Ο ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
(LINEAR PROGRAMMING)
ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΗΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

Ὑπὸ ΝΙΚΟΥ Γ. ΚΟΝΔΥΛΗ

1. Ἡ παραγωγικὴ λειτουργία τῶν βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεων.

Αἱ κύριαι καὶ βασικαὶ λειτουργίαι μιᾶς βιομηχανικῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι ἡ παραγωγὴ τῶν προϊόντων (παραγωγικὴ λειτουργία), ἡ διανομὴ τῶν προϊόντων (ἐμπορικὴ λειτουργία) καὶ ἡ χρηματοδότησις τῆς παραγωγῆς καὶ διανομῆς (οἰκονομικὴ λειτουργία). Ἡ κατὰ εὔλογον τρόπον κατανομὴ καὶ διακίνησις τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν εἰς τὰς τρεῖς ταύτας λειτουργίας εἶναι τὸ ἔργον μιᾶς τετάρτης λειτουργίας, τῆς διοικήσεως (διοικητικὴ λειτουργία), τῆς ὁποίας ἀντικείμενα (objectives) εἶναι ὁ προγραμματισμός, ἡ ὀργάνωσις, ἡ διεύθυνσις, ὁ συντονισμὸς καὶ ὁ ἔλεγχος τῆς δράσεως τῆς ἐπιχειρήσεως.

Συμφώνως πρὸς τὰς γενικὰς ἀρχὰς τῆς ταξινομήσεως, τὰ ἐπὶ μέρους προβλήματα ἑκάστης τῶν ἀνωτέρω λειτουργιῶν δυνάμεθα νὰ κατατάξωμεν ἀναλόγως τῆς ἰδιαιτέρας φύσεώς των καὶ τῆς ὑφισταμένης μεταξύ των σχέσεως [1]. Οὕτω τὰ προβλήματα τῆς παραγωγῆς δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς τρεῖς κατηγορίας: φυσικὰ (ἢ τεχνολογικά), οἰκονομικὰ καὶ προβλήματα ἀνθρωπίνου παράγοντος. Πλεῖστα ἐκ τῶν ἰδιαιτέρων προβλημάτων ἑκάστης τῶν κατηγοριῶν τούτων εἶναι ἀνεξάρτητα καὶ ταξινομοῦνται γενικῶς εἰς τὴν κατηγορίαν εἰς ἣν ἀνήκουν καὶ μόνον, ὅπως π.χ. ἡ ἀνάμιξις τῶν ὑλικῶν ἐντὸς αὐτομάτου ἀναμικτῆρος, πρόβλημα καθαρῶς τεχνολογικόν, ταξινομούμενον εἰς τὴν οἰκείαν κατηγορίαν, ἢ μία στάσις ἐργασίας λόγῳ κακῆς συμπεριφορᾶς τοῦ ἐργοδηγοῦ, πρόβλημα καθαρῶς ἀνθρωπίνου παράγοντος, ταξινομούμενον ἐπίσης εἰς τὴν σχετικὴν κατηγορίαν. Ἀντιθέτως ἄλλα προβλήματα εἶναι σχετικά, ἐξηρτημένα, μικτά, ἀνήκοντα κατὰ διάφορον βαθμὸν εἰς πλείονας τῆς μιᾶς ἐκ τῶν ἀνωτέρω κατηγοριῶν, ὅπως π.χ. ἡ ἀνάμιξις τῶν ὑλικῶν ὑπὸ ἑνὸς ἐργάτου — πρόβλημα κατ' ἀρχὴν τεχνολογικόν, ἀλλ' ἐπίσης καὶ πρόβλημα ἀνθρωπίνου παράγοντος.

Τὰ κυρίως τεχνολογικὰ προβλήματα τῆς παραγωγῆς εἶναι ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα σχετίζονται μὲ φυσικὰ ἢ χημικὰ φαινόμενα καὶ μεγέθη, ὅπως π.χ. ἡ

1. Bowman and Fetter, «Analysis for Production Management», 1957, σελ. 6 κ.ἑ.

σύνθεσις τῶν ὑλικῶν, ἡ θερμοκρασία ἑνὸς μεταλλουργικοῦ φούρνου, ἡ πίεσις ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας ἢ ἑνὸς ἀντικειμένου, ἡ σύνθεσις καὶ ἡ ἐλαστικότης ἑνὸς νήματος, κ.ἄ.

Τὰ κυρίως οἰκονομικὰ προβλήματα τῆς παραγωγῆς εἶναι ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα σχετίζονται μὲ οἰκονομικὰ φαινόμενα καὶ μεγέθη, λαμβάνοντα χώραν ἐντὸς καὶ κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας. Ἡ παραγωγικὴ διαδικασία δὲν ἐπιδρᾷ μόνον ἐπὶ τῶν φυσικοχημικῶν ἰδιοτήτων τοῦ προϊόντος (μορφῆς, ὄγκου, βάρους, χρώματος, συνθέσεως κλπ.), ἀλλ' ἐπίσης καὶ ἐπὶ τῆς χρησιμότητος τούτου (utility), μὲ συνέπειαν τὴν μεταβολὴν τῆς ἀξίας του καὶ τῆς τιμῆς του. Ἡ «ἀρχὴ τῆς οἰκονομικότητος», ἡ ὁποία δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἐφαρμογὴν εἰς φυσικὰ φαινόμενα καὶ μεγέθη, ἐφαρμόζεται εἰς τὰ οἰκονομικὰ προβλήματα τῆς παραγωγῆς (σχεδιασμὸς καὶ ἔλεγχος τῆς παραγωγῆς, ἐπιλογὴ καὶ τοποθέτησις τοῦ ἐξοπλισμοῦ, καθορισμὸς καὶ ἔλεγχος τῶν ἀποθεμάτων, οἰκονομικὰ προβλήματα συντηρήσεως τοῦ ἐργοστασίου καὶ ἐξοπλισμοῦ, μέθοδος παραγωγῆς κλπ.).

Τὰ προβλήματα τοῦ ἀνθρωπίνου παράγοντος εἰς τὴν παραγωγὴν εἶναι ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα σχετίζονται : α΄) μὲ τὴν ἐπίδρασιν τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας ἐπὶ τοῦ ἀνθρωπίνου παράγοντος καὶ τὴν ἐντεῦθεν διαμόρφωσιν τῆς συμπεριφορᾶς τούτου (π.χ. τὸ πρόβλημα τῆς ἀκουστικῆς, τὸ πρόβλημα τῆς θερμοκρασίας καὶ τῶν κλιματιστικῶν συνθηκῶν ἐντὸς τῶν χώρων ἐργασίας, τὸ πρόβλημα τῶν ἐργατικῶν ἀτυχημάτων κλπ.), β΄) μὲ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἀνθρωπίνου παράγοντος ἐπὶ τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας (π.χ. ἐπιμέλεια κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἐργασίας κ.ἄ.).

Ἀντικείμενον τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας εἶναι ἡ παραγωγή, τῆς ὁποίας ἄ μ ε σ ο ς σκοπὸς εἶναι ἡ κατασκευή, ἡ δημιουργία προϊόντος. Αὐτὴ ἀκριβῶς εἶναι ἡ διαφορὰ σκοποῦ μεταξὺ παραγωγικῆς λειτουργίας καὶ λοιπῶν λειτουργιῶν τῆς βιομηχανικῆς ἐπιχειρήσεως. Ἡ οἰκονομικὴ π.χ. λειτουργία ἐμμέσως μόνον συνδέεται μὲ τὴν δημιουργίαν τοῦ προϊόντος, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι προμηθεύει τὸ ἀναγκαιοῦν κεφάλαιον διὰ τὴν τοιαύτην δημιουργίαν.

2. *Ὁ Προγραμματισμὸς τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας τῶν βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεων.*

Ὁ Προγραμματισμὸς τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας τῶν βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεων εἶναι μία σύνθεσις σχεδίων δυναμικῆς ἐπιλύσεως τῶν περιγραφέντων ἀνωτέρω προβλημάτων (τεχνολογικῶν, οἰκονομικῶν, ἀνθρωπίνου παράγοντος). Ἡ ἔκφρασις «δυναμικὴ ἐπίλυσις» σημαίνει ἐν προκειμένῳ τὴν κατάλληλον διάταξιν κ α τ ὰ χ ρ ό ν ο ν τῶν διαφόρων διαθεσίμων εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν πλουτοπαραγωγικῶν πηγῶν (capacities, ἀνθρώπων —χώρων—μηχανῶν—ἐργαλείων—ὑλικῶν) πρὸς ἐπίτευξιν ἑνὸς optimum ἀποτελέσματος, μιᾶς optimum δημιουργίας προϊόντων. Ἡ optimum αὐτὴ δημιουργία δύναται νὰ ἀναφέρηται εἰς πλεῖστα ἀντικείμενα, ὅπως π.χ. εἰς τὴν ἐπίτευξιν τοῦ μεγίστου ἐκ τῶν πωλήσεων κέρδους, εἰς τὴν ἐπίτευξιν τοῦ ἐλαχίστου κόστους παραγωγῆς, εἰς τὴν ἐπίτευξιν τοῦ μεγίστου ὄγκου παραγωγῆς κ.ἄ. Τὸ ἀντικείμενον ἢ τὰ ἀντικείμενα προκαθορίζονται ἑκάστοτε συμφώνως πρὸς διαφόρους παράγοντας, οἱ ὁποῖοι ἐπίσης πρέπει νὰ προβλεφθοῦν καὶ ὑπολογισθοῦν. Οἱ παράγοντες οὗτοι εἶναι ἡ ζήτησις τῆς ἀγορᾶς κατὰ τὴν προγραμματιζομένην περίοδον, ἡ δύναμις καὶ ἡ πολιτικὴ τῶν ἀνταγωνιστικῶν ἐπιχειρήσεων κλπ.

Φυσικὰ ὁ παράγων «τύχη» θὰ παίζῃ πάντοτε ἕνα ρόλον, μεγαλύτερον ἢ μικρότερον κατὰ τὴν πραγματοποίησιν τῶν προβλέψεων τοῦ προγράμματος. Οἱονδήποτε πρόγραμμα, ὅσον ἐπιστημονικῶς καὶ ἐὰν ἔχῃ καταρτισθῇ, δὲν δύναται νὰ ἐκμηδενίσῃ τὸν παράγοντα «τύχη» — εἰμὴ μόνον «κατὰ τύχην». Ἡ πιθανότης ὅμως περιορισμοῦ τῶν ἐπιδράσεων τοῦ παράγοντος τούτου ἐξαρτᾶται, κατὰ μέγα μέρος, ἐκ τῆς ἀκριβεστέρας — ἐπιστημονικωτέρας — λύσεως τῶν σχετικῶν προβλημάτων.

Τὰ βασικὰ προγράμματα τῶν βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεων εἶναι τὰ προγράμματα τῶν ἀναφερθεισῶν ἐν ἀρχῇ τῆς παρούσης γενικῶν λειτουργιῶν (παραγωγικῆς, ἐμπορικῆς, οἰκονομικῆς καὶ διοικητικῆς λειτουργίας). Ἡ σύνθεσις τῶν προγραμμάτων τούτων συνιστᾷ τὸ γενικὸν πρόγραμμα τῆς ἐπιχειρήσεως (Master Schedule). Ἐντὸς αὐτῶν ὑπεισέρχονται πλεῖστα ἐπὶ μέρους προγράμματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀναφέρεται εἰς μίαν συγκεκριμένην φάσιν ἑκάστης τῶν ἀνωτέρω λειτουργιῶν (πρόγραμμα ἀγορᾶς ὑλικῶν, πρόγραμμα λειτουργίας μηχανημάτων κ.ἄ. διὰ τὴν παραγωγικὴν λειτουργίαν, πρόγραμμα διαφημίσεως, πρόγραμμα ἐρεύνης τῆς ἀγορᾶς κ.ἄ. διὰ τὴν ἐμπορικὴν λειτουργίαν, ταμειακὸν πρόγραμμα, πρόγραμμα δαπανῶν καὶ ἐσόδων κ.ἄ. διὰ τὴν οἰκονομικὴν λειτουργίαν, πρόγραμμα τιμολογιακῆς πολιτικῆς, πρόγραμμα ἀνθρωπίνων καὶ βιομηχανικῶν σχέσεων κ.ἄ. διὰ τὴν διοικητικὴν λειτουργίαν).

Τὰ πλεονεκτήματα τοῦ προγραμματισμοῦ διὰ τὴν ἐπιχείρησιν εἶναι κατάδηλα. Ὁ προγραμματισμὸς ἀποτελεῖ πιθανῶς τὸ πλέον σημαντικὸν καθοδηγητικὸν ὄργανον τῆς διοικήσεως εἰς τὴν χάραξιν τῆς πολιτικῆς της καὶ διαφωτίζει αὐτὴν ἐπὶ τῶν πραγματικῶς ὑφισταμένων δυνατοτήτων τῆς ἐπιχειρήσεως καὶ ἐπὶ τῶν μελλοντικῶν ἐξελίξεων αὐτῆς. Ἡ κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη ἀλματώδης πρόοδος τῶν ἐπιχειρήσεων εἰς τὰς ἀνεπτυγμένας χώρας, μὲ συνέπειαν τὴν περαιτέρω οἰκονομικὴν πρόοδον αὐτῶν, ὀφείλεται κατὰ μέγα μέρος εἰς τὸν ἐπιχειρηματικὸν προγραμματισμόν· δι' ὃ καὶ ἀναγνωρίζεται σήμερον οὗτος ὡς ἡ πρώτη βασικὴ ἁρμοδιότης τῆς διοικήσεως [2].

2. Περισσότερα ἐν προκειμένῳ ἴδε εἰς Μ. Μειμάρογλου, «Ὁ Προγραμματισμὸς τῆς δράσεως τῶν Ἐπιχειρήσεων», Ἀθῆναι, 1958.

Ὁ προγραμματισμὸς τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας ἔχει ἰδιαιτέραν σημασίαν διὰ τὴν βιομηχανικὴν ἐπιχείρησιν, διότι ἡ παραγωγὴ ἀποτελεῖ τὴν σπουδαιοτέραν λειτουργίαν αὐτῆς. Τὸ κόστος παραγωγῆς εἰς πᾶσαν σχεδὸν περίπτωσιν ὑπερβαίνει τὰ 50% τοῦ συνολικοῦ κόστους, ἀνερχόμενον, δι' ὡρισμένους βιομηχανικοὺς κλάδους, εἰς 90–95 ο)ο. Τὰ προβλήματα τῆς παραγωγῆς ἐπίσης, τὰ ὁποῖα ἀναλαμβάνει νὰ ἐπιλύσῃ ὁ προγραμματιστὴς αὐτῆς εἶναι περισσότερον δύσκολα καὶ πολύπλοκα ἀπὸ τὰ προβλήματα προγραμματισμοῦ τῶν ἄλλων λειτουργιῶν τῆς ἐπιχειρήσεως. Τέλος εἰς τὴν χώραν μας, εὑρισκομένην εἰς τὸ στάδιον τῆς βιομηχανικῆς ἀναπτύξεως, ὁ προγραμματισμὸς τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας τῶν βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεων ἀποτελεῖ ζωτικὴν ἀνάγκην — ἀλλὰ καὶ καθῆκον, διὰ τὴν στήριξιν τῶν ἐπιχειρήσεων καὶ τὴν αὔξησιν τῆς παραγωγικότητος αὐτῶν.

3. Μέθοδοι προγραμματισμοῦ τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας τῶν βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεως—ἔννοια, ἱστορικὴ ἐξέλιξις, περιορισμοὶ καὶ πλεονεκτήματα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.

Α') Ἐμπειρικὴ μέθοδος. Μέσα τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι ἡ ἐμπειρία καὶ ἡ διαίσθησις τοῦ ἐπιχειρηματίου καὶ τῶν ἁρμοδίων στελεχῶν τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας. Συνίσταται εἰς μίαν κάποιαν πρόβλεψιν τῆς ἀγορᾶς καὶ τῶν οἰκονομικῶν συνθηκῶν τῆς προγραμματιζομένης περιόδου καὶ εἰς τὴν ἐξ ἐμπειρίας γνῶσιν τῶν δυνατοτήτων τῆς ἐπιχειρήσεως, βάσει δὲ τούτων καταρτίζεται τὸ πρόγραμμα — σχέδιον διατάξεως τῶν πλουτοπαραγωγικῶν πηγῶν κατὰ χρόνον πρὸς ἐπίτευξιν ἑνὸς optimum ἀποτελέσματος (ἀνωτέρω, 2). Ἡ ἐμπειρικὴ μέθοδος δὲν ἔχει, βεβαίως, ἀξιώσεις ἀκριβείας, αἱ προβλέψεις συνήθως ἀπέχουν ἀρκετὰ τῆς πραγματικότητος. Παρὰ ταῦτα εἶναι προτιμότερος ὁ προγραμματισμός, ἔστω καὶ διὰ τῆς ἐμπειρικῆς μεθόδου, ἀπὸ τὴν ἔλλειψιν οἱουδήποτε προγράμματος.

Β') Σχηματικὴ μέθοδος (schematic technique). Πλεῖστα προβλήματα προγραμματισμοῦ τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας τῶν βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεων δύνανται νὰ λυθοῦν κατὰ μᾶλλον ἱκανοποιητικὸν τρόπον διὰ τῆς λεγομένης σχηματικῆς μεθόδου (schematic technique, schematic models), ὅπως π.χ. τὸ πρόβλημα «πῶς θὰ προγραμματίσωμεν τὴν κατανομὴν παραγγελιῶν πελατῶν διὰ τὴν κατασκευὴν προϊόντων εἰς τὰς διαθεσίμους μηχανάς, ὥστε νὰ ἐπιτύχωμεν παραγωγὴν μὲ τὸ ἐλάχιστον κόστος λειτουργίας τῶν μηχανῶν καὶ παράδοσιν τῶν προϊόντων ἑτοίμων εἰς τοὺς πελάτας εἰς τὸν συντομώτερον δυνατὸν χρόνον». Ἡ σχηματικὴ μέθοδος ἐκφράζεται διὰ τῶν λεγομένων σχηματικῶν διαγραμμάτων ἢ χαρτῶν (schematic diagrams ἢ schematic charts), κυριώτερα τῶν ὁποίων εἶναι τὰ διαγράμματα Gantt, τὰ διαγράμματα ροῆς (flow charts), τὰ διαγράμματα πολλαπλῆς δραστηριότητος (multiple activity charts) κ.ἄ. Τὸ συνηθέστερον χρησιμοποιούμενον εἰς προβλήματα προγραμματισμοῦ τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας διάγραμμα, εἶναι τὸ διάγραμμα Gantt, τὸ ὁποῖον ἐν προκειμένῳ λαμβάνει διαφόρους μορφάς, ἀναλόγως τοῦ προβλήματος, τὸ ὁποῖον καλεῖται νὰ ἐπιλύσῃ. Διὰ τὸ ἀναφερθὲν ἀνωτέρω π.χ. πρόβλημα, τὸ διάγραμμα θὰ ἀναφέρῃ εἰς τὴν πρώτην στήλην τὰς διαθεσίμους μηχανάς, εἰς τὴν δευτέραν τὴν παραγωγικὴν ἱκανότητα ἑκάστης τούτων καὶ εἰς τὴν τρίτην τὸ κόστος λειτουργίας ἑκάστης μηχανῆς κατὰ μονάδα προϊόντος. Παραπλεύρως εἰς γραμμὰς θὰ ἀναφέρεται ὁ χρόνος. Ἐπὶ τῶν γραμμῶν τούτων χαράσσομεν τμήματα, ἀντιπροσωπεύοντα τὸν χρόνον ἀπασχολήσεως ἑκάστης μηχανῆς διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἑκάστης παραγγελίας. Ἡ μέθοδος βεβαίως δὲν εἶναι ἀπολύτως ἀκριβής, ἡ προσέγγισις ὅμως εἶναι ἀρκούντως ἱκανοποιητική.

Γ') Μέθοδοι μαθηματικοῦ προγραμματισμοῦ (mathematical programming). Ἀνεπτύχθησαν κατὰ τὰ τελευταῖα μόλις ἔτη εἰς τὰς Η.Π.Α. καὶ ἀποτελοῦν τὴν τελευταίαν λέξιν τοῦ ἐπιστημονικοῦ προγραμματισμοῦ. Αἱ κυριώτεραι τούτων εἶναι ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς (linear programming), ὁ δυναμικὸς προγραμματισμὸς (dynamic programming), ἡ μέθοδος ἐπιχειρησιακῆς ἐρεύνης (operation research method) καὶ ἡ θεωρία παιγνίων (game theory). Αἱ δύο τελευταῖαι μέθοδοι χρησιμεύουν περισσότερον πρὸς ἐπίλυσιν γενικῶν διοικητικῶν προβλημάτων τῶν ἐπιχειρήσεων καὶ ὀλιγώτερον πρὸς ἐπίλυσιν προβλημάτων προγραμματισμοῦ.

Ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς εἶναι μία γενικὴ μέθοδος προγραμματισμοῦ, βασιζομένη ἐπὶ τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως. Ἐν ἀντιθέσει ὁ δυναμικὸς προγραμματισμὸς εἶναι εἰδικὴ μέθοδος διαδοχικῆς προσεγγίσεως τοῦ προβλήματος, ὅταν ἡ σχέσις τῶν διαφόρων διαδοχικῶν σταδίων εἶναι ἁπλῆ. Ἡ μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ συνίσταται εἰς τὴν μαθηματικὴν παράστασιν τῶν διαφόρων παραγόντων, οἱ ὁποῖοι ὑπεισέρχονται εἰς τὸ πρόβλημα, εἰς τὴν εὕρεσιν καὶ τὸν καθορισμὸν τῆς σχέσεως καὶ ἀλληλεπιδράσεως τῶν παραγόντων τούτων καὶ τέλος εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος ὑπὸ μορφὴν γραμμικῶν ἐξισώσεων (ἢ ἐνδεχομένως ἀνισοτήτων), ἡ λύσις τῶν ὁποίων ὁδηγεῖ εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος. Ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος ἐξαρτᾶται ἐὰν ἡ μαθηματικὴ ἀνάλυσις, ἡ ὁποία θὰ ἐφαρμοσθῇ, εἶναι στοιχειώδης ἢ ἀνωτέρα.

Ἡ μαθηματικὴ ἀνάλυσις διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων προγραμματισμοῦ ἀνεφάνη τὸ πρῶτον κατὰ τὸ 1758, μὲ τὴν δημοσίευσιν τοῦ ἔργου τοῦ F. Quesnay «Tableau Économique», ἀνεπτύχθη ὅμως μόνον κατὰ τὴν τελευταίαν δεκαετίαν διὰ τῶν ἔργων τοῦ W. W. Leontief, τοῦ J. von Neumann καὶ ἰδίως τοῦ G. B. Dantzig[3]. Ἡ πρακτικὴ ἐφαρμογὴ τῶν θεωριῶν τούτων ἐγένετο κατ' ἀρχὴν διὰ τὸν προγραμματισμὸν στρατιωτικῶν ἔργων καὶ ἔργων

3. G. B. Dantzig, «Maximination of a set of linear functions of variables subject to linear inequalities», N. York, 1951.

ἐθνικῆς ἀμύνης, ἐν συνεχείᾳ διὰ τὴν κατάρτισιν μακροοικονομικῶν κυβερνητικῶν προγραμμάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, καὶ τέλος διὰ τὴν κατάρτισιν ἐπιχειρηματικῶν προγραμμάτων, ἰδιαιτέρως δὲ διὰ τὸν προγραμματισμὸν τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας τῶν βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεων.

Ἡ μέθοδος αὕτη κατέστησε δυνατὴν τὴν λύσιν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα μέχρι πρό τινος ἐθεωροῦντο ἄλυτα, ἢ τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἐγένετο ἐμπειρικῶς καὶ κατὰ προσέγγισιν. Μερικαὶ ἐκ τῶν δυνατοτήτων τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, εἰδικῶς εἰς τὸ πεδίον τοῦ προγραμματισμοῦ τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας τῶν βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεων, εἶναι αἱ ἀκόλουθοι :

—Ὅταν ἓν προϊὸν συντίθεται ἐκ διαφόρων συστατικῶν, τῶν ὁποίων τὸ κόστος εἶναι διάφορον, δυνάμεθα, διὰ τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, νὰ εὕρωμεν καὶ προγραμματίσωμεν τὸ ἐλάχιστον κόστος συνθέσεως[4].

— Δυνάμεθα νὰ προγραμματίσωμεν τὴν κατανομὴν τῆς παραγωγῆς εἰς τὸν διαθέσιμον ἐξοπλισμόν, ὥστε αὕτη νὰ ἀποβῇ ἡ πλέον κερδοφόρος.

— Δυνάμεθα νὰ προγραμματίσωμεν τὸν ὄγκον τῆς παραγωγῆς, οὕτως ὥστε νὰ καλύψωμεν ἀνωμαλίας τῆς ζητήσεως, ἀποφεύγοντες ὑπεραπασχόλησιν ἢ ὑποαπασχόλησιν τῶν παραγωγικῶν μηχανημάτων καὶ τοῦ προσωπικοῦ ἢ μεταβολὴν τοῦ ὁμαλοῦ ὄγκου ἀποθεμάτων.

— Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ νὰ προγραμματίσωμεν τὸ ἐλάχιστον κόστος μεταφορᾶς τῶν προϊόντων ἀπὸ διάφορα ἐργοστάσια ἢ ἀποθήκας εἰς διάφορα κέντρα καταναλώσεως, καθὼς καὶ τὸ ἐλάχιστον κόστος χειρισμοῦ καὶ διακινήσεως τῶν ὑλικῶν ἐντὸς τοῦ ἐργοστασίου.

— Δυνάμεθα νὰ ἀξιολογήσωμεν ἀσφαλῶς μίαν μελλοντικὴν ἐπιχειρηματικὴν ἐπένδυσιν ἢ ἐπέκτασιν καὶ κατ' ἀκολουθίαν νὰ προγραμματίσωμεν ἢ ὄχι αὐτὴν κλπ.

Ἡ χρῆσις τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἐπεκτείνεται εἰς τὰς ἐπιχειρήσεις (ὡς καὶ εἰς τὴν κυβερνητικὴν οἰκονομικὴν πολιτικὴν) ἡμέρᾳ τῇ ἡμέρᾳ, καθημερινῶς δὲ καὶ νέαι δυνατότητες τῆς μεθόδου ταύτης ἀναφαίνονται. Ἤδη ἕνας εὐρύτατος ἀριθμὸς παντὸς εἴδους ἐπιχειρήσεων, εἰς τὰς ἀνεπτυγμένας ἰδίως χώρας, ἐφαρμόζει τὴν μέθοδον ταύτην.

Ὁπωσδήποτε ὅμως ἡ χρῆσις της δὲν εἶναι ἀπεριόριστος. Κατ' ἀρχὴν αὕτη περιορίζεται ὑπὸ δύο ἀντικειμενικῶν παραγόντων : πρῶτον, θὰ πρέπῃ τὸ πρόβλημα νὰ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ μαθηματικὴν μορφήν, ἡ ὁποία νὰ περικλείῃ γραμμικότητα (linearity), βεβαιότητα (certainty) καὶ ἐνίοτε ὁμοιογένειαν (homogeneity)[5]. Δεύτερον, θὰ πρέπῃ τὸ πρόβλημα, ὑπὸ τὴν μαθηματικήν του μορφήν, νὰ εἶναι ἐπιδεκτικὸν λύσεως διὰ τῶν γνωστῶν σήμερον εἰς τὸν ἄνθρωπον μέσων καὶ μεθόδων. Ὁ δεύτερος οὗτος παράγων περιορί-

4. Bowman and Fetter, ἔνθ' ἀνωτ. σελ. 99.
5. Ὅρα κατωτέρω τὰ τῆς ἐννοίας τῶν ὅρων τούτων (§ 4 καὶ ἐπ.).

ζεται μὲ τὴν σειράν του ἀρκετὰ ἐκ τῆς ἀνακαλύψεως καὶ ἐπεκτάσεως, κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη, τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστικῶν μηχανῶν (electronic computers), αἱ ὁποῖαι κατέστησαν δυνατὴν τὴν ἐπίλυσιν γραμμικῶν προβλημάτων μεγάλου ἀριθμοῦ ἐξισώσεων καὶ ἀγνώστων. Ἕνας τρίτος περιοριστικὸς παράγων τῆς χρήσεως τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἰδίως εἰς τὰς ἐπιχειρήσεις τῶν ὀλιγώτερον ἀνεπτυγμένων χωρῶν, εἶναι ἡ ἔλλειψις εἰδικῶν ἐπὶ τῆς μεθόδου ταύτης. Ὁ «γραμμικὸς προγραμματιστὴς» εἰς τὴν βιομηχανικὴν ἐπιχείρησιν δέον νὰ συγκεντρώνῃ πολλὰ ἔμφυτα προσόντα καὶ εἰδικὴν οἰκονομικήν, τεχνικὴν καὶ μαθηματικὴν κατάρτισιν.

4. *Βασικαὶ προϋποθέσεις καὶ μέθοδοι γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας τῶν βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεων.*

Ὁ πρῶτος ἀναφερθεὶς ἀνωτέρω ἀντικειμενικὸς περιοριστικὸς παράγων τῆς χρήσεως τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ συνιστᾷ ἐπίσης καὶ τὰς βασικὰς προϋποθέσεις ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου. Ἡ ἔννοια τῆς γραμμικότητος (linearity) ἐπεξηγεῖται ἐκτενέστερον εἰς τὴν ἑπομένην § 5. Ἡ βεβαιότης (certainty) ἐν προκειμένῳ ἀναφέρεται εἰς τὴν ἀκρίβειαν (accuracy) τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ὑπεισέρχονται εἰς τὸ πρόβλημα. Αἱ διάφοροι μετρήσεις (πρακτικὴ παραγωγικὴ ἱκανότης τῶν μηχανῶν, χρόνος, κόστος κλπ.) δέον νὰ διενεργοῦνται προσεκτικῶς, ὥστε τὰ ἐξαγόμενα νὰ εἶναι «βέβαια» καὶ οὐχὶ «πιθανά». Τοῦτο δὲν εἶναι δύσκολον εἰς μίαν καλῶς ὠργανωμένην καὶ διοικουμένην ἐπιχείρησιν, ἡ ὁποία τηρεῖ λεπτομερῆ στοιχεῖα τῆς δράσεως τῶν διαφόρων τμημάτων της. Ὅταν εἰς τὸ πρόβλημα ὑπεισέρχωνται στοιχεῖα ἀφορῶντα τὸν ἀνθρώπινον παράγοντα (παραγωγικότητα τῆς ἐργασίας), ἡ ἀκρίβεια ἐξαρτᾶται εἰς ὑψηλὸν βαθμὸν ἐκ τῶν μελλοντικῶν ἀντιδράσεων καὶ τῆς συμπεριφορᾶς τῶν ἀνθρωπίνων ὄντων, αἱ ἐν προκειμένῳ δὲ μετρήσεις δὲν δύνανται νὰ εἶναι τόσον ἀκριβεῖς, ὅσον αἱ μετρήσεις τῶν ὑλικῶν στοιχείων. Τοῦτο, ἐν πάσῃ περιπτώσει, εἶναι γνωστὸν ἐκ τῶν προτέρων, δυνάμεθα δὲ κατὰ προσέγγισιν νὰ προκαθορίσωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῶν συντελεστῶν τοῦ προβλήματος.

Ἡ ἔννοια τῆς ὁμοιογενείας (homogeneity) συνίσταται εἰς τὸ ὅτι ὅλαι αἱ ἀναλογίαι ἀλληλοϋποκαταστάσεως τῶν συντελεστῶν δέον νὰ εὑρίσκωνται εἰς σχέσιν 1 πρὸς 1. Τοῦτο θὰ καταστῇ σαφέστερον κατωτέρω κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς μεθόδου μεταφορᾶς (transportation method) τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ (κατωτ. § 8), διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ὁποίας ἡ ὁμοιογένεια ἀποτελεῖ βασικὴν προϋπόθεσιν.

Καθὼς ἡ χρῆσις τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ καθημερινῶς ἐπεκτείνεται διὰ τὴν λύσιν νέων προβλημάτων, αὐξάνεται καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν μεθόδων τούτου. Αἱ κυριώτεραι μέχρι σήμερον εὑρεθεῖσαι καὶ ἐφαρμοσθεῖσαι μέθοδοι εἶναι ἡ γραφικὴ μέθοδος (graphical method), ἡ simplex μέθοδος (simplex method), ἡ μέθοδος μεταφορᾶς (transportation method) καὶ ἡ μέθοδος προτιμήσεως κέρδους (profit preference method). Ἡ πρώτη τούτων, (κατωτ. § 6) χρησιμεύει πρὸς ἐπίλυσιν στοιχειωδῶν μόνον προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ὅταν δηλ. τὸ πρόβλημα περιλαμβάνῃ δύο μόνον μεταβλητὰς (δύο διαστάσεις — two dimensional program). π.χ. δύο προϊόντα. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ μέθοδος αὕτη χαρακτηρίζεται ὡς «εἰδικὴ μέθοδος» ἐπιλύσεως μιᾶς περιωρισμένης ποικιλίας προβλημάτων προγραμματισμοῦ. Τὸ ὄργανον τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι τὸ σύστημα τῶν συντεταγμένων.

Ἡ simplex μέθοδος (κατωτ. § 7) εἶναι, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν προηγουμένην, γενικὴ μέθοδος. Οἱονδήποτε εἶδος προβλήματος, τὸ ὁποῖον πληροῖ τὰς δύο πρώτας βασικὰς προϋποθέσεις τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ (γραμμικότητα καὶ βεβαιότητα) δύναται νὰ ἐπιλυθῇ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης. Ὁπωσδήποτε, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν διαστάσεων καὶ τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων εἶναι μέγας, ἡ χρῆσις ὑπολογιστικῶν μηχανῶν εἶναι ἀναγκαία. Τὸ βασικὸν ὄργανον τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι αἱ γραμμικαὶ ἐξισώσεις.

Ἡ μέθοδος μεταφορᾶς (κατωτ. § 8) εἶναι μία εἰδικὴ παραλλαγὴ τῆς simplex μεθόδου, κατάλληλος διὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων προγραμματισμοῦ σχετικῶν μὲ μεταφορὰς ἢ διακίνησιν ὑλικῶν ἐντὸς τῶν παραγωγικῶν χώρων. Ἕνεκα τούτου εἶναι καὶ αὕτη εἰδικὴ μέθοδος. Τὰ στοιχεῖα τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου ταύτης δέον ἐπίσης νὰ χαρακτηρίζωνται ἀπὸ γραμμικότητα καὶ βεβαιότητα, ἐπὶ πλέον δὲ καὶ ἀπὸ ὁμοιογένειαν, ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω.

Ἡ μέθοδος προτιμήσεως κέρδους (κατωτ. § 9) εἶναι ἐπίσης εἰδικὴ μέθοδος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, προσιδιάζουσα εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων, τῶν ὁποίων ἀντικείμενον εἶναι ἡ ἐξεύρεσις καὶ ὁ προγραμματισμὸς τῆς πλέον ἐπικερδοῦς μεθόδου παραγωγῆς (ἐπιλογὴ πλέον ἐπικερδῶν προϊόντων).

5. *Ἡ ἔννοια τῆς γραμμικότητος (linearity).*

Ἡ γραμμικότης εἶναι μία συνήθης ἔννοια εἰς τὴν καθημερινὴν ἀνθρωπίνην ζωήν. Πλεῖσται ἀποφάσεις καὶ ἐνέργειαι τοῦ ἀνθρώπου στηρίζονται, ἐξ ἐνστίκτου καὶ ἐκ συνειδήσεως, εἰς τὴν γραμμικότητα : «Θὰ πράξω τὸ β. ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι θὰ πραγματοποιηθῇ τὸ α». Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ α ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ β, πᾶσα δὲ μεταβολὴ εἰς τὸ β ἐπιφέρει ἀνάλογον μεταβολὴν εἰς τὸ α. Ἡ τοιαύτη εὐθεῖα, γραμμικὴ σχέσις μεταξὺ α καὶ β καλεῖται γραμμικότης (linearity).

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ τιμή, ἡ ἀξία ἑνὸς παράγοντος Y ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμήν, τὴν ἀξίαν ἑνὸς παράγοντος X. Τοῦτο δύναται νὰ ἐκφρασθῇ μαθηματικῶς διὰ τῆς συναρτήσεως $Y = F(X)$, ἡ ὁποία σημαίνει ὅτι τὸ Y εἶναι συνάρτησις (function) τοῦ X. Ἐν προκειμένῳ δηλ. ὑπάρχουν δύο μεταβληταὶ (variables), ἡ X, ἡ ὁποία μεταβάλλεται ἀνεξαρτήτως καὶ διὰ τοῦτο καλεῖται ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ (independent variable) καὶ ἡ Y, ἡ ὁποία μεταβάλλεται μόνον ἐὰν μεταβληθῇ ἡ X καὶ διὰ τοῦτο καλεῖται ἐξηρτημένη μεταβλητὴ (dependent variable). Ἡ σχέσις Y = F(X) καλεῖται γραμμικὴ σχέσις ἐὰν μία δεδομένη μεταβολὴ τῆς τιμῆς τοῦ X ἐπιφέρῃ πάντοτε μίαν σταθερὰν μεταβολὴν τῆς τιμῆς τοῦ Y. Τὰ κατωτέρω παραδείγματα ἀποσαφηνίζουν τοῦτο :

1) Ὑποθέσωμεν εἰς τὴν σχέσιν Y = F(X) ὅτι ἡ ἀρχικὴ ἀξία τοῦ X εἶναι — 5 καὶ ὅτι αὕτη μεταβάλλεται μέχρι τοῦ + 5 αὐξανομένη πάντοτε κατὰ + 2. Ἐὰν ἡ ἀντίστοιχος μεταβολὴ τῆς ἀξίας τοῦ Y εἶναι ἐπίσης σταθερὰ (π.χ. κατὰ + 4) τότε ἡ σχέσις εἶναι γραμμική, ὡς ἀκολούθως :

Ἀξία τοῦ X	Μεταβολαὶ ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ X	Ἀξία τοῦ Y	Μεταβολαὶ ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ Y
— 5		— 10	
— 3	+ 2	— 6	+ 4
— 1	+ 2	— 2	+ 4
+ 1	+ 2	+ 2	+ 4
+ 3	+ 2	+ 6	+ 4
+ 5	+ 2	+ 10	+ 4

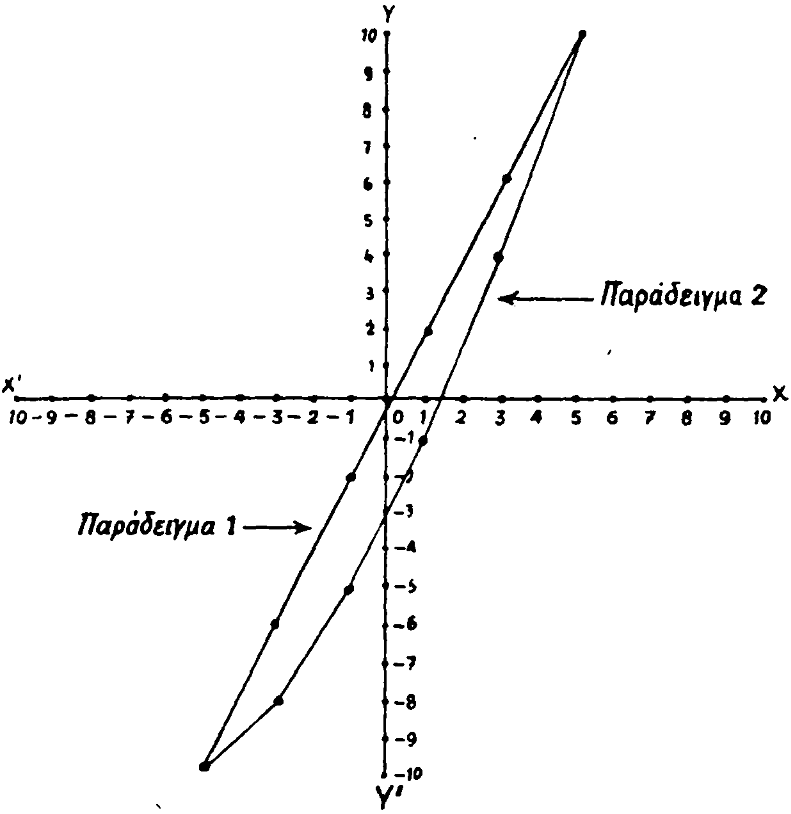
2) Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι εἰς τὴν σχέσιν Y = F(X) ἡ ἀρχικὴ ἀξία τοῦ X εἶναι ἐπίσης — 5 καὶ ὅτι μεταβάλλεται μέχρι τοῦ + 5 αὐξανομένη πάντοτε κατὰ + 2. Ἐὰν ἡ ἀντίστοιχος μεταβολὴ τῆς ἀξίας τοῦ Y δὲν εἶναι σταθερά, ἀλλὰ μεταβαλλομένη (αὐξανομένη, μειουμένη ἢ κυμαινομένη) τότε ἡ σχέσις δὲν εἶναι γραμμική, ὡς ἀκολούθως :

Ἀξία τοῦ X	Μεταβολαὶ ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ X	Ἀξία τοῦ Y	Μεταβολαὶ ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ Y
— 5		— 10	
— 3	+ 2	— 8	+ 2
— 1	+ 2	— 5	+ 3
+ 1	+ 2	— 1	+ 4
+ 3	+ 2	+ 4	+ 5
+ 5	+ 2	+ 10	+ 6

Ἐνταῦθα δηλ. μία δεδομένη μεταβολὴ τῆς τιμῆς τοῦ X ἐπιφέρει διαφόρους μεταβολὰς εἰς τὴν τιμὴν τοῦ Y.

Παριστῶντες γραφικῶς ἐπὶ τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων τὰς μεταβολὰς ἀξιῶν τῶν δύο τούτων μεγεθῶν, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γραμμὴ τοῦ παραδείγματος 1 εἶναι εὐθεῖα, γεγονὸς ἐπιβεβαιοῦν ὅτι ἡ σχέσις εἶναι γραμμική, ἐνῷ ἡ γραμμὴ τοῦ παραδείγματος 2 εἶναι καμπυλοειδής :

Σχῆμα 1



Ὁ γενικὸς τύπος τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς εἶναι $Y = a + bX$, ὅπου a εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ σταθερὰ (intercept), ἡ ἐκφράζουσα τὴν τιμὴν τοῦ Y ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ X εἶναι μηδέν, καὶ b ἡ ἀριθμητικὴ σταθερὰ (slope), ἡ ἐκφράζουσα τὴν μεταβολὴν τοῦ Y, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς μεταβολῆς τῆς ἀξίας τοῦ X κατὰ μίαν μονάδα. Ἡ a δύναται νὰ εὑρεθῇ 1) γραφικῶς : εἶναι τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γραμμὴ τῆς συναρτήσεως τέμνει τὸν ἄξονα τῶν Y (εἰς τὸ παράδειγμα 1 ἔχομεν $a = 0$), 2) ἀλγεβρικῶς : $Y = a + bX$, $a = Y - bX$. Εἰς τὸ παράδειγμα 1 καὶ εἰς τὸ σημεῖον π.χ. ὅπου ἡ ἀξία τοῦ X εἶναι 1 καὶ τοῦ Y εἶναι 2, θὰ ἔχωμεν $a = 2 - 1b = 2 - b$. Τοῦ X μεταβαλλομένου κατὰ 2 τὸ Y μεταβάλλεται κατὰ

4, ἄρα τοῦ X μεταβαλλομένου κατὰ 1 τὸ Y μεταβάλλεται κατὰ 2, συνεπῶς $b = 2$ καὶ $a = 2 - 2 = 0$.

Τὸ b δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀλγεβρικῶς εἴτε ἐκ τῆς σχέσεως $Y = a + bX$, ὁπότε $bX = Y - a$ καὶ $b = \frac{Y - a}{X}$ εἴτε λαμβάνοντες τὰς τιμὰς τῶν Y καὶ X εἰς δύο διαφορετικὰ σημεῖα τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως καὶ διαιροῦντες τὰς διαφορὰς τούτων. Εἰς τὸ παράδειγμα 1 ἐὰν λάβωμεν π.χ. τὰς τιμάς: $X_1 = -5$, $X_2 = -3$, $Y_1 = -10$, $Y_2 = -6$, θὰ ἔχωμεν $b = (Y_2 - Y_1) : (X_2 - X_1) = [(-6) - (-10)] : [(-3) - (-5)] = (-6 + 10) : (-3 + 5) = 4 : 2 = 2$.

6. *'Η γραφικὴ μέθοδος (graphical method) τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.*

Προβλήματα προγραμματισμοῦ περιέχοντα δύο «πραγματικὰς» μεταβλητάς, δύνανται νὰ ἐπιλυθοῦν διὰ τῆς γραφικῆς μεθόδου, τῆς ὁποίας ἡ ἀκρίβεια ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς κλίμακος καὶ τῆς ἀκριβείας τοῦ γραφικοῦ διαγράμματος (συστήματος τῶν συντεταγμένων). 'Η optimum λύσις, δηλ. τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον μεγιστοποιεῖται ἢ ἐλαχιστοποιεῖται τὸ ὑπὸ προγραμματισμὸν ἀντικείμενον (κόστος, χρόνος, κέρδος, ποσότης κλπ.) κεῖται πάντοτε ἐντὸς τοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ὑπὸ τῶν ἀξόνων τοῦ συστήματος, οἱ ὁποῖοι ἀντιπροσωπεύουν τὰς δύο μεταβλητάς, καὶ τῶν γραμμῶν, αἱ ὁποῖαι ἀντιπροσωπεύουν τὰ τεχνικὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος (ἐξοπλισμόν, ἐργασίαν κλπ.). 'Η ἀνεύρεσις τοῦ σημείου τούτου, ὅταν τὸ πρόβλημα εἶναι δύο διαστάσεων, καθίσταται εὐκολωτέρα διὰ τῆς ὀπτικῆς ἀπεικονίσεως (σύστημα τῶν συντεταγμένων) παρὰ δι' ἀλγεβρικῶν μεθόδων.

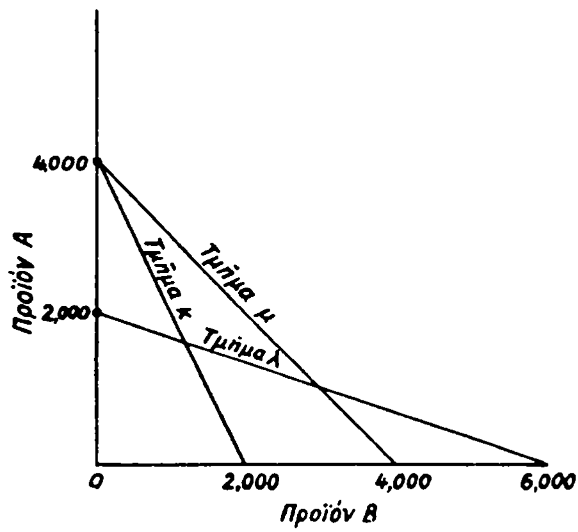
'Ε φ α ρ μ ο γ ή. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μία βιομηχανία παράγει δύο προϊόντα, τὰ A καὶ B, διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν ὁποίων χρησιμοποιοῦνται τρία παραγωγικὰ τμήματα (ἢ μηχαναὶ κλπ.), τὰ κ, λ, μ. 'Εκ τῶν στοιχείων τῆς ἐπιχειρήσεως καὶ ἐκ γενομένων μετρήσεων συνάγεται ὅτι κατὰ τὴν ὑπὸ προγραμματισμὸν περίοδον τὸ τμῆμα κ δύναται νὰ λειτουργήσῃ ἐπὶ 20.000 δευτερόλεπτο ἡμερησίως, τὸ τμῆμα λ ἐπὶ 30.000 δευτερόλεπτα ἡμερησίως καὶ τὸ τμῆμα μ ἐπὶ 40.000 δευτερόλεπτα ἡμερησίως.

Διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος προϊόντος A ἀπαιτοῦνται 5 δευτερόλεπτα εἰς τὸ τμῆμα κ, 15 δευτερόλεπτα εἰς τὸ τμῆμα λ καὶ 10 δευτερόλεπτα εἰς τὸ τμῆμα μ, ἐνῷ διὰ νὰ παραχθῇ μία μονὰς προϊόντος B ἀπαιτοῦνται 10 δευτερόλεπτα εἰς τὸ τμῆμα κ, 5 δευτερόλεπτα εἰς τὸ τμῆμα λ καὶ 10 δευτερόλεπτα εἰς τὸ τμῆμα μ. 'Η ζήτησις τῶν προϊόντων τῆς ἐπιχειρήσεως κατὰ τὴν προγραμματιζομένην περίοδον προβλέπεται ὅτι δύναται νὰ ἀπορροφήσῃ τὸν μέγιστον δυνατὸν ὄγκον παραγωγῆς, τὸ κόστος τῶν προϊόντων καὶ αἱ τιμαὶ πωλήσεως προβλέπονται σταθεραί, συνάγεται δὲ ὅτι ἐξ ἑκάστης μονάδος προϊόντος Α ἡ ἐπιχείρησις θὰ ἀποκομίσῃ κέρδος 2 δρχ., ἐξ ἑκάστης δὲ μονάδος προϊόντος Β κέρδος 3 δρχ. Τὸ ἐρώτημα εἶναι : πῶς θὰ προγραμματίσωμεν τὴν κατανομὴν τῆς ἡμερησίας παραγωγῆς εἰς τὰ τρία παραγωγικὰ τμήματα, ὥστε αὕτη νὰ ἀποβῇ ἡ πλέον ἐπικερδὴς διὰ τὴν ἐπιχείρησιν ;

Κατὰ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ἐὰν ὅλη ἡ ἡμερησία χρονικὴ ἱκανότης τοῦ τμήματος κ χρησιμοποιηθῇ μόνον διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος Α, τότε ὁ ἡμερήσιος ὄγκος παραγωγῆς προϊόντος Α εἰς τὸ τμῆμα κ θὰ εἶναι 20.000 : 5 = 4.000 μονάδες. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸ τμῆμα λ θὰ εἶναι 30.000 : 15 = 2.000 μονάδες καὶ εἰς τὸ τμῆμα μ θὰ εἶναι 40.000 : 10 = 4.000 μονάδες. Ἀντιστοίχως διὰ τὸ προϊὸν Β θὰ εἶναι 2.000 μονάδες εἰς τὸ τμῆμα κ, 6.000 μονάδες εἰς τὸ τμῆμα λ καὶ 4.000 μονάδες εἰς τὸ τμῆμα μ.

Τὰ ἀνωτέρω δεδομένα δύνανται ἤδη νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς ἐπὶ τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων ὡς ἀκολούθως :

Σχῆμα 2



Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη τὰ ἀκόλουθα :

1) Ἡ ἐπιχείρησις θὰ παράγῃ κατὰ τὴν προγραμματιζομένην περίοδον μόνον προϊὸν Α. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ μεγίστη ποσότης, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ παραγάγῃ ἡμερησίως εἶναι 2.000 μονάδες, διότι πέραν τῆς ποσότητος ταύτης ἐξαντλεῖται ἡ χρονικὴ ἱκανότης τοῦ τμήματος λ, δεδομένου δὲ ὅτι ἡ παραγωγὴ ἀπαιτεῖ τὴν συμβολὴν καὶ τῶν τριῶν τμημάτων, ἐξαντλουμένης τῆς ἱκανότητος τοῦ τμήματος λ (2.000 μονάδες × 15 δευτερόλεπτα=

=30.000 δευτερόλεπτα=χρονικὴ ἱκανότης τοῦ λ) οἱαδήποτε περαιτέρω παραγωγὴ καθίσταται ἀδύνατος. Παραγομένων 2.000 μονάδων Α ἡ ἐπιχείρησις θὰ ἀποκομίζῃ ἡμερήσιον κέρδος 2.000 × 2=4.000 δρχ., τὸ τμῆμα κ θὰ ἀπασχολῆται ἐπὶ 2.000 × 5=10.000 δευτερόλεπτα ἡμερησίως (ἀπομένων ἀδρανὴς παραγωγικὸς χρόνος=20.000—10.000=10.000 δευτερόλεπτα ἡμερησίως), τὸ τμῆμα λ θὰ ἀπασχολῆται ἐπὶ 2.000 × 15=30.000 δευτερόλεπτα ἡμερησίως (ἀπομένων ἀδρανὴς παραγωγικὸς χρόνος=30.000—30.000=0 δευτερόλεπτα ἡμερησίως) καὶ τὸ τμῆμα μ θὰ ἀπασχολῆται ἐπὶ 2.000×10= = 20.000 δευτερόλεπτα ἡμερησίως (ἀπομένων ἀδρανὴς παραγωγικὸς χρόνος = 40.000—20.000=20.000 δευτερόλεπτα ἡμερησίως).

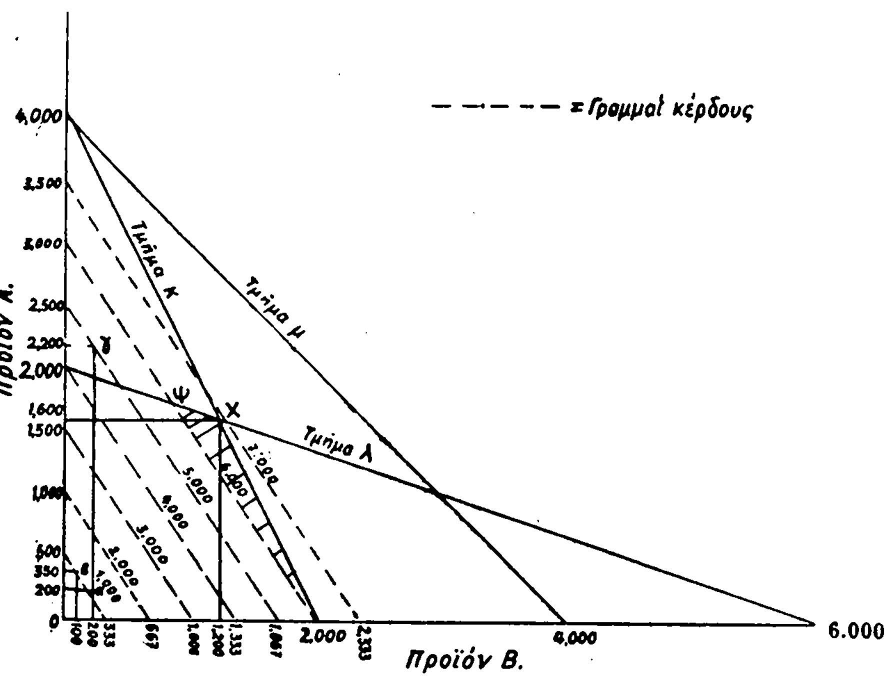
2) Ἡ ἐπιχείρησις θὰ παράγῃ μόνον προϊὸν Β. Μεγίστη ἡμερησία ποσότης=2.000 μονάδες (ἐξάντλησις χρονικῆς ἱκανότητος τμήματος κ). Ἡμερήσιον κέρδος ἐπιχειρήσεως=2.000×3=6.000 δρχ. Χρόνοι : τμῆμα κ=2.000× ×10=20.000 δευτερόλεπτα, νεκρὸς χρόνος=20.000—20.000=0, τμῆμα λ= = 2.000×5=10.000 δευτερόλεπτα, νεκρὸς χρόνος= 30.000—10.000 = 20.000 δευτερόλεπτα, τμῆμα μ = 2.000×10 = 20.000 δευτερόλεπτα, νεκρὸς χρόνος = = 40.000 —20.000=20.000 δευτερόλεπτα ἡμερησίως.

3) Ἡ ἐπιχείρησις θὰ παράγῃ 1.500 μονάδες Α καὶ 1.250 μονάδες Β ἡμερησίως. Χρόνοι : τμῆμα κ=1.500×5+1.250×10=20.000 δευτερόλεπτα, νεκρὸς χρόνος=20.000—20.000=0, τμῆμα λ=1.500×15+1.250×5=28.750 δευτερόλεπτα, νεκρὸς χρόνος=30.000—28.750=1.250 δευτερόλεπτα, τμῆμα μ=1.500×10+1.250×10=27.500 δευτερόλεπτα, νεκρὸς χρόνος=40.000—27.500=12.500 δευτερόλεπτα. Ἡμερήσιον κέρδος ἐπιχειρήσεως = 1.500X2 + + 1.250 × 3 = 6.750 δρχ. Ἐξ ὧν συνάγεται ὅτι ἡ optimum λύσις εἶναι ἕνας συνδυασμὸς παραγωγῆς καὶ τῶν δύο προϊόντων καὶ οὐχὶ ἡ παραγωγὴ μόνον προϊόντος Α ἢ μόνον προϊόντος Β. Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀκριβῶς ἡ εὕρεσις αὐτοῦ τοῦ συνδυασμοῦ.

Ἤδη ἡ τεχνικὴ θεμελίωσις τοῦ προβλήματος ἔχει τεθῆ. Οἱαδήποτε κατανομὴ τοῦ χρόνου λειτουργίας τοῦ τμήματος κ (20.000 δευτερόλεπτα) μεταξὺ τῶν προϊόντων Α καὶ Β κεῖται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς (τῆς γραμμῆς τοῦ τμήματος κ εἰς τὸ Σχῆμα 2), τὸ αὐτὸ θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τοὺς χρόνους τῶν τμημάτων λ καὶ μ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἐκ τῶν πλέον συνήθων τῆς πρακτικῆς ἐπιχειρηματικῆς ζωῆς, εἶναι καθαρῶς ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἡ λύσις τούτου δὲν δύναται νὰ κεῖται ἔξω τῆς περιοχῆς τῶν «τεχνικῶν περιορισμῶν», ἡ ὁποία εἰς τὸ Σχῆμα 2 συνίσταται ἐκ τοῦ πολυγώνου, τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν σημείων 4.000 (ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ προϊόντος Α), Ο (σημεῖον τομῆς τῶν ἀξόνων), 6.000 (ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ προϊόντος Β) καὶ τοῦ σημείου τομῆς τῶν εὐθειῶν τῶν τμημάτων λ καὶ μ.

Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ ἐπιχείρησις, βάσει τῶν ἀνωτέρω δεδομένων, προγραμματίζει κέρδος 1.000 δρχ. ἡμερησίως. Ἐὰν διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ κέρδους τούτου ἀπασχολήση τὸν διαθέσιμον ἐξοπλισμὸν μόνον εἰς τὴν παραγωγὴν προϊόντος Α, θὰ παραγάγη 500 μονάδας Α ἡμερησίως (1.000 : :2=500), ἐὰν ἀντιθέτως ἀπασχολήση τὸν ἐξοπλισμὸν μόνον εἰς τὴν παραγωγὴν προϊόντος Β, θὰ παραγάγη 333 μονάδας Β ἡμερησίως (1.000 : 3=333). Ἡ γραμμὴ συνεπῶς, ἡ παριστῶσα τὸ κέρδος 1.000 θὰ ἔχη ὡς ἄκρα τὰ σημεῖα 500 καὶ 333 ἐπὶ τῶν ἀξόνων τῶν προϊόντων Α καὶ Β (Σχῆμα 3). Οἱονδήποτε σημεῖον τῆς γραμμῆς ταύτης, ἐκτὸς τῶν δύο ἀνωτέρω ἀκραίων σημείων, ἀντιπροσωπεύει καὶ ἕνα συνδυασμόν, ὁ ὁποῖος ἐπίσης ἀποφέρει εἰς τὴν ἐπιχείρησιν κέρδος 1.000. Π.χ. τὸ σημεῖον α ἀντιπροσωπεύει τὸν συνδυασμὸν 200 μονάδων Α καὶ 200 μονάδων Β (200×2+200×3=1.000), τὸ σημεῖον β τὸν συνδυασμὸν 350 μονάδων Α καὶ 100 μονάδων Β (350×2+100×3=1.000) κ.ο.κ. Ἐὰν ἡ ἐπιχείρησις προγραμματίση κέρδος 2.000 δρχ. ἡμερησίως, δύναται νὰ πραγματοποιήση τοῦτο παράγουσα εἴτε 1.000 μονάδας προϊόντος Α, εἴτε 667 μονάδας προϊόντος Β, εἴτε ἕνα οἱονδήποτε συνδυασμὸν Α καὶ Β, κείμενον ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῆς παριστώσης τὸ κέρδος τῶν 2.000 δρχ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ὁρίζομεν τὰς γραμμὰς τὰς παριστώσας κέρδος 3.000, 4.000,

Σχῆμα 3



5.000 δρχ. κλπ. Παρατηροῦμεν ὅτι: 1) ἐὰν σύρωμεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν τέμνουσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων εἰς δύο ἴσας γωνίας (ἑκάστης 45°), ἕκαστον τμῆμα τῆς εὐθείας ταύτης, περικλειόμενον μεταξὺ δύο γραμμῶν κέρδους εἶναι ἴσον πρὸς οἱονδήποτε ἕτερον τμῆμα αὐτῆς, περικλειόμενον μεταξὺ δύο ἄλλων γραμμῶν κέρδους, λόγῳ τῆς γραμμικότητος τοῦ προβλήματος, 2) τοῦ κέρδους αὐξανομένου ἀπὸ τοῦ ποσοῦ τῶν 4.000 δρχ. καὶ ἄνω, δὲν εἶναι τεχνικῶς δυνατὸν νὰ πραγματοποιηθοῦν ὅλοι οἱ συνδυασμοί, οἱ ἐκπροσωπούμενοι ὑπὸ τῶν διαφόρων σημείων τῆς εὐθείας, τῆς παριστώσης τὸ κέρδος. Π.χ. ὁ συνδυασμὸς τοῦ σημείου γ, ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ κέρδους τῶν 5.000 δρχ. εἶναι ἀπραγματοποίητος, διότι ποσότης 2.200 μονάδων προϊόντος Α δὲν δύναται νὰ παραχθῇ, ἀφοῦ ἡ χρονικὴ ἱκανότης τοῦ τμήματος λ ὡς πρὸς τὸ προϊὸν Α ἐξαντλεῖται εἰς τὰς 2.000 μονάδας (30.000 δευτερόλεπτα : 15=2.000). Προκύπτει ὅθεν ἕνας δεύτερος τεχνικὸς περιορισμὸς τοῦ προβλήματος, ὅτι ἡ optimum λύσις δέον νὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ πολυγώνου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν σημείων 2.000 (ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ προϊόντος Α), Ο (σημεῖον τομῆς τῶν ἀξόνων), 2.000 (ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ προϊόντος Β) καὶ Χ (σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν τῶν τμημάτων κ καὶ λ), 3) ἐκ τοῦ Σχήματος 3 καθίσταται φανερὸν ὅτι ἡ optimum λύσις κεῖται εἴς τι σημεῖον μεταξὺ τῶν γραμμῶν 6.000 καὶ 7.000 δρχ. κέρδους καὶ δὴ ἐντὸς τῆς περιοχῆς τοῦ τριγώνου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν σημείων 2.000 (ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ προϊόντος Β), Χ (σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν τῶν τμημάτων κ καὶ λ) καὶ Ψ (σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας τοῦ τμήματος λ καὶ τῆς γραμμῆς τοῦ κέρδους τῶν 6.000 δρχ.) Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ ἀκρότατον σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ τριγώνου, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἡ ἀπόστασις τῆς γραμμῆς τοῦ κέρδους τῶν 6.000 δρχ. καθίσταται μεγίστη. Σύροντες καθέτους ἐπὶ τῆς γραμμῆς ταύτης ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μεγίστη κάθετος εἶναι ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Χ, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ γραμμαὶ τῶν τμημάτων κ καὶ λ.

Τὸ σημεῖον τοῦτο ἐκφράζει τὴν optimum λύσιν τοῦ προβλήματος, ἀντιπροσωπευομένην διὰ ποσότητος 1.600 μονάδων Α καὶ 1.200 μονάδων Β. Διὰ τῆς παραγωγῆς τῶν ποσοτήτων τούτων ἡ ἐπιχείρησις θὰ ἀποκομίζῃ ἡμερήσιον κέρδος $1.600 \times 2 + 1.200 \times 3 = 6.800$ δρχ., οἱ δὲ χρόνοι λειτουργίας τῶν τριῶν τμημάτων θὰ εἶναι οἱ ἀκόλουθοι :

τμῆμα κ=$1.600 \times 5 + 1.200 \times 10 = 20.000$ δευτερόλεπτα ἡμερησίως (νεκρὸς χρόνος=0).

τμῆμα λ=$1.600 \times 15 + 1.200 \times 5 = 30.000$ » » » χρόνος=0).

τμῆμα μ=$1.600 \times 10 + 1.200 \times 10 = 28.000$ » » » χρόνος =12.000 δευτερόλεπτα).

Τὰ δεδομένα ταῦτα θὰ ἀποτελέσουν τὴν σπονδυλικὴν στήλην τοῦ προγράμματος.

Ἡ γραφικὴ μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἐχρησιμοποιήθη ἐν προκειμένῳ διὰ τὴν ἐξεύρεσιν τῆς optimum λύσεως μεταξὺ τοῦ πλήθους τῶν δυνατῶν λύσεων τοῦ προβλήματος [6]. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλυθείσης περιπτώσεως καθίσταται φανερὸν ὅτι ὁ προγραμματιστὴς διαθέτει σήμερον ἐν ἰσχυρότατον μέσον διὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων προγραμματισμοῦ τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας τῶν ἐπιχειρήσεων, μέσον τὸ ὁποῖον δὲν διέθετε μέχρι πρὸ ὀλίγων ἀκόμη ἐτῶν. Ἡ γραμμικὴ λύσις μᾶς ἀπέδειξεν ἀκόμη ὅτι αἱ ἐπενδύσεις εἰς τὸ τμῆμα μ ὑπῆρξαν ὑπερβολικαί, ἐν σχέσει πρὸς τὰ τμήματα κ καὶ λ, μὲ συνέπειαν ὑποαπασχόλησιν τοῦ τμήματος τούτου περίπου κατὰ 30 ο/ο τῆς ἱκανότητός του, ὅταν ἡ ἐπιχείρησις εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄριστον σημεῖον ἀπασχολήσεως.

Ἡ γραφικὴ μέθοδος εἶναι σχετικῶς εὔκολος, δύναται ὅμως νὰ χρησιμοποιηθῇ μόνον εἰς δύο διαστάσεων προβλήματα. Ὅταν τὸ πρόβλημα περιέχῃ περισσοτέρας μεταβλητὰς (π.χ. τρία προϊόντα ἀντὶ δύο), τότε εἶναι ἀναγκαία ἡ χρῆσις ἀλγεβρικῶν μεθόδων, διότι αἱ ἐπὶ πλέον διαστάσεις δὲν δύνανται νὰ τεθοῦν ἐπὶ ἑνὸς μόνον ἐπιπέδου, ὡς τὸ σύστημα τῶν συντεταγμένων. Ἡ κυριωτέρα τῶν μεθόδων τούτων εἶναι ἡ simplex μέθοδος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, περὶ ἧς ἀμέσως κατωτέρω.

---

6. Ἐπειδὴ ἀντικείμενον τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ εὕρεσις τῆς optimum ποσότητος προϊόντων, διὰ τῆς ὁποίας ἡ ἐπιχείρησις δύναται νὰ ἀποκομίσῃ τὸ μέγιστον κέρδος, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἀνεύρωμεν καὶ τοὺς νεκροὺς χρόνους λειτουργίας τῶν τριῶν παραγωγικῶν τμημάτων (idle capacity ἢ slack), διότι πιθανὸν ἡ optimum ποσότης καὶ τὸ μέγιστον κέρδος νὰ πραγματοποιῶνται ὅταν ἓν ἢ περισσότερα παραγωγικὰ τμήματα ὑποαπασχολοῦνται. Τοῦτο μάλιστα εἶναι γεγονὸς σύνηθες εἰς μὴ ὀρθολογικῶς ὠργανωμένας ἐπιχειρήσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν διαθέσει ὑπερβολικὰ ποσὰ δι' ἐπενδύσεις εἰς ὡρισμένα παραγωγικά των τμήματα (ὑπερκεφαλαίωσις, ὡς π.χ. συμβαίνει ἐν προκειμένῳ εἰς τὸ τμῆμα μ) καὶ ἐλλιπῆ ποσὰ εἰς ἄλλα παραγωγικά των τμήματα (ὑποκεφαλαίωσις, ὡς π.χ. συμβαίνει ἐν προκειμένῳ εἰς τὰ τμήματα κ καὶ λ). Τὴν τεχνικοοργανωτικὴν αὐτὴν ἀνωμαλίαν δύναται ἐπίσης νὰ ἀποκαλύψῃ ὁ γραμμικὸς προγραμματισμός.

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν ἀντὶ τῆς μεθόδου τῆς ὀπτικῆς ἀπεικονίσεως ἐχρησιμοποιεῖτο ἡ ὀρθόδοξος ἀλγεβρικὴ μέθοδος, θὰ εἴχομεν :

$$\left.\begin{array}{r} 5A+10B\leq 20000 \\ 15A+\ 5B\leq 30000 \\ 10A+10B\leq 40000 \end{array}\right\}$$

Διὰ νὰ μεταβληθῇ τὸ σύστημα τοῦτο τῶν ἀνισοτήτων εἰς σύστημα ἰσοτήτων ἐπιδεκτικὸν λύσεως, δέον νὰ προστεθοῦν οἱ νεκροὶ χρόνοι τῶν τμημάτων κ, λ, μ,

ἔστω Xκ, Xλ, Xμ, ὁπότε θὰ προέκυπτεν τὸ ἀκόλουθον σύστημα :

$$\left.\begin{array}{r} 5A+10B+X\kappa=20000 \\ 15A+\ 5B+X\lambda=30000 \\ 10A+10B+X\mu=40000 \end{array}\right\}$$

Ἐνταῦθα ἔχομεν σύστημα 3 ἐξισώσεων μὲ 5 ἀγνώστους, ἐπιδεχόμενον, ὡς γνωστόν, πλείστας λύσεις. Διὰ τὴν ἐξεύρεσιν τῆς optimum μεταξὺ τῶν λύσεων τούτων δύναται ἀκριβῶς νὰ χρησιμεύσῃ ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς (simpbex method). Ἡ διαδικασία ὅμως τῆς simplex μεθόδου διὰ τὴν λύσιν δύο διαστάσεων προβλημάτων εἶναι δυσκολωτέρα τῆς μεθόδου λύσεως δι' ὀπτικῆς ἀπεικονίσεως (γραφικὴ μέθοδος).

7. Ἡ *simplex* μέθοδος (*simplex method*) τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.

Ὅταν τὸ πλῆθος τῶν μεταβλητῶν τοῦ γραμμικοῦ προβλήματος εἶναι μεγαλύτερον τῶν δύο, ἡ χρῆσις ἀπεικονιστικῶν μέσων καθίσταται δυσχερής, ὅταν δὲ αἱ μεταβληταὶ εἶναι πολλαὶ (π.χ. 20) ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἀδύνατος. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν τριῶν μεταβλητῶν δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν τὰς δύο διὰ τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων καὶ νὰ φαντασθῶμεν τὴν τρίτην ἐξερχομένην τοῦ ἐπιπέδου τούτων καὶ τέμνουσα αὐτὰς καθέτως εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των. Ἐὰν ἤδη θέσωμεν τὰς εὐθείας, τὰς παριστώσας τὰ τεχνικὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, θὰ σχηματισθῇ στερεὸν σχῆμα (πυραμὶς) ἐντὸς τοῦ ὁποίου δέον νὰ ὁρισθῇ ἡ περιοχὴ τῆς optimum λύσεως καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον αὐτῆς. Τοῦτο εἶναι ἀδύνατον ἄνευ τῆς χρήσεως ἀνωτέρων μαθηματικῶν (παραβολικῆς γεωμετρίας). Ὅταν αἱ διαστάσεις εἶναι ἀκόμη περισσότεραι, τόσον ὁ καθορισμὸς τοῦ σχήματος, ὅσον καὶ ἡ εὕρεσις τῆς περιοχῆς καὶ τοῦ σημείου τῆς optimum λύσεως εἶναι ἀκόμη δυσκολώτεραι, πολλάκις δὲ ἀδύνατοι ἀκόμη καὶ διὰ τῆς χρήσεως ἀνωτέρων μαθηματικῶν.

Ἡ simplex μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἔλυσε τὰ προβλήματα ταῦτα διὰ τῆς χρήσεως μιᾶς σχετικῶς ἁπλῆς ἀλγεβρικῆς διαδικασίας. Οἱονδήποτε πρόβλημα προγραμματισμοῦ, χαρακτηριζόμενον ἀπὸ βεβαιότητα καὶ γραμμικότητα, δύναται νὰ λάβῃ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ἀλγεβρικὴν μορφήν, ἐπιδεκτικὴν λύσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν βεβαίως κατὰ τὴν ὁποίαν ἀπαιτεῖται μέγα πλῆθος ὑπολογισμῶν, ἡ χρῆσις ὑπολογιστικῶν μηχανῶν καθίσταται ἀναγκαία, οὐχ ἧττον ὅμως τὸ πρόβλημα δύναται νὰ τεθῇ.

Αἱ γενικαὶ γραμμαὶ ἐφαρμογῆς τῆς simplex μεθόδου εἶναι αἱ ἀκόλουθοι :

—Διαχωρισμὸς καὶ ἐπιλογὴ τῶν μεταβλητῶν καὶ τῶν τεχνικῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος (constraints), ἀλληλοσυσχέτισις καὶ ἔκφρασις τῆς σχέσεως τούτων δι' ἐξισώσεων, μαθηματικὸς προσδιορισμὸς τοῦ ἀντικειμένου τοῦ προβλήματος (objective function),

—ἐπιλέγομεν μίαν οἱανδήποτε ἐκ τῶν πολλῶν (ἢ καὶ ἀπείρων) δυνατῶν λύσεων τοῦ προβλήματος (hypothesis),

—ἀξιολογοῦμεν ἑκάστην μεταβλητὴν ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀνωτέρω λύσιν, βάσει δὲ τῆς ἀξιολογήσεως ταύτης ἀναθεωροῦμεν τὴν λύσιν,

—ἐπιλέγομεν μίαν ἐκ τῶν μεταβλητῶν τοῦ προβλήματος καὶ καθορίζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἑκάστης τῶν λοιπῶν μεταβλητῶν ἐν σχέσει πρὸς μίαν μονάδα τῆς ἐπιλεγείσης μεταβλητῆς (θεωρία τῆς ὑποκαταστάσεως-substitution) βάσει τῆς ἀναθεωρηθείσης λύσεως,

—ἐπαναλαμβάνομεν τὴν ἀνωτέρω διαδικασίαν ὡς πρὸς ὅλας τὰς μεταβλητὰς τοῦ προβλήματος,

—ἀναθεωροῦμεν, βάσει τῶν ἀνωτέρω, τὴν λύσιν καὶ συνεχίζομεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον μέχρι τῆς εὑρέσεως τῆς optimum λύσεως.

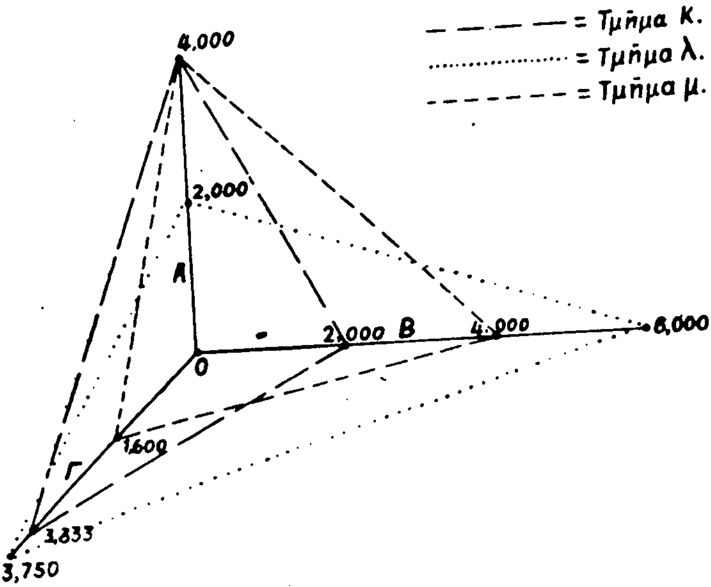
Ἐφαρμογή. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι, εἰς τὴν ἀναλυθεῖσαν ἀνωτέρω κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς γραφικῆς μεθόδου περίπτωσιν (§ 6), ἡ ἐπιχείρησις παράγει καὶ τρίτον προϊόν, τὸ Γ, ἐξ ἑκάστης μονάδος τοῦ ὁποίου ἀποκομίζει κέρδος 2,50 δρχ. καὶ διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος τοῦ ὁποίου ἀπαιτοῦνται 6 δευτερόλεπτα εἰς τὸ τμῆμα κ, 8 δευτερόλεπτα εἰς τὸ τμῆμα λ καὶ 25 δευτερόλεπτα εἰς τὸ τμῆμα μ. Ποῖος εἶναι ἤδη ὁ καλύτερος τρόπος προγραμματισμοῦ τῆς κατανομῆς τῆς παραγωγῆς εἰς τὰ τρία παραγωγικὰ τμήματα, ὥστε ἡ ἐπιχείρησις νὰ ἀποκομίζῃ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος ;

Κατὰ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος ἐὰν ὅλη ἡ ἱκανότης τοῦ τμήματος κ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος Γ, θὰ παράγωνται ἡμερησίως 20.000 : :6 = 3.333 μονάδες Γ, ἐὰν ὅλη ἡ ἱκανότης τοῦ τμήματος λ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος Γ θὰ παράγωνται ἡμερησίως 30.000 : 8=3.750 μονάδες Γ καὶ τέλος ἐὰν ὅλη ἡ ἱκανότης τοῦ τμήματος μ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος Γ θὰ παράγωνται ἡμερησίως 40.000 : 25=1.600 μονάδες Γ. Δεδομένου δὲ ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος προϊόντος Γ ἀπαιτεῖται ἡ λειτουργία καὶ τῶν τριῶν τμημάτων, τὸ μέγιστον τῆς ποσότητος προϊόντος Γ, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ παράγῃ ἡ ἐπιχείρησις, ἀπασχολουμένη ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον εἰς τὴν παραγωγὴν προϊόντος Γ εἶναι 1.600 μονάδες, ἐκ τῶν ὁποίων δύναται νὰ ἀποκομίσῃ κέρδος 1.600 × 2,50=4.000 δρχ. ἡμερησίως. Ἄρα ἡ παραγωγὴ μόνον προϊόντος Γ εἶναι ἀσύμφορος, ὅπως εἶναι ἀσύμφορος καὶ ἡ παραγωγὴ μόνον προϊόντος Α ἢ μόνον προϊόντος Β (ἀνωτ. § 6). Ἡ optimum συνεπῶς λύσις εἶναι ἕνας συνδυασμὸς παραγωγῆς εἴτε καὶ τῶν τριῶν προϊόντων (Α, Β, Γ) εἴτε τῶν δύο ἐκ τούτων (Α καὶ Β, Α καὶ Γ, Β καὶ Γ).

Ἐὰν φαντασθῶμεν τὸν ἄξονα τοῦ προϊόντος Γ (σχ. 4) ἐξερχόμενον τῆς σελίδος καὶ πίπτοντα καθέτως ἐπὶ τῆς διασταυρώσεως τῶν ἀξόνων τῶν προϊόντων Α καὶ Β (σημεῖον Ο), δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὸ πρόβλημα ὡς ἀκολούθως :

Μεταβληταὶ τοῦ προβλήματος : Α, Β, Γ (ὁ ἀριθμὸς μονάδων ἑκάστου προϊόντος). Τεχνικὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος : α) ἡ χρονικὴ ἱκανότης τῶν τριῶν παραγωγικῶν τμημάτων, κ=20.000, λ=30.000, μ=40.000 δευτερόλεπτα ἡμερησίως β) οἱ νεκροὶ χρόνοι λειτουργίας τῶν τριῶν τμημάτων (ἀργοῦσαι ἢ μὴ πραγματικαὶ μεταβληταὶ=slack variables), οἱ ὁποῖοι προκύπτουν κατὰ τὴν optimum λύσιν, ἀπαιτοῦσαν πιθανῶς ὅπως τὰ παραγωγικὰ τμήματα ἀπασχολοῦνται κατὰ μέρος μόνον τῆς παραγωγικῆς των ἱκανότητος καὶ οὐχὶ κατὰ τὸ σύνολον αὐτῆς, καὶ οἱ ὁποῖοι εἶναι ἄγνωστοι, γ) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων δευτερολέπτων διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐξ ἑκάστου προϊόντος (Α=5″ εἰς τὸ τμῆμα κ, 15″ εἰς τὸ λ, 10″ εἰς τὸ μ, Β=10″ εἰς τὸ κ, 5″ εἰς τὸ λ, 10″ εἰς τὸ μ, Γ=6″ εἰς τὸ κ, 8″ εἰς τὸ λ καὶ 25″ εἰς τὸ μ), δ) τὸ κατὰ μονάδα κέρδος ἐξ ἑκάστου προϊόντος (Α=2 δρχ., Β=3 δρχ., Γ=2,50 δρχ.), ε) ἡ παραγωγικὴ ἱκανότης ἑκάστου τμήματος ἐν σχέσει πρὸς ἕκαστον προϊὸν (Α=4.000 μονάδες εἰς τὸ κ. 2.000 εἰς τὸ λ, 4.000 εἰς τὸ μ, Β=2.000 εἰς τὸ κ, 6.000 εἰς τὸ λ. 4.000 εἰς τὸ μ. Γ=3.333 εἰς τὸ κ, 3.750 εἰς τὸ λ, 1.600 εἰς τὸ μ).

Σχῆμα 4



Καλοῦμεν ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ τὸν ἀριθμὸν μονάδων ἑκάστου τῶν προϊόντων Α. Β, Γ, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ παραχθῇ διὰ νὰ ἀποκομίσῃ ἡ ἐπιχείρησις τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος, ΚΑ, ΚΒ. ΚΓ τὸ κατὰ μονάδα κέρδος ἐξ ἑκάστου τῶν προϊόντων τούτων, Χκ, Χλ, Χμ τοὺς νεκροὺς χρόνους λειτουργίας τῶν τμημάτων κ, λ, μ, χΑκ, χΒκ, χΓκ, τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀπαιτουμένων χρόνων (δευτερολέπτων) διὰ τὴν βιομηχανοποίησιν μιᾶς μονάδος ἑκάστου τῶν προϊόντων Α, Β, Γ εἰς τὸ τμῆμα κ, χΑλ, χΒλ, χΓλ, εἰς τὸ τμῆμα λ καὶ χΑμ, χΒμ, χΓμ εἰς τὸ τμῆμα μ. Τὸ ἡμερήσιον κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκφράζεται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω διὰ τῆς συναρτήσεως Κ=ΜΑΚΑ+ΜΒΚΒ + ΜΓΚΓ, τῆς ὁποίας ἄγνωστοι (ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ) εἶναι οἱ ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ. 'Αντικείμενον τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ εὕρεσις ἐκείνων τῶν τιμῶν τῶν τριῶν τούτων ἀγνώστων αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὴν συνάρτησιν μεγίστην καὶ συγχρόνως πληροῦν τοὺς περιορισμοὺς (ὅρους) τοῦ προβλήματος.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν :

'Απαιτούμενος χρόνος διὰ τὴν παραγωγὴν ΜΑ = ΜΑχΑκ + ΜΑχΑλ + + ΜΑχΑμ.

Ἀπαιτούμενος χρόνος διὰ τὴν παραγωγὴν $MB = MB\chi B\kappa + MB\chi B\lambda + MB\chi B\mu$.

Ἀπαιτούμενος χρόνος διὰ τὴν παραγωγὴν $M\Gamma = M\Gamma\chi\Gamma\kappa + M\Gamma\chi\Gamma\lambda + M\Gamma\chi\Gamma\mu$.

Ἀφ' ἑτέρου δέ :

$MA\chi A\kappa + MB\chi B\kappa + M\Gamma\chi\Gamma\kappa + X\kappa = 20.000$ δευτερόλεπτα.

$MA\chi A\lambda + MB\chi B\lambda + M\Gamma\chi\Gamma\lambda + X\lambda = 30.000$ δευτερόλεπτα.

$MA\chi A\mu + MB\chi B\mu + M\Gamma\chi\Gamma\mu + X\mu = 40.000$ δευτερόλεπτα.

Τὸ ἀνωτέρω σύστημα δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ μορφὴν ὡς ἀκολούθως:

ΠΙΝΑΞ 1

MA	MB	MΓ	Xκ	Xλ	Xμ	
χAκ	χBκ	χΓκ	1	0	0	20.000
χAλ	χBλ	χΓλ	0	1	0	30.000
χAμ	χBμ	χΓμ	0	0	1	40.000

Ἡ πρώτη σειρὰ τοῦ πίνακος παρουσιάζει τὸν συνολικὸν χρόνον ἡμερησίας ἀπασχολήσεως τοῦ τμήματος κ, ἡ δευτέρα τοῦ τμήματος λ καὶ ἡ τρίτη τοῦ τμήματος μ. Ἑκάστη τῶν σειρῶν τούτων δύναται νὰ λάβῃ μορφὴν ἐξισώσεως, ὁπότε προκύπτει τὸ ἀκόλουθον σύστημα :

$$MA\chi A\kappa + MB\chi B\kappa + M\Gamma\chi\Gamma\kappa + 1X\kappa + 0X\lambda + 0X\mu = 20.000$$
$$MA\chi A\lambda + MB\chi B\lambda + M\Gamma\chi\Gamma\lambda + 0X\kappa + 1X\lambda + 0X\mu = 30.000$$
$$MA\chi A\mu + MB\chi B\mu + M\Gamma\chi\Gamma\mu + 0X\kappa + 0X\lambda + 1X\mu = 40.000$$

Τὸ σύστημα τοῦτο περιλαμβάνει τρεῖς ἐξισώσεις μὲ 6 ἀγνώστους (τοὺς MA, MB, MΓ, Xκ, Xλ, Xμ), ἄρα ἐπιδέχεται μέγα ἀριθμὸν λύσεων [7]. Ἀπὸ

7. Ἐπειδὴ ἀντικείμενον τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου δυνατοῦ κέρδους, βάσει τοῦ ὁποίου θὰ προγραμματίσωμεν τὴν κατανομὴν τῆς παραγωγῆς εἰς τὰ τρία παραγωγικὰ τμήματα, εἶναι ἀπαραίτητον νὰ εἰσαγάγωμεν εἰς τὸ πρόβλημα τοὺς νεκροὺς χρόνους τῶν τμημάτων τούτων. Τὸ μέγιστον κέρδος δυνατὸν νὰ προκύπτῃ εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν μὲ ὑποαπασχόλησιν τῶν παραγωγικῶν τμημάτων (τὰ ὁποῖα δὲν δύνανται ὅμως νὰ λειτουργήσουν πέραν τῶν 20.000, 30.000 καὶ 40.000 δευτερολέπτων ἡμερησίως, κατὰ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος). Ἐὰν ἀντικείμενον δὲν ἦτο τὸ κέρδος, ἀλλ' ἡ κατανομὴ τῆς παραγωγῆς οὕτως, ὥστε νὰ ἀξιοποιῆται πλήρως ἡ χρονικὴ ἱκανότης τῶν τμημάτων, θὰ εἴχομεν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους (μόνον τὰς τρεῖς μεταβλητὰς MA, MB, MΓ) τὸ ὁποῖον εὐκόλως θὰ ἠδύνατο νὰ λυθῇ διὰ τῆς στοιχειώδους Ἀλγέβρας :

$$\left.\begin{array}{l} MA\chi A\kappa + MB\chi B\kappa + M\Gamma\chi\Gamma\kappa = 20000 \\ MA\chi A\lambda + MB\chi B\lambda + M\Gamma\chi\Gamma\lambda = 30000 \\ MA\chi A\mu + MB\chi B\mu + M\Gamma\chi\Gamma\mu = 40000 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 5MA + 10MB + 6M\Gamma = 20000 \\ 15MA + 5MB + 8M\Gamma = 30000 \\ 10MA + 10MB + 25M\Gamma = 40000, \end{array}\right.$$ ἐξ οὗ

ἀπόψεως οἰκονομικῆς (συνεισφορᾶς εἰς τὸ κέρδος) ἡ ἀξία τῶν νεκρῶν χρόνων Χκ, Χλ, Χμ εἶναι μηδέν. Ἀντικαθιστῶντες τὰ χΑκ, χΒκ, χΓκ, χΑλ, χΒλ, χΓλ, χΑμ, χΒμ, χΓμ διὰ τῶν τιμῶν των καὶ ὑποθέτοντες ὅτι ἡ ἐπιχείρησις παράγει μόνον προϊὸν Β (ὑπόθεσις εἰσαγωγῆς εἰς τὸ πρόβλημα τῆς ἐπικρατεστέρας μονάδος προϊόντος), δυνάμεθα, βάσει τοῦ ἀνωτέρω συστήματος, νὰ καταρτίσωμεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα, διὰ τροποποιήσεως τοῦ πίνακος 1 :

ΠΙΝΑΞ 2.

	$\overset{0}{\text{Χκ}}$	$\overset{0}{\text{Χλ}}$	$\overset{0}{\text{Χμ}}$	$\overset{2}{\text{ΜΑ}}$	$\overset{3}{\text{ΜΒ}}$	$\overset{2\cdot 50}{\text{ΜΓ}}$		
Χκ	1	0	0	5	10	6	20000	: 10=2000 μον. Β
Χλ	0	1	0	15	5	8	30000	: 5=6000 » Β
Χμ	0	0	1	10	10	25	40000	: 10=4000 » Β

Δεχόμενοι ἤδη ὅτι ἡ ἐπιχείρησις θὰ παράγῃ 2.000 μον. Β ἡμερησίως (περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ἐξαντλεῖται ἡ χρονικὴ ἱκανότης τοῦ τμήματος κ), τότε τὸ τμῆμα λ θὰ διαθέτῃ ἀκόμη ἱκανότητα 30000−(2000×5)=20000 δευτερόλεπτα ἡμερησίως καὶ τὸ τμῆμα μ 40000−(2000 × 10)=20000 δευτερόλεπτα ἡμερησίως.

Ἐκ τοῦ πίνακος 2 προκύπτουν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις (τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον σκέλος ἀποτελοῦν οἱ ὑπεράνω τῶν στηλῶν συντελεσταὶ καὶ τὸ δεύτερον τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἐντὸς ἑκάστης στήλης ὅρων ἐπὶ τὸν παράπλευρον ἀριθμὸν ἑκάστης σειρᾶς Χκ, Χλ, Χμ) :

εὐκόλως δύνανται νὰ προκύψουν αἱ τιμαὶ τῶν ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ προβλήματός μας ὅμως οἱ χρόνοι δύνανται νὰ εἶναι ἴσοι ἢ μικρότεροι τῶν 20000, 30000, 40000 δευτερολέπτων :

$$\left.\begin{aligned} \text{ΜΑ}\chi\text{Ακ} + \text{ΜΒ}\chi\text{Βκ} + \text{ΜΓ}\chi\text{Γκ} &= 20000 \\ \text{ΜΑ}\chi\text{Αλ} + \text{ΜΒ}\chi\text{Βλ} + \text{ΜΓ}\chi\text{Γλ} &= 30000 \\ \text{ΜΑ}\chi\text{Αμ} + \text{ΜΒ}\chi\text{Βμ} + \text{ΜΓ}\chi\text{Γμ} &= 40000 \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} 5\text{ΜΑ} + 10\text{ΜΒ} + 6\text{ΜΓ} &\leq 20000 \\ 15\text{ΜΑ} + 5\text{ΜΒ} + 8\text{ΜΓ} &\leq 30000 \\ 10\text{ΜΑ} + 10\text{ΜΒ} + 25\text{ΜΓ} &\leq 40000. \end{aligned}\right.$$

Διὰ νὰ μεταβληθῇ τὸ σύστημα τοῦτο τῶν ἀνισοτήτων εἰς σύστημα ἰσοτήτων, ὥστε νὰ εἶναι ἐπιδεκτικὸν λύσεως, δέον νὰ εἰσαχθοῦν ἐντὸς τοῦ προβλήματος οἱ νεκροὶ χρόνοι τῶν τριῶν τμημάτων, ὁπότε προκύπτει τὸ ἀνωτέρω σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων μὲ ἓξ ἀγνώστους. Εὐκταῖον βεβαίως εἶναι ὅπως τὸ μέγιστον κέρδος πραγματοποιῆται κατὰ τὴν πλήρη ἀπασχόλησιν (δεῖγμα ὀρθῆς κεφαλαιακῆς διαρθρώσεως), τοῦτο ὅμως δὲν συμβαίνει πάντοτε (ὅρα π.χ. τὴν ἀναπτυχθεῖσαν κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τῆς γραφικῆς μεθόδου, ἀνωτ. § 6 περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ μέγιστον κέρδος πραγματοποιεῖται ὅταν τὸ τμῆμα μ ὑποαπασχολεῖται κατὰ 30 ο/ο τῆς ἱκανότητός του).

$X\varkappa = 1X\varkappa + 0X\lambda + 0X\mu$ (1)
$X\lambda = 0X\mu + 1X\lambda + 0X\mu$ (2)
$X\mu = 0X\varkappa + 0X\lambda + 1X\mu$ (3)
$MA = 5X\mu + 15X\lambda + 10X\mu$ (4)
$MB = 10X\varkappa + 5X\lambda + 10X\mu$ (5)
$M\Gamma = 6X\varkappa + 8X\lambda + 25X\mu$ (6)

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (5) ὡς πρὸς Χκ λαμβάνομεν $X\varkappa = {}^1/_{10}\,MB - {}^1/_2\,X\lambda - 1X\mu$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ Χκ εἰς τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ (6) λαμβάνομεν $MA = {}^1/_2 MB + 12\,{}^1/_2\,X\lambda + 5X\mu$ καὶ $M\Gamma = {}^3/_5\,MB + 5X\lambda + 19\,X\mu$.

Κατὰ ταῦτα ὁ πίναξ 2 μετατρέπεται ὡς ἀκολούθως :

ΠΙΝΑΞ 3

	$\overset{0}{X\varkappa}$	$\overset{0}{X\lambda}$	$\overset{0}{X\mu}$	$\overset{2}{MA}$	$\overset{3}{MB}$	$\overset{2\cdot 10}{M\Gamma}$	
$\overset{3}{MB}$	$^1/_{10}$	0	0	½	1	$^3/_5$	2000
$\overset{0}{X\lambda}$	$-$½	1	0	12½	0	5	20000
$\overset{0}{X\mu}$	-1	0	1	5	0	19	20000

Εἰσάγομεν ἤδη εἰς τὴν λύσιν τὸ προϊὸν Γ (ὑπ' ἀριθ. 2 ἐπικερδὲς κατὰ μονάδα προϊόν), ὑποκαθιστῶντες δὲ τοῦτο εἰς τὰς ἀξίας τῆς τελευταίας στήλης τοῦ πίνακος 3 λαμβάνομεν $M\Gamma = 2000 : {}^3/_5 = 3333{,}33$, $M\Gamma = 20000 : 5 = 4000$ καὶ $M\Gamma = 20000 : 19 = 1052{,}63$. Ἡ τελευταία αὕτη τιμὴ ἀποτελεῖ ἐν προκειμένῳ τὸν περιοριστικὸν παράγοντα. Ταύτην πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὴν ἀναλογίαν ὑποκαταστάσεως τοῦ ΜΒ διὰ τοῦ ΜΓ ($^3/_5$) καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον ἀπὸ τὴν $MB = 2000$ εὑρίσκομεν $MB = 2000 - {}^3/_5 \cdot 1052{,}63 = 1368{,}42$. Πράττοντες τὸ ἴδιον διὰ τὴν Χλ (ἀναλογία ὑποκαταστάσεως=5) εὑρίσκομεν $X\lambda = 20000 - 5 . 1052{,}63 = 14736{,}85$. Ἐκ τῆς $M\Gamma = {}^3/_5\,MB + 5X\lambda + 19X\mu$, λύοντες ὡς πρὸς Χμ, λαμβάνομεν $X\mu = 0{,}053M\Gamma - 0{,}031MB - 0.26X\lambda$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ Χμ εἰς τὰς $X\varkappa = {}^1/_{10}\,MB - {}^1/_2 X\lambda - 1X\mu$ καὶ $MA = {}^1/_2 MB + 12\,{}^1/_2 X\lambda + 5X\mu$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $X\varkappa = 0{,}069MB - 0{,}24X\lambda - 0{,}053M\Gamma$ καὶ $MA = 0{,}345MB + 11{,}2X\lambda + 0{,}265M\Gamma$.

Τὰ ἀνωτέρω ἀπεικονίζονται εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

ΠΙΝΑΞ 4

	$\overset{0}{X\kappa}$	$\overset{0}{X\lambda}$	$\overset{0}{X\mu}$	$\overset{2}{MA}$	$\overset{3}{MB}$	$\overset{2{\cdot}50}{M\Gamma}$	
$\overset{3}{MB}$	0,069	0	—0,031	0,345	1	0	1368,42
$\overset{0}{X\lambda}$	—0,24	1	—0,26	11,2	0	0	14736,85
$\overset{2{\cdot}50}{M\Gamma}$	—0,053	0	0,053	0,265	0	1	1052,63

Νῦν εἰσάγομεν εἰς τὴν λύσιν τὸ προϊὸν Α (τελευταία ἐν προκειμένῳ πραγματικὴ μεταβλητὴ τοῦ προβλήματος). Ὑποκαθιστῶντες τοῦτο εἰς τὰς ἀξίας τῆς τελευταίας στήλης τοῦ Πίνακος 4 λαμβάνομεν ἀντιστοίχως ΜΑ=1368,42 : : 0,345=3966, ΜΑ=14736,85 : 11,2=1315, ΜΑ=1052,63 : 0,265=3972. Ἡ τιμὴ ΜΑ=1315 ἀποτελεῖ ἐν προκειμένῳ τὸν περιοριστικὸν παράγοντα. Ἀκολουθοῦντες τὴν διαδικασίαν, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν κατὰ τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προϊόντος Γ, ἔχομεν :

ΜΒ=1368,42 — 0,345 . 1315=915,

ΜΓ=1052,63 — 0,265 . 1315=704,

ΜΛ=0,345ΜΒ + 11,2Χλ+0,265ΜΓ καὶ λύοντες ὡς πρὸς Χλ εὑρίσκομεν Χλ=0,089ΜΑ—0,03ΜΒ—0,024ΜΓ, ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὰς Χκ=0,069ΜΒ — 0,24Χλ — 0,053 ΜΓ καὶ

Χμ=—0,031ΜΒ — 0,26Χλ + 0,053ΜΓ λαμβάνομεν

Χκ=0,076ΜΒ—0,021ΜΑ — 0,047ΜΓ καὶ

Χμ=—0,022ΜΒ — 0,023ΜΑ + 0,06ΜΓ.

Ὁ πίναξ τῶν δεδομένων τούτων εἶναι ὁ ἀκόλουθος :

ΠΙΝΑΞ 5

	$\overset{0}{X\kappa}$	$\overset{0}{X\lambda}$	$\overset{0}{X\mu}$	$\overset{2}{MA}$	$\overset{3}{MB}$	$\overset{2{\cdot}50}{M\Gamma}$	
$\overset{3}{MB}$	0,076	—0,03	—0,022	0	1	0	915
$\overset{2}{MA}$	—0,021	0,089	—0,023	1	0	0	1.315
$\overset{2{\cdot}50}{M\Gamma}$	—0,047	—0,024	0,06	0	0	1	704

Παρατηροῦμεν ἐν προκειμένῳ ὅτι αἱ τρεῖς ἀργοῦσαι μεταβληταὶ (Χκ, Χλ, Χμ) ἐκφράζονται εἰς ὅρους τῶν τριῶν πραγματικῶν μεταβλητῶν (ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ), τῶν ὁποίων αἱ τιμαὶ δεικνύονται εἰς τὴν τελευταίαν πρὸς τὰ δεξιὰ στήλην τοῦ πίνακος. Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν τούτων (Χκ=0,076ΜΒ—0,021ΜΑ—0,047ΜΓ, Χλ=—0,03ΜΒ + 0,089ΜΑ — —0,024ΜΓ, Χμ=—0,022ΜΒ — 0,023ΜΑ + 0,06ΜΓ) τείνουν πρὸς τὸ μηδὲν (ἡ τάσις αὕτη ἐπαυξάνεται ὅσον ἡ ἀκρίβεια τῶν ὑπολογισμῶν εἶναι μεγαλυτέρα), ἄρα ἡ optimum λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ παραγωγὴ 1.315 μονάδων προϊόντος Α, 915 μονάδων προϊόντος Β καὶ 704 μονάδων προϊόντος Γ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ἡμερήσιον κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως θὰ εἶναι Κ=ΜΑΚΑ + ΜΒΚΒ + ΜΓΚΓ=1315 . 2 + 915 . 3+704 . 2,50 =7135 δρχ., τοῦτο δὲ εἶναι τὸ μέγιστον κέρδος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀποκομίσῃ ἡ ἐπιχείρησις κατὰ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος. Πρὸς πραγματοποίησιν αὐτοῦ τοῦ κέρδους τὰ παραγωγικὰ τμήματα θὰ λειτουργήσουν ὡς ἀκολούθως :

Τμῆμα κ : 1315 . 5=6575″	ἡμερησ.	πρὸς παραγ.		1315	μονάδων	Α.
915 . 10=9150″	»	»	»	915	»	Β
704 . 6=4224″	»	»	»	704	»	Γ
Σύνολον = 19.949″	»	νεκρὸς χρόνος		≐ 0		
Τμῆμα λ : 1315 . 15=19725″	»	πρὸς παραγ.		1315	»	Α.
915 . 5= 4575″	»	»	»	915	»	Β,
704 . 8= 5632″	»	»	»	704	»	Γ
Σύνολον = 29.932″	»	νεκρὸς χρόνος		≐ 0		
Τμῆμα μ : 1315 . 10=13150″	»	πρὸς παραγ.		1315	»	Α
915 . 10= 9150″	»	»	»	915	»	Β.
704 . 25=17600″	»	»	»	704	»	Γ
Σύνολον =39.900	»	νεκρὸς χρόνος		≐ 0 [8].		

Ἐὰν κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς τῶν δεδομένων τῶν πινάκων 4 καὶ 5 ἐλαμβάνοντο περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία, ἡ ἀκρίβεια θὰ ἦτο ἀκόμη μεγαλυτέρα (πρὸς ὄφελος τοῦ ὑπολογισθέντος ἀνωτέρω ὄγκου παραγωγῆς ἑκάστου προϊόντος καὶ πρὸς μεγαλυτέραν μείωσιν τοῦ νεκροῦ χρόνου ἑκάστου τῶν τμημάτων).

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται ἡ τεραστία διαφωτιστικὴ διὰ τὴν διοίκησιν τῆς ἐπιχειρήσεως σημασία τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ προβλήματός μας ἡ διοίκησις γνωρίζει ἤδη ποῖον εἶναι τὸ maximum κέρδος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀποκομίσῃ ἐκ τῆς παραγωγῆς τῶν προϊόντων της, ποῖα προϊόντα δέον νὰ παράγῃ διὰ νὰ ἀποκομίσῃ αὐτὸ τὸ κέρδος καὶ εἰς ποίας ποσότητας. Γνωρίζει ἐπίσης ἐὰν τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπενδυθὲν εἰς τὸν ἐξοπλισμὸν διετέθῃ κατ' ὀρθολογικὸν

8. Οὐδαμοῦ ἐνταῦθα ὁ νεκρὸς χρόνος ὑπερβαίνει τὸ ποσοστὸν δυόμισυ ἐπὶ τοῖς χιλίοις (2,5 ο/οο) τῆς συνολικῆς χρονικῆς ἱκανότητος τῶν τμημάτων.

τρόπον (ὡς συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσίν μας) ἢ ἐὰν μέρος τούτου διετέθη διὰ τὴν προμήθειαν εἰδῶν τινων ἐξοπλισμοῦ εἰς ὑπερβολικὰς ποσότητας κλπ· Βάσει τῶν δεδομένων τούτων θὰ καταρτίσῃ τὸ πρόγραμμα τῆς παραγωγικῆς της λειτουργίας. Φυσικὰ τὰ λεγόμενα «ἀνώτερα κριτήρια» (outside criteria) θὰ παίζουν πάντοτε τὸν ρόλον των, ἀναλόγως πρὸς τὴν πεῖραν καὶ τὴν πολιτικὴν τοῦ διοικητοῦ. Ὁ γραμμικὸς προγραμματισμός, ὅπως καὶ οἱαδήποτε ἄλλη ἀναλυτικὴ μέθοδος δὲν δεσμεύει, ἁπλῶς διαφωτίζει. Ἀλλὰ πιθανῶς τὸ σημαντικώτερον πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἀνέκαθεν ἀντιμετώπιζεν ἡ διοίκησις τῶν ἐπιχειρήσεων ἦτο τὸ πρόβλημα τῶν πληροφοριῶν, τὸ πρόβλημα τῆς διαφωτίσεως. Εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, ἰδιαιτέρως ὅσον ἀφορᾷ θέματα προγραμματισμοῦ, ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς εἶναι πράγματι ἓν ἀποφασιστικὸν ὅπλον.

8. *Ἡ μέθοδος μεταφορᾶς (transportation method) τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.*

Δύο εἰδῶν προβλήματα (ἐπὶ μικρο-οἰκονομικοῦ τοὐλάχιστον ἐπιπέδου) δύνανται νὰ ἐπιλυθοῦν διὰ τῆς μεθόδου ταύτης: πρῶτον, προβλήματα εὑρέσεως καὶ προγραμματισμοῦ τοῦ ἐλαχίστου κόστους μεταφορᾶς προϊόντων ἀπὸ ἑνὸς ἢ διαφόρους τόπους εἰς ἄλλον ἢ ἄλλους, καὶ δεύτερον, προβλήματα εὑρέσεως καὶ προγραμματισμοῦ τοῦ ἐλαχίστου κόστους διακινήσεως ὑλικῶν ἐντὸς τῆς ἐπιχειρήσεως.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι γνωστόν, μὴ χρῇζον ἰδιαιτέρας ἀναπτύξεως, πόσον:

— τὸ κόστος μεταφορᾶς ἐπηρεάζει τὸ συνολικὸν κόστος τοῦ προϊόντος καὶ κατὰ συνέπειαν τὴν τιμὴν πωλήσεως αὐτοῦ, τὴν ἀποτελεσματικότητα τῆς ἐπιχειρήσεως καὶ τὸ συνολικὸν κέρδος αὐτῆς.

—τὸ κόστος τοῦτο συμβάλλει εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῆς ἀγοραίας τιμῆς τοῦ προϊόντος, συνεπῶς καὶ εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῆς ἐνεργοῦ ζητήσεως καὶ τοῦ συνολικοῦ βαθμοῦ παραγωγικότητος τῆς οἰκονομίας.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι ἐπίσης γνωστὸν ὅτι τὸ κόστος διακινήσεως τῶν ὑλικῶν ἐντὸς τῆς ἐπιχειρήσεως (materials handling cost) ἀποτελεῖ τὸν κυριώτερον συντελεστὴν τοῦ κόστους ἀμέσου ἐργασίας (direct labor cost). Εἰς τὰς βαρείας ἰδίως βιομηχανίας, εἰς ἀποθήκας ὑψηλοῦ βαθμοῦ «κυκλικότητος» (turnover), εἰς λιμένας κλπ. τὸ κόστος τοῦτο συνήθως κυμαίνεται μεταξὺ 50 ο/ο—95 ο/ο τοῦ συνολικοῦ κόστους ἀμέσου ἐργασίας.

Εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους ἰδίως χώρας, ὅπου ἡ ὀργανωτικὴ στάθμη τῆς οἰκονομίας γενικώτερον καὶ τῶν ἐπιχειρήσεων εἰδικώτερον (ἔλλειψις αὐτοματισμοῦ, δαπανηρὰ συστήματα ἐργασίας κλπ.) εἶναι χαμηλή, ὁ παράγων «μεταφορὰ» προσλαμβάνει μεγαλυτέραν ἀκόμη σημασίαν.

Τὸ πρόβλημα τῆς μεταφορᾶς προϊόντων ἀπὸ τοὺς παραγωγικοὺς ἢ αποθηκευτικούς χώρους εἰς τοὺς χώρους διανομῆς καὶ πωλήσεως εἶναι πρόβλημα πρωτίστως μὲν τῆς ἐμπορικῆς λειτουργίας τῆς ἐπιχειρήσεως (channels of distribution), δευτερευόντως δὲ πρόβλημα τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας. Ἀντιθέτως τὸ πρόβλημα τῆς διακινήσεως τῶν ὑλικῶν ἐντὸς τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι σχεδὸν ἐξ ὁλοκλήρου πρόβλημα τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας αὐτῆς. Ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς δύναται ἐξ ἴσου νὰ χρησιμεύσῃ διὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων προγραμματισμοῦ καὶ τῶν λοιπῶν, ἐκτὸς τῆς παραγωγικῆς, λειτουργιῶν τῆς ἐπιχειρήσεως.

Ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ κατὰ τὴν λύσιν προβλημάτων διὰ τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι παραπλησία τῆς διαδικασίας, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται κατὰ τὴν λύσιν προβλημάτων διὰ τῆς simplex μεθόδου (ἀνωτ. § 7). Εἰς πλείστας ὅμως περιπτώσεις τῆς μεθόδου ταύτης δυνάμεθα νὰ ἀποφύγωμεν τὴν χρῆσιν γραμμικῶν ἐξισώσεων, ἐργαζόμενοι μόνον διὰ πινάκων.

Ἡ μέθοδος ἀπαιτεῖ ὅπως τὸ πρόβλημα, ἐκτὸς τῆς γραμμικότητος καὶ βεβαιότητος, χαρακτηρίζεται ἐπίσης καὶ ὑπὸ ὁμοιογενείας. Κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τῆς simplex μεθόδου εἴδομεν ὅτι ἕκαστος παράγων τοῦ προβλήματος (πραγματικὴ ἢ ἀργοῦσα μεταβλητὴ) δύναται ἀδιαφόρως νὰ ὑποκατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἑτέρου, ἀνεξαρτήτως τῆς φύσεως τῶν παραγόντων καὶ τῆς ἀναλογίας ὑποκαταστάσεως τούτων (π.χ. τὸ ΜΓ ὑπεισέρχεται εἰς τὴν θέσιν τοῦ ΜΒ μὲ ἀναλογίαν ὑποκαταστάσεως $^3/_5$ καὶ εἰς τὴν θέσιν τοῦ Χλ. μὲ ἀναλογίαν ὑποκαταστάσεως 5, ὅρα ἀνωτ. § 7 πίναξ 3 καὶ ἑπ.). Εἰς τὴν παροῦσαν μέθοδον ὅμως πρέπει, διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος, ἀφ' ἑνὸς μὲν αἱ ἀλληλοϋποκαθιστάμεναι μεταβληταὶ νὰ εἶναι κατὰ τὸ δυνατὸν ὁμοίας φύσεως, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ ἀναλογία ὑποκαταστάσεως νὰ εἶναι πάντοτε 1 (πρὸς 1, καὶ οὐχί, ὡς ἀνωτέρω, 1 πρὸς $^3/_5$ καὶ 1 πρὸς 5). Ἐὰν ἡ προϋπόθεσις αὕτη τῆς ὁμοιογενείας δὲν ὑπάρχῃ εἰς τὸ πρόβλημα, τότε ἡ μέθοδος μεταφορᾶς δὲν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν ἐπίλυσίν του καὶ δέον νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὴν simplex method (ἐφ' ὅσον πάντοτε ὑφίστανται αἱ προϋποθέσεις τῆς γραμμικότητος καὶ βεβαιότητος).

Ἐ φ α ρ μ ο γ ή. Ὑποθέσωμεν ὅτι μία ἐπιχείρησις ἔχει ἀναλάβει τὴν ὑποχρέωσιν νὰ παραδώσῃ, ἐντὸς μιᾶς ὡρισμένης περιόδου, προϊόντα πρὸς πώλησιν εἰς τέσσαρα κέντρα διανομῆς, τὰ ὑπ' ἀριθ. 1, 2, 3, 4 κείμενα εἰς διαφόρους ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ τόπου ἀποθηκεύσεως τῶν προϊόντων. Κατὰ τὴν περίοδον ταύτην (προγραμματιζομένην περίοδον) ἡ ἐπιχείρησις δέον νὰ παραδώσῃ τὰς ἀκολούθους ποσότητας : εἰς τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 1=180 τόννους, εἰς τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 2=270 τόννους, εἰς τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 3=225 τόννους καὶ εἰς τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 4=195 τόννους, σύνολον=870 τόννους. Ἡ ἐπιχείρησις διαθέτει φορτηγὰ αὐτοκίνητα διὰ τὴν μεταφορὰν τῶν προϊόντων της. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ αὐτοκίνητα ταῦτα δύνανται νὰ μεταφέρουν, κατὰ τὴν προγραμματιζομένην περίοδον, 180 τόννους προϊόντων εἰς οἱονδήποτε ἐκ τῶν τεσσάρων κέντρων διανομῆς μὲ τὸ ἀκόλουθον κόστος κατὰ τόννον : κέντρον ὑπ' ἀριθ. 1=125 δρχ., κέντρον ὑπ' ἀριθ. 2=75 δρχ., κέντρον ὑπ' ἀριθ. 3=125 δρχ., κέντρον ὑπ' ἀριθ. 4=150 δρχ. Πρὸς κάλυψιν τῆς ὑποχρεώσεώς της ἡ ἐπιχείρησις εἶναι ἠναγκασμένη νὰ ναυλώσῃ καὶ ξένα μεταφορικὰ μέσα, πρὸς τοῦτο δὲ ἔλαβε τὰς ἀκολούθους προσφορὰς ἐκ μέρους τριῶν μεταφορικῶν ἐπιχειρήσεων :

Ἐπιχείρησις Α : δύναται νὰ μεταφέρῃ ἕως 300 τόννους προϊόντων εἰς οἱονδήποτε ἐκ τῶν τεσσάρων κέντρων διανομῆς, πρὸς 150 δρχ. κατὰ τόννον διὰ τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 1, 150 διὰ τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 2, 175 διὰ τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 3 καὶ 175 διὰ τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 4.

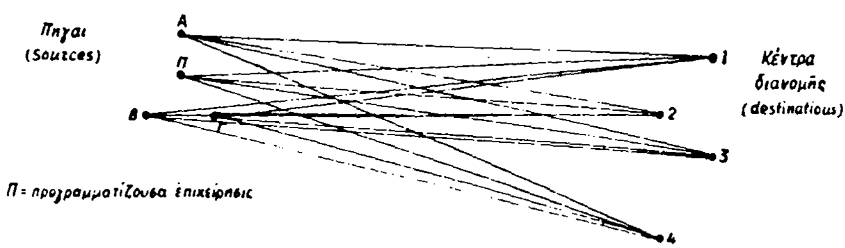
Ἐπιχείρησις Β : δύναται νὰ μεταφέρῃ ἕως 240 τόννους προϊόντων εἰς οἱονδήποτε ἐκ τῶν τεσσάρων κέντρων διανομῆς, πρὸς 75 δρχ. κατὰ τόννον διὰ τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 1, 150 διὰ τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 2, 100 διὰ τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 3 καὶ 125 διὰ τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 4.

Ἐπιχείρησις Γ : δύναται νὰ μεταφέρῃ ἕως 210 τόννους προϊόντων εἰς οἱανδήποτε ἐκ τῶν τεσσάρων κέντρων διανομῆς πρὸς 150 δρχ. κατὰ τόννον διὰ τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 1, 125 διὰ τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 2, 100 διὰ τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 3 καὶ 75 διὰ τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 4.

Τὸ ἐρώτημα εἶναι : ποῖον εἶναι τὸ ἐλάχιστον κόστος μεταφορᾶς τῶν προϊόντων τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὰ τέσσαρα κέντρα διανομῆς κατὰ τὴν προγραμματιζομένην περίοδον καὶ πῶς πρέπει νὰ κατανεμηθῇ ἡ μεταφορὰ αὕτη μεταξὺ τῶν αὐτοκινήτων τῆς ἐπιχειρήσεως καὶ τῶν μεταφορικῶν μέσων τῶν τριῶν μεταφορικῶν ἐπιχειρήσεων, ὥστε νὰ ἐπιτευχθῇ τὸ ἐλάχιστον τοῦτο κόστος;

Σχῆμα 5

Ἀναπαράστασις σχέσεως μεταξὺ «πηγῶν» μεταφορᾶς καὶ προορισμοῦ ἐμπορευμάτων.



Κατὰ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος ἔχομεν :

1) Σύνολον διαθεσίμων μέσων=σύνολον μεταφορικῆς ἱκανότητος προγραμματιζούσης ἐπιχειρήσεως καὶ τῶν τριῶν μεταφορικῶν ἐπιχειρήσεων= $=180+300+240+210=930$ τόννοι (διαθέσιμοι πηγαὶ κατὰ τὴν προγραμματιζομένην περίοδον).

2) Σύνολον ἀναγκῶν=σύνολον ἀπαιτουμένης πρὸς μεταφορὰν εἰς τὰ τέσσαρα κέντρα διανομῆς ποσότητος προϊόντων κατὰ τὴν προγραμματιζο-

μένην περίοδον=180+270+225+195=870 τόννοι. Ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι κατὰ τὴν ἐν λόγῳ περίοδον ἡ «ἀργοῦσα» ἱκανότης (idle capacity ἢ slack) θὰ ἀνέλθῃ εἰς 930—870=60 τόννους, ἤτοι 180+270+225+195+60=930 τόννοι.

Ὁ ἀκόλουθος πίναξ ὑπ' ἀριθ. 6 παριστᾷ τὰ τεχνικοοικονομικὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος :

ΠΙΝΑΞ 6

Κέντρα Διανομῆς	Διαθέσιμοι Πηγαὶ · Κόστος				Ἀπαιτουμένη ποσότης πρὸς μεταφορὰν (εἰς τόν.)
	Π (προγραμ. ἐπιχείρ.)	Α	Β	Γ	
1	Δρχ. 125	Δρχ. 150	Δρχ. 75	Δρχ. 150	180
2	» 75	» 150	» 150	» 125	270
3	» 125	» 175	» 100	» 100	225
4	» 150	» 175	» 125	» 75	195
Ἀργοῦσα ἱκανότης	» 0	» 0	» 0	» 0	60
Συνολ. ἱκανότης	180 τόν.	300 τόν.	240 τόν.	210 τόν.	930

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει :

1) Κόστος μεταφορᾶς εἰς τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 1 :

Ἐπιχείρησις Π=180 τόν. × 125 δρχ. κατὰ τόννον=22.500 δρχ.
» Α=180 τόν. × 150 δρχ. κατὰ τόννον=27.000 δρχ.
» Β=180 τόν. × 75 δρχ. κατὰ τόννον=13.500 δρχ.
» Γ=180 τόν. × 150 δρχ. κατὰ τόννον=27.000 δρχ.

2) Κόστος μεταφορᾶς εἰς τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 2 :

Ἐπιχείρησις Π=δύναται νὰ μεταφέρῃ μόνον 180 τόν. (ἐνῷ ἀπαιτοῦνται 270). πρὸς 180 τόν. × 75 δρχ. κατὰ τόννον=13.500 δρχ.

Ἐπιχείρησις Α=270 τόν. × 150 δρχ. =40.500 δρχ.

Ἐπιχείρησις Β=δύναται νὰ μεταφέρῃ μόνον 240 τόν. (ἐνῷ ἀπαιτοῦνται 270), πρὸς 240 τόν. × 150 δρχ. κατὰ τόννον=36.000 δρχ.

Ἐπιχείρησις Γ=δύναται νὰ μεταφέρῃ μόνον 210 τόν. (ἐνῷ ἀπαιτοῦνται 270). πρὸς 210 τόν. × 125 δρχ. κατὰ τόννον=26.250 δρχ.

3)Κόστος μεταφορᾶς εἰς τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 3 :

Ἐπιχείρησις Π=δύναται νὰ μεταφέρῃ μόνον 180 τόν. (ἐνῷ ἀπαιτοῦνται 225), πρὸς 180 τόν. × 125 δρχ. κατὰ τόννον=22.500 δρχ.

Ἐπιχείρησις Α=225 τόν. × 175 δρχ. κατὰ τόννον=39.375 δρχ.
» Β=225 τόν. × 100 δρχ. κατὰ τόννον=22.500 δρχ.

Ἐπιχείρησις Γ=δύναται νὰ μεταφέρῃ μόνον 210 τόν. (ἐνῷ ἀπαιτοῦνται 225), πρὸς 210 τόν. × 100 δρχ. κατὰ τόννον=21.000 δρχ.

4) Κόστος μεταφορᾶς εἰς τὸ κέντρον ὑπ' ἀριθ. 4 :

Ἐπιχείρησις Π=δύναται νὰ μεταφέρῃ μόνον 180 τόν. (ἐνῷ ἀπαιτοῦνται 195), πρὸς 180 τόν. × 150 δρχ. κατὰ τόννον=27.000 δρχ.

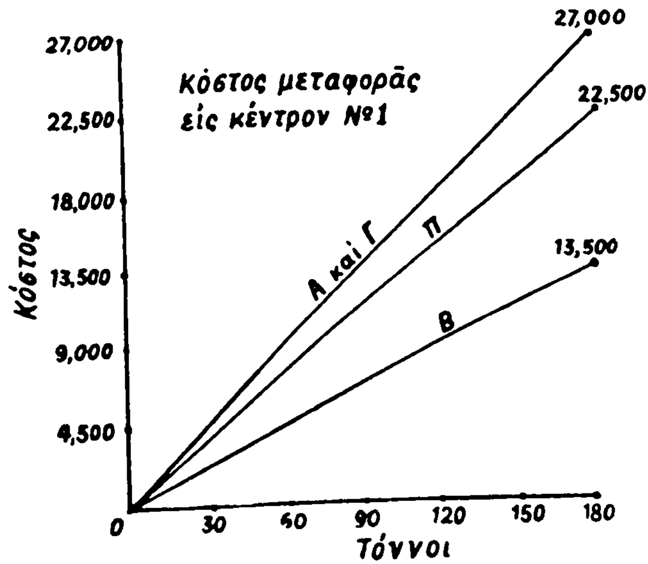
Ἐπιχείρησις Α=195 τόν. × 175 δρχ. κατὰ τόννον=34.125 δρχ.

Ἐπιχείρησις Β=195 τόν. × 125 δρχ. κατὰ τόννον=24.375 δρχ.

Ἐπιχείρησις Γ=195 τόν. × 75 δρχ. κατὰ τόννον=14.625 δρχ.

Τὰ γραφικὰ διαγράμματα τῶν ἀνωτέρω δεδομένων ἔχουν ὡς ἀκολούθως σχῆμα 6 - σχῆμα 7 - σχῆμα 8 - σχῆμα 9.

Σχῆμα 6

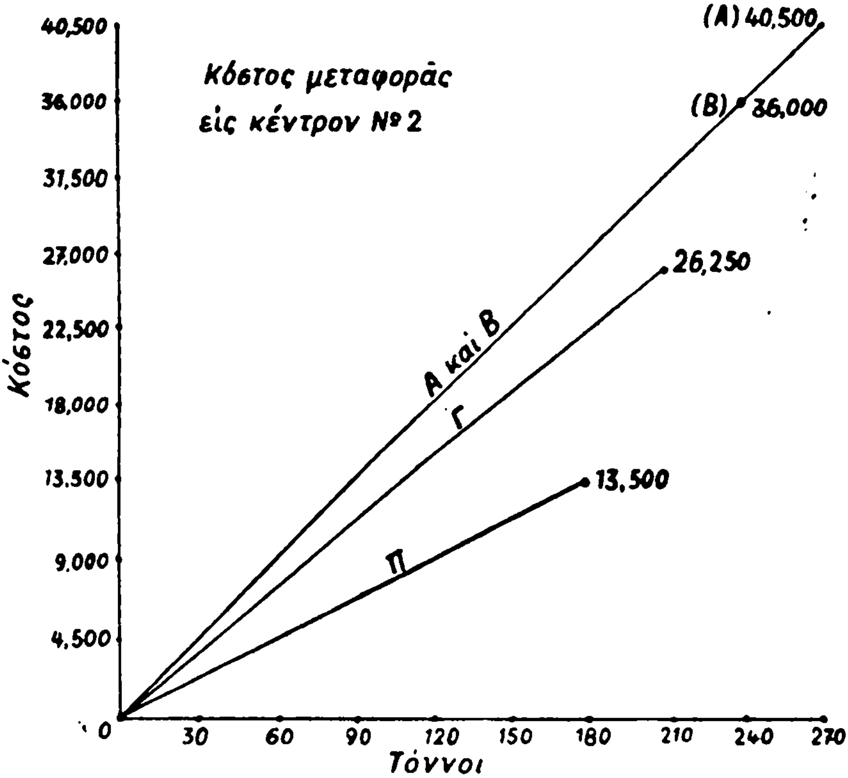


Τὰ διαγράμματα ταῦτα, ἐκτὸς τῆς χρησιμότητός των διὰ τὴν λεπτομερῆ ὀπτικὴν ἀπεικόνισιν τοῦ προβλήματος, ἐπιβεβαιοῦν ἐπίσης τὴν γραμμικότητα τοῦ προβλήματος (εὐθεῖαι γραμμαὶ συμπεριφορᾶς τῶν μεταβλητῶν). Ἡ ὁμοιογένεια τοῦ προβλήματος εἶναι ἔκδηλος (οἱοσδήποτε τόννος δύναται ἀδιαφόρως νὰ μεταφερθῇ διὰ τῶν μεταφορικῶν μέσων οἱασδήποτε ἐκ τῶν τεσσάρων πηγῶν—ἐπιχειρήσεων). Τὸ πρόβλημα συνεπῶς δύναται νὰ ἐπιλυθῇ διὰ τῆς μεθόδου μεταφορᾶς.

Δέον ἤδη νὰ ὑποθέσωμεν μίαν ἀρχικὴν λύσιν, ἐκ τῶν διαδοχικῶν ἀναθεωρήσεων τῆς ὁποίας θὰ ἀχθῶμεν εἰς τὴν τελικὴν optimum λύσιν τοῦ προβλήματος. Διὰ τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἀρχικῆς ταύτης λύσεως προβλημάτων γραμμικοῦ ἐπιχειρηματικοῦ προγραμματισμοῦ μὲ τὴν μέθοδον τῆς μεταφορᾶς.

ὑπάρχουν ὡρισμέναι τεχνικαί, κυριώτεραι τῶν ὁποίων εἶναι ἡ Northwes Cornel Rule καὶ ἡ «μέθοδος ἐπιθεωρήσεως» (Cinspection method). Ἡ τε λευταία αὕτη βασίζεται εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἀρχικοῦ πίνακος τοῦ προβλή ματος (ἀνωτ. πίναξ 6), χρησιμοποιεῖται δὲ ἐνταῦθα διὰ τὴν λύσιν τοῦ παρόν τος προβλήματος.

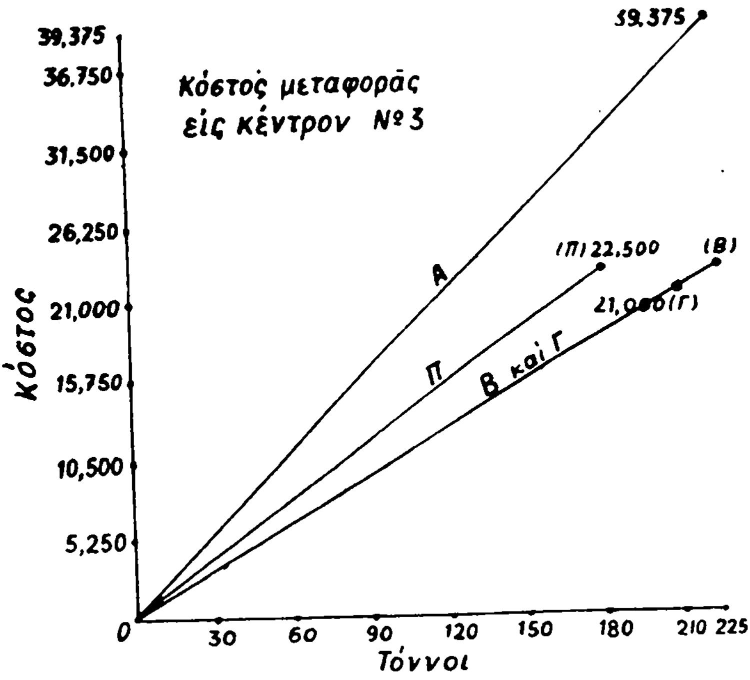
Σχῆμα 7



Ἐκ τοῦ πίνακος 6 συνάγεται ὅτι τὰς εὐνοϊκωτέρας προϋποθέσεις δι τὴν κάλυψιν τῶν ἀναγκῶν τοῦ κέντρου No 1 προσφέρει ἡ ἐπιχείρησις B (ἐπι χείρησις τοῦ ἐλαχίστου ἐν προκειμένῳ κόστους). Ὑποθέτομεν οὕτω ὅτι ἐ τῆς διατιθεμένης ἱκανότητος τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης (240 τόν.), ἱκανότη ἴση πρὸς 180 τόν. θὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν κάλυψιν τῶν ἀναγκῶν τοῦ κέν τρου No 1 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 240—180=60 τόννοι θὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴ κάλυψιν ἀναγκῶν τῶν ἄλλων κέντρων ἤ ἐνδεχομένως θὰ μείνῃ ἀχρησιμοποι ητον (κάλυψις τῆς ἀργούσης—slack—ἱκανότητος). Ἐν προκειμένῳ ἡ κάλυψ τῶν ἀναγκῶν τοῦ κέντρου No 1 θὰ στοιχίσῃ εἰς τὴν προγραμματίζουσαν ἐπι χείρησιν Π ποσὸν δρχ. 180 × 75=13.500.

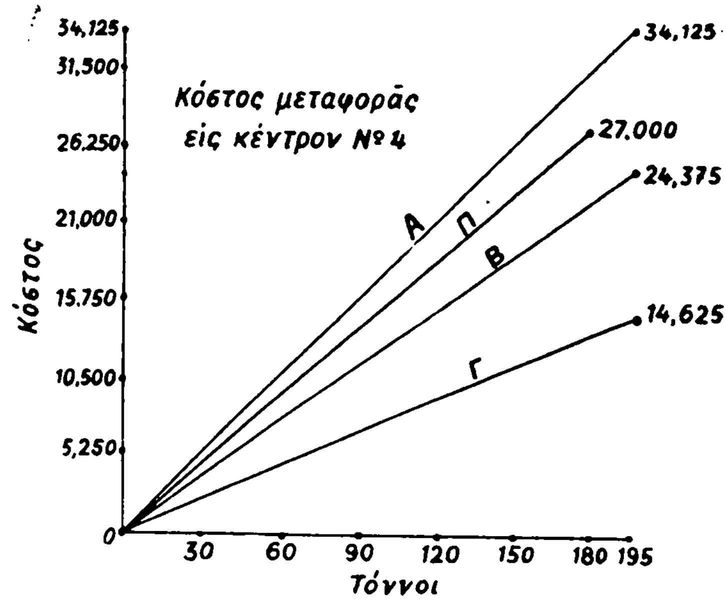
Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον συνάγομεν ὅτι διὰ τὴν κάλυψιν τῶν ἀναγκῶν τοῦ κέντρου Νο 2 σκόπιμον εἶναι νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἱκανότης τῆς ἐπιχειρήσεως Π=180 τόννοι καὶ 90 τόννοι ἐκ τῆς ἱκανότητος τῆς ἐπιχειρήσεως Γ, τῆς ὁποίας εἰς τὸ ἑξῆς ἡ ἱκανότης θὰ ἀνέρχεται εἰς 210.90=120 τόννους. Τοῦτο θὰ στοιχίσῃ εἰς τὴν προγραμματίζουσαν ἐπιχείρησιν 180 × 75 + 90 ×125=24.750 δρχ.

Σχῆμα 8



Διὰ τὸ κέντρον Νο 3 ἡ εὐνοϊκωτέρα λύσις, ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς πρώτης ταύτης ἐπιθεωρήσεως τοῦ Πίνακος 6, εἶναι ἡ χρησιμοποίησις τῆς παραμενούσης ἱκανότητος τῆς ἐπιχειρήσεως Β=60 τόν., ἡ χρησιμοποίησις τῆς ἀδρανούσης ἱκανότητος τῆς ἐπιχειρήσεως Γ=120 τόν. καὶ ἡ χρησιμοποίησις 45 τόν. ἐκ τῆς ἱκανότητος τῆς ἐπιχειρήσεως Α (δεδομένου ὅτι ἡ μετὰ τὰς Β καὶ Γ πλέον εὐνοϊκὴ ἐν προκειμένῳ ἐπιχείρησις Π ἔχει ἐξαντλήσει τὴν ἱκανότητά της διὰ τὴν κάλυψιν τῶν ἀναγκῶν τοῦ κέντρου Νο 2), τῆς ὁποίας εἰς τὸ ἑξῆς ἡ ἱκανότης θὰ ἀνέρχεται εἰς 300—45=255 τόννους. Τοῦτο θὰ στοιχίσῃ εἰς τὴν προγραμματίζουσαν ἐπιχείρησιν 60 × 100 + 120 × 100 + + 45 × 175=25.875 δρχ.

Σχῆμα 9



Ἤδη διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῶν ἀναγκῶν τοῦ κέντρου Νο 4 ἀπομένει μόνον διαθέσιμος ἱκανότης τῆς ἐπιχειρήσεως Α=255 τόννοι. Ἐκ τούτων 195 τόννοι θὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὴν κάλυψιν τῶν ἀναγκῶν τοῦ κέντρου καὶ θὰ στοιχίσουν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 195 × 175=34.125 δρχ. καὶ τὸ ὑπόλοιπον 255—195=60 τόννοι θὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν κάλυψιν τῆς ἀργούσης—slack—ἱκανότητος.

Οὕτω ἡ πρώτη αὕτη λύσις, βασιζομένη εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῆς εὐθηνοτέρας μεταφορᾶς κατὰ τὰ ὁριζόντια δεδομένα τοῦ πίνακος 6 θὰ στοιχίσῃ εἰς τὴν προγραμματίζουσαν ἐπιχείρησιν 13.500+24.750+25.875+34.125=98.250δρχ. Ὁ πίναξ 6 μετατρέπεται ἤδη ὡς ἑξῆς :

ΠΙΝΑΞ 7

Κέντρα διανομῆς	Διαθέσιμοι Πηγαὶ — Κόστος				Ἀπαιτουμένη Ποσότης πρὸς μεταφορὰν (εἰς τόννους)
	Π	Α	Β	Γ	
1	Ἀρχ. 125	Ἀρχ. 150	Ἀρχ. 75 Ποσότης 180	Ἀρχ. 150	180
2	Ἀρχ. 75 Ποσότης 180	Ἀρχ. 150	Ἀρχ. 150	Ἀρχ. 125 Ποσότης 90	270
3	Ἀρχ. 125	Ἀρχ. 175 Ποσότης 45	Ἀρχ. 100 Ποσότης 60	Ἀρχ. 100 Ποσότης 120	225
4	Ἀρχ. 150	Ἀρχ. 175 Ποσότης 195	Ἀρχ. 125	Ἀρχ. 75	195
Ἀργοῦσα ἱκανότης	Ἀρχ. 0	Ἀρχ. 0 Ποσότης 60	Ἀρχ. 0	Ἀρχ. 0	60
Συνολικὴ ἱκανότης	180	300	240	210	930

Εἶναι ἐνδεχόμενον ἡ εὑρεθεῖσα ἀρχικὴ αὕτη λύσις νὰ ἱκανοποιῇ κατὰ τὸν καλύτερον τρόπον τὰ ἀπαιτούμενα τοῦ προβλήματος. Τὸ ἐνδεχόμενον ὅμως πρέπει νὰ μεταβληθῇ εἰς βεβαιότητα καὶ πρὸς τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἀναζητηθοῦν, εὑρεθοῦν καὶ ἀξιολογηθοῦν ὅλοι οἱ ἄλλοι συνδυασμοὶ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος ἢ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἷς τούτων ἐκφράζει μετὰ βεβαιότητος τὴν optimum λύσιν.

Ἕκαστον ἐκ τῶν 20 κεντρικῶν παραλληλογράμμων τοῦ πίνακος 7 ἐκφράζει τὸ κόστος μεταφορᾶς μιᾶς μονάδος (ἑνὸς τόννου) προϊόντων εἰς ἓν ὡρισμένον κέντρον διανομῆς ὑπὸ μιᾶς ὡρισμένης ἐπιχειρήσεως. Ὁ συνδυασμὸς τῶν παραλληλογράμμων (Β1, Π2, Γ2, Α3, Β3, Γ3, Α4 καὶ Α ἀργοῦσα ἱκανότης) π.χ. μιᾶς ἔδωσε τὴν εὑρεθεῖσαν ἀρχικὴν λύσιν. Ἤδη ἡ χρῆσις ἑνὸς ἢ περισσοτέρων παραλληλογράμμων (εἰσαγωγὴ μὴ χρησιμοποιηθέντων παραλληλογράμμων ἐντὸς τῆς λύσεως) θὰ ἐπιφέρῃ ὡρισμένας μεταβολὰς εἰς τὰ δεδομένα ὡρισμένων ἐκ τῶν ἤδη χρησιμοποιηθέντων παραλληλογράμμων τοῦ πίνακος 7 καὶ εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ἀρχικὴν λύσιν. Διὰ νὰ κατανοηθῇ τοῦτο ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μία μονὰς (1 τόννος) θὰ μεταφερθῇ εἰς τὸ κέντρον Νο 2 διὰ τῶν μεταφορικῶν μέσων τῆς ἐπιχειρήσεως Β (παραλληλόγραμμον Β2). Τοῦτο σημαίνει ὅτι μία μονὰς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου π.χ. Γ2 (ὁπότε ἡ ποσότης ἐν προκειμένῳ θὰ ἀνέλθῃ εἰς 89 τόννους ἀντὶ 90) καὶ νὰ προστεθῇ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον Β2 καὶ ἑτέρα μονὰς νὰ ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου π.χ. Β3 καὶ νὰ προστεθῇ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον Γ3 (οὕτως ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται οἱ περιορισμοὶ τοῦ προβλήματος, κατὰ τοὺς ὁποίους ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν σειρῶν 2 καὶ 3 πρέπει νὰ εἶναι ἀντιστοίχως 270 καὶ 225, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν στηλῶν Β καὶ Γ νὰ εἶναι ἀντιστοίχως 240 καὶ 210). Οὕτω ἐν προκειμένῳ ἡ μεταχίνησις μιᾶς μονάδος εἰς τὸ Β2 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ2, Β3, Γ3. Ὁ νέος συνδυασμὸς (προκύψας ἐκ πρώτης ἀναθεωρήσεως τοῦ πίνακος 7 δι' ὑποκαταστάσεως μιᾶς μονάδος τοῦ Γ2 διὰ μιᾶς μονάδος τοῦ Β2) εἶναι ἤδη ὁ ἑξῆς : Β1= =180 τόννοι, Π2+Β2+Γ2=180+1+89=270 τόννοι, Α3+Β3+Γ3=45+59+ +121 = 225 τόννοι, Α4=195 τόννοι, Α ἀργοῦσα ἱκανότης=60 τόννοι καὶ τὸ κόστος τούτου εἶναι 180×75+180×75+1×150+89×125+45×175+59× ×100+121×100+195×175+0×60=98.275 δρχ., ὅπερ σημαίνει ὅτι διὰ κάθε μονάδα, ἡ ὁποία μεταχινεῖται πρὸς τὸ Β2 κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, αὐξάνεται τὸ συνολικὸν κόστος κατὰ 25 δρχ. Ἐργαζόμενοι καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ διὰ τὰ λοιπὰ μὴ χρησιμοποιηθέντα παραλληλόγραμμα τοῦ πίνακος 7 εὑρίσκομεν ὅτι : μία μονὰς μεταφερομένη εἰς τὸ παραλληλόγραμμον

Π1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Β3, Γ3, Γ2, Π2[9], μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 100 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π1[10],

Α1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Α3, Β3, μὲ συνέπειαν οὐδεμίαν μεταβολὴν τοῦ κόστους κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Α1[10]

Γ1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Β3, Γ3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ1[10],

Α2 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ2, Γ3, Α3, μὲ συνέπειαν μείωσιν τοῦ κόστους κατὰ 50 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Α2[10],

Π3 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ3, Γ2, Π2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π3[10],

Π4 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α4, Π2, Γ2, Γ3, Α3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 100 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π4[10],

Β4 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α4, Β3, Α3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β4[10],

Γ4 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α4, Α3, Γ3 μὲ συνέπειαν μείωσιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ4[10],

Π ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Π2, Γ2, Γ3, Α3 Α ἀργοῦσα ἱκανότης, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 125 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π ἀργοῦσα ἱκανότης[10],

9. Ἐφ' ὅσον ἀντικείμενον τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κόστους, συμφέρει τὴν ἑκάστοτε μεταχινουμένην ποσότητα (ἐν προκειμένῳ 1 τόννον) νὰ μεταχινοῦμεν ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα ἐμφανίζουν τὸ ὑψηλότερον κόστος.

10. Ἐννοεῖται βεβαίως εἰς ὅλας τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις τὸ κόστος τῆς ἀρχικῆς λύσεως

Β ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης, Α3, Β3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β ἀργοῦσα ἱκανότης.

Γ ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης, Α3, Γ3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ ἀργοῦσα ἱκανότης.

Ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως ταύτης καθίσταται φανερὸν ὅτι ἡ ἀρχικὴ λύσις τοῦ προβλήματος δὲν εἶναι ἡ εὐνοϊκωτέρα λύσις, παρ' ὅτι ἐκ πρώτης ὄψεως ἐφαίνετο τὸ ἀντίθετον. Πράγματι ἐκ τῆς ἐπιθεωρήσεως τοῦ πίνακος 7 συνάγεται ὅτι ὑπάρχουν δύο ἄλλαι λύσεις εὐνοϊκώτεραι ταύτης, διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν παραλληλογράμμων Α2 καὶ Γ4. Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ πρώτου τούτων (γενομένη διὰ μεταφορᾶς μονάδων ἐκ τοῦ Γ2 πρὸς τὸ Α2 καὶ ἐκ τοῦ Α3 πρὸς τὸ Γ3) θὰ ἐπιφέρῃ συνολικὴν μείωσιν τοῦ κόστους τῆς ἀρχικῆς λύσεως κατὰ 45 × 50=2.250 δρχ. (ἔνθα 45 εἶναι ἐν προκειμένῳ ὁ τεχνικὸς περιορισμὸς τοῦ προβλήματος, δηλ. τὸ μάξιμουμ τῆς ποσότητος, ἡ ὁποία δύναται νὰ μεταφερθῇ ἐκ τοῦ Α3 εἰς τὸ Γ3). Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ παραλληλογράμμου Γ4 (μεταφορὰ μονάδων ἐκ τοῦ Α4 πρὸς τὸ Γ4 καὶ ἐκ τοῦ Γ3 πρὸς τὸ Α3) θὰ ἐπιφέρῃ συνολικὴν μείωσιν τοῦ κόστους τῆς ἀρχικῆς λύσεως κατὰ 120 × 25=3.000 δρχ. ἔνθα 120 εἶναι ἐν προκειμένῳ ὁ τεχνικὸς περιορισμὸς τοῦ προβλήματος, δηλ. τὸ μάξιμουμ τῆς ποσότητος, ἡ ὁποία δύναται νὰ μεταφερθῇ ἐκ τοῦ Γ3 εἰς τὸ Α3). Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναθεωρήσεως τοῦ πίνακος 7 προκύπτουν οἱ ἀκόλουθοι πίνακες (πίνακες 8 καὶ 9), ἀντιπροσωπεύοντες τὰς λύσεις ἐκ τῆς μὴ χρησιμοποιήσεως τῶν παραλληλογράμμων Α2 καὶ Γ4.

Τὸ κόστος μεταφορᾶς, τὸ ὁποῖον ἀντιπροσωπεύει ὁ Πίναξ 8 εἶναι

180×75+180×75+45×150+45×125+60×100+165×100+195×175+60×0=96.000 δρχ. (κόστος ἀρχικῆς λύσεως 98.250 δρχ.), τὸ δὲ κόστος μεταφορᾶς τὸ ὁποῖον ἀντιπροσωπεύει ὁ Πίναξ 9 εἶναι

180×75+180×75+90×125+165×175+60×100+75×175+120×75+ +60×0=95.250 δρχ. (κόστος ἀρχικῆς λύσεως=98.250 δρχ.).

Ἐπαναλαμβάνοντες τὴν διαδικασίαν, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν πρὸς ἀξιολόγησιν τῶν μὴ χρησιμοποιηθέντων παραλληλογράμμων τοῦ Πίνακος 7 διὰ τοὺς Πίνακας 8 καὶ 9 ἔχομεν :

Πίναξ 8:

Π1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Γ3, Β3. Π2. Γ2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 100 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π1,

Α1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Γ3, Β3, Α2, Γ2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 50 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Α1,

Γ1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Β3, Γ3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ1, Β2 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ2, Β3, Γ3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β2,

Π3 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ3, Γ2, Π2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π3,

Α3 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ3, Γ2, Α2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 50 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Α3,

Π4 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α4, Α2, Π2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 50 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π4.

ΠΙΝΑΞ 8

(Χρῆσις παραλληλογράμμου Α2 τοῦ πίνακος 7)

Κέντρα διανομῆς	Διαθέσιμοι Πηγαὶ-Κόστος				Ἀπαιτουμένη ποσότης πρὸς μεταφορὰν (εἰς τόννους)
	Π	Α	Β	Γ	
1	Δρχ. 125	Δρχ. 150	Δρχ. 75 Ποσότης 180	Δρχ. 150	180
2	Δρχ. 75 Ποσότης 180	Δρχ. 150 Ποσότης 45	Δρχ. 150	Δρχ. 125 Ποσότης 45	270
3	Δρχ. 125	Δρχ. 175	Δρχ. 100 Ποσότης 60	Δρχ. 100 Ποσότης 165	225
4	Δρχ. 150	Δρχ. 175 Ποσότης 195	Δρχ. 125	Δρχ. 75	195
Ἀργοῦσα ἱκανότης	Δρχ. 0	Δρχ. 0 Ποσότης 60	Δρχ. 0	Δρχ. 0	60
Συνολικὴ ἱκανότης	180	300	240	210	930

Β4, προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α4, Β3, Γ3, Γ2, Α2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ., κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β4,

Γ4 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α4, Γ2, Α2, μὲ συνέπειαν μείωσιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ4,

Π ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης, Π2, Α2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π ἀργοῦσα ἱκανότης,

Β ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης, Β3, Γ3 Γ2, Α2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β ἀργοῦσα ἱκανότης.

Γ ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης, Γ2, Α2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ ἀργοῦσα ἱκανότης.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι ἡ χρησιμοποίησις (εἰσαγωγὴ ἐντὸς τῆς ἀναθεωρηθείσης ἀρχικῆς λύσεως) τοῦ παραλληλογράμμου Γ4 (μεταφορὰ μονάδων ἐκ τοῦ Α4 εἰς τὸ Γ4 καὶ ἐκ τοῦ Γ2 εἰς τὸ Α2) θὰ ἐπιφέρῃ συνολικὴν μείωσιν τοῦ κόστους τοῦ πίνακος 8 κατὰ 45 × 75=3.375 δρχ. καὶ τοῦ κόστους τῆς ἀρχικῆς λύσεως (πίναξ 7) κατὰ 2.250+3.375=5.625 δρχ. Τὸ συνολικὸν κόστος μεταφορᾶς θὰ ἀνέλθῃ οὕτω εἰς

180×75+180×75+90×150+60×100+165×100+150×175+45 × 75+ +60×0=92.625 δρχ. (ἔναντι 98.250 τοῦ πίνακος 7 καὶ 96.000 τοῦ πίνακος 8).

ΠΙΝΑΞ 9

(Χρῆσις παραλληλογράμμου Γ4 τοῦ πίνακος 7).

Κέντρα Διανομῆς	Διαθέσιμοι Πηγαὶ - Κόστος				'Απαιτούμενη ποσότης πρὸς μεταφορὰν (εἰς τόννους)
	Π	Α	Β	Γ	
1	Δρχ. 125	Δρχ. 150	Δρχ. 75 Ποσότης 180	Δρχ. 150	180
2	Δρχ. 75 Ποσότης 180	Δρχ. 150	Δρχ. 160	Δρχ. 125 Ποσότης 90	270
3	Δρχ. 125	Δρχ. 175 Ποσότης 165	Δρχ. 100 Ποσότης 60	Δρχ. 100	225
4	Δρχ. 150	Δρχ. 175 Ποσότης 75	Δρχ. 125	Δρχ. 75 Ποσότης 120	195
'Αργοῦσα ἱκανότης	Δρχ. 0	Δρχ. 0 Ποσότης 60	Δρχ. 0	Δρχ. 0	60
Συνολικὴ ἱκανότης	180	300	240	210	930

Πίναξ 9:

Π1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Π2, Γ2, Γ3, Β3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 100 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π1, Α1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Β3, Α3, μὲ συνέπειαν ἀμετάβλητον κόστος κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Α1,

Γ1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Γ4, Α4, Α3, Β3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 100 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ1,

Α2 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ2, Α4, Γ4, μὲ συνέπειαν μείωσιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Α2,

Β2 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ2, Β3, Α3, Α4, Γ4, μὲ συνέπειαν ἀμετάβλητον κόστος κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β2,

Π3 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α3, Π2, Γ2, Γ4, Α4, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 100 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π3,

Γ3 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α3, Γ4, Α4, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ., κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ3,

Π4 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α4, Α2, Γ2, Γ4, Α4, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 125 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π4,

Β4 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α4, Β3, Α3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β4,

Π ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης Π2, Γ2, Γ4, Α4, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 150 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π ἀργοῦσα ἱκανότης,

Β ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης, Β3, Α3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β ἀργοῦσα ἱκανότης,

Γ ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης, Γ4, Α4, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 100 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ ἀργοῦσα ἱκανότης.

Συνάγεται ὅθεν ὅτι ἡ εἰσαγωγὴ ἐντὸς τῆς ἀναθεωρηθείσης ἀρχικῆς λύσεως τοῦ παραλληλογράμμου Α2 (μεταφορὰ μονάδων ἐκ τοῦ Γ2 εἰς τὸ Α2 καὶ ἐκ τοῦ Α4 εἰς τὸ Γ4) θὰ ἐπιφέρῃ συνολικὴν μείωσιν τοῦ κόστους τοῦ Πίνακος 9 κατὰ $75 \times 75 = 5.625$ δρχ. καὶ τοῦ κόστους τῆς ἀρχικῆς λύσεως (Πίναξ 7) κατὰ $5.625 + 3.000 = 8.625$ δρχ. Τὸ συνολικὸν κόστος μεταφορᾶς θὰ ἀνέλθῃ οὕτω εἰς

$$180 \times 75 + 180 \times 75 + 75 \times 150 + 15 \times 125 + 165 \times 175 + 60 \times 100 + \\ + 195 \times 75 + 60 \times 0 = \\ = 89.625$$ δρχ. (ἔναντι 98.250 τοῦ πίνακος 7 καὶ 95.250 τοῦ πίνακος 9).

Ἡ διαδικασία αὕτη ἐπαναλαμβάνεται μέχρις ὅτου εὑρεθῇ πίναξ τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ μὴ χρησιμοποιηθέντα παραλληλόγραμμα δίδουν ἀρνητικὰς λύσεις (εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ προβλήματός μας π.χ., πρέπει τὰ χρησιμοποιηθέντα παραλληλόγραμμα τοῦ πίνακος νὰ δίδουν τὴν εὐνοϊκωτέραν λύσιν, δηλ. τὸ κόστος των νὰ εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ κόστος οἱουδήποτε μὴ χρησιμοποιηθέντος παραλληλογράμμου ἢ τοὐλάχιστον ἴσον). Τὰ ἀνωτέρω δεδομένα, τὰ ὁποῖα προέκυψαν ἐκ τῆς ἀναθεωρήσεως τῶν πινάκων 8 καὶ 9 ἀπεικονίζονται εἰς τοὺς ἀκολούθους πίνακας (πίνακες 10 καὶ 11):

ΠΙΝΑΞ 10

(Χρῆσις παραλληλογράμμου Γ4 τοῦ πίνακος 8)

Κέντρα Διανομῆς	Διαθέσιμοι Πηγαὶ-Κόστος				Ἀπαιτουμένη ποσότης πρὸς μεταφορὰν (εἰς τόνους)
	Π	Α	Β	Γ	
1	Δρχ. 125	Δρχ. 150	Δρχ. 75 Ποσότης 180	Δρχ. 150	180
2	Δρχ. 75 Ποσότης 180	Δρχ. 150 Ποσότης 90	Δρχ. 150	Δρχ. 125	270
3	Δρχ. 125	Δρχ. 175	Δρχ. 100 Ποσότης 60	Δρχ. 100 Ποσότης 165	225
4	Δρχ. 150	Δρχ. 175 Ποσότης 150	Δρχ. 125	Δρχ. 75 Ποσότης 45	195
Ἀργοῦσα ἱκανότης	Δρχ. 0	Δρχ. 0 Ποσότης 60	Δρχ. 0	Δρχ. 0	60
Συνολικὴ ἱκανότης	180	300	240	210	930

Ἀξιολογοῦμεν ἤδη, κατὰ τὰ γνωστά, τὰ μὴ χρησιμοποιηθέντα παραλληλόγραμμα τῶν πινάκων τούτων:

Πίναξ 10:

Π1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Π2, Α2, Α4, Γ4, Γ3, Β3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π1,

Α1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Α4, Γ4, Γ3, Β3, μὲ συνέπειαν μείωσιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Α1,

Β2 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α2, Β3, Γ3, Γ4, Α4, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 100 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β2,

Γ2 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α2, Γ4, Α4, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ2,

Π3 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ3, Π2, Α2, Α4, Γ4 (ἢ κατ' ἄλλην διαδικασίαν εἰς τὰ B3, Π2, Α2, Α4, Γ4, Γ3, Β3) μὲ συνέπειαν ἀμετάβλητον κόστος κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π3,

Α3 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ3, Α4, Γ4 (ἢ κατ' ἄλλην διαδικασίαν εἰς τὰ Β3, Α4, Γ4, Γ3, Β3) μὲ συνέπειαν μείωσιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Α3.

Π4 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α4, Π2, Α2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 50 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π4.

ΠΙΝΑΞ 11

(Χρῆσις παραλληλογράμμου Α2 τοῦ πίνακος 9)

Κέντρα Διανομῆς	Διαθέσιμοι Πηγαὶ - Κόστος				Ἀπαιτουμένη ποσότης πρὸς μεταφορὰν (εἰς τόννους)
	Π	Α	Β	Γ	
1	Δρχ. 125	Δρχ. 150	Δρχ. 75 Ποσότης 180	Δρχ. 150	180
2	Δρχ. 75 Ποσότης 180	Δρχ. 150 Ποσότης 75	Δρχ. 150	Δρχ. 125 Ποσότης 15	270
3	Δρχ. 125	Δρχ. 175 Ποσότης 165	Δρχ. 100 Ποσότης 60	Δρχ. 100	225
4	Δρχ. 150	Δρχ. 175	Δρχ. 125	Δρχ. 75 Ποσότης 195	195
Ἀργοῦσα ἱκανότης	Δρχ. 0	Δρχ. 0 Ποσότης 60	Δρχ. 0	Δρχ. 0	60
Συνολικὴ ἱκανότης	180	300	240	210	930

Β4 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α4, Β3, Γ3, Γ4, Α4, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 50 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β4,

Π ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης, Π2, Α2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π ἀργοῦσα ἱκανότης,

Β ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης Β3, Γ3, Γ4, Α4, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 100 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β ἀργοῦσα ἱκανότης,

Γ ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης

Γ4, Α4, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 100 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ ἀργοῦσα ἱκανότης.

Ἐνταῦθα ἡ εἰσαγωγὴ ἐντὸς τῆς λύσεως τοῦ παραλληλογράμμου Α1 θὰ προκαλέσῃ συνολικὴν μείωσιν τοῦ κόστους τοῦ πίνακος 10 κατὰ 150×25= =3.750 δρχ. (ἔνθα 150 εἶναι τὸ maximum τῆς ποσότητος ἡ ὁποία δύναται νὰ μεταφερθῇ ἐκ τοῦ Β1 πρὸς τὸ Α1, ἐκ τοῦ Α4 πρὸς τὸ Γ4 καὶ ἐκ τοῦ Γ3 πρὸς τὸ Β3). Τὸ συνολικὸν κόστος μεταφορᾶς θὰ εἶναι :
150 × 150 + 30 × 75 + 180 × 75 + 90 × 150 + 210×100 + 15×100 +195× ×75+60×0=88.875 (ἔναντι 92.625 τοῦ πίνακος 10, 96.000 τοῦ πίνακος 8 καὶ 98.250 τοῦ πίνακος 7—ἀρχικὴ λύσις, ἐξ ἧς διαφέρει ἡ παροῦσα κατὰ 9.375 δρχ.). Ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὴν λύσιν τοῦ παραλληλογράμμου Α3 θὰ προκαλέσῃ : α) συνολικὴν μείωσιν τοῦ κόστους κατὰ 150×25=3.750 δρχ. (ἔνθα 150 εἶναι τὸ maximum τῆς ποσότητος ἡ ὁποία δύναται νὰ μεταφερθῇ ἐκ τοῦ Γ3 εἰς τὸ Α3 καὶ ἐκ τοῦ Α4 εἰς τὸ Γ4), λύσις κατὰ τὸ ἀποτέλεσμα ὁμοία τῆς προηγουμένης, β) συνολικὴν μείωσιν τοῦ κόστους κατὰ 150×25=3.750 δρχ. (ἔνθα 150 εἶναι τὸ maximum τῆς ποσότητος ἡ ὁποία δύναται νὰ μεταφερθῇ διὰ τῆς ὁδοῦ Α4 πρὸς Γ4, Γ3 πρὸς Β3, Β3 πρὸς Α3), λύσις καὶ αὕτη ὁμοία κατὰ τὸ ἀποτέλεσμα τῶν προηγουμένων.

Πίναξ 11 :

Π1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1. Π2, Α2, Α3, Β3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 50 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π1,

Α1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Α3, Β3. μὲ συνέπειαν ἀμετάβλητον κόστος κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Α1,

Γ1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Γ2. Α2. Α3, Β3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ1,

Β2 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α2. Β3, Α3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β2,

Π3 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α3. Π2, Α2 μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π3,

Γ3 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α3, Γ2, Α2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 100 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ3,

Π4 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ4. Π2. Γ2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 125 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π4,

Α4 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ4, Α2. Γ2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Α4.

Β4 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ4, Β3, Α3, Α2, Γ2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 100 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Α4.

Π ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης Π2, Α2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π ἀργοῦσα ἱκανότης,

Β ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης Β3, Α3. μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β ἀργοῦσα ἱκανότης.

Γ ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης, Γ2, Α2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ ἀργοῦσα ἱκανότης,

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι οὐδὲν ἐκ τῶν μὴ χρησιμοποιηθέντων παραλληλογράμμων τοῦ πίνακος 11 παρέχει εὐνοϊκωτέραν λύσιν ἐκείνης τοῦ πίνακος. Δεδομένου δὲ ὅτι ἡ λύσις αὕτη (89.625 δρχ.) εἶναι δυσμενεστέρα τῶν τριῶν ὁμοίων λύσεων, αἱ ὁποῖαι προέκυψαν ἐκ τῆς ἀναθεωρήσεως τοῦ πίνακος 10, ἐγκαταλείπεται διὰ νὰ χρησιμοποιηθῇ μία τῶν λύσεων τούτων (88.875), ἀδιαφόρως ποία, ἀφοῦ καὶ αἱ τρεῖς εἶναι ἴσαι. Οὕτω χρησιμοποιοῦντες ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον Α3 διὰ τῆς διαδικασίας Γ3—Α3, Α4—Γ4. καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

ΠΙΝΑΞ 12

Κέντρα διανομῆς	Διαθέσιμοι Πηγαὶ-Κόστος				Ἀπαιτουμένη ποσότης πρὸς μεταφορὰν (εἰς τόννους)
	Π	Α	Β	Γ	
1	Δρχ. 125	Δρχ. 150	Δρχ. 75 Ποσότης 180	Δρχ. 150	180
2	Δρχ. 75 Ποσότης 180	Δρχ. 150 Ποσότης 90	Δρχ. 150	Δρχ. 125	270
3	Δρχ. 125	Δρχ. 175 Ποσότης 150	Δρχ. 100 Ποσότης 60	Δρχ. 100 Ποσότης 15	225
4	Δρχ. 150	Δρχ. 175	Δρχ. 125	Δρχ. 75 Ποσότης 195	195
Ἀργοῦσα ἱκανότης	Δρχ. 0	Δρχ. 0 Ποσότης 60	Δρχ. 0	Δρχ. 0	60
Συνολικὴ ἱκανότης	180	300	240	210	930

Ἐξίσωσις (κόστος) τοῦ πίνακος :

$180\times75+180\times75+90\times150+150\times175+60\times100+15\times100+195\times$ $\times75+60\times0=88.875$.

Ἀξιολογοῦντες τὰ μὴ χρησιμοποιηθέντα παραλληλόγραμμα ἔχομεν:

Π1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Π2, Α2, Α3, Β3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 50 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π1.

Α1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Α3, Β3, μὲ συνέπειαν ἀμετάβλητον κόστος κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Α1,

Γ1 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Β1, Γ3, Β3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ1,

Β2 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α2, Β3, Α3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β2,

Γ2 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α2, Γ3, Α3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 50 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ2,

Π3 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α3, Π2, Α2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π3,

Π4 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ4, Π2, Α2, Α3, Γ3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π4,

Α4 προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ4, Α3, Γ3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 25 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Α4,

Β4, προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Γ4, Β3, Γ3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 50 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β4,

Π ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης, Π2, Α2, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Π ἀργοῦσα ἱκανότης,

Β ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης Β3, Α3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Β ἀργοῦσα ἱκανότης.

Γ ἀργοῦσα ἱκανότης προκαλεῖ μεταβολὰς εἰς τὰ Α ἀργοῦσα ἱκανότης, Γ3, Α3, μὲ συνέπειαν αὔξησιν τοῦ κόστους κατὰ 75 δρχ. κατὰ τόννον μεταφερόμενον εἰς τὸ Γ ἀργοῦσα ἱκανότης.

Ὡς συμπέρασμα προκύπτει ὅτι οὐδὲν ἐκ τῶν μὴ χρησιμοποιηθέντων παραλληλογράμμων τοῦ πίνακος 12 παρέχει εὐνοϊκωτέραν λύσιν ἐκείνης τοῦ πίνακος. Ἡ optimum συνεπῶς λύσις, τὸ ἐλάχιστον δηλ. κόστος μεταφορᾶς, εἶναι 88.875 δρχ., περίπου 10 ο/ο μικρότερον ἐκείνου, τὸ ὁποῖον ἐκ πρώτης ὄψεως ἐφαίνετο ὡς τὸ εὐνοϊκώτερον κόστος (ἀρχικὴ λύσις=98.250 δρχ.). Ἡ εὕρεσις τῆς optimum ταύτης λύσεως ἄνευ τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ θὰ καθίστατο σχεδὸν ἀδύνατος, διότι ὁ ἐρευνητὴς θὰ ἔδει νὰ διερευνήσῃ τὴν κοστολογικὴν συμπεριφορὰν ἑνὸς πολὺ μεγάλου πλήθους συνδυασμῶν, τοὺς ὁποίους ἐπίσης θὰ ἦτο ἐξαιρετικῶς δύσκολον νὰ εὕρῃ. Διὰ μίαν ἀκόμη φορὰν ἀποδεικνύεται ἡ σημασία τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ὄχι μόνον ὡς μέσου προγραμματισμοῦ καὶ βελτιώσεως τῆς παραγωγικότητος, ἀλλ' ἐξ ἴσου ὡς ὀργάνου τῆς διοικήσεως (management tool). Ὁ τελικὸς πίναξ 12 παρέχει σαφῆ εἰκόνα τῶν στοιχείων τοῦ προγράμματος, τὸ ὁποῖον ἐν προκειμένῳ θὰ καταρτίσῃ ἡ ἐπιχείρησις Π :

1) ποσότης 180 τόννων θὰ μεταφερθῇ εἰς τὸ κέντρον Νο 1 διὰ τῶν μεταφορικῶν μέσων τῆς ἐπιχειρήσεως Β, μὲ κόστος 180×75=13.500 δρχ.,

2) ποσότης 180 καὶ 90 τόννων θὰ μεταφερθῇ εἰς τὸ κέντρον Νο 2 διὰ τῶν μεταφορικῶν μέσων τῶν ἐπιχειρήσεων Π καὶ Α, μὲ κόστος 180×75+90× ×150=27.000 δρχ.,

3) ποσότης 150, 60 καὶ 15 τόννων θὰ μεταφερθῇ εἰς τὸ κέντρον Νο 3 διὰ τῶν μεταφορικῶν μέσων τῶν ἐπιχειρήσεων Α, Β, Γ, μὲ κόστος 150Χ175+ +60×100+15×100=33.750 δρχ.,

4) ποσότης 195 τόννων θὰ μεταφερθῇ εἰς τὸ κέντρον Νο 4 διὰ τῶν μεταφορικῶν μέσων τῆς ἐπιχειρήσεως Γ, μὲ κόστος 195×75=14.625 δρχ.

Τοῦτο εἶναι τὸ «ἄριστον» (optimum) πρόγραμμα.

9. Ἡ μέθοδος προτιμήσεως κέρδους (profit preference method) τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.

Ἡ μέθοδος αὕτη ἀποτελεῖ μίαν ὑποπερίπτωσιν τῆς simplex μεθόδου τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Ὡρισμένα προβλήματα, ἐμπίπτοντα εἰς τὴν σφαῖραν τῆς simplex μεθόδου, παρουσιάζουν πολλάκις τὴν ἑξῆς ἰδιομορφίαν : ἢ ἀπαιτεῖται εἰδικὴ διαδικασία, διάφορος ἐκείνης τῆς simplex μεθόδου, διὰ τὴν τεχνικοοικονομικὴν παρουσίασιν τοῦ προβλήματος καὶ τὴν κατάρτισιν τῶν σχετικῶν ἐξισώσεων, ἢ ἡ ἐν προκειμένῳ διαδικασία τῆς simplex μεθόδου δύναται νὰ συντομευθῇ (ἁπλοποιηθῇ). Ἡ περαιτέρω διαδικασία ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος διενεργεῖται κατὰ τοὺς κανόνας τῆς simplex μεθόδου.

Ἡ συνηθεστέρα ἐν προκειμένῳ περίπτωσις ἀφορᾷ προβλήματα «ἐπιλογῆς» προϊόντων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ κέρδους, τὸ ὁποῖον ἕκαστον τούτων προσκομίζει εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Ἡ μέθοδος δύναται νὰ μᾶς ὁδηγήσῃ εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς εἰς τὰ προϊόντα, τῶν ὁποίων ἡ παραγωγὴ πρέπει νὰ ἀποκλεισθῇ καὶ εἰς ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ἡ παραγωγὴ πρέπει νὰ σχεδιασθῇ ὥστε νὰ ἐπιτευχθῇ ὁ μέγιστος δυνατὸς ὄγκος ταύτης. Ἀπὸ τοῦ σταδίου τούτου καὶ πέραν χρησιμοποιοῦμεν τὴν simplex μέθοδον διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τελικῆς optimum λύσεως (ἤ, ἐνδεχομένως, ἐὰν αἱ ἀπομένουσαι μεταβληταὶ εἶναι δύο, τὴν γραφικὴν μέθοδον).

Τὰ προϊόντα, τῶν ὁποίων ἡ παραγωγὴ πρέπει νὰ ἀποκλεισθῇ (ὡς σχετικῶς ἀσύμφορος) καὶ ἐκεῖνα τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μεγιστοποιηθῇ (ὡς σχετικῶς ἢ πλέον σύμφορος) θὰ εὑρεθοῦν διὰ συγκρίσεως τῆς «δυνατότητος κέρδους» (profit potential), τὴν ὁποίαν παρουσιάζει ἕκαστον προϊόν. Προκειμένου περὶ προγραμματισμοῦ τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας τῶν βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεων, ἡ δυνατότης αὐτὴ κέρδους δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\Delta = \frac{I \times K}{T}$$

ἔνθα Δ=δυνατότης κέρδους,

I= διαθέσιμος παραγωγικὴ ἱκανότης (εἰς ὥρας λειτουργίας μηχανημάτων, ὄγκου παραγωγῆς κλπ.),

K=προϋπολογιζόμενον κέρδος κατὰ μονάδα προϊόντος,

T=προϋπολογιζομένη παραγωγικὴ ἱκανότης, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος προϊόντος.

Λόγῳ τῆς στενῆς σχέσεως καὶ ὁμοιότητος τῆς μεθόδου ταύτης πρὸς τὴν simplex μέθοδον, αὕτη δὲν χρήζει ἰδιαιτέρας ἀναπτύξεως.

Ἐπίλογος.

Τὸ καπιταλιστικὸν σύστημα τῆς ἐποχῆς μας διαφέρει ἀρκετὰ ἐκείνου τοῦ 19ου καὶ τῶν πρώτων δεκαετηρίδων τοῦ 20οῦ αἰῶνος. Αἱ ἰδιωτικαὶ ἐπιχειρήσεις δὲν εἶναι πλέον τόσον ἰδιωτικαί, ἔγινε ἀντιληπτὸν καὶ παραδεκτὸν ὅτι αὗται ἀσκοῦν κοινωνικὸν λειτούργημα καὶ ὑπέχουν κοινωνικὰς ὑποχρεώσεις. Ὁ ἐλεύθερος ἀνταγωνισμὸς δὲν εἶναι τόσον ἐλεύθερος, κρατικαὶ ρυθμίσεις ἐν προκειμένῳ ἔρχονται ἡ μία κατόπιν τῆς ἄλλης. Ἡ οἰκονομικὴ ἐλευθερία (ἐλευθερία παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως) περιορίζεται πρὸς τὸ συμφέρον τῆς ὁλότητος. Καὶ γενικώτερον ὅλα τὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ laissez-faire, laissez-passer ὑπέστησαν σημαντικὰς ἀλλοιώσεις, αἱ ὁποῖαι τείνουν νὰ μεταβάλλουν τὸν ὀρθόδοξον καπιταλισμὸν εἰς ἓν νέον σύστημα, ἄγνωστον ἐν πολλοῖς εἰς τὸ παρελθόν.

Παρὰ ταῦτα τὴν βάσιν τοῦ συστήματος ἐξακολουθεῖ νὰ ἀποτελῇ ἡ ἰδιωτικὴ ἐπιχείρησις (free enterprise system), ὑπὸ τὴν νέαν της βεβαίως μορφήν. Ἀλλὰ ποία εἶναι ἡ μορφὴ αὐτή; Παρατηροῦμεν κατ' ἀρχὴ μίαν σημαντικὴν ἀλλαγὴν εἰς τὰ ἀντικείμενα τῆς ἐπιχειρήσεως. Τὸ κέρδος ἔπαυσε νὰ εἶναι ὁ μόνος σκοπὸς καὶ πάντοτε συνδυάζεται μὲ τὴν κοινωφελιμότητα. Ἡ ἀξιοποίησις τῶν ἐθνικῶν πηγῶν, ἡ ἔρευνα καὶ ἡ παραγωγὴ νέων προϊόντων πρὸς κάλυψιν τῶν συνεχῶς αὐξανομένων ἀναγκῶν τῆς κοινότητος, ἡ μείωσις τοῦ κόστους—ἡ μεγαλυτέρα κατὰ τὸ δυνατὸν συνεισφορὰ εἰς τὴν ἐθνικὴν εὐημερίαν, εἶναι τὰ νέα ἀντικείμενα τῆς συγχρόνου ἐπιχειρήσεως.

Τὸ δεύτερον γεγονὸς εἶναι ἡ ἀλλαγὴ τῶν μεθόδων ἐπιτεύξεως αὐτῶν τῶν ἀντικειμένων. Ἀνεπτύχθη ἐν πρώτοις ἓν πνεῦμα συνεργασίας καὶ ἐμπιστοσύνης μεταξὺ ἐπιχειρήσεων ἀφ' ἑνὸς καὶ κοινότητος καὶ κυβερνήσεως ἀφ' ἑτέρου. Τὸ πνεῦμα τοῦτο τείνει εἰς τὴν θέσπισιν κοινῶν σκοπῶν καὶ εἰς τὴν συνεργασίαν πρὸς ἐπίτευξιν τῶν σκοπῶν αὐτῶν. Εἰς τὰς δυτικὰς χώρας καὶ ἰδίως εἰς τὰς Η.Π.Α. πληθύνονται καθημερινῶς οἱ ὀργανισμοί, τοὺς ὁποίους ἱδρύουν αἱ ἐπιχειρήσεις πρὸς παροχὴν βοηθείας εἰς τὴν κοινότητα καὶ τὴν Κυβέρνησιν ("Ιδρυμα Rockefeller, "Ιδρυμα Ford, "Ιδρυμα Westinghouse κλπ.) καὶ ἐκεῖνοι τοὺς ὁποίους ἱδρύει ἡ Κυβέρνησις πρὸς παροχὴν βοηθείας εἰς τὰς ἐπιχειρήσεις (Small Business Administration, Business Counsil κλπ.). Μετεβλήθη ἐπίσης ἡ σύνθεσις τῆς ἰδιοκτησίας τοῦ ἐπιχειρηματικοῦ κεφαλαίου, μὲ συνεχῶς διευρυνομένην συμμετοχὴν εἰς αὐτὸ τῶν ἀπασχολουμένων εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Μετεβλήθη τὸ σύστημα διοικήσεως τῶν ἐπιχειρήσεων, μὲ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ ἐπιχειρηματίου ὑπὸ τοῦ ἐπαγγελματίου διευθυντοῦ (professional manager). Μετεβλήθη τὸ μέγεθος τῶν ἐπιχειρήσεων καὶ φυσικὰ αἱ τεχνικαὶ τῆς παραγωγῆς, τῆς διακομιδῆς καὶ τῆς χρηματοδοτήσεως.

Τὰ νέα ταῦτα οἰκονομικὰ κύτταρα, αἱ νέαι ἐπιχειρήσεις, μὲ τὰς ἐξειλιγμένας ἀνθρωπίνους σχέσεις, μὲ τὴν νέαν κοινωνικὴν φιλοσοφίαν, ἀποτελοῦν τὴν πραγματικὴν δύναμιν τοῦ συγχρόνου καπιταλισμοῦ καὶ τὴν ὑπερηφάνειαν τοῦ ἔθνους των. Εἶναι αἱ παραγωγικαὶ μονάδες, ἐπὶ τῶν ὁποίων βασίζεται ἡ περαιτέρω οἰκονομικὴ ἀνάπτυξις, ἡ ἀξιοποίησις ἀργούντων πλουτοπαραγωγικῶν πόρων, τὸ ὑψηλότερον ἐπίπεδον καὶ ἡ καλυτέρα διανομὴ τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος.

Αἱ νέαι ὅμως συνθῆκαι ἐδημιούργησαν βαρείας ὑποχρεώσεις διὰ τὴν ἀναμορφωθεῖσαν διοίκησιν τῶν ἐπιχειρήσεων. Ἡ πρώτη τούτων εἶναι ἡ συνεχὴς βελτίωσις τῆς παραγωγικότητος, ὅπερ σημαίνει συνεχῆ βελτίωσιν τῶν μεθόδων διοικήσεως.

Ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου ἡ ἐξέλιξις κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη ὑπῆρξεν ἀληθῶς ραγδαία, τόσον, ὥστε νὰ ὑποστηρίζεται μετὰ πειστικότητος ὅτι ἡ ἐποχή μας ἀπέχει ἐν προκειμένῳ ἀπὸ τὴν ἐποχὴν τοῦ Taylor (ἡ ὁποία φθάνει μέχρι τοῦ 1930) ὅσον ἡ τελευταία αὐτη ἀπὸ τὸν Μεσαίωνα. Τὸ σύγχρονον χαρακτηριστικὸν αὐτῆς τῆς ἐξελίξεως εἰς τὸ πεδίον τῆς διοικήσεως τῶν ἐπιχειρήσεων, εἶναι ἡ ἐφεύρεσις, ἀνάπτυξις καὶ ἐφαρμογὴ τῶν λεγομένων «μεθόδων ποσοτικῆς ἀναλύσεως» (quantitative analysis method). Προβλήματα εὐρυτάτης ποικιλίας, τὴν ὕπαρξιν τῶν ὁποίων οὐδὲ κἂν ἠδυνάμεθα νὰ ὑποπτευθῶμεν μέχρι πρὸ ὀλίγων ἀκόμη ἐτῶν, δύνανται σήμερον νὰ ἐπισημανθοῦν, ἐρευνηθοῦν καὶ ἐπιλυθοῦν, χάρις εἰς τὰς μεθόδους ταύτας. Ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν καὶ τῶν transistors ἔλυσε, κατὰ μέγα μέρος, τὴν τεχνικὴν δυσκολίαν μακρῶν καὶ πολυπλόκων ὑπολογισμῶν.

Μεταξὺ τῶν μεθόδων τούτων προέχουσαν ἀσφαλῶς θέσιν καταλαμβάνει ὁ γραμμικὸς προγραμματισμός. Ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσις καταδεικνύει τὴν σημασίαν του διὰ τὴν ἐπίλυσιν διοικητικῶν προβλημάτων εἰς τὸν τομέα τῆς βιομηχανικῆς παραγωγῆς. Ἡ λῆψις ὀρθῶν διοικητικῶν ἀποφάσεων (decision making) εἰς τὸν τομέα τοῦτον εἶναι ἡ κλεὶς διὰ τὴν αὔξησιν τῆς τεχνικῆς παραγωγικότητος καὶ τῆς οἰκονομικῆς ἀποτελεσματικότητος τῶν ἐπιχειρήσεων. Ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς εἶναι ἐν προκειμένῳ ἓν ἄριστον καὶ συγχρόνως ἁπλοῦν μέσον.

ΕΚΛΟΓΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

A. Charnes: W.W. Cooper and A. Henderson, An Introduction to Linear Programming, N.Y., J. Wiley and Sons Inc., 1953.

E. Bowman and R. Fetter, Analysis for Production Management, Homewood, Ill., R.D. Irwin, Inc., 1957.

S. Vance, Industrial Administration, N.Y., McGraw-Hill Co., 1959.

American Management Association, Successful Production Planning and Control, report No 5.