ἔχει τὸ X_1, ἤτοι προκριτέα ἡ σύνθετος ἰσοτιμία.

Ἤδη θὰ ἔδει νὰ δοθῇ εἷς κανὼν συνοψίζων ἁπάσας τὰς περιπτώσεις. Πλὴν ὅμως, λόγῳ τῶν πολλῶν περιπτώσεων, ὁ κανὼν οὗτος θὰ εἶναι μακρὸς καὶ συνεπῶς οὐχὶ εὐμνημόνευτος. Ἀντὶ τούτου προετιμήσαμεν τὴν παράθεσιν τῶν δύο κατωτέρω σχημάτων (Σχ. 3 καὶ 4) δι' ὧν κατὰ τρόπον ἄμεσον δυνάμεθα ν' ἀποφανθῶμεν ποίαν τῶν τεσσάρων μεθόδων θὰ προκρίνωμεν δι' ἑκάστην τῶν περιπτώσεων.



Σχ. 3.

Εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἑνοῦμεν τὰ P_1, P_2 διὰ βέλους καὶ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ βέλους ἀνευρίσκομεν τὴν μέθοδον τὴν ὁποίαν θὰ χρησιμοποιήσωμεν.



Σχ. 4.

Οὕτω, π.χ., ἐὰν τὸ P_1 εὑρίσκηται κάτωθεν καὶ τὸ P_2 ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας (Σχ. 3) θὰ προκριθῇ ἡ X_1 (σύνθετος ἰσοτιμία) ἢ ἡ X_2 (δύο ἐμβάσματα)· ἐὰν τὸ P_1 εὑρίσκηται ἄνωθεν καὶ τὸ P_2 κάτωθεν τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας (Σχ. 4) θὰ προκριθῇ ἡ X_3 ("Εμβασμα-Τράβηγμα) κ.ο.κ. [1].

ΙΙ. Ἡ θέσις Β δίδει τὸ βέβαιον καὶ αἱ λοιπαὶ τὸ ἀβέβαιον.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἀντὶ τῶν τύπων (A_1) θὰ λάβωμεν τοὺς τύπους :

$$\begin{aligned}
&\text{Συνθέτου ἰσοτιμίας } X'_1 = \Sigma^{\gamma}_{\alpha}\, \Sigma^{\gamma}_{\beta} \\
&\text{Δύο ἐμβασμάτων } X'_2 = \Sigma^{\gamma}_{\alpha}\, \Sigma^{\beta}_{\gamma} \\
&\text{Ἐμβάσματος—τραβήγματος } X'_3 = \Sigma^{\beta}_{\gamma} : \Sigma^{\alpha}_{\gamma} \\
&\text{Δύο τραβηγμάτων } X'_4 = \Sigma^{\gamma}_{\beta} : \Sigma^{\alpha}_{\gamma}
\end{aligned} \qquad (A_2)$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ἐξαγομένων, ἅτινα προκύπτουσιν ἐκ τῶν τεσσάρων μεθόδων, λαμβάνομεν :

$$\frac{X'_1}{X'_2} = \frac{\Sigma^{\gamma}_{\beta}}{\Sigma^{\beta}_{\gamma}}, \quad \frac{X'_2}{X'_3} = \Sigma^{\gamma}_{\alpha}\, \Sigma^{\alpha}_{\gamma},$$

$$\frac{X'_3}{X'_4} = \frac{\Sigma^{\beta}_{\gamma}}{\Sigma^{\gamma}_{\beta}}, \quad \frac{X'_4}{X'_1} = \frac{1}{\Sigma^{\gamma}_{\alpha}\, \Sigma^{\alpha}_{\gamma}} \qquad (A_3)$$

Λαμβάνομεν διπλοῦν σύστημα ἀξόνων $\Sigma^{\gamma}_{\alpha}\, O \Sigma^{\alpha}_{\gamma}$, $\Sigma^{\gamma}_{\beta}\, O \Sigma^{\beta}_{\gamma}$, (Σχ. 5). Ἐν συνεχείᾳ, κατασκευάζομεν τὰς γραμμὰς ἰσοτιμίας $\Sigma^{\gamma}_{\alpha}\, \Sigma^{\alpha}_{\gamma} = 1$ καὶ $\Sigma^{\gamma}_{\beta} = \Sigma^{\beta}_{\gamma}$ καὶ προσδιορίζομεν τὴν θέσιν τῶν σημείων $M\,(\Sigma^{\gamma}_{\alpha}, \Sigma^{\alpha}_{\gamma})$, $N\,(\Sigma^{\gamma}_{\beta}, \Sigma^{\beta}_{\gamma})$.

Ἡ θέσις τῶν δύο σημείων M καὶ N, ὡς πρὸς τὰς γραμμὰς ἰσοτιμίας, θὰ καθορίσῃ τὴν προκριτέαν μέθοδον.

Ὑποθέσωμεν τὸ M ἄνωθεν τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας (ὑπερβολῆς) καὶ τὸ N κάτωθεν τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας (διχοτόμου). Θὰ ἰσχύωσιν αἱ σχέσεις :

$$\Sigma^{\gamma}_{\alpha}\, \Sigma^{\alpha}_{\gamma} > 1, \quad \Sigma^{\gamma}_{\beta} > \Sigma^{\beta}_{\gamma}$$

Βάσει τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων, ἐκ τῶν τύπων (A_3) λαμβάνομεν :

$$X'_1 > X'_2, \quad X'_2 > X'_3, \quad X'_3 < X'_4, \quad X'_4 < X'_1.$$

Ἐκ τῶν τελευταίων ἀνισοτήτων ἐξάγεται εὐκόλως, ὅτι τὴν μικροτέραν τιμὴν δίδει ἡ τρίτη μέθοδος, X'_3, ἤτοι τὸ ἔμβασμα-τράβηγμα εἶναι ἡ προκριτέα μέθοδος.

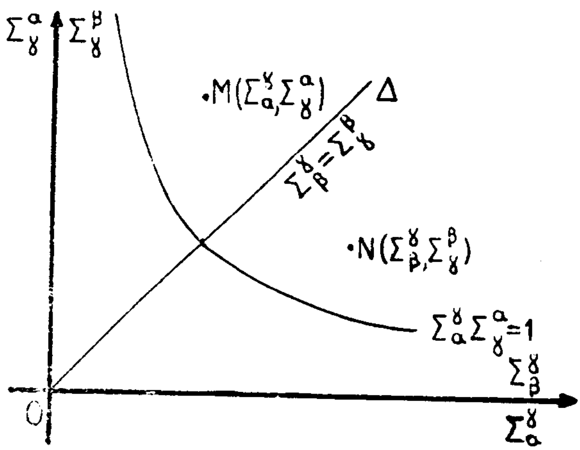
---

[1] Ἡ φορὰ τοῦ βέλους οὐδεμίαν σημασίαν ἔχει, ἁπλῶς δεικνύει ποῖον ἐκ τῶν X θὰ λάβωμεν.

Ὑποθέσωμεν τὰ Μ καὶ Ν κείμενα ἄνωθεν τῶν γραμμῶν ἰσοτιμίας, ὅτε θὰ εἶναι :

$\Sigma^{\gamma}_{\alpha}\ \Sigma^{\alpha}_{\gamma} > 1,\ \Sigma^{\gamma}_{\beta} < \Sigma^{\beta}_{\gamma}$. Βάσει τῶν τύπων ($A_3$), θὰ εὕρωμεν ὅτι τὴν μικροτέραν τιμὴν δίδει ἡ τετάρτη μέθοδος X'_4, ἤτοι προκριτέα εἶναι ἡ μέθοδος τῶν δύο τραβηγμάτων.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ Μ κεῖται κάτωθεν τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας τὸ δὲ Ν ἄνωθεν, ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, θὰ εὕρωμεν ὅτι τὴν μικροτέραν τιμὴν δίδει ἡ πρώτη μέθοδος X'_1 ὅτε ἡ σύνθετος ἰσοτιμία εἶναι ἡ προκριτέα μέθοδος.



Σχ. 5.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἀμφότερα τὰ σημεῖα Μ, Ν κεῖνται κάτωθεν τῶν γραμμῶν ἰσοτιμίας, θὰ ἔχωμεν :

$\Sigma^{\gamma}_{\alpha}\Sigma^{\alpha}_{\gamma} < 1,\ \Sigma^{\gamma}_{\beta} > \Sigma^{\beta}_{\gamma}$ καί, ἐργαζόμενοι ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις, εὑρίσκομεν ὅτι προκριτέα εἶναι ἡ μέθοδος τῶν δύο ἐμβασμάτων.

Ἐὰν τὸ ἓν τῶν δύο σημείων εὑρίσκηται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας, θὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

$$\alpha')\ \Sigma^{\gamma}_{\alpha}\ \Sigma^{\alpha}_{\gamma} = 1 \quad \text{καὶ} \quad \begin{matrix} \Sigma^{\gamma}_{\beta} > \Sigma^{\beta}_{\gamma} \\ \text{ἢ} \\ \Sigma^{\gamma}_{\beta} < \Sigma^{\beta}_{\gamma} \end{matrix}$$

$$\beta')\ \Sigma_\beta^\gamma = \Sigma_\gamma^\beta \quad \text{καὶ} \quad \begin{matrix} \Sigma_\alpha^\gamma \Sigma_\gamma^\alpha > 1 \\ \text{ἢ} \\ \Sigma_\alpha^\gamma \Sigma_\gamma^\alpha < 1. \end{matrix}$$

Διὰ τὴν περίπτωσιν α'. ἥτις ὑποδιαιρεῖται εἰς τὰς δύο ἄλλας, θὰ ἔχωμεν διὰ μὲν τὴν πρώτην :

$X_1' > X_2'$, $X_2' = X_3'$, $X_3' < X_4'$, $X_4' = X_1'$, καὶ συνεπῶς προκριτέα ἡ X_2' ἢ X_3' ἤτοι προκριτέα ἡ μέθοδος τῶν δύο ἐμβασμάτων ἢ ἡ τοῦ ἐμβάσματος-τραβήγματος, διὰ δὲ τὴν δευτέραν :

$X_1' < X_2'$, $X_2' = X_3'$, $X_3' > X_4'$, $X_4' = X_1'$, ὅτε συνεπῶς προκριτέα ἡ X_1' ἢ X_4', ἤτοι ἡ μέθοδος τῆς συνθέτου ἰσοτιμίας ἢ ἡ τῶν δύο τραβηγμάτων.

Διὰ τὴν περίπτωσιν β' ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον θὰ εὕρωμεν ὅτι προκριτέα εἶναι ἡ X'_3 ἢ X'_4, ἤτοι ἡ μέθοδος τοῦ ἐμβάσματος-τραβήγματος ἢ ἡ τῶν δύο τραβηγμάτων, διὰ δὲ τὴν δευτέραν συνάγεται ὅτι προκριτέα μέθοδος εἶναι ἡ X'_1 καὶ X'_2 ἤτοι ἡ μέθοδος τῆς συνθέτου ἰσοτιμίας ἢ ἡ μέθοδος τῶν δύο ἐμβασμάτων.

Ἐάν, τέλος, ἀμφότερα τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας, ὅτε $\Sigma_\alpha^\gamma\ \Sigma_\gamma^\alpha = 1$, $\Sigma_\beta^\gamma = \Sigma_\gamma^\beta$, εὐκόλως συνάγεται ὅτι καὶ αἱ τέσσαρες μέθοδοι δίδουσι τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα καί, κατὰ συνέπειαν, δὲν ὑφίσταται, ἐν προκειμένῳ, πρόκρισις.

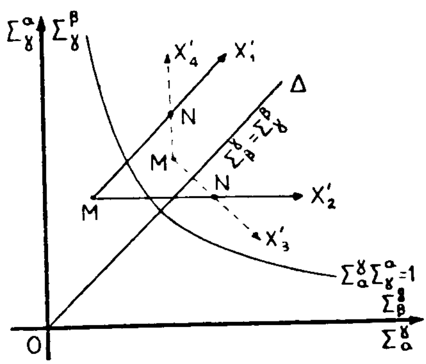
Καὶ ἐνταῦθα τοῦ μνημονικοῦ κανόνος, θεωροῦμεν περισσότερον ἐπιτυχῆ τὴν ὀπτικὴν ἐποπτείαν, δι' ἧς ὁ προκρίνων δι' ἁπλῆς παρατηρήσεως θὰ ἀποφανθῇ ἀμέσως ἐπὶ τῆς προκριτέας μεθόδου.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις σχήμασι [1] (Σχ. 6 καὶ 7) ἐν τῇ αἰχμῇ τοῦ βέλους ἀναγράφεται ἡ προκριτέα μέθοδος.

Οὕτω, π.χ., ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν τὸ Μ εὑρίσκεται

[1] Ἐν μὲν τῷ σχήματι 7 ἔχομεν τὰς τέσσαρας πρώτας περιπτώσεις ἐν δὲ τῷ σχήματι 8 τὰς ὑπολοίπους. Ἡ χρησιμοποίησις δύο σχημάτων (ἠδύνατο νὰ γίνῃ χρῆσις ἑνὸς μόνον σχήματος ἢ καὶ πλειόνων τῶν δύο) ἐγένετο ἐπὶ τῷ μοναδικῷ σκοπῷ τῆς σαφεστέρας ἀπεικονίσεως.

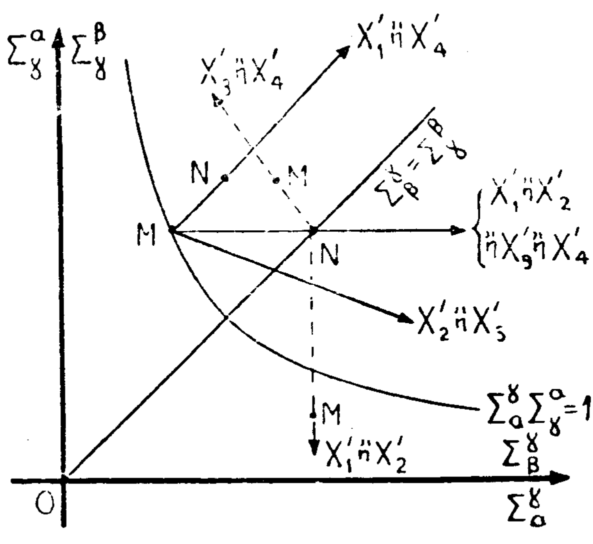
κάτωθεν τῆς ὑπερβολῆς καὶ N ἄνωθεν τῆς διχοτόμου ἔχομεν X'_1, ἐὰν τὸ M εὑρίσκηται ἄνωθεν τῆς ὑπερβολῆς καὶ τὸ N ἄνωθεν τῆς διχοτόμου ἔχομεν X'_4 κ.ο.κ.



Σχ. 6.

III. Ἡ θέσις A δίδει τὸ βέβαιον καὶ αἱ λοιπαὶ τὸ ἀβέβαιον.

Ἐν τῇ παρούσῃ περιπτώσει ταύτῃ, ἀντὶ τῶν τύπων (A_1) θὰ λάβωμεν τοὺς τύπους :



Σχ. 7.

Συνθέτου ἰσοτιμίας $X''_1 = 1 : \Sigma^\gamma_\alpha\ \Sigma^\gamma_\beta$

Δύο ἐμβασμάτων $X''_2 = \Sigma^\beta_\gamma : \Sigma^\gamma_\alpha$

Ἐμβάσματος–Τραβήγματος $X''_3 = \Sigma^\beta_\gamma : \Sigma^\alpha_\gamma$

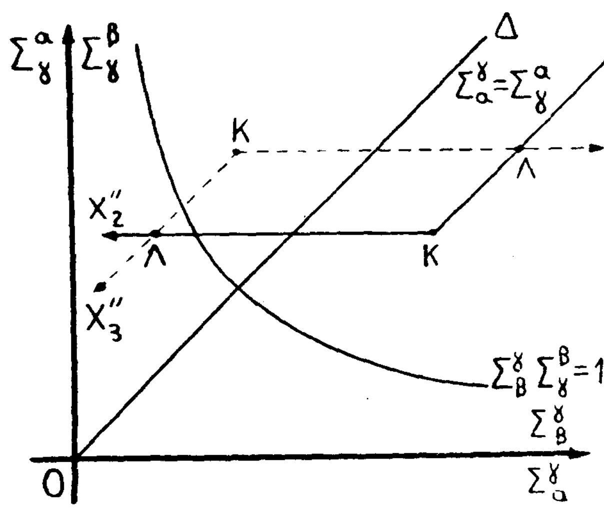
Δύο τραβηγμάτων $X''_4 = 1 : \Sigma^\alpha_\gamma \ \Sigma^\gamma_\beta$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν $X''i$ $(i = 1, 2, 3, 4,)$ μεταξύ των λαμβάνομεν :

$$X''_1 : X''_2 = 1 : \Sigma^\gamma_\beta \ \Sigma^\beta_\gamma, \quad X''_2 : X''_3 = \Sigma^\alpha_\gamma : \Sigma^\gamma_\alpha,$$

$$X''_3 : X''_4 = \Sigma^\beta_\gamma \ \Sigma^\gamma_\beta, \quad X''_4 : X''_1 = \Sigma^\gamma_\alpha : \Sigma^\alpha_\gamma \qquad (A_4)$$

Θεωρήσωμεν διπλοῦν σύστημα ἀξόνων $\Sigma^\gamma_\alpha \ O\Sigma^\alpha_\gamma$, $\Sigma^\gamma_\beta \ O\Sigma^\beta_\gamma$ (Σχ. 8). Κατασκευάσωμεν, ἐν συνεχείᾳ, τὰς γραμμὰς ἰσοτιμίας $\Sigma^\gamma_\alpha = \Sigma^\alpha_\gamma$ (διχοτόμους) καὶ $\Sigma^\gamma_\beta \ \Sigma^\beta_\gamma = 1$ (ἰσοσκελὴς ὑπερβολή).



Σχ. 8.

Καθορίσωμεν τὴν θέσιν τῶν σημείων $K(\Sigma^\gamma_\alpha, \Sigma^\alpha_\gamma)$, $\Lambda(\Sigma^\gamma_\beta, \Sigma^\beta_\gamma)$.

Τὴν πρόκρισιν τῆς μεθόδου, διὰ τὴν καταβολήν, τῶν ὅσων ἔνεστι ὀλιγωτέρων ἐπιχωρίων νομισματικῶν μονάδων πρὸς ἐξόφλησιν χρέους μιᾶς νομισματικῆς μονάδος τῆς θέσεως Β, θὰ καθορίσῃ ἡ θέσις τῶν σημείων Κ, Λ ὡς πρὸς τὰς γραμμὰς ἰσοτιμίας. Θεωροῦμεν, πρὸς τοῦτο, ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις τῶν δύο σημείων, ὡς πρὸς τὰς ἀντιστοίχους γραμμὰς ἰσοτιμίας.

Ὑποθέσωμεν κατ' ἀρχὴν τὸ Κ κάτωθεν τῆς γραμμῆς ἰσοτιμίας ΟΔ καὶ Λ ἄνωθεν τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς. Θὰ ἔχωμεν :

$$\Sigma^\gamma_\alpha > \Sigma^\alpha_\gamma \text{ καὶ } \Sigma^\gamma_\beta \ \Sigma^\beta_\gamma > 1$$

καί, βάσει τῶν τύπων (A_4),

$X''_1 : X''_2 < 1,\ X''_2 : X''_3 < 1,\ X''_3 : X''_4 > 1,\ X''_4 : X''_1 > 1.$

ἐξ ὧν προκύπτουσιν αἱ ἀνισότητες :

$$X''_1 < X''_2,\ X''_2 < X''_3,\ X''_3 > X''_4,\ X''_4 > X''_1.$$

Ἐκ τῶν τελευταίων ἀνισοτήτων συνάγεται ὅτι τὴν μικροτέραν τιμὴν δίδει ἡ X''_1, ἤτοι προκριτέα ἡ σύνθετος ἰσοτιμία.

Ἐὰν τὸ μὲν Κ κεῖται κάτωθεν τῆς διχοτόμου, τὸ δὲ Λ κάτωθεν τῆς ὑπερβολῆς, θὰ ἔχωμεν :

$\Sigma^{\gamma}_{\alpha} > \Sigma^{\alpha}_{\gamma},\ \Sigma^{\gamma}_{\beta}\,\Sigma^{\beta}_{\gamma} < 1$ καὶ ἐργαζόμενοι ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει, τύποι (A_4), εὑρίσκομεν ὅτι τὴν μικροτέραν τιμὴν ἔχει τὸ X''_2 καὶ κατὰ συνέπειαν προκριτέα ἡ μέθοδος τῶν δύο ἐμβασμάτων.

Ἐὰν τὸ Κ εὑρίσκηται ἄνωθεν τῆς διχοτόμου καὶ τὸ Λ ἄνωθεν τῆς ὑπερβολῆς, θὰ ἔχωμεν :

$$\Sigma^{\gamma}_{\alpha} < \Sigma^{\alpha}_{\gamma},\ \Sigma^{\gamma}_{\beta}\,\Sigma^{\beta}_{\gamma} > 1,$$

καί, ἐν συνδυασμῷ πρὸς τοὺς τύπους (A_4), θὰ εὕρωμεν ὅτι τὴν μικροτέραν τιμὴν ἔχει τὸ X''_4, ἤτοι προκριτέα εἶναι ἡ μέθοδος τῶν δύο τραβηγμάτων.

Ἐὰν τὸ μὲν Κ εὑρίσκηται ἄνωθεν τῆς διχοτόμου, τὸ δὲ Λ κάτωθεν τῆς ὑπερβολῆς, θὰ ἔχωμεν :

$$\Sigma^{\gamma}_{\alpha} < \Sigma^{\alpha}_{\gamma},\ \Sigma^{\gamma}_{\beta}\,\Sigma^{\beta}_{\gamma} < 1$$

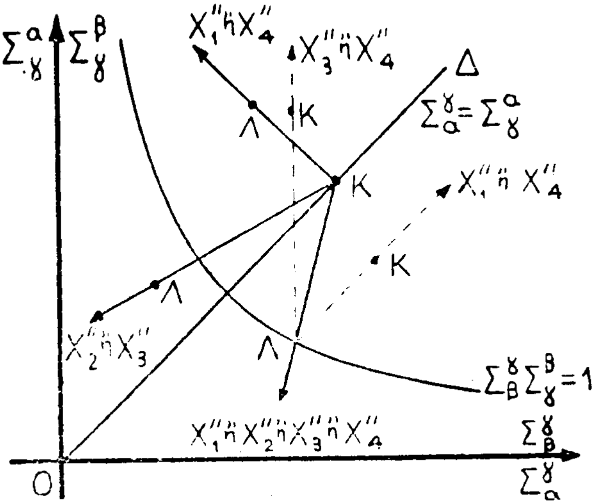
καί, ἐν συνδυασμῷ πρὸς τοὺς τύπους (A_4), θὰ εὕρωμεν ὅτι X''_3 ἔχει τὴν μικροτέραν τιμὴν καὶ συνεπῶς προκριτέα εἶναι ἡ μέθοδος τοῦ ἐμβάσματος–τραβήγματος.

Ἔχομεν εἰσέτι τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ ἓν ἢ ἀμφότερα τὰ σημεῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν γραμμῶν ἰσοτιμίας. Τὸ θεωρητικὸν μέρος εἶναι καθ' ὅλα ὅμοιον πρὸς τὸ σχετικὸν μέρος τῆς περιπτώσεως II, δι' ὃ καὶ περιοριζόμεθα εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν ἐν λόγῳ περιπτώσεων (Σχ. 9).

Τὴν γραφικὴν παράστασιν τὴν ἀντικαθιστῶσαν τὸν γενικὸν κανόνα, διὰ τὰς ἐπὶ μέρους περιπτώσεις τὰς ἐξετασθείσας ἐν τῷ παρόντι ἐδαφίῳ, δίδομεν ἐν τῷ ὑπ' ἀριθ. 9 σχήματι.

IV. Ἡ θέσις Γ δίδει τὸ βέβαιον καὶ αἱ λοιπαὶ τὸ ἀβέβαιον.

Ἡ περίπτωσις αὕτη εἶναι συνήθης ἐν τῇ πράξει καθ' ὅσον τὸ Λονδῖνον, ὅπερ δίδει τὸ βέβαιον, χρησιμοποιεῖται πολὺ ὡς ἐνδιάμεσος ἀγορά.



Σχ. 9.

Καὶ ἐνταῦθα, ἐπειδὴ ἡ θέσις Γ δίδει τὸ βέβαιον, οἱ τύποι (A_1) ἀντικαθίστανται ὑπὸ τῶν τύπων :

Συνθέτου ἰσοτιμίας $X_1{}^* = \Sigma^\gamma_\alpha : \Sigma^\gamma_\beta$

Δύο ἐμβασμάτων $X_2{}^* = \Sigma^\gamma_\alpha : \Sigma^\beta_\gamma$ (A_5)

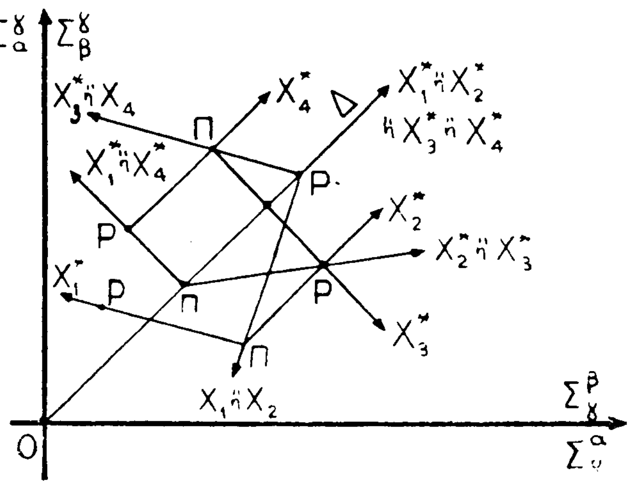
Ἐμβάσματος–τραβήγματος $X_3{}^* = \Sigma^\alpha_\gamma : \Sigma^\beta_\gamma$

Δύο τραβηγμάτων $X^*{}_4 = \Sigma^\alpha_\gamma : \Sigma^\gamma_\beta$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν Xi* (i = 1, 2, 3,4) μεταξύ των λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} X_1{}^* : X_2{}^* &= \Sigma^\beta_\gamma : \Sigma^\gamma_\beta \\ X_2{}^* : X_3{}^* &= \Sigma^\gamma_\alpha : \Sigma^\alpha_\gamma \\ X_3{}^* : X_4{}^* &= \Sigma^\gamma_\beta : \Sigma^\beta_\gamma \\ X_4{}^* : X_1{}^* &= \Sigma^\alpha_\gamma : \Sigma^\gamma_\alpha \end{aligned} \qquad (A_6)$$

Λάβωμεν δύο ἐπάλληλα συστήματα ἀξόνων $\Sigma^\alpha_\gamma\, O\Sigma^\gamma_\alpha$, $\Sigma^\beta_\gamma\, O\Sigma^\gamma_\beta$ (Σχ. 10) καὶ φέρωμεν τὴν διχοτόμον (γραμμὴν ἰσοτιμίας) ΟΔ τῆς γωνίας. Εὕρωμεν, ἐν συνεχείᾳ, τὴν θέσιν τῶν σημείων Π (Σ^{α}_{γ}, Σ^{γ}_{α}), Ρ(Σ^{β}_{γ}, Σ^{γ}_{β}) ἥτις καὶ θὰ καθορίσῃ τὴν προκριτέαν μέθοδον, ἥτις δίδεται παραστατικῶς ἐν τῷ σχήματι 10.



Σχ. 10.

Β'. Πρόκρισις μεταξὺ τῶν προκριθεισῶν τοῦ ἀμέσου καὶ ἐμμέσου συναλλάγματος μεθόδων

Ι. 'Επὶ τοῦ ἀμέσου συναλλάγματος προεκρίθη τὸ ἔμβασμα καὶ ἐπὶ τοῦ ἐμμέσου τὸ τῆς συνθέτου ἰσοτιμίας.

Δοθέντος ὅτι ἐν τῇ θέσει Α μία νομισματικὴ μονὰς τῆς Β θὰ στοιχίσῃ ἐν τῷ ἀμέσῳ μὲν συναλλάγματι (ἔμβασμα) Σ^{β}_{α}, ἐν τῷ ἐμμέσῳ δὲ (σύνθετος ἰσοτιμία) $\Sigma^{\gamma}_{\alpha} : \Sigma^{\gamma}_{\beta}$, θὰ ἔχωμεν, ὡς πρὸς τὴν πρόκρισιν τῶν ὑπ' ὄψιν περιπτώσεων τοῦ ἀμέσου καὶ ἐμμέσου συναλλάγματος, τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

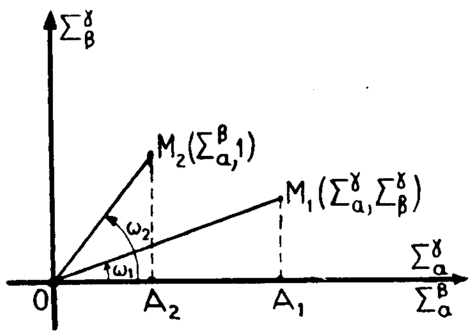
1. $\dfrac{\Sigma^{\gamma}_{\alpha}}{\Sigma^{\gamma}_{\beta}} < \Sigma^{\beta}_{\alpha}$ προκριτέον τὸ ἔμμεσον (σύνθετος ἰσοτιμία).

2. $\dfrac{\Sigma^{\gamma}_{\alpha}}{\Sigma^{\gamma}_{\beta}} > \Sigma^{\beta}_{\alpha}$ προκριτέον τὸ ἄμεσον (ἔμβασμα).

3. $\dfrac{\Sigma^{\gamma}_{\alpha}}{\Sigma^{\gamma}_{\beta}} = \Sigma^{\beta}_{\alpha}$ τὸ ἄμεσον (ἔμβασμα) καὶ ἔμμεσον (σύνθετος ἰσοτιμία) δίδουσι τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα.

Συμφώνως τῇ ἀκολουθηθείσῃ γεωμετρικῇ μεθόδῳ, θὰ ἐργασθῶμεν διὰ τὴν πρόκρισιν ὡς ἀκολούθως :

Λαμβάνομεν ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος θεωροῦμεν τὰς τιμὰς Σ^{β}_{α} καὶ Σ^{γ}_{α}, ἐπὶ δὲ τοῦ κατακορύφου ἄξονος τὰς τιμὰς Σ^{γ}_{β} (Σχ. 11). Προσδιορίζομεν, ἐν συνεχείᾳ, τὴν θέσιν τῶν σημείων M_1 (Σ^{γ}_{α}, Σ^{γ}_{β}), M_2 (Σ^{β}_{α}, 1) καὶ φέρομεν τὰς OM_1, OM_2. Ἔχομεν :



Σχ. 11.

$$\frac{OA_1}{A_1M_1} = \sigma\varphi\omega_1, \quad \frac{OA_2}{A_2M_2} = \sigma\varphi\omega_2$$

καί, ἀντικαθιστῶντες τὰ OA_1, OA_2, A_1M_1, A_2M_2 ὑπὸ τῶν μέτρων των,

$$\frac{\Sigma^{\gamma}_{\alpha}}{\Sigma^{\gamma}_{\beta}} = \sigma\varphi\omega_1, \quad \frac{\Sigma^{\beta}_{\alpha}}{1} = \sigma\varphi\omega_2.$$

Ἐὰν $\omega_1 < \omega_2$, τότε $\sigma\varphi\omega_1 > \sigma\varphi\omega_2$ καὶ $\dfrac{\Sigma^{\gamma}_{\alpha}}{\Sigma^{\gamma}_{\beta}} > \dfrac{\Sigma^{\beta}_{\alpha}}{1}$.

Ἐὰν $\omega_1 > \omega_2$, τότε $\sigma\varphi\omega_1 < \sigma\varphi\omega_2$ καὶ $\dfrac{\Sigma^{\gamma}_{\alpha}}{\Sigma^{\gamma}_{\beta}} < \dfrac{\Sigma^{\beta}_{\alpha}}{1}$.

Ἐὰν $\omega_1 = \omega_2$, τότε $\sigma\varphi\omega_1 = \sigma\varphi\omega_2$ καὶ $\dfrac{\Sigma^{\gamma}_{\alpha}}{\Sigma^{\gamma}_{\beta}} = \dfrac{\Sigma^{\beta}_{\alpha}}{1}$.

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων ἐξάγεται ὁ κάτωθι κανών :

Κανών : Ἐὰν $\omega_1 < \omega_2$ θὰ προκριθῇ τὸ ἔμβασμα τοῦ ἀμέσου συναλλάγματος· ἐὰν $\omega_1 > \omega_2$ θὰ προκριθῇ ἡ σύνθετος ἰσοτιμία τοῦ ἐμμέσου συναλλάγματος· ἐὰν $\omega_1 = \omega_2$ δὲν ὑφίσταται πρόκρισις μεταξὺ τῶν δύο μεθόδων τοῦ ἀμέσου καὶ ἐμμέσου συναλλάγματος.

II. 'Επὶ τοῦ ἀμέσου συναλλάγματος προεκρίθη τὸ τράβηγμα καὶ ἐπὶ τοῦ ἐμμέσου ἡ σύνθετος ἰσοτιμία.

Τρόπος σκέψεως ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τῆς προηγουμένης περιπτώσεως.

III. 'Επὶ τοῦ ἀμέσου συναλλάγματος προεκρίθη τὸ ἔμβασμα καὶ ἐπὶ τοῦ ἐμμέσου τὰ δύο ἐμβάσματα.

Θὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἐν τῇ περιπτώσει II.

IV. 'Επὶ τοῦ ἀμέσου συναλλάγματος προεκρίθη τὸ τράβηγμα καὶ ἐπὶ τοῦ ἐμμέσου τὰ δύο ἐμβάσματα.

Τὸ μὲν τράβηγμα τῆς Β ἐπὶ τῆς Α θὰ στοιχίσῃ ἐν τῇ Α, $\frac{1}{\Sigma_\beta^\alpha}$ μονάδας τῆς Α, τὰ δὲ δύο ἐμβάσματα, διὰ τῆς ἐμμέσου, $\Sigma_\alpha^\gamma . \Sigma_\gamma^\beta$ μονάδας.

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ παρόντος προβλήματος χρησιμοποιοῦμεν τοὺς ἑξῆς τρόπους :

Πρῶτος τρόπος:

1. 'Εὰν $\frac{1}{\Sigma_\beta^\alpha} < \Sigma_\alpha^\gamma \; \Sigma_\gamma^\beta$ προκριτέον τὸ τράβηγμα (ἄμεσον).

2. 'Εὰν $\frac{1}{\Sigma_\beta^\alpha} > \Sigma_\alpha^\gamma \; \Sigma_\gamma^\beta$ (B_1) προκριτέα τὰ δύο ἐμβάσματα (ἔμμεσον).

3. 'Εὰν $\frac{1}{\Sigma_\beta^\alpha} = \Sigma_\alpha^\gamma \; \Sigma_\gamma^\beta$ δὲν ὑφίσταται πρόκρισις.

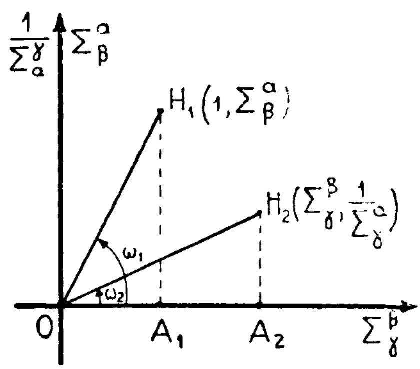
Αἱ ἀνισότητες (B_1) δύνανται νὰ γραφῶσιν :

1'. $\frac{1}{\Sigma_\beta^\alpha} < \frac{\Sigma_\gamma^\beta}{\frac{1}{\Sigma_\alpha^\gamma}}$ προκριτέον τὸ τράβηγμα

2'. $\frac{1}{\Sigma_\beta^\alpha} > \frac{\Sigma_\gamma^\beta}{\frac{1}{\Sigma_\alpha^\gamma}}$ (B_2) προκριτέα τὰ δύο ἐμβάσματα.

3΄. $\dfrac{1}{\Sigma^{\alpha}_{\beta}} = \dfrac{\Sigma^{\beta}_{\gamma}}{\dfrac{1}{\Sigma^{\gamma}_{\alpha}}}$ τὸ τράβηγμα καὶ τὰ δύο ἐμβάσματα δίδουσι τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα. ἄρα πρόκρισις δὲν ὑφίσταται.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων (B_2) προβαίνομεν εἰς τὴν γεωμετρικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος καὶ ἐπὶ τούτοις λαμβάνομεν ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων θεωροῦντες ἐπὶ μὲν τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος τὰς τιμὰς Σ^{γ}_{β} ἐπὶ δὲ τοῦ κατακορύφου τὰς τιμὰς $\dfrac{1}{\Sigma^{\gamma}_{\alpha}}$ καὶ Σ^{α}_{β} (Σχ. 12).



Σχ. 12.

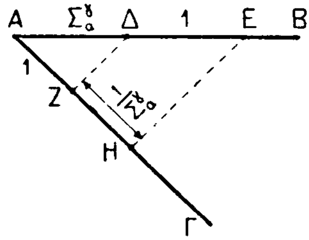
Προσδιορίζομεν τὴν θέσιν τῶν σημείων H_1 (1, Σ^{α}_{β}), H_2 $\left) \Sigma^{\beta}_{\gamma} \; \dfrac{1}{\Sigma^{\gamma}_{\alpha}} \right)$ ἅτινα καὶ ἑνοῦμεν μετὰ τοῦ Ο.

Ἐργαζόμενοι ὡς ἐν τῇ περιπτώσει Ι συνάγομεν τὸν κανόνα :

Κανών : Ἐὰν $\omega_1 > \omega_2$ προκρίνομεν τὸ τράβηγμα· ἐὰν $\omega_1 < \omega_2$ προκρίνομεν τὰ δύο ἐμβάσματα ἐν τῷ ἐμμέσῳ· ἐὰν $\omega_1 = \omega_2$ δὲν ὑφίσταται πρόκρισις.

Σημείωσις : Ὁ χρησιμοποιηθεὶς τρόπος ὁδηγεῖ εἰς παρέκκλισιν ἐκ τῆς ἀρχῆς ἣν ἐξ ἀρχῆς ἐθέσαμεν καὶ ἥτις συνίσταται εἰς τὴν καθαρῶς γεωμετρικὴν λύσιν ἁπασῶν τῶν περιπτώσεων. Ἵνα, ὅμως, ἀποφευχθῶσιν αἱ διαιρέσεις, πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τοῦ κλάσματος $\dfrac{1}{\Sigma^{\gamma}_{\alpha}}$ διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, προβαίνομεν εἰς τὴν ἀκόλουθον γεωμετρικὴν κατασκευήν :

Κατασκευάζομεν τυχοῦσαν γωνίαν ΒΑΓ (Σχ. 13). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν δύο διαδοχικὰ μήκη ΑΔ $= \Sigma^\gamma_\alpha$, ΔΕ $= 1$ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἓν τμῆμα ΑΖ $= 1$. Ἑνοῦμεν τὰ σημεῖα Δ καὶ Ζ καὶ ἐκ τοῦ Ε φέρομεν τὴν ΕΗ παράλληλον τῇ ΔΖ. Ἡ ἀχθεῖσα παράλληλος θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ τμῆμα ΖΗ οὗτινος τὸ μῆκος, συμφώνως πρὸς τὰς ἰδιότητας τῶν παραλλήλων, θὰ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{1}{\Sigma^\gamma_\alpha}$.



Σχ. 13.

Δεύτερος τρόπος:

Ἐὰν ἀπαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς τῶν σχέσεων (B_1), θὰ εὕρωμεν τὰς ἰσοδυνάμους των σχέσεις :

$$1 < \Sigma^\gamma_\alpha\, \Sigma^\beta_\gamma\, \Sigma^\alpha_\beta, \quad 1 > \Sigma^\gamma_\alpha\, \Sigma^\beta_\gamma\, \Sigma^\alpha_\beta, \quad 1 = \Sigma^\gamma_\alpha\, \Sigma^\beta_\gamma\, \Sigma^\alpha_\beta.$$

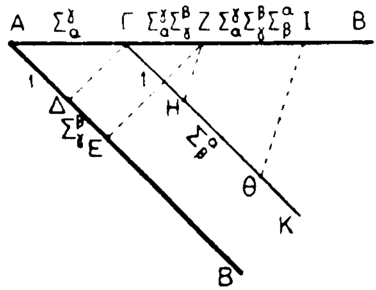
Οὕτως, ἀφοῦ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\Sigma^\gamma_\alpha\, \Sigma^\beta_\gamma\, \Sigma^\alpha_\beta$ δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν ἀμέσως ἐπὶ τῆς προκρίσεως μεταξὺ ἀμέσου καὶ ἐμμέσου συναλλάγματος.

Ὁ κανὼν ὅστις θὰ ἰσχύῃ ἐνταῦθα ἔσται ὁ ἑξῆς :

Κανών : Ἐὰν $\Sigma^\gamma_\alpha\, \Sigma^\beta_\gamma\, \Sigma^\alpha_\beta > 1$ προκριτέον τὸ τράβηγμα· ἐὰν $\Sigma^\gamma_\alpha\, \Sigma^\beta_\gamma\, \Sigma^\alpha_\beta < 1$ προκριτέα τὰ δύο ἐμβάσματα· ἐὰν $\Sigma^\gamma_\alpha\, \Sigma^\beta_\gamma\, \Sigma^\alpha_\beta = 1$ δὲν ὑφίσταται πρόκρισις.

Ἡ εὕρεσις τοῦ γινομένου $\Sigma^\gamma_\alpha\, \Sigma^\beta_\gamma\, \Sigma^\alpha_\beta$ γεωμετρικῶς θὰ ἐπιτευχθῇ ὡς ἀκολούθως :

Ἐπὶ χιλιοστομετρικοῦ χάρτου κατασκευάζομεν τυχοῦσαν γωνίαν ΒΑΒ′ (Σχ. 14). Ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τῆμα ΑΓ $= \Sigma^\gamma_\alpha$ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ′ τὰ τμήματα ΑΔ $= 1$ καὶ ΔΕ $= \Sigma^\beta_\gamma$. Ἑνοῦμεν τὰ Δ καὶ Γ καὶ ἐκ τοῦ Ε φέρομεν τὴν ΕΖ παράλληλον τῇ ΔΓ. Τὸ τμῆμα ΓΖ ὅπερ θὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ θὰ ἰσοῦται, συμφώνως πρὸς τὰς ἰδιότητας τῶν παραλλήλων, τῷ γινομένῳ $\Sigma^{\gamma}_{\alpha}\,\Sigma^{\beta}_{\gamma}$. Ἐν συνεχείᾳ ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΓΚ καὶ ἐπὶ ταύτης λαμβάνομεν τὰ τμήματα $\Gamma H = 1$ καὶ $H\Theta = \Sigma^{\alpha}_{\beta}$. Ἑνοῦμεν τὰ Ζ καὶ Η καὶ ἐκ τοῦ Θ φέρομεν τὴν ΘΙ παράλληλον τῇ ΖΗ ἥτις θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ τμῆμα $ZI = \Sigma^{\gamma}_{\alpha}\,\Sigma^{\beta}_{\gamma}\,\Sigma^{\alpha}_{\beta}$.



Σχ. 14.

Οὕτως : Ἐὰν τὸ τμῆμα ΖΙ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΓΗ, θὰ προκριθῇ τὸ τράβηγμα, ἐὰν εἶναι μικρότερον τούτου, θὰ προκριθῇ ἡ μέθοδος τῶν δύο ἐμβασμάτων τοῦ ἐμμέσου καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΓΗ δὲν ὑφίσταται ἐν προκειμένῳ πρόκρισις.

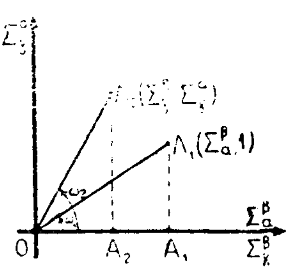
Τρίτος τρόπος:

Ὡς τρίτον τρόπον λύσεως τοῦ προβλήματος δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὸν ἑξῆς :

Εὑρίσκομεν, ὡς ἀνωτέρω, τὸ γινόμενον $\Sigma^{\gamma}_{\alpha}\,\Sigma^{\beta}_{\gamma}$ καί, θεωροῦμεν πλέον τὸ γινόμενον τοῦτο ὡς νέον ἀριθμόν· ἐξετάζομεν τὴν θέσιν τοῦ σημείου $[(\Sigma^{\gamma}_{\alpha}\,\Sigma^{\beta}_{\gamma}),\ \Sigma^{\alpha}_{\beta}]$ ὡς πρὸς ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν τῆς μορφῆς $\chi\psi = 1$. Ἐὰν τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς, δὲν ὑφίσταται πρόκρισις μεταξὺ τῶν ὑπ' ὄψιν μεθόδων· ἐὰν εὑρεθῇ ἄνωθεν, θὰ προκριθῇ τὸ τράβηγμα καὶ ἐὰν εὑρεθῇ κάτωθεν, θὰ προκριθῶσι τὰ δύο ἐμβάσματα τοῦ ἐμμέσου [1].

V. Ἐπὶ τοῦ ἀμέσου συναλλάγματος προεκρίθη τὸ ἔμβασμα καὶ ἐπὶ τοῦ ἐμμέσου τὸ ἔμβασμα—τράβηγμα.

Ἡ μία νομισματικὴ μονὰς τῆς Β δι' ἀπ' εὐθείας ἐμβάσματος ἐκ τῆς Α θὰ στοιχίσῃ Σ^β_α, καὶ διὰ τοῦ ἐμβάσματος—τραβήγματος $\frac{\Sigma^\beta_\gamma}{\Sigma^\alpha_\gamma}$.



Σχ. 15.

Λαμβάνομεν ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος θεωροῦμεν τὰς τιμὰς Σ^β_α καὶ Σ^β_γ (Σχ. 15), ἐπὶ δὲ τοῦ κατακορύφου ἄξονος τὰς τιμὰς τῶν Σ^α_γ. Ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκομεν τὴν θέσιν τῶν σημείων Λ_1 $(\Sigma^\beta_\alpha, 1)$, Λ_2 $(\Sigma^\beta_\gamma, \Sigma^\alpha_\gamma)$ καὶ κατασκευάζομεν τὰς γωνίας ω_1, ω_2. Δοθέντος ὅτι ἡ σκέψις εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν τῶν προηγουμένων περιπτώσεων, περιοριζόμεθα εἰς τὸν κανόνα :

Κανών : Ἐὰν $\omega_1 > \omega_2$ προκριτέον τὸ ἔμβασμα· ἐὰν $\omega_1 < \omega_2$ προκριτέον τὸ ἔμβασμα—τράβηγμα ἐν τῇ ἐμμέσῳ συναλλαγῇ· ἐὰν $\omega_1 = \omega_2$ δὲν ὑφίσταται πρόκρισις.

---

[1] Ὡς ἀπόρροια τῶν ἀνωτέρω μεθόδων δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ἡ ἑξῆς μέθοδος : Κατασκευάζομεν γεωμετρικῶς ἀφ' ἑνὸς τὸ $\frac{1}{\Sigma^\alpha_\beta}$ καὶ ἀφ' ἑτέρου τὸ $\Sigma^\gamma_\alpha\, \Sigma^\beta_\gamma$ καὶ βάσει τῶν (B_1) καθορίζομεν τὴν πρόκρισιν.

VI. Ἐπὶ τοῦ ἀμέσου συναλλάγματος προεκρίθη τὸ τράβηγμα καὶ ἐπὶ τοῦ ἐμμέσου τὸ ἔμβασμα—τράβηγμα.

Θὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει.

VII. Ἐπὶ τοῦ ἀμέσου συναλλάγματος προεκρίθη τὸ ἔμβασμα καὶ ἐπὶ τοῦ ἐμμέσου τὰ δύο τραβήγματα.

Τὸ μὲν ἔμβασμα μιᾶς νομισματικῆς μονάδος ἐπὶ τῆς Β θὰ στοιχίσῃ Σ_α^β, τὰ δὲ δύο τραβήγματα $\frac{1}{\Sigma_\beta^\gamma \, \Sigma_\gamma^\alpha}$.

Ἐὰν $\Sigma_\alpha^\beta < \frac{1}{\Sigma_\beta^\gamma \, \Sigma_\gamma^\alpha}$ ἢ $\Sigma_\alpha^\beta \, \Sigma_\beta^\gamma \, \Sigma_\gamma^\alpha < 1$ προκριτέον τὸ ἔμβασμα.

Ἐὰν $\Sigma_\alpha^\beta > \frac{1}{\Sigma_\beta^\gamma \, \Sigma_\gamma^\alpha}$ ἢ $\Sigma_\alpha^\beta \, \Sigma_\beta^\gamma \, \Sigma_\gamma^\alpha > 1$ προκριτέα τὰ δύο τραβήγματα.

Ἐὰν $\Sigma_\alpha^\beta = \frac{1}{\Sigma_\alpha^\gamma \, \Sigma_\gamma^\alpha}$ ἢ $\Sigma_\alpha^\beta \, \Sigma_\beta^\gamma \, \Sigma_\gamma^\alpha = 1$ δὲν ὑπάρχει πρόκρισις.

Ἡ περίπτωσις αὕτη εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν IV περίπτωσιν καὶ συνεπῶς δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ μία τῶν μεθόδων ἃς ἐχρησιμοποιήσαμεν ἐν τῇ τετάρτῃ περιπτώσει.

VIII. Ἐπὶ τοῦ ἀμέσου συναλλάγματος προεκρίθη τὸ τράβηγμα καὶ ἐπὶ τοῦ ἐμμέσου τὰ δύο τραβήγματα.

Ἡ περίπτωσις αὕτη εἶναι ὁμοία μὲ τὴν III.

Γ′ Πρόκρισις μεταξὺ διαφόρων ἐνδιαμέσων ἀγορῶν κατὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν μέθοδον τοῦ ἐμμέσου συναλλάγματος [1]

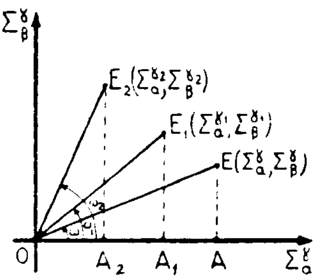
α′ Βάσει τοῦ τύπου : $X_1 = \frac{\Sigma_\alpha^\gamma}{\Sigma_\beta^\gamma}$ (σύνθετος ἰσοτιμία).

Ἐνδιαφέρει ἡ ἀνεύρεσις τῆς τρίτης θέσεως Γ δι' ἣν ὁ ἀνωτέρω λόγος λαμβάνει τὴν μικροτέραν τιμήν. Πρὸς τούτοις σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἐὰν λάβωμεν τὸ ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων $\Sigma_\alpha^\gamma O \Sigma_\beta^\gamma$ καὶ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον $E(\Sigma_\alpha^\gamma, \Sigma_\beta^\gamma)$ (Σχ. 16), ὁ λόγος $\frac{\Sigma_\alpha^\gamma}{\Sigma_\beta^\gamma}$ παριστᾷ τὴν σφω. Συνεπῶς, ὅσον μεγαλυτέρα

[1] Ἐξετάζομεν πάντοτε τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἐν τῇ θέσει Α εὑρίσκεται ὁ ὀφειλέτης μιᾶς νομ. μονάδος τῆς Β.

εἶναι ἡ γωνία ω, τόσον μικροτέρα εἶναι ἡ σφω καὶ τόσον μικρότερος ὁ λόγος $\frac{\Sigma_\alpha^\gamma}{\Sigma_\beta^\gamma}$, ἄρα θὰ ἰσχύῃ ὁ κάτωθι κανών :

Κανών: Προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα E_i $(\Sigma_\alpha^{\gamma_i}, \Sigma_\beta^{\gamma_i})$ ἔνθα $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ὡς καὶ τὰς γωνίας ω_i ἅς σχηματίζουσι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα OE_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος. Θὰ προκριθῇ ἡ θέσις ἐκείνη δι' ἣν ἔχομεν τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν.



Σχ. 16.

β'. Βάσει τοῦ τύπου : $X_2 = \Sigma_\alpha^\gamma \Sigma_\gamma^\beta$ (δύο ἐμβασμάτων).
Ἐνταῦθα συγκρίνομεν τὰ γινόμενα :
$\Pi_1 = \Sigma_\alpha^{\gamma_1} \Sigma_{\gamma_1}^\beta$, $\Pi_2 = \Sigma_\alpha^{\gamma_2} \Sigma_{\gamma_2}^\beta$, $\Pi_3 = \Sigma_\alpha^{\gamma_3} \Sigma_{\gamma_3}^\beta, \ldots,$
$\Pi_\nu = \Sigma_\alpha^{\gamma_\nu} \Sigma_{\gamma_\nu}^\beta$.

Ἐὰν $\Sigma_{\gamma_1}^\beta \Sigma_\alpha^{\gamma_1} < \Sigma_{\gamma_2}^\beta \Sigma_\alpha^{\gamma_2}$ ἢ $\frac{\Sigma_\alpha^{\gamma_1}}{\Sigma_{\gamma_2}^\beta} < \frac{\Sigma_\alpha^{\gamma_2}}{\Sigma_{\gamma_1}^\beta}$ θὰ προκριθῇ ἡ θέσις Γ_1 τῆς Γ_2.

Ἐὰν $\frac{\Sigma_\alpha^{\gamma_1}}{\Sigma_{\gamma_2}^\beta} = \frac{\Sigma_\alpha^{\gamma_2}}{\Sigma_{\gamma_1}^\beta}$ ἢ $\Sigma_\alpha^{\gamma_1} \Sigma_{\gamma_1}^\beta = \Sigma_\alpha^{\gamma_2} \Sigma_{\gamma_2}^\beta$ δὲν ὑφίσταται πρόκρισις ὡς πρὸς τὴν θέσιν Γ_1 ἢ τὴν Γ_2.

Ἐὰν $\Sigma_{\gamma_1}^\beta \Sigma_\alpha^{\gamma_1} > \Sigma_{\gamma_2}^\beta \Sigma_\alpha^{\gamma_2}$ ἢ $\frac{\Sigma_\alpha^{\gamma_1}}{\Sigma_{\gamma_2}^\beta} > \frac{\Sigma_\alpha^{\gamma_2}}{\Sigma_{\gamma_1}^\beta}$ θὰ προκριθῇ ἡ θέσις Γ_2.

Ἡ σύγκρισις θὰ γίνῃ καθ' ὅμοιον τρόπον μὲ τὰς ὑπολοίπους θέσεις.

Γεωμετρικῶς ἡ πρόκρισις ὡς πρὸς τὴν θέσιν Γ_1 ἢ Γ_2 θὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς : Ἀφοῦ λάβωμεν τὸ ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων $\Sigma_\alpha^\gamma O \Sigma_\gamma^\beta$ καὶ καθορίσωμεν τὰ σημεῖα M_1 $(\Sigma_\alpha^{\gamma_1}, \Sigma_{\gamma_2}^\beta)$, M_2 $(\Sigma_\alpha^{\gamma_2}, \Sigma_{\gamma_1}^\beta)$, ἑνοῦμεν ἐν συνεχείᾳ ταῦτα μετὰ τοῦ Ο· συγκρίνομεν ἀκολούθως τὰς σχηματισθείσας γωνίας ω_1, ω_2 καὶ ἐὰν $\omega_1 > \omega_2$ προκρίνομεν τὴν θέσιν Γ_1, ἐὰν $\omega_1 = \omega_2$ δὲν ὑφίσταται πρόκρισις καὶ ἐὰν $\omega_1 < \omega_2$ προκρίνομεν τὴν θέσιν Γ_2.

Θὰ ἠδυνάμεθα ἐπὶ περισσοτέρων θέσεων νὰ κάμωμεν συγχρόνως τὴν πρόκρισιν κατὰ τὸν ἑξῆς γεωμετρικὸν τρόπον:

Κατασκευάζομεν γεωμετρικῶς τὰ γινόμενα $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots$ Πν (Β′, IV, δεύτερος τρόπος). Ἡ σύγκρισις τῶν προκυψάντων εὐθυγράμμων τμημάτων δίδει κατὰ τρόπον ἄμεσον τὴν προκριτέαν θέσιν. Τὸ μικρότερον εὐθύγραμμον τμῆμα ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μικρότερον γινόμενον καὶ κατὰ συνέπειαν εἰς τὴν προκριτέαν θέσιν. Οὕτω, π.χ., ἐὰν τὸ μικρότερον εὐθύγραμμον τμῆμα εἶναι τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ γινόμενον Π_3 θὰ προκριθῇ ἡ θέσις Γ_3.

γ′. Βάσει τοῦ τύπου : $X_3 = \dfrac{\Sigma_\gamma^\beta}{\Sigma_\gamma^\alpha}$ (ἔμβασμα—τράβηγμα).

Θὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἐν τῇ περιπτώσει α′.

δ′. Βάσει τοῦ τύπου : $X_4 = \dfrac{1}{\Sigma_\beta^\gamma\, \Sigma_\gamma^\alpha}$ (δύο τραβήγματα).

Ἐνταῦθα θὰ γίνῃ ἡ σύγκρισις μεταξὺ τῶν λόγων $\dfrac{1}{\Sigma_\beta^{\gamma_1}\, \Sigma_{\gamma_1}^\alpha}$ $\dfrac{1}{\Sigma_\beta^{\gamma_2}\, \Sigma_{2}^\alpha}$, $\dfrac{1}{\Sigma_\beta^{\gamma_3}\, \Sigma_{\gamma_3}^\alpha}$, ...

Ἐὰν $\dfrac{1}{\Sigma_\beta^{\gamma_1}\, \Sigma_{\gamma_1}^\alpha} < \dfrac{1}{\Sigma_\beta^{\gamma_2}\, \Sigma_{\gamma_2}^\alpha}$ ἢ $\Sigma_\beta^{\gamma_1}\, \Sigma_{\gamma_1}^\beta > \Sigma_\beta^{\gamma_2}\, \Sigma_{\gamma_2}^\beta$ θὰ προκριθῇ ἡ θέσις Γ_1, ἐὰν $\Sigma_\beta^{\gamma_1}\, \Sigma_{\gamma_1}^\beta < \Sigma_\beta^{\gamma_2}\, \Sigma_{\gamma_2}^\beta$ θὰ προκριθῇ ἡ θέσις Γ_2 καὶ ἐὰν $\Sigma_\beta^{\gamma_1}\, \Sigma_{\gamma_1}^\beta = \Sigma_\beta^{\gamma_2}\, \Sigma_{\gamma_2}^\beta$ δὲν ὑφίσταται πρόκρισις.

Ἡ γεωμετρικὴ λύσις εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν β′.

LA MÉTHODE GÉOMÉTPIQUE
SUR L'ARBITRAGE DANS LE CHANGE INDIRECT

Par P. I. STERIOTIS

La simplicité et la facilité que fournit la méthode que nous avons employée pour la solution du problème de l'arbitrage dans le change direct [1] nous a conduit à élargir cette méthode et en ce qui concerne l'arbitrage dans le change indirect.

Nous représentons par X_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ les quatres méthodes du change indirect, par Σ_α^β la valeur du change de la place (marché) A sur la place (marché) B, par Σ_β^γ la valeur du change de la place B sur la place Γ etc. Par A nous représentons la place à laquelle se trouve le débiteur d'une unité monétaire de la place B, par Γ nous représentons une troisième place à laquelle se trouve le correspondant de la place A. Par Γ nous représentons aussi la troisième place dont nous utilisons le change pour le règlement de la dette de la place A sur B.

Nous considerons d'abord un système d'axes de façon à prendre sur l'axe horizontal simultanément les valeurs de Σ_α^γ, Σ_β^γ et sur l'axe vertical les valeurs de Σ_γ^α, Σ_γ^β (Fig. 1).

Ensuite, nous construisons une hyperbole équilatère d'équation $xy = 1$ et nous fixons la position du point P_1 $(\Sigma_\alpha^\gamma, \Sigma_\gamma^\alpha)$ et P_2 $(\Sigma_\beta^\gamma, \Sigma_\gamma^\beta)$. La position des points P_1, P_2 fixe aussi la méthode que nous devons appliquer pour arbitrer. Ainsi si les deux points se trouvent sur l'hyper-

[1] P. STERIOTIS, L'arbitrage dans le change direct du point de vue géométrique (Archive of Economic and Social Sciences, Vol. 37, Athens, 1957).

bole, que nous appelons ligne de parité, quand les relations $\Sigma_\alpha^\gamma\ \Sigma_\gamma^\alpha = 1,\ \Sigma_\beta^\gamma\ \Sigma_\gamma^\beta = 1$ sont effectives, il n'y aura pas lieu de recourir à un arbitrage. Si le point P_1 se trouve sur l'hyperbole équilatère et le point P_2 au-dessus, quand les relations $\Sigma_\alpha^\gamma\Sigma_\gamma^\alpha = 1,\ \Sigma_\beta^\gamma\ \Sigma_\gamma^\beta > 1$ sont éffectives, nous arbitrerons la parité composée ou les deux traites.

Dans les autres cas nous appliquons le même procédé. Au lieu d'une définition qui reunit tous les cas séparés, nous joindrons pour chaque cas des figures, par exemple la figure 3 où est mis en evidence le cas où toutes les trois positions donnent l'incertain et un ou les deux points sont placés sur la ligne de parité. Au bout de la flèche, qui joint les deux points, apparait la méthode d'arbitrage. Ainsi si P_1 se trouve en dessous de l'hyperbole et P_2 sur l'hyperbole, sera arbitré X_1 ou X_2, c'est a dire la parité composée ou les deux remises.