ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕΡΙΚΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΕΩΣ ΔΙΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ CAUCHY

ΥΠΟ Κ. Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

1ον. Ὡς εἶναι γνωστὸν αἱ ἐξισώσεις μερικῆς παλινδρομήσεως (Équations de la régression partielle) τῶν χρονολογικῶν σειρῶν ἢ οἰκονομετρικῶν συναρτήσεων—φαινομένων δηλ. ἐν τῷ χρόνῳ ἀνελισσομένων καὶ δι' ἀριθμητικῶν σειρῶν παριστωμένων—διὰ τὸν καθορισμὸν αὐτῶν προαπαιτοῦσι τὸν ὑπολογισμὸν τῶν διαφόρων συντελεστῶν ὁρικῆς συσχετίσεως (ἢ καὶ ἄλλως ὁλικῆς), εἶτα δὲ συναρτήσει τῶν συντελεστῶν μερικῆς συσχετίσεως, τὸν προσδιορισμὸν τῶν συντελεστῶν μερικῆς παλινδρομήσεως, καὶ τοῦτο διότι, ἐπειδὴ τὸ φαινόμενον Χ θεωρεῖται μορφούμενον τῷ ταὐτοχρόνῳ ἐπιδράσει καὶ ἐκδηλώσει—μετὰ ἢ ἄνευ χρονικῆς τινος ὑστερήσεως ἢ προηγήσεως—τῶν ν ἄλλων φαινομένων Ψ,Ζ,Φ,... ἐξευρίσκεται ἡ ὑφισταμένη συμμεταβολὴ—συσχέτισις ἢ συνάφεια—τούτου μεθ' ἑκάστου τῶν λοιπῶν τὸ πρῶτον, εἶτα δὲ λαμβανομένης ὑπ' ὄψει καὶ τῆς ἐπιδράσεως τῶν ἄλλων (ν—1) φαινομένων.

Κατὰ ταῦτα ἐν τῇ γενικωτέρᾳ ἐννοίᾳ τὸ Χ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πληροῦν τὴν σχέσιν Χ=σ (Ψ,Ζ,Φ,...) καὶ ἑπομένως, ἐπίσης, ὅτι εἶναι μονότιμος συνάρτησις τῶν ν ἄλλων μεταβλητῶν.

2ον. Ἐπειδὴ δὲ τὰ Χ, Ψ, Ζ, Φ,... παριστῶσι ποσοτικῶς τὴν διαδοχικὴν ἐν τῷ χρόνῳ ἐξέλιξιν ἑκάστου τῶν θεωρηθέντων φαινομένων, λογικὸν εἶναι νὰ δεχθῶμεν ὅτι αἱ ποσοτικαὶ τούτων ἐκδηλώσεις, καθ' ὃ ἀπότοκοι μετρήσεων ἐνέχουσι σφάλματα παρατηρήσεως καὶ συνεπῶς ὡς ἐκ τούτου αὗται ἔχουσι τὸν χαρακτῆρα κυβευτικῶν μεταβλητῶν—δηλ. ἐξαρτωμένων ἐκ τοῦ τυχαίου κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον—μετὰ διασπορᾶς ὡς πρὸς τὸν μέσον αὐτῶν ἀσθενοῦς, ἐφ' ὅσον αἱ μετρήσεις εἶναι ἀκριβεῖς.

Ἡ ἀναλυτικὴ ὅθεν ἀναπαράστασις τῆς τεθείσης ὑποθέσεως Χ=σ (Ψ,Ζ,Φ,...) ἄγει εἰς τὴν ἀναζήτησιν τῆς, τυχόν, ὑφισταμένης σχέσεως, ἥτις συνδέει τὸ Χ πρὸς τὰ Ψ,Ζ,Φ,... ταὐτοχρόνως. Ἡ σχέσις αὕτη πρέπει, ὡς εἶναι φυσικόν, νὰ εἶναι μοναδικὴ ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς, ἥτις θὰ δίδῃ τὸ Χ, γνωστῶν ὄντων τῶν Ψ,Ζ,Φ,...

3ον. Ὁ καθορισμὸς τῆς τοιαύτης σχέσεως δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ 1) Δι' ἐμπειρικῆς ἐξομαλύνσεως (Ajustement empirique). 2) Δι' ἐξομαλύνσεως συναρτησιακῆς τινος σχέσεως παρεχομένης ὑπὸ τῆς θεωρίας καὶ ἐξαρτωμένης ἔκ τινων σταθερῶν. Ἁπλοῦν παράδειγμα τοῦ δευτέρου τρόπου παρέχει ἡ ὑφισταμένη σχέσις μεταξὺ τοῦ ὄγκου τῆς παραγωγῆς ἀγαθοῦ τινος καὶ τῆς τιμῆς μονάδος τούτου (σχέσις μοναδικὴ προσεγγιζόντως, καὶ ἀναστρέψιμος). Ἡ σπουδὴ ὅμως στατιστικοῦ τινος φαινομένου, διὰ τὴν μόρφωσιν οὗτινος ὑπεισέρχονται πλείονες τῶν δύο παραγόντων—γενεσιουργῶν αἰτιῶν ἢ αἰτιῶν ἐπιδρωσῶν ἀπὸ κοινοῦ—δὲν εἶναι δυνατὴ διὰ μόνης τῆς γνώσεως τῶν συντελεστῶν τῆς ὁρικῆς (ὁλικῆς) συσχετίσεως, οἵτινες, ὡς γνωστόν, προκύπτουσι διὰ τοῦ ἀνὰ δύο συνδυασμοῦ τῶν ὑπ' ὄψει ποσοτικῶν ἐκδηλώσεων τῶν φαινομένων. Ἡ τοιαύτη σπουδὴ ἀπαιτεῖ τὴν χρῆσιν καὶ ἄλλων εἰδικῶν συντελεστῶν, τῶν, παρὰ τῷ Uv le, κληθέντων σ υ ν τ ε λ ε σ τ ῶ ν μ ε ρ ι κ ῆ ς σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς (ἢ μερικῆς συμμεταβολῆς ἢ μερικῆς συναφείας), δι' ὧν εἶναι ἐφικτὴ ἡ διαμόρφωσις τῶν μνημονευθεισῶν ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ν μ ε ρ ι κ ῆ ς π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς.

4ον. Διὰ τοὺς κατόχους ὅμως τῶν μεθόδων τῆς νεωτέρας τεχνικῆς στατιστικῆς δὲν εἶναι ξένοι καὶ ἄγνωστοι οἱ κοπιώδεις, σχοινοτενεῖς καί, ἐν πολλοῖς, πολύπλοκοι ὑπολογισμοί, οἵτινες πρὸς τοῦτο ἀπαιτοῦνται καὶ οἱ ὁποῖοι συγχρόνως δὲν εἶναι καὶ ἀπηλλαγμένοι σφαλμάτων, χωρὶς διὰ τὰς ἐν τῷ μεταξὺ φάσεις τοῦ ὑπολογισμοῦ αὐτῶν νὰ ὑφίσταται μέθοδός τις ἐπαληθεύσεως τῆς μέχρι τότε γενομένης ἐργασίας, ὡς ἀπολύτως ἀκριβοῦς.

Διὰ ταῦτα ἡ μέθοδος τοῦ Cauchy δύναται ὡς ἐκ τῆς εὐκολίας αὐτῆς νὰ παράσχῃ θετικὴν ὠφέλειαν εἰς τὰ τοιούτου εἴδους προβλήματα, καίπερ ὑπὸ ἔποψιν προσεγγίσεως ὑπολείπεται κατά τι τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχ. τετραγώνων. Διὰ τῆς μεθόδου ὅμως τοῦ Cauchy μορφοῦνται μόνον αἱ ἐξισώσεις μερικῆς παλινδρομήσεως, οὐχὶ δὲ καὶ οἱ σ υ ν τ ε λ ε σ τ α ὶ μ ε ρ ι κ ῆ ς σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς (1).

5ον. Πράγματι ἡ ἀληθὴς ἀναλυτικὴ ἔκφρασις ἥτις συνδέει τὸ X πρὸς τὰ Ψ,Z,Φ,... εἶναι ἄ γ ν ω σ τ ο ς. Οὐχ ἧττον πρὸς ἁπλούστευσιν υἱοθετοῦμεν τὴν ὑπόθεσιν ὅτι αὕτη εἶναι γραμμικὴ δηλ. τῆς μορφῆς

$$X=\alpha\ \Psi+\beta\ Z+\gamma\ \Phi+\ldots$$

(πρὸς εὐκολίαν θὰ θεωρήσωμεν μόνον τὰ μεταβλητὰ X,Ψ,Z,Φ) ὅπου α, β, γ εἶναι παράμετροι ἄγνωστοι καὶ τὰ X, Ψ, Z, Φ συναρτήσεις ὡρισμέναι τοῦ χρόνου t, αἵτινες διὰ $t=t_i$, λαμβάνουσι τὰς τιμὰς X_i, Ψ_i, Z_i, Φ_i.

---

1) Τῶν τελευταίων ἡ εὕρεσις γίνεται εὐκόλως, ἐφ' ὅσον ἔχουσι καθορισθεῖ οἱ συντελεσταὶ ὁρικῆς συσχετίσεως διὰ τοῦ τύπου

$$\varrho_{pq.12\ldots\nu}=\frac{-(-1)^{p+q}\Delta_{pq}}{\sqrt{\Delta_{pq}}\ \sqrt{\Delta_{qq}}}$$

καὶ $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \varrho_{12} & \varrho_{13} & \ldots \\ \varrho_{12} & 1 & \varrho_{23} & \ldots \\ \varrho_{13} & \varrho_{23} & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$, ὅπου Δ_{pp}, Δ_{qq}, Δ_{pq}, αἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσαι αἵτινες προκύπτουσι ἐκ τῆς μείζονος Δ, δι' ἀπαλοιφῆς τῶν στηλῶν καὶ γραμμῶν τῶν σημαινομένων ὑπὸ τῶν δεικτῶν p καὶ q (ἴδε στατιστικὴν Κ. Α. 'Αθανασιάδου, σελὶς 159 καὶ ἑφεξῆς).

Ἡ μέθοδος τοῦ Cauchy ἐπιτρέπει τοὺς σχετικοὺς ὑπολογισμοὺς διὰ διαδοχικῶν προσεγγίσεων καὶ τὰ ἐξαγόμενα τῆς προσεγγίσεως τάξεως ν χρησιμεύουσι διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ συντελεστοῦ Κ τάξεως $(\nu+1)$ τοῦθ' ὅπερ παρέχει τὸ μέσον τοῦ συνεχοῦς ἐλέγχου τῆς ἀκριβείας τῶν διαδοχικῶν φάσεων τοῦ ὑπολογισμοῦ.

Τὴν θεωρηθεῖσαν ὅθεν σχέσιν $X_i = \alpha\, \Psi_i + \beta\, Z_i + \gamma\, \Phi_i$ γράφομεν κατὰ πρῶτον ὧδε $X_i = \alpha\, \Psi_i$ (1) $[i=1, 2, \ldots \nu]$ καὶ ἀθροίζομεν κατὰ μέλη διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ i ἤτοι $\Sigma X_i = \alpha\, \Sigma \Psi_i$ ἢ $\alpha = \frac{\Sigma X_i}{\Sigma \Psi_i}$ (2)

ἡ Ἐξίσωσις ὅθεν (1) γράφεται

$$X_i = \frac{\Sigma X_i}{\Sigma \Psi_i}\, \Psi_i$$

καὶ ἑπομένως αἱ ἀποκλίσεις (διαφοραὶ) μεταξὺ τῶν διαφόρων τιμῶν παρατηρήσεως καὶ ὑπολογισμοῦ θὰ εἶναι αἱ

$$\Delta X_i = X_i - \frac{\Sigma X_i}{\Sigma \Psi_i}\, \Psi_i \qquad (\text{διὰ } i=1, 2, \ldots \nu)$$

Κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν δέον νὰ εἶναι μηδὲν δηλ. $\Sigma \Delta X_i = o$

Ἐὰν νῦν αἱ ἀποκλίσεις ΔX_i δὲν ἐμφανίζωσι τὸν χαρακτῆρα τῶν τυχαίων σφαλμάτων, τότε συμπληροῦντες τὴν ἐξίσωσιν (1) γράφομεν ταύτην ὡς ἑξῆς· $X_i = \alpha\, \Psi_i + \beta\, Z_i$ (3)

6ον. Τὰς ἐξισώσεις (3) ἀθροίζομεν κατὰ μέλη διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ i λαμβάνοντες $\Sigma X_i = \alpha\, \Sigma \Psi_i + \beta\, \Sigma Z_i$ (4)

ἐκ τῆς (4) λυομένης ἔχομεν

$$\alpha = \frac{\Sigma X_i - \beta \Sigma Z_i}{\Sigma \Psi_i} \qquad (5)$$

τὴν τιμὴν α ἐκ τῆς (5) ἀντεισάγοντες εἰς τὴν (3), ἔχομεν

$$X_i = \frac{\Sigma X_i}{\Sigma \Psi_i}\, \Psi_i - \beta\, \frac{\Sigma Z_i}{\Sigma \Psi_i}\, \Psi_i + \beta\, \Sigma Z_i \quad \text{ἢ}$$

$$X - \frac{\Sigma X_i}{\Sigma \Psi_i}\, \Psi_i = \beta \left(Z_i - \frac{\Sigma Z_i}{\Sigma \Psi_i}\, \Psi_i \right) \qquad (6)$$

ἄλλα, κατὰ τὰ προλεχθέντα

$$\Delta X_i = X_i - \frac{\Sigma X_i}{\Sigma \Psi_i}\, \Psi_i, \text{ καὶ κατ' ἀναλογίαν}$$

$$\Delta Z_i = Z_i - \frac{\Sigma Z_i}{\Sigma \Psi_i}\, \Psi_i$$

ὅθεν ἡ (6) γράφεται $\Delta X_i = \beta\, \Delta Z_i$ (7)

Ἀλλὰ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (7) ὑφίστανται ν, ὅσαι δηλ. καὶ αἱ διάφοροι τοῦ i τιμαί. Ἐκ τῆς σχέσεως (7) εἰσαγομένου τοῦ πολ/στοῦ $+1$ ἢ -1, ἀναλόγως ἂν ΔZ_i εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, θὰ ἔχωμεν μετὰ τοὺς πολ/σμοὺς καὶ τὴν κατὰ μέλη ἄθροισιν. $\Sigma \Delta X_i = \beta\, \Sigma \Delta Z_i$ (8)

καὶ ἑπομένως ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν τοῦ β ἐκ τῆς σχέσεως 8 εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4), ἔχομεν μετὰ τὰς πράξεις

$$\alpha = \frac{\Sigma X_i}{\Sigma \Psi_i} - \frac{\Sigma \Delta X_i}{\Sigma \Delta Z_i} \cdot \frac{\Sigma Z_i}{\Sigma \Psi_i} \tag{9}$$

ἢ καὶ

$$\alpha = \frac{\Sigma X_i}{\Sigma \Psi_i} - \beta \frac{\Sigma Z_i}{\Sigma \Psi_i} \tag{10}$$

7ον. Αἱ ἀποκλίσεις μεταξὺ τιμῶν παρατηρήσεως καὶ τιμῶν ὑπολογισμοῦ θὰ δίδωνται ὑπό

$$\Delta' X_i = \left(X_i - \frac{\Sigma X_i}{\Sigma \Psi_i} \Psi_i\right) - \frac{\Sigma \Delta X_i}{\Sigma \Delta Z_i} \left(Z_i - \frac{\Sigma Z_i}{\Sigma \Psi_i} \Psi_i\right)$$

καὶ ἀθροίζοντες κατὰ μέλη διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ i

$$\Sigma \Delta' X_i = \left(\Sigma X_i - \frac{\Sigma X_i}{\Sigma \Psi_i} \Sigma \Psi_i\right) - \frac{\Sigma \Delta X_i}{\Sigma \Delta Z_i} \left(\Sigma Z_i - \frac{\Sigma Z_i}{\Sigma \Psi_i} \Sigma \Psi_i\right) = 0$$

'Εὰν αἱ ἀποκλίσεις $\Sigma \Delta' X_i$ δὲν ἐμφανίζωσι τὸν χαρακτῆρα τυχαίων σφαλμάτων, τότε συμπληροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν (3) γράφοντες ταύτην ὡς ἑξῆς

$$X_i = \alpha\, \Psi_i + \beta\, Z_i + \gamma\, \Phi_i \tag{11}$$

καὶ ἀθροίζοντες κατὰ μέλη διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ i ἔχομεν

$$\Sigma X_i = \alpha\, \Sigma \Psi_i + \beta\, \Sigma Z_i + \gamma\, \Sigma \Phi_i \tag{12}$$

'Εκ τῆς (12) λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ α καὶ εἰσάγομεν ταύτην εἰς τὴν (11) εὑρίσκομεν, μετὰ τὰς πράξεις

$$X_i - \frac{\Sigma X_i}{\Sigma \Psi_i} \Psi_i = \beta \left(Z_i - \frac{\Sigma Z_i}{\Sigma \Psi_i} \Psi_i\right) + \gamma \left(\Phi_i - \frac{\Sigma \Phi_i}{\Sigma \Psi_i} \Psi_i\right)$$

ἢ

$$\Delta X_i = \beta\, \Delta Z_i + \gamma\, \Delta \Phi_i \tag{13}$$

τῆς (13) ἀθροίζοντες κατὰ μέλη διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ i, εὑρίσκομεν, μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ πολ/στοῦ ± 1, ἀναλόγως ἂν ἡ τιμὴ τοῦ ΔZ_i εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική

$$\Sigma \Delta X_i = \beta\, \Sigma \Delta Z_i + \gamma\, \Sigma \Delta \Phi_i \tag{14}$$

ἐξ ἧς ποριζόμενα τὴν τιμὴν τοῦ β, ἥν ἀντεισάγοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (13), λαμβάνομεν μετὰ τὰς πράξεις

$$\Delta X_i - \frac{\Sigma \Delta X_i}{\Sigma \Delta Z_i} \Delta Z_i = \gamma \left(\Delta \Phi_i - \frac{\Sigma \Delta \Phi_i}{\Sigma \Delta Z_i} \Delta Z_i\right) \tag{15}$$

ἢ καὶ

$$\Delta' X_i = \gamma\, \Delta' \Phi_i \tag{16}$$

πολ/ζοντες ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων (16) ἐπὶ $+1$ ἢ -1, ἀναλόγως τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τῶν συντελεστῶν τοῦ γ καὶ ἀθροίζοντες εἶτα κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\Sigma \Delta' X_i = \gamma\, \Sigma \Delta' \Phi_i \tag{17}$$

ἢ

$$\gamma = \frac{\Sigma \Delta' X_i}{\Sigma \Delta' \Phi_i}$$

κατ' ἀκολουθίαν αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων σ, β, γ εἶναι

$$\alpha=\frac{\Sigma X_i}{\Sigma\Psi_i}-\beta\frac{\Sigma Z_i}{\Sigma\Psi_i}-\gamma\frac{\Sigma\Phi_i}{\Sigma\Psi_i}$$

$$\beta=\frac{\Sigma\Delta X_i}{\Sigma\Delta Z_i}-\gamma\frac{\Sigma\Delta\Phi_i}{\Sigma\Delta Z_i}$$

$$\gamma=\frac{\Sigma\Delta^2 X_i}{\Sigma\Delta^2\Phi_i}$$

ἐξυπακούεται ὅτι ἂν ὑφίστανται πλείονες μεταβληταί, διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν παραμέτρων τῆς υἱοθετουμένης γραμμικῆς σχέσεως ἡ αὐτὴ μέθοδος θὰ ἀκολουθηθῇ.

8ον. Ἐ φ α ρ μ ο γ ή.—Δίδονται αἱ κάτωθι τέσσαρες χρονολογικαὶ σειραί, πᾶσαι συναρτήσεις τοῦ χρόνου t, καὶ ὑποθέτομεν ὅτι ἡ πρώτη μορφοῦται τῇ ταὐτοχρόνῳ ἐπιδράσει τῶν τριῶν ἄλλων καὶ ὅτι συνεπῶς μεταξὺ τῶν τεσσάρων ὑφίσταται ἐξάρτησις μορφῆς εὐθυγραμμικῆς (διὰ τὸ ἁπλούστερον).

X	Ψ	Z	Φ
35	210	98	70
31	166	97	61
32	182	99	65
31	174	92	60
40	221	106	85
35	185	108	69
204	1158	600	410

$\Sigma X = 204$ $\qquad \frac{\Sigma X}{\Sigma\Psi} = 0{,}176$

$\Sigma\Psi = 1158$

$\Sigma Z = 600$ $\qquad \frac{\Sigma Z}{\Sigma\Psi} = 0{,}518$

$\Sigma\Phi = 410$ $\qquad \frac{\Sigma\Phi}{\Sigma\Psi} = 0{,}354$

ΔX	ΔZ	ΔΦ	Δ²X	Δ²Φ
—1,9	--10,7	—4,3	0,3	2,6
1,8	11,1	2,3	—0,2	0,6
0	4,8	0,6	—0,7	0,1
0,4	1,9	—1,6	0,2	1,9
—2,4	--18,8	—0,3	0,4	2,6
2,5	12,2	3,5	—0,7	1,6

$\Sigma\Delta^2 X = -0{,}7$

$\Sigma\Delta^2\Phi = 9{,}4$

$$\gamma=\frac{\Sigma\Delta^2 X}{\Sigma\Delta^2\Phi}=-0{,}074$$

$$\frac{\Sigma\Delta X}{\Sigma\Delta Z}=0{,}151$$

$$\frac{\Sigma\Delta\Phi}{\Sigma\Delta Z}=0{,}158$$

$$\beta=\frac{\Sigma\Delta X}{\Sigma\Delta Z}-\gamma\frac{\Sigma\Delta\Phi}{\Sigma\Delta Z}=0{,}162$$

$$\alpha=\frac{\Sigma X}{\Sigma\Psi}-\beta\frac{\Sigma Z}{\Sigma\Psi}-\gamma\frac{\Sigma\Phi}{\Sigma\Psi}=0{,}119$$

ὅθεν ἡ ἐξίσωσις τῆς μερικῆς παλινδρομήσεως τοῦ X ὡς πρὸς Ψ,Z,Φ εἶναι $X=0{,}119\ \Psi+0{,}162\ \Phi-0{,}074\ Z$

Τιμαὶ παρατηρήσεως	Τιμαὶ ὑπολογισμοῦ	Ἀποκλίσεις
X	X	$\|\eta\|$
35	35,6	0,6
31	30,9	0,1
32	32,8	0,8
31	30,8	0,2
40	39,4	0,6
35	34,4	0,6
204	203,9	2,9

τὸ ἁπλοῦν μέσον σφάλμα εἶναι $\bar{\eta}=\frac{\Sigma|\eta|}{\nu}=0{,}48$, τὸ ἁπλοῦν μέσον σφάλμα ὡς πρὸς τὸ σύνολον τῶν παρατηρήσεων εἶναι μόλις 1,42 %, δηλ. ἡ ἐπιτευχθεῖσα προσέγγισις εἶναι λίαν ἱκανοποιητική. Ἡ ἑρμηνεία (ποσοτικῶς) τῆς εὑρεθείσης ἀναλυτικῆς ἐξαρτήσεως γίνεται διαφοριζομένης ταύτης διαδοχικῶς πρὸς ἕκαστον τῶν μεταβλητῶν, ἐξ οὗ προκύπτουσι.

$$dX = 0{,}119\, d\Psi, \quad dX = 0{,}162\, d\Phi, \quad dX = -0{,}074\, d\Phi$$

ἤτοι εἰς πᾶσαν αὔξησιν τοῦ Ψ κατὰ μονάδα ($d\Psi = 1$), ἀντιστοιχεῖ ἀνάλογος αὔξησις τοῦ X ἴση πρὸς $dX=0{,}119$ κλπ. Τὸ παρατεθὲν παράδειγμα καθιστᾷ σαφῆ τὴν ἁπλότητα τῆς μεθόδου τοῦ Cauchy καὶ τὴν ταχύτητα μεθ' ἧς εἶναι δυνατὸς ὁ καθορισμὸς τῶν ἐξισώσεων μερικῆς παλινδρομήσεως διὰ ταύτης. Ἐπὶ πλέον ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἀπηλλαγμένη κοπιωδῶν ὑπολογισμῶν, διότι περιορίζεται εἰς προσθαφαιρέσεις καὶ πηλῖκα μόνον τῶν ὑπ' ὄψει ποσοτήτων καὶ ἐπὶ πλέον ἔχει τὸ πλεονέκτημα νὰ δίδῃ κριτήριον ἐπὶ τῆς ἄχρι τοῦδε γενομένης ἐργασίας ὑπ' ἔποψιν ἀκριβείας αὐτῆς.