ΑΙ ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΝ ΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΥΠΟ

Κ. Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

§ 1. *Εἰσαγωγικαὶ ἔννοιαι.*

Ἡ Στατιστική, καθὼς εἶναι γνωστόν, ὑποτυπώνει, κατὰ κανόνα, τὰς δυναμένας ποσοτικῶς νὰ ἐκφρασθῶσιν ἐκδηλώσεις τῶν διαφόρων φαινομένων αἵτινες ἀναφέρονται, εἴτε εἰς τὸ διάστημα εἴτε εἰς τὸν χρόνον, μορφώνουσα βάσει τούτων ἐμπειρικὰς συναρτήσεις αἵτινες καλοῦνται, ἀναλόγως περιπτώσεων, εἴτε ἐμπειρικαὶ συναρτήσεις συχνοτήτων ἢ κατανομῆς τῶν ἐκδηλώσεων τοῦ φαινομένου, εἴτε ἐμπειρικαὶ ἱστορικαὶ συναρτήσεις ἢ καὶ ἁπλῶς χρονολογικαὶ τοιαῦται.

Αἱ κατὰ τὰ ἄνω ἐμπειρικαὶ συναρτήσεις, πρακτικῶς παρέχονται, πάντοτε, ὑπὸ μορφὴν ἀριθμητικῶν πινάκων, περιλαμβανόντων συνήθως δύο στήλας ἀριθμῶν, ἐξ ὧν ἡ μὲν πρώτη παρέχει τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς μεταβλητῆς, ἡ δὲ ἄλλη τάς, κατ' ἀντιστοιχίαν αὐτῶν, τιμὰς τῆς συναρτήσεως, καὶ τοῦτο ἐφ' ὅσον πρόκειται περὶ ἐμπειρικῶν συναρτήσεων τῆς μορφῆς $y_i = \sigma(\chi_i)$, ἄλλως, ἤτοι, ἂν πρόκειται περὶ ἐμπειρικῶν συναρτήσεων τῆς μορφῆς $Z_{i,\mu} = \sigma(\chi_i, y_\mu)$, αὗται ἐπίσης παρέχονται ὑπὸ μορφήν, ὡς θὰ ἴδωμεν, ἀριθμητικῶν πινάκων, διπλῆς ὅμως εἰσόδου, οἵτινες εἰδικώτερον καλοῦνται καὶ Πίνακες Συμπτώσεως.

Ἐκ τῶν ὡς ἄνω ἐμπειρικῶν συναρτήσεων, αἱ μὲν τῆς ὁμάδος συχνοτήτων, ἐκφράζουσι ποσοτικῶς: ποία ἡ συχνότης ἐμφανίσεως σπουδαζομένης ἰδιότητος τῶν φαινομένων, τεταγμένης κατ' αὔξουσαν ἢ φθίνουσαν τάξιν, συνήθως δὲ κατὰ ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἔστιν δ' ὅτε καὶ κατὰ γεωμετρικὴν τοιαύτην, διά τι δεδομένον σύνολον παρατηρήσεων (συχνοτήτων). Αἱ δὲ τῆς ὁμάδος τῶν ἐμπειρικῶν ἱστορικῶν συναρτήσεων ἤτοι αἱ χρονολογικαὶ τοιαῦται ἀναπαριστῶσι, ποσοτικῶς, τὴν ἱστορικὴν ἐξέλιξιν τῶν φαινομένων, διὰ δεδομένην περίοδον τοῦ χρόνου καὶ κατὰ τὴν διαδοχὴν τῶν μονάδων αὐτοῦ (ἐτῶν, μηνῶν κλπ.).

Ἡ μόρφωσις τῶν ἐμπειρικῶν συναρτήσεων συχνοτήτων εἶναι δυνατή, ἐφ' ὅσον ἡ σπουδαζομένη ἰδιότης τοῦ φαινομένου εἶναι δεκτική, ἀφ' ἑνὸς μὲν ποσοτικῆς (δι' ἀριθμῶν δηλ.) ἀναπαραστάσεως, ἀφ' ἑτέρου δὲ βαθμολογήσεως, κατ' αὔξουσαν ἢ φθίνουσαν τάξιν ἐντάσεως, λόγου σταθεροῦ· συνήθως αἱ συναρτήσεις αὗται δύνανται νὰ προκύψωσι καὶ ἐκ τοῦ μετασχηματισμοῦ ἱστορικῶν τοιούτων, διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ στοιχείου τοῦ χρόνου· τὸ ἀντίστροφον ὅμως ἤτοι ἡ μόρφωσις χρονολογικῶν ἐμπειρικῶν συναρτήσεων ἐκ δεδομένων ἐμπειρικῶν συναρτήσεων συχνοτήτων εἶναι ἀδύνατος, διότι ἐκ τῶν τελευταίων τοιούτων ἐλλείπει παντελῶς τὸ στοιχεῖον χρόνος, δεδομένου ὅτι αἱ συχνότητες (παρατηρήσεις) ἐκδηλοῦνται ἐντὸς χρονικοῦ διαστήματος μᾶλλον ἢ ἧττον μεγάλου, ἀναλόγως περιπτώσεων, μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψει, ἐν τῇ στατιστικῇ ὑποτυπώσει τῶν ἐκδηλώσεων τοῦ φαινομένου, τῶν ἀντιστοίχων χρονικῶν στιγμῶν αὐτῶν.

Κατὰ συνέπειαν τῶν ἄνω, δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι, αἱ μὲν ἱστορικαὶ ἐμπειρικαὶ συναρτήσεις ἀποτελοῦσι τὴν δυναμικὴν καὶ δὴ τὴν κινηματικὴν (ποσοτικὴν) ἀναπαράστασιν τῶν ἐκδηλώσεων τῶν φαινομένων, αἱ δὲ ἐμπειρικαὶ συναρτήσεις συχνοτήτων τὴν στατικὴν τοιαύτην, ἐν τῇ εὐρυτάτῃ ὅμως ἐννοίᾳ τῆς λέξεως ἀμφότεραι.

Οὐχ ἧττον ἀμφότεραι αἱ ἄνω κατηγορίαι τῶν ἐμπειρικῶν συναρτήσεων ἀπαρτίζουσιν, ὡς εἶναι γνωστόν, τὸ βάθρον, ἐφ' οὗ ἑδράζεται ἡ τεχνικὴ ἐπεξεργασία τῶν δεδομένων, προερχομένων ἐκ τῆς παρατηρήσεως καὶ μόνον ἐξ αὐτῆς, ἐπὶ σκοπῷ μορφώσεως διὰ ταύτης:

α) ὡρισμένων σταθερῶν, ἢ ἄλλως π α ρ α σ τ α τ ι κ ῶ ν σ τ α θ ε ρ ῶ ν, διὰ τὰς συγκρίσεις τῶν ἐκδηλώσεων τοῦ ὑπ' ὄψει φαινομένου πρὸς τὰς ἐκδηλώσεις ἄλλων ὁμοειδῶν τοιούτων, δεδομένου ὅτι ὁ πρωταρχικὸς χαρακτὴρ τῆς Στατιστικῆς εἶναι πάντοτε ὁ συγκριτικὸς τοιοῦτος καὶ

β) εὑρέσεως τῆς προσεγγιζούσης ἀναλυτικῆς (διὰ ἐξισώσεως δηλ.) ἐκφράσεως τῶν ποσοτικῶν ἐκδηλώσεων τοῦ φαινομένου ἐν τῷ χρόνῳ ἢ τῷ διαστήματι, τῆς τοιαύτης ἐκφράσεως ἀποτελούσης, οἱονεί, τὴν συμπεπυκνωμένην ποσοτικὴν ἀναπαράστασιν τοῦ ἐμπειρικοῦ νόμου, ὅστις ἰθύνει τὰς ἐκδηλώσεις τῆς κατανομῆς τοῦ φαινομένου ἐν τῷ χρόνῳ ἢ τῷ διαστήματι.

Κατὰ κανόνα ὅμως αἱ στατιστικαὶ συναρτήσεις, εἴτε συναρτήσεις συχνοτήτων εἴτε ἱστορικαὶ εἶναι αὗται, εἶναι πάντοτε σ υ ν α ρ τ ή σ ε ι ς ἀ σ υ ν ε χ ε ῖ ς, καθ' ὃ ἀπότοκοι τῆς παρατηρήσεως, δι' ὃ καὶ ἡ συμβολικὴ τούτων ἔκφρασις $y_i = \sigma(\chi_i)$ ἐπαληθεύεται διὰ χ λαμβάνον μόνον τὰς τιμὰς $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots, \chi_\nu$, ὅτε αἱ ἀντίστοιχοι τῆς συναρτήσεως τιμαὶ εἶναι $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_\nu$, τῆς συναρτήσεως $y_i = \sigma(\chi_i)$, λαμβανούσης τὴν τιμὴν μηδὲν διὰ πᾶσαν ἄλλην τοῦ χ τιμήν. 'Επειδὴ δὲ αἱ ὡς εἴρηται συναρτήσεις εἶναι ἀ σ υ ν ε χ ε ῖ ς, ἐπιδιώκεται ἡ ὑποκατάστασις τῆς ἐμπειρικῆς τούτων ἐκφράσεως $y_i = \sigma(\chi_i)$, δι' ἀναλυτικῆς τοιαύτης, τῆς $Z = f(\chi)$, σ υ ν ε χ ο ῦ ς ὅμως καὶ τοιαύτης ὥστε, προσεγγιζόντως, νὰ ἔχωμεν $y \backsimeq Z$ * διὰ τὴν αὐτὴν τῆς μεταβλητῆς χ τιμήν.

'Αμφότεροι οἱ σκοποὶ ἐπιτελοῦνται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς ἐπὶ τῶν δεδομένων τῶν ἐκ παρατηρήσεως (ἐμπειρικῶν) συναρτήσεων τῶν ἀρχῶν τῆς

* Σημ. Τὸ σύμβολον $\backsimeq$ παριστᾷ τὸ κατὰ προσέγγισιν ἴσον· ἔστιν ὅτε τοῦτο σημειοῦται καὶ διὰ τοῦ συμβόλου Ω ἢ καὶ διὰ τοῦ $\overline{\ }$.

Τεχνικῆς Στατιστικῆς, οὐχ ἧττον ὅμως, ἀνεξαρτήτως αὐτῶν ἤτοι τῶν πρὸς τοῦτο χρησιμοποιουμένων λογιστικῶν μεθόδων, ὑφίσταται καὶ ἄλλη μέθοδος, ἥτις χρησιμοποιοῦσα γεωμετρικὰς κατασκευὰς ἢ μᾶλλον γραφικὰς χαράξεις, ἐπιδιώκει τὴν ἔ κ θ ε σ ι ν τ ῶ ν ἐ κ δ η λ ώ σ ε ω ν, τ ὴ ν σ ύ γ κ ρ ι σ ι ν, πρὸς τούτοις, τ ῶ ν ὁ μ ο ε ι δ ῶ ν φ α ι ν ο μ έ ν ω ν καὶ τέλος τὴν ἀ ν α ζ ή τ η σ ι ν τ ῶ ν π ο ρ ι σ μ ά τ ω ν τ ῆ ς ἐ ρ ε ύ ν η ς.

Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἡ καλουμένη Μ έ θ ο δ ο ς τ ῶ ν Γ ρ α φ ι κ ῶ ν Χ α ρ ά ξ ε ω ν ἢ Ἀ π ο τ υ π ώ σ ε ω ν ἢ τέλος τῆς Γ ρ α φ ι κ ῆ ς Σ τ α τ ι σ τ ι κ ῆ ς.

Ἡ Γραφικὴ Στατιστική, ὡς εἶναι φανερόν, συμπληρώνει τὰς ἐλλείψεις τῆς ποσοτικῆς ἢ μᾶλλον τῆς Λογιστικῆς (Τεχνικῆς) τοιαύτης, καθ' ὅσον παραφράζει τὰ πορίσματα ταύτης εἰς σχήματα, ἅτινα καθιστῶσι μᾶλλον νοητὰ ταῦτα. Ἡ κατανομὴ τῶν νυμφευθέντων, π.χ., καθ' ἡλικίαν, ἀνὰ λόγους φύλλου, ἐπὶ σκοπῷ συγκρίσεως, ἀποτελεῖ ἀντικειμενικὸν σκοπὸν τῆς Τεχνικῆς Στατιστικῆς, ἥτις πρὸς τοῦτο θὰ μορφώσῃ ἐπίτηδες ὡρισμένας σταθεράς. Ἡ χάραξις ὅμως τῶν παραστατικῶν ἐμπειρικῶν συναρτήσεων τῶν δύο φαινομένων εἶναι, οὐχ ἧττον, κύριον ἔργον τῆς Γραφικῆς Στατιστικῆς.

Οἱ λόγοι οἵτινες δικαιολογοῦσι τὴν χρησιμότητα τῶν Γραφικῶν Χαράξεων εἶναι πλεῖστοι, ἐκ τούτων θὰ ἀναφέρωμεν τοὺς κυριωτέρους ἤτοι :

1ον. Δεδομένου ὅτι τὰ ἐξαγόμενα τῆς Στατιστικῆς ὑποτυπώσεως, δηλ. αἱ ἐμπειρικαὶ συναρτήσεις τῆς μορφῆς $y_i = \sigma(\chi_i)$, παρέχονται, ὡς προελέχθη, ὑπὸ μορφὴν ἀριθμητικῶν πινάκων μᾶλλον ἢ ἧττον ἐκτεταμένων, ἐπειδὴ οὗτοι, ὡς ἐκ τούτου, εἰς τὸ πολὺ κοινὸν προκαλοῦσι τὸ αἴσθημα τῆς ἀποστροφῆς, ἂν μὴ τῆς ἀντιπαθείας, διὰ τοῦτο, ἀκριβῶς, ἐπιδιώκεται ἡ ὑποκατάστασις τῶν ἀριθμητικῶν τούτων πινάκων δι' ἁπλῶν σχημάτων, δυναμένων νὰ προσελκύσωσιν οὐ μόνον τὴν προσοχὴν αὐτοῦ. ἀλλά, πρὸ παντός, τὴν ἐπιθυμίαν τούτου πρὸς μελέτην τῶν ἐκδηλώσεων τῶν φαινομένων, κατὰ τρόπον ὅστις δὲν ἀπαιτεῖ τὴν ἔντονον προσοχὴν τοῦ μελετητοῦ, ἐφ' ὅσον μάλιστα ἀποκλείει τοὺς κοπιώδεις ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμούς.

Εἶναι αὐτονόητον διατὶ αἱ γραφικαὶ χαράξεις γίνονται ἀμέσως δεκταὶ ὑπὸ τοῦ πολλοῦ κοινοῦ, εἶναι εὐπρόσδεκτοι καθ' ὅσον αὗται, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἀπηχοῦσι, λίαν ἐκφραστικῶς, τὴν ὑπάρξασαν πραγματικότητα καὶ δὴ ταύτην ὀπτικῶς, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἀπαλλάσσουσι τὸν ἀνθρώπινον νοῦν πάσης προσπαθείας ἀφαιρέσεως, ἥτις εἶναι ἀπαραίτητος εἰς αὐτόν, διὰ νὰ ἀντιληφθῇ καλῶς τὰ δεδομένα τοῦ τυχόντος ἀριθμητικοῦ πίνακος. Αἱ γραφικαὶ χαράξεις εἶναι ὅθεν προτιμότεραι, διότι διὰ τὴν κατανόησιν αὐτῶν ἔχει ἐφαρμογὴν μόνον ἡ ἀρχὴ τ ο ῦ ἐ λ ά σ σ ο ν ο ς κ ό π ο υ ἢ τ ῆ ς ἐ λ α χ ί σ τ η ς π ρ ο σ π α θ ε ί α ς.

2ον. Αἱ Γραφικαὶ χαράξεις εἶναι κατὰ πολὺ ὑποβλητικώτεραι εἰς τὸν ἀνθρώπινον νοῦν, παντός, οἱουδήποτε, ἀριθμητικοῦ πίνακος ὁσονδήποτε λεπτομεροῦς· κατὰ συνέπειαν ζωηρότεραι καὶ ἑπομένως ὑπὸ ἔποψιν ἐντυπώσεως διαρκέστεραι ἢ τῆς ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ πίνακος ἐντυπώσεως, ἥτις, ὡς ἐκ τῆς φύσεως αὐτῆς, εἶναι φευγαλέα,

3ον. Ὁ ἀνθρώπινος νοῦς εἶναι φύσει ἀδύνατον νὰ ἀπομνημονεύῃ καὶ συνεπῶς νὰ ἐνθυμῆται, ἀνὰ πᾶσαν στιγμήν, τὰ δεδομένα ἀπεράντου ἀριθμητικοῦ τινος πίνακος, ἰδίᾳ ὅταν ταῦτα μάλιστα εἶναι πολυπληθῆ ὡς π. χ. ἡ κατὰ κεφαλὴν κατοίκων ἐτησία ἀξία τῆς παρ' ἡμῖν εἰσαγωγῆς ἀπὸ τοῦ 1856—1935.

Ἀντιθέτως ἡ γραφικὴ χάραξις ἥτις ἔχει προέλθει ἐξ αὐτῶν τούτων τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων, διατηρεῖται, ὡς ἀνάμνησις, πολὺ καλύτερον καὶ ἐπὶ περισσότερον, ὡς ἐκ τούτου, χρόνον.

Ἐκτὸς τούτου αἱ μακραὶ ἀριθμητικαὶ σειραὶ ἀντικαθίστανται, εἰς τὰς χαράξεις διὰ γραμμῆς, ἧς ἡ φορὰ ἢ μᾶλλον ἡ τροχιὰ παρέχει, δι' ἑνὸς βλέμματος, τὴν πρὸς αὔξησιν ἢ πρὸς μείωσιν τάσιν τῶν φαινομένων ὡς καὶ τὰς ἐναλλαγὰς αὐτῆς.

4ον. Ἡ σύγκρισις καὶ ὁ ἔλεγχος τῶν δεδομένων τῶν ἐμπειρικῶν συναρτήσεων ἐπιτελεῖται εὐκόλως διὰ τῆς γραφικῆς χαράξεως, δεδομένου ὅτι πλειστάκις εἰς τὸν ἀριθμητικὸν πίνακα εἶναι δυνατὸν νὰ παρατρέξωμεν ἐσφαλμένον τινὰ ἀριθμόν· τὸ τοιοῦτον ὅμως εἰς τὴν ἀντίστοιχον γραφικὴν χάραξιν εἶναι ἀδύνατον, ἐφ' ὅσον μάλιστα ἡ μεγάλη ἢ μικρὰ τοῦ δεδομένου ὅρου τιμὴ δὲν δικαιολογεῖται οὐ μόνον ὑπὸ τῶν γειτονικῶν αὐτοῦ τιμῶν, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς ποιοτικῆς τούτων διασκοπήσεως.

Ἐκτὸς ὅμως τῶν ἄνω αἱ συγκρίσεις τῶν ἐκδηλώσεων ὁμοειδῶν καὶ ἑτεροειδῶν φαινομένων ἐν τῷ χρόνῳ ἀνελισσομένων, διὰ τῶν γραφικῶν χαράξεων λίαν εὐκολύνονται, τυγχανουσῶν τούτων ἀπαραιτήτων διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ συγχρονισμοῦ ἢ μὴ αὐτῶν (προήγησις, ὑστέρισις, ἀπόλυτος συγχρονισμός).

Γενικῶς, ὅθεν, δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι «σκοπὸς τῆς Γραφικῆς Στατιστικῆς εἶναι ὁ ἔλεγχος τῶν δεδομένων, ἰδίᾳ ἡ σύγκρισις τῶν ἐκδηλώσεων τῶν φαινομένων ἐν τῷ χρόνῳ ἢ τῷ διαστήματι, παρομαρτούντως δὲ ἡ συμπλήρωσις τῶν ἐλλειπόντων δεδομένων (Γραφικὴ παρεμβολὴ) καὶ ὁ γραφικὸς λογισμὸς ἐνίων σταθερῶν».

Κατὰ ταῦτα, τὰς γραφικὰς χαράξεις κατανέμομεν:

1ον. Εἰς ἐπίπεδα διαγράμματα ἢ δυσδιάστατα τοιαῦτα.

2ον. Εἰς πολικὰ διαγράμματα.

3ον Εἰς Ἡμιλογαριθμικὰ καὶ Λογαριθμικὰ διαγράμματα.

4ον. Εἰς Στερεογράμματα ἢ τρισδιάστατατα διαγράμματα.

5ον. Εἰς χαρτογράμματα.

§ 2. Δισδιάστατα Διαγράμματα.

Ἡ ὁμὰς τῶν διαγραμμάτων τούτων ὑποδιαιρεῖται εἰς τὰς ἑξῆς κατηγορίας.

1ον. Διαγράμματα ἐμπειρικῶν καμπύλων, χρόνου ἢ διαστήματος. Κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐπειδὴ πρόκειται περὶ ἀπεικονίσεως ἱστορικῶν συναρτήσεων αἱ παραστατικαὶ τούτων καμπῦλαι καλοῦνται καὶ ἱστορι'ογράμματα.

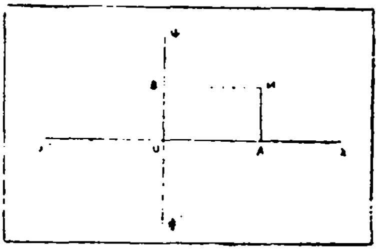
2ον. Ἱστογράμματα ἐμπειρικῶν συναρτήσεων χρόνου ἢ διαστήματος.

3ον. Ἀθροιστικὰς σειρὰς ἢ Στατιστικὰς Ἀψίδας· καμπύλας χρησιμευούσας διὰ συγκρίσεις ἀφ' ἑνὸς τῶν ἐμπειρικῶν συναρτήσεων συχνοτήτων καὶ μόνον, ἀφ' ἑτέρου δὲ διὰ τὸν προσδιορισμὸν γραφικῶς, ἄνευ δηλ. ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ, τῶν σταθερῶν θέσεως ἤτοι τῆς Διαμέσου, τῶν Τεταρτημορίων, τῶν Δεκατημορίων, τῶν Ἑκατοσ'τημορίων, τῶν τοιούτων συναρτήσεων.

4ον. Καμπύλας συγκεντρώσεως ἢ τοῦ Lorenz, διὰ τὴν σύγκρισιν ὁμοειδῶν, ἰδίας ὅμως κατηγορίας, ἐμπειρικῶν συναρτήσεων συχνοτήτων.

Πρὶν ὅμως ἐκθέσωμεν τὴν μέθοδον τῆς χαράξεως τῶν ἄνω γραφικῶν προσθέτομεν τὰ ἑξῆς:

Διὰ νὰ παραστήσωμεν δι' ἀριθμῶν τὴν θέσιν τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου, χαράσσομεν δύο εὐθείας τεμνομένας κατὰ γωνίαν Θ, τὰς ΟΧ καὶ ΟΨ, καλουμένας ἄξονας. Ἂν νῦν θεωρήσωμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου καὶ κληθῇ Α ἡ τοῦ σημείου Μ προβολὴ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΟΧ παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα ΟΨ καὶ Β ἡ τοῦ Μ προβολὴ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΟΨ, παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα ΟΧ, τὸ μέτρον τοῦ ἀνύσματος ΟΑ καλεῖται τετμημένη τοῦ σημείου Μ καὶ παρίσταται συμβολικῶς διὰ τοῦ χ, τὸ δὲ μέτρον τοῦ ΟΒ καλεῖται τεταγμένη τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ καὶ παρίσταται, συμβολικῶς ἐπίσης, διὰ τοῦ y. Τὸ κοινὸν ὄνομα τῆς τε τετμημένης καὶ τεταγμένης τοῦ σημείου Μ εἶναι συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ. Ἐὰν Θ=90°, οἱ ἄξονες τότε καλοῦνται ὀρθογώνιοι, ἄλλως πλαγιογώνιοι.



Σχῆμα 1

Εἰδικῶς ὁ ἄξων ΟΧ καλεῖται ἄξων τῶν τετμημένων ἢ ἄξων τῶν χ, ὁ ἄξων ΟΨ, ἄξων τῶν τεταγμένων ἢ ἄξων τῶν y. Ἡ τετμημένη εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ' ὅσον τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα (ἄνυσμα) ΟΑ ἔχει θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν, ὁμοίως ἡ τεταγμένη εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ' ὅσον τὸ ἄνυσμα ΟΒ ἔχει θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν.

Εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη τετμημένη καὶ ὡρισμένη τεταγμένη, καὶ ἀντιστρόφως, ὑπάρχει ἓν μόνον σημεῖον, ἔχον δεδομένην τετμημένην καὶ δεδομένην τεταγμένην, ἤτοι ἡ θέσις ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου καθορίζεται ἀπολύτως διὰ τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ· ἑπομένως εἰς ἕκαστον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον καὶ ἓν μόνον καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐὰν ληφθῇ ὡς θετικὴ φορὰ ἐπὶ μὲν τοῦ ἄξονος τῶν x, ἡ ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος τῶν y, ἡ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, τότε τὰ σημεῖα τῆς γωνίας ΧΟΨ, θὰ ἔχωσιν ἀμφοτέρας τὰς συντεταγμένας θετικάς, τὰ σημεῖα τῆς γωνίας Χ′ΟΨ, τετμημένην ἀρνητικήν, τεταγμένην θετικήν, τὰ σημεῖα τῆς γωνίας Χ′ΟΨ′, ἀμφοτέρας τὰς συντεταγμένας ἀρνητικάς, τὰ σημεῖα τῆς γωνίας ΧΟΨ′, τετμημένην θετικήν, τεταγμένην ἀρνητικήν. Ἐπειδὴ δὲ ΑΜ=ΟΒ, εἶναι περιττὸν νὰ ἄγεται ἡ ἄλλη προβάλλουσα ΒΜ, διότι τὸ ΟΑ εἶναι ἡ τετμημένη καὶ τὸ ΑΜ ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου Μ.

Κατόπιν τῶν ἄνω προβαίνομεν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν διαφόρων μεθόδων γραφικῶν χαράξεων.

§ 3. *Ἐμπειρικαὶ καμπύλαι συχνοτήτων.*

Ὡς ἐλέχθη αὗται δίδονται συμβολικῶς ὑπὸ σχέσεως τῆς $y_i = \sigma(\chi_i)$ εἰς ἃς ἡ μεταβλητὴ χ ἐπαληθεύει τὴν διπλῆν ἀνισότητα

$$\chi_i - \frac{\Delta\chi}{2} < \chi < \chi_i + \frac{\Delta\chi}{2} \qquad 1)$$

εἰς ἣν τὸ $\Delta\chi$ εἶναι τὸ ε ὖ ρ ο ς τ ο ῦ δ ι α σ τ ή μ α τ ο ς τῆς τάξεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἤτοι ἐν ἄλλαις λέξεσιν τὸ $\Delta\chi$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, καθ' ἣν ἔχουσι ταχθῆ αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς.

Ἐπειδὴ τὸ $\Delta\chi$ εἶναι σταθερὸν καὶ συνεπῶς δὲν μεταβάλλεται ἀπὸ ἀπό τινος τάξεως τιμῶν τῆς μεταβλητῆς εἰς ἄλλην, ἰσχύει δὲ ἡ ἀνισότης (1), γίνεται δεκτὴ ἡ ὑπόθεσις ὅτι «ἐν ἑκάστῃ τάξει τιμῶν τῆς μεταβλητῆς αἱ ἀντίστοιχοι συχνότητες (τῶν ἐκδηλώσεων τοῦ φαινομένου) κατανέμονται ὁμοιομόρφως ἐν αὐτῇ, συγκεντρούμεναι συνεπῶς περὶ τὴν κεντρικὴν τιμὴν χ_i τῆς τάξεως εἰς ἣν ἀντιστοιχοῦσι καὶ ἡ ὁποία ὡς ἐκ τούτου θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν δύο ἀκραίων μελῶν τῆς ἀνισότητος (1)».

Πρὸς χάραξιν ὅθεν τῆς $y_i = \sigma(\chi_i)$, λαμβάνονται ἐπὶ μὲν τοῦ ἄξονας τῶν χ ἰσομήκη διαδοχικὰ ἀνύσματα, κατά τινα αὐθαίρετον κλίμακα, ἅτινα, κατὰ συνθήκην, ἀναπαριστῶσι τὰς διαδοχικὰς τάξεις τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, ἥτις πληροῖ τὴν ἀνισότητα (1), ἐπὶ δὲ τοῦ μέσου, ἑκάστου ἐκ τῶν, ὡς εἴρηται, ἀνυσμάτων ἄγονται ἀνύσματα παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, ἀντιστοίχως ἴσα, ἢ μᾶλλον ὀρθότερον ἀνάλογα, κατὰ τὴν γενομένην δεκτὴν κλίμακα, πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας πρὸς τὰς τάξεις τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς συχνότητας. Ἡ ἕνωσις τοῦ πέρατος τῶν τεταγμένων τούτων δι' εὐθειῶν παρέχει τὴν ἐμπειρικὴν καμπύλην συχνοτήτων, ἥτις ἐν τῇ κυριολεξίᾳ εἶναι πολυγωνικὴ γραμμὴ καὶ οὐχὶ καμπύλη τοιαύτη.

Φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου χωρίου, ὅπερ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν χ καὶ τῶν δύο εὐθειῶν $\chi_i - \frac{\Delta\chi}{2}$ καὶ $\chi_i + \frac{\Delta\chi}{2}$, θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀντίστοιχον συχνότητα, καθ' ὅσον ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ μεταβλητὴ πληροῖ τὴν ἀνισότητα (1), ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὡς εἴρηται τραπεζίου (μικτογράμμου χωρίου) δίδεται ὑπὸ τῆς μέσης βάσεως δηλ. τῆς σ (χ_i) ἐπὶ τὸ ὕψος Δχ, ὅπερ ἐπὶ τοῦ προκειμένου, ἐκ κατασκευῆς, ἐλήφθη ὡς ἴσον πρὸς τὴν γραμμικὴν μονάδα τοῦ μήκους, δηλ. ἴσον πρὸς 1.

§ 4. *Ἱστοριογράμματα.*

Ἐὰν νῦν ἡ ἐμπειρικὴ συνάρτησις εἶναι χρονολογικὴ τοιαύτη, δηλ. τὸ ὑπ' ὄψει φαινόμενον σπουδάζεται, σχετικῶς, κατὰ τὰς διαδοχικὰς αὐτοῦ ἐκδηλώσεις διὰ τοῦ χρόνου καὶ συνεπῶς αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ χρόνου ἀπαρτίζουσι τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς, ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ τοιαύτη συνάρτησις συνοψίζει τὴν ἱστορίαν τοῦ φαινομένου δι' ἀριθμῶν καὶ χρονολογιῶν, ἡ ἀντίστοιχος ταύτης γραφικὴ χάραξις ἀποκαλεῖται Ἱστοριόγραμμα, ὡς προελέχθη.

Πρὸς χάραξιν χρονολογικῆς τινος συναρτήσεως, λαμβάνονται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ χ, διαδοχικὰ ἰσομήκη ἀνύσματα, κατά τινα αὐθαίρετον κλίμακα, ἅτινα συμβατικῶς ἀναπαριστῶσι τὰς ὑπ' ὄψει χρονικὰς διαδοχικὰς στιγμάς. Ἐκ τοῦ πέρατος τῶν ἀνυσμάτων τούτων ἄγονται παράλληλοι, ἀνάλογοι, κατά τινα αὐθαίρετον κλίμακα, πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας ἀριθμητικὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως. Ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ ἥτις συνδέει τὰ πέρατα τῶν οὕτως ἀχθεισῶν τεταγμένων ἀπαρτίζει τὸ ἱστοριόγραμμα τῶν ἐκδηλώσεων τοῦ ὑπ' ὄψει φαινομένου. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο παρέχει ὀπτικῶς τὴν διαδοχὴν τῶν ἐκδηλώσεων, καλεῖται ἐπιπροσθέτως καὶ διάγραμμα Διαδοχῆς, καθ' ὅσον τοῦτο ἐξεικονίζει τὴν τροχιὰν τῆς ἀνελίξεως τοῦ φαινομένου ἐν τῷ χρόνῳ, ἥτις ἐκδηλοῦται διὰ συνεχῶν ἐξάρσεων ἢ ὑποβάσεων, διαδοχικῶν ἢ μή, ἀσθενῶν ἢ ἐντόνων ἢ τέλος καὶ δι' ἀποτόμων ἐναλλαγῶν.

Εἰδικώτερον εἰς τὰ ἱστοριογράμματα ὁ ἄξων τῶν χ καλεῖται ἄξων τῶν χρόνων (μονάς, ἔτος, μὴν κλπ.).

Πρέπει οὐχ ἧττον νὰ λεχθῇ ὅτι ἡ μείζων ἀκρίβεια γραφικῆς ἀναπαραστάσεως ἐπιτυγχάνεται διὰ μὲν τὰς συναρτήσεις συχνοτήτων ἐὰν τὸ διάστημα Δχ περιλαμβάνῃ, ὅσῳ τὸ δυνατόν, ὀλιγωτέρας μονάδας τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, διὰ δὲ τὰς ἱστορικὰς τοιαύτας, ἐὰν ἡ χρονικὴ μονὰς εἶναι ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἡ μικροτέρα (μὴν π. χ. ἀντὶ ἔτους, ἡμέρα ἀντὶ μηνὸς κλπ.).

§ 5. *Συσχέτισις κλιμάκων.*

Ἐρωτητέον νῦν πρέπει νὰ ὑφίσταται ἢ ὄχι σύνδεσμός τις μεταξὺ τῶν εἰσαγομένων κλιμάκων διὰ τὴν μέτρησιν τῶν τετμημένων καὶ τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς ταύτας τεταγμένων καὶ ποῖος;

Πράγματι, ἂν αἱ τετμημέναι τῆς $y_i = \sigma(\chi_i)$ παρίστανται διὰ μεγάλων ἰσομήκων ἀνυσμάτων, κατ' ἀνάγκην, αἱ πλευραὶ τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς θὰ εἶναι σχεδὸν παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ καὶ ἡ παραστατικὴ καμπύλη θὰ ἐμφανίζῃ κυμάνσεις ἀσθενεῖς ἢ μᾶλλον ἀτόνους. Ἀντιθέτως ἂν ληφθῶσι μικρὰ ἀνύσματα πρὸς ἀναπαράστασιν τῶν τετμημένων, αἱ κυμάνσεις τότε καθίστανται λίαν ἔντονοι, ἐνῷ δὲ αἱ τεταγμέναι παρίστανται διὰ τῶν αὐτῶν ἰσομήκων ἀνυσμάτων κατ' ἀμφοτέρας τὰς χαράξεις, ἡ μορφὴ τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς ταύτας καμπύλων εἶναι ἐντελῶς διάφορος, καθ' ὅσον τῆς μὲν μιᾶς θὰ ἐμφανίζεται ὡς πεπιεσμένη πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ, τῆς δὲ ἄλλης ὡς πεπιεσμένη πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y. Τὸ πρῶτον διάγραμμα παρέχει τὴν ἐντύπωσιν τῆς ἠρέμου διαδοχῆς τῶν ἐκδηλώσεων, ἄνευ ἀποτόμων ἐξάρσεων καὶ ὑποβάσεων, τὸ δεύτερον, τοὐναντίον.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ποία ἡ ἀκολουθητέα μέθοδος;

Προκειμένου περὶ συναρτήσεων συχνοτήτων τὸ Διεθνὲς Ἰνστιτοῦτον Στατιστικῆς συνέστησεν ὅπως ἑκάστη ὁμὰς συχνοτήτων ἀνάγεται εἰς τόσον τοῖς o|o ὡς πρὸς τὸ σύνολον αὐτῶν, τὸ δὲ καλύτερον ἀποτέλεσμα θὰ ἐπιτυγχάνεται, ἐὰν δοθῇ εἰς πλάτος Ε, περιλαμβάνον τὸ ἥμισυ τῆς ἐπιφανείας, μῆκος ἴσον, ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ, πρὸς τὸ 0,1 τοῦ μετροῦντος τὸ σύνολον τῶν συχνοτήτων, ὅτε ἡ διάμεσος στήλη, ἥτις θὰ ἀναπαριστᾷ τὰ 0,5 τοῦ συνόλου τῶν συχνοτήτων, θὰ ἔχῃ ὕψος τὸ διπλάσιον τοῦ Ε. Πάντως ἡ ὑπόδειξις αὕτη ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἑκάστοτε δεδομένων.

Ὅσον ἀφορᾷ τὰς χρονολογικὰς συναρτήσεις, διὰ ταύτας, ἄλλοτε, τὸ αὐτὸ Ἰνστιτοῦτον εἶχε συστήσει ὅπως χρησιμοποιῶνται κλίμακες τοιαῦται, ὥστε ἡ μέση τροχιὰ τοῦ φαινομένου νὰ ἀντιστοιχῇ, διὰ τὴν ἐφαπτομένην, εἰς κλίσιν 45°. Βραδύτερον ὁ L. March ὑπεστήριζεν ὅτι πᾶσα κρίσις γενομένη ἐπὶ τῆς σχετικῆς μεταβολῆς τῶν τετμημένων ἐξαρτᾶται, κυρίως, ἐκ τῆς ὑφισταμένης σχέσεως, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν τετμημένων καὶ τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν τεταγμένων. Ἐὰν τὰ ἀναπαριστώμενα φαινόμενα εἶναι ὁμοειδῆ, εἶναι εὔκολον νὰ χαραχθῶσιν αἱ παραστατικαὶ τούτων καμπύλαι, κατὰ τὴν αὐτὴν κλίμακα· τὸ τοιοῦτον ὅμως δὲν εἶναι δυνατόν, ἐφ' ὅσον τὰ σπουδαζόμενα φαινόμενα εἶναι ἑτεροειδῆ. Τῇ προτάσει ὅθεν τοῦ L. March τὸ Δ. Ἰνστιτοῦτον τῆς Στατιστικῆς παρεδέχθη τὴν ὑποκατάστασιν τῶν ἀριθμῶν οἵτινες παριστῶσι τὰ δεδομένα, διὰ τῶν ποσοστῶν ἑκάστου αὐτῶν ὡς πρὸς τὸν μέσον τῶν δεδομένων μιᾶς 10ετίας π. χ. καὶ τοῦτο πρὸς ἀποφυγὴν ἐκ νέου ὑπολογισμοῦ τοῦ μέσου καὶ τῶν ποσοστῶν ἑκάστου τῶν δεδομένων, ὡς πρὸς τοῦτον, ἐὰν ὁ μέσος ἐλογίζετο ἐφ' ὅλων τῶν δεδομένων, ὅπερ θὰ ἦτο ἀναπόφευκτον, μετὰ κάθε προσθήκην τῶν δεδομένων ἑκάστου παρερχομένου ἔτους.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ βάσις ἀναπαρίσταται ὑπὸ μήκους ἴσου πρὸς τὸ παριστῶν μίαν 30ετίαν, ὅτε ἡ καμπύλη ἥτις ἐκτείνεται ἐκ τοῦ 0, ἐπὶ μίαν 10ετίαν, θὰ ἔχῃ κλίσιν 0,3, εἰς τὸ τέλος τῶν 10 ἐτῶν, 3 εἰς τὸ τέλος τῶν 30 ἐτῶν, ἐνῷ ἡ ὅλη καμπύλη θὰ κλίνῃ κατὰ 45°.

Παραλλαγὴ τῆς ὡς ἄνω μεθόδου, προσιδιάζουσα μάλιστα διὰ τὴν γραφικὴν ἀναπαράστασιν τῶν δημογραφικῶν καὶ οἰκονομικῶν φαινομένων, εἶναι ἡ χρησιμοποιοῦσα ὡς μέσην βάσιν, τὸν μέσον ὁλοκλήρου τῆς σειρᾶς, καίτοι ἡ μέθοδος αὕτη ἐνέχει τὸ μειονέκτημα νὰ ἀπαιτῇ διὰ κάθε παρερχόμενον ἔτος, οὗτινος τὰ δεδομένα εἰσέρχονται εἰς τὴν χάραξιν, καὶ νέον ὑπολογισμὸν τοῦ μέσου τῆς νέας σειρᾶς. Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου 100 ἀπὸ τῆς ἀρχῆς (ὅπου 100 ὁ μέσος ὁλοκλήρου τῆς σειρᾶς) θὰ ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ διὰ νὰ παραστήσῃ ὁλόκληρον τὴν θεωρουμένην χρονικὴν περίοδον.

Ἐξυπακούεται ὅτι διὰ τῶν χαράξεων τῶν ἱστορικῶν συναρτήσεων ἐπιζητοῦμεν καὶ τὴν ἑρμηνείαν τῶν αἰτιολογικῶν σχέσεων, ὅτε ἐρευνῶμεν οὐ μόνον τὴν σχετικὴν αὔξησιν ἢ πρόοδον, ἀλλά, πρὸς τούτοις, ἀναζητοῦμεν, καθ' ὅλον τὸ μῆκος τῆς ὑπ' ὄψει χρονικῆς περιόδου, τὰς ὁμοιότητας εἰς τὸ ποσοστὸν τῆς προόδου, τὰς χρονολογίας τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων ἢ τὸν συγχρονισμὸν εἰς ὅλας ἐν γένει τὰς μεταβολὰς αὐτῶν.

Κατὰ κανόνα ἡ μορφὴ τῶν ἱστοριογραμμάτων εἶναι ἀκανόνιστος, ἐνῷ ἡ τῶν ἐμπειρικῶν καμπύλων συχνοτήτων δύναται νὰ ὑπαχθῇ εἰς μίαν τῶν ἑπτὰ γενικῶν μορφῶν τῶν ἐξισώσεων τοῦ Karl Pearson κατὰ τὰ γνωστὰ τούτου κριτήρια, λογιστικῶς καθοριζόμενα, πρὸ πάσης χαράξεως(¹).

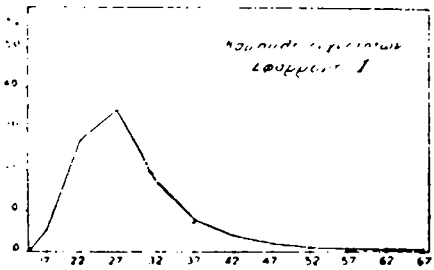
---

1) Ἴδε Στατιστικὴν Κ. Ἀθανασιάδου σελὶς 182 καὶ ἑφεξῆς καὶ Frequency Curves P. Elderton σελὶς 46, πίναξ VI.

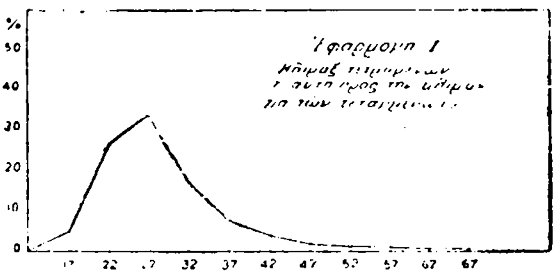
Ἐφαρμογὴ 1.

Ἡ κατανομὴ καθ' ἡλικίαν τῶν νυμφευθέντων ἀνδρῶν τὸ 1933 ἐπὶ 1000 γάμων εἶναι κάτωθι.

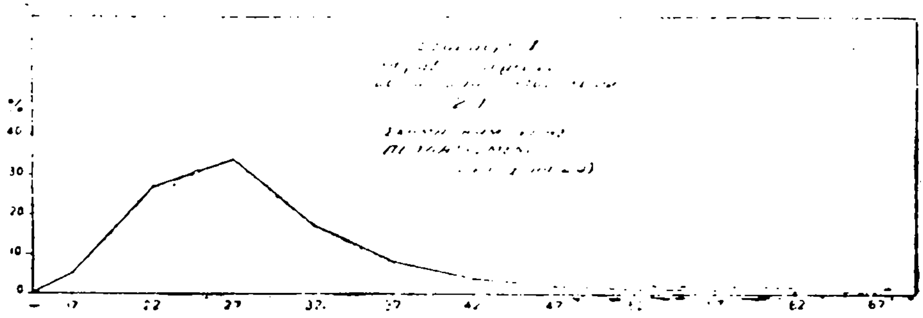
Ἡλικία	Ποσοστὸν
—19	56,03
20—24	274,14
25—29	341,63
30—34	168,69
35—39	80,39
40—44	36,18
45—49	21,15
50—54	10,61
55—59	5,74
60—64	2,83
65—	2,61
σύνολον	1000.—



Σχῆμα 2



Σχῆμα 2α



Σχῆμα 26

Ἡ γραφικὴ τῆς κατανομῆς τῆς ἄνω συναρτήσεως δίδεται ὑπὸ τοῦ σχήματος 2. Εἰς ταύτην $\Delta\chi=5$. Διὰ τὴν χάραξιν αὐτῆς ἐλήφθησαν ὑπ' ὄψει πάντα τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα.

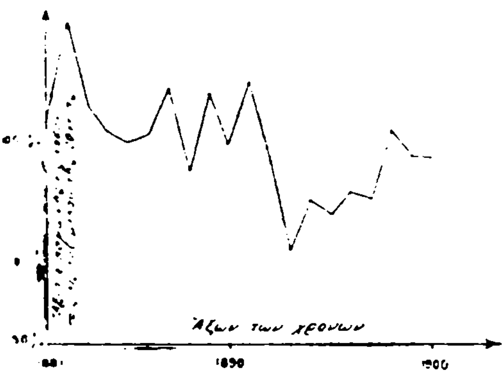
Ἐφαρμογή 2.

Ἡ ἀξία τοῦ εἰσαγωγικοῦ ἐμπορίου τῆς Ἑλλάδος κατὰ κεφαλὴν διὰ τὰ ἔτη 1881—1890 δίδεται ὑπὸ τοῦ κάτωθι πίνακος.

ἔτος	ἀξία	%	ἔτος	ἀξία	%
1881	862	107,23	1891	925	115,07
1882	1045	130,—	1892	774	96,28
1883	880	109,47	1893	585	72,77
1884	832	103,50	1894	692	86,08
1885	806	100,26	1895	669	83,22
1886	820	102,—	1896	710	88,32
1887	915	113,82	1897	705	87,70
1888	750	93,30	1898	832	103,50
1889	901	112,08	1899	784	97,52
1890	808	100,51	1900	780	97,03
			Μέσος	803,75=100 %	

ὁ μέσος ὁλοκλήρου τῆς περιόδου εἶναι 803,75· οὗτος λαμβάνεται ὡς βάσις πρὸς μετατροπὴν τῶν ἐτησίων δεδομένων εἰς τόσον τοῖς %.

Ἡ γραφικὴ τῆς ἄνω συναρτήσεως δίδεται ὑπὸ τοῦ σχήματοτ 3.



Σχῆμα 3

§ 6. *Ἱστογράμματα.*

Ταῦτα χρησιμοποιοῦνται, τόσον διὰ τὴν γραφικὴν ἀναπαράστασιν τῶν συναρτήσεων συχνοτήτων, ὅσον καὶ διὰ τὴν τῶν χρονολογικῶν τοιούτων. Καὶ προκειμένου μὲν περὶ συναρτήσεων συχνοτήτων, ἐφ' ἑκάστου διαστήματος τῆς τάξεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν μὲν τὸ διάστημα τοῦτο, ὕψος δὲ τὴν συχνότητα τῆς ἀντιστοίχου τάξεως. Ἐξυπακούεται ὅτι, ὡς εἰκός, οὕτω ἐπιτυγχάνεται μείζων ἀκρίβεια ἀναπαραστάσεως τῶν δεδομένων, καθ' ὅσον τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ὀρθογωνίου, εἶναι ἀκριβῶς αὐτὴ αὕτη ἡ δεδομένη συχνότης τῆς ἀντιστοίχου πρὸς τοῦτο τάξεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς. Ἐξ ἄλλου τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν μερικῶν ὀρθογωνίων ἀπὸ τοῦ σημείου $\chi_1 - \frac{\Delta\chi}{2}$ ἕως $\chi_\nu + \frac{\Delta\chi}{2}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὁλικὸν πλῆθος τῶν συχνοτήτων ἢ δεδομένων.

Διὰ τὰς ἐμπειρικὰς συναρτήσεις συχνοτήτων ἀνακύπτει τὸ πρόβλημα: ἐὰν αἱ ἀκραῖαι τούτων τιμαί—δηλ. αἱ εἰς τὸ κάτω καὶ ἄνω φράγμα τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἀντιστοιχοῦσαι συχνότητες—πρέπει νὰ θεωρῶνται ὡς συμπτωματικαί, ὡς ἀνώμαλοι τουτέστιν, καὶ συνεπῶς νὰ μὴ περιλαμβάνωνται εἰς τὴν τεχνικὴν ἐπεξεργασίαν τῶν δεδομένων καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἰς τὴν διὰ γραφικῆς χαράξεως ἀναπαράστασιν αὐτῶν ἢ ὄχι;

Ἐὰν κληθῇ τὸ πλῆθος τῶν συχνοτήτων τῆς δεδομένης συναρτήσεως $N = \Sigma\sigma(\chi_i)$ καὶ τεθῇ $t' = \frac{2N-1}{4N}$, τὸ t' θὰ δίδῃ τὴν πιθανότητα ἵνα σφάλμά τι ἀνηγμένον περιλαμβάνεται μεταξὺ $+\xi/\sigma$ καὶ $-\xi/\sigma$ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτόν, εἶναι μικρότερον τοῦ ξ/σ.

Ἐπειδὴ νῦν εἰς τὴν δεδομένην τιμὴν τοῦ t' ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $t = \xi/\sigma$ τῶν πινάκων οἵτινες δίδουσι τὰς τιμὰς τοῦ ὁλοκληρώματος τῆς πιθανότητος τῶν σφαλμάτων, τὸ ὁρικὸν σφάλμα ἢ ἀπόκλισις, ἥτις εἶναι ἐφικτὴ ἀπὸ τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ, θὰ δίδεται ὑπὸ $\xi = t.\sigma$, ὅπου σ τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου τῆς δεδομένης κατανομῆς καὶ ξ τὸ ἀπὸ τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ σφάλμα ἢ ἀπόκλισις δηλ. $\xi = A(\chi) - \chi$. Κατὰ ταῦτα ἡ σχέσις $\xi = t.\sigma$ γράφεται $t.\sigma = A(\chi) - \chi$ ἢ $\chi = A(\chi) - t.\sigma$ καὶ δίδει τὴν ὁρικὴν κλάσιν, κάτω τῆς ὁποίας εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑφίστανται παρατηρήσεις (συχνότητες). Ἐὰν οὐδεμία συχνότης ἀντιστοιχῇ πρὸς τὴν ὁρικὴν ταύτην κλάσιν, ἀλλὰ αἱ ἀκραῖαι ἀντιστοιχοῦσι εἰς τάξεις μείζονας, οὐδὲν τῶν δεδομένων παραλείπεται ἐν τῇ γραφικῇ ἀναπαραστάσει τῆς συναρτήσεως συχνοτήτων (1).

1) Ἡ πιθανότης σφάλματος περιλαμβανομένου μεταξὺ $+\xi/\sigma$ καὶ $-\xi/\sigma$ ἢ μικροτέρου τοῦ ξ/σ δίδεται ὡς γνωστὸν ὑπὸ

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi/\sigma} e^{-t^2/2}\, dt, \quad \text{ὅπου } t = \frac{\xi}{\sigma}$$

πίνακας τιμῶν τοῦ ἄνω ὁλοκληρώματος διὰ $t = 0$ ἕως $t = 1{,}00$ ἴδε εἰς Στατιστικήν, Θεωρητικήν—Πρακτικήν. Κ. Ἀθανασιάδου, 1931.

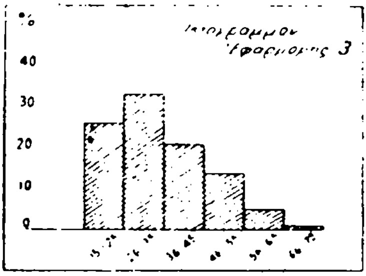
Ἡ ἑπομένη ἐφαρμογὴ θὰ καταστήσῃ σαφῆ τὴν μέθοδον τῆς ἐκτεθείσης χαράξεως.

Ἐ φ α ρ μ ο γ ὴ 3.

Ἡ κατανομὴ τῶν ἀποχωρησάντων τοῦ ἐπαγγέλματος Καπνεργατῶν κατὰ τὸ 1931 ὑπὸ ἔποψιν ἡλικίας δίδεται ὡς κάτωθι.

Ἡλικία	ἀριθμὸς Καπνεργατῶν	ἀριθμὸς Καπνεργατῶν εἰς % τοῦ συνόλου αὐτῶν
15—25	916	26
26—35	1185	33
36—45	751	21
46—55	504	14
56—65	181	5
66—	42	1
	Σύνολον 3579	100

Πρὸς χάραξιν τῆς ἄνω, αἱ συχνότητες τῶν τάξεων ἀνάγονται προηγουμένως εἰς τόσον τοῖς % τοῦ ὁλικοῦ πλήθους αὐτῶν 3579 λαμβανομένου ὡς 100 % καὶ ἀκολούθως ἐφαρμόζονται τὰ προεκτεθέντα.

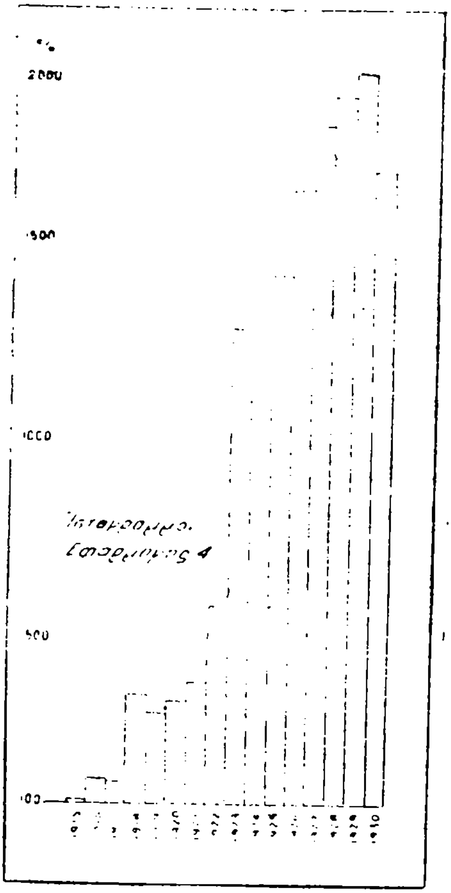


Σχῆμα 4

Ἐ φ α ρ μ ο γ ὴ 4.

Ὁ τιμάριθμος ἀκριβείας ζωῆς, παρ' ἡμῖν διὰ τὰ ἔτη 1915—1930 δίδεται ὑπὸ τοῦ κάτω πίνακος :

ἔτος	τιμάριθμος	ἔτος	τιμάριθμος
1915	117	1923	1181
1916	159	1924	1235
1917	156	1925	1414
1918	366	1926	1633
1919	323	1927	1790
1920	351	1928	1868
1921	398	1929	1923
1922	636	1930	1682



Σχῆμα 5

§ 7. **Ἀθροιστικαὶ καμπύλαι ἢ ἀψῖδες.**

Αἱ χαράξεις τούτων ἔχουσιν ἐφαρμογὴν ἐπὶ μόνον τῶν ἐμπειρικῶν συναρτήσεων συχνοτήτων καὶ ἀποσκοποῦσιν :

1ον. Εἰς τὰς συγκρίσεις ὁμοειδῶν φαινομένων. 2ον. Εἰς τὸν γραφικὸν προσδιορισμὸν ὡρισμένων σταθερῶν ἢ παραστατικῶν τιμῶν, τῶν παρ' αὐτῶν, διὰ μετασχηματισμοῦ, ἀπεικονιζομένων ἐμπειρικῶν συναρτήσεων συχνοτήτων.

Ἐὰν ἔχει δοθῆ ἡ τυχοῦσα ἐμπειρικὴ συνάρτησις συχνοτήτων $y_i = \sigma(\chi_i)$, ἡ ἀντίστοιχος ταύτης ἀθροιστικὴ σειρά, εὐκόλως ἐξευρίσκεται διὰ διαδοχικῶν προσθέσεων τῶν διαφόρων ὁμάδων συχνοτήτων, ἐξ οὗ καὶ τὸ ὄνομα της, ἐπὶ βάσει τῶν τελευταίων, γραφικῆς χαράξεως ὡς Στατιστικῆς Ἁψῖδος, ἀρκεῖ μόνον νὰ πληροῦται ἑκάστοτε ἡ συνθήκη : ὅ τ ι τ ὸ σ ύ ν ο λ ο ν τ ῶ ν π ε ρ ι π τ ώ σ ε ω ν (σ υ χ ν ο τ ή τ ω ν) ὅ π ε ρ π ρ ο έ κ υ ψ ε ν διὰ διαδοχικῶν προθέσεων τῶν προηγουμένων ὁμάδων αὐτῶν, ἀντιστοιχεῖ εἰς τιμὴν τῆς μεταβλητῆς μικροτέραν τοῦ μείζονος ὁρίου τῆς ἀντιστοίχου τάξεως τῶν τιμῶν αὐτῆς, ἤ, ἐπίσης, τὸ προκῦψαν ἐξ ἀθροίσεων τῶν ἑπομένων ὁμάδων αὐτῆς ἀντιστοιχεῖ εἰς τιμὴν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος ὁρίου τῆς ἀντιστοίχου τάξεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς.

Ἐπειδή, ὡς ἔχει λεχθῆ προλαβόντως, αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς ἐπαληθεύουσι τὴν διπλῆν ἀνισότητα $\chi_i - \frac{\Delta\chi}{2} < \chi < \chi_i + \frac{\Delta\chi}{2}$ · ὑποτίθεται δὲ ἐξ ἄλλου ὅτι αἱ συχνότητες κατανέμονται ὁμοιομόρφως ἐν ἑκάστῳ διαστήματ (τάξει τιμῶν τῆς μεταβλητῆς), τὰ ἀθροίσματα $\Phi(\chi_i) = \sum_{\nu=1}^{i} \sigma(\chi_\nu)\,\Delta\chi$ θὰ ἐκφράζωσι, συμβολικῶς, ὅτι ὑφίστανται $\Phi(\chi_i)$ ἐν τῷ συνόλῳ, συχνότητες ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τιμὴν τῆς μεταβλητῆς μικροτέραν τοῦ $\chi_i + \frac{\Delta\chi}{2}$ · ὅτε ἡ ἀθροιστικὴ σειρὰ $\Phi(\chi_i)$ θὰ καλεῖται δεξιοτρεπής.

Ἀντιθέτως τὰ ἀθροίσματα, $F \quad = \sum_{K} \sigma_{\nu} \quad _K)\,\Delta\chi$, ὅπου χ_ν ἡ τελευταία μεγίστη τιμὴ τῆς μεταβλητῆς, τοῦ Κ λαμβάνοντος τὰς τιμὰς $K=\nu$, $\nu-1$, $\nu-2, \ldots\ldots 1$) θὰ ἐμφαίνωσιν ὅτι ὑφίστανται $F(\chi_i)$ συχνότητες ἐν τῷ συνόλῳ, ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τιμὴν τῆς μεταβλητῆς μείζονα τοῦ $\chi_i - \frac{\Delta\chi}{2}$, ὅτε ἡ ἀθροιστικὴ σειρὰ θὰ καλεῖται ἀριστεροτρεπής.

Ἐὰν νῦν ὑφίστανται, π.χ., δύο ἐμπειρικαὶ συναρτήσεις συχνοτήτων, φαινομένων ὁμοειδῶν, ἔχουσαι ἰσαρίθμους ὁμάδας τάξεων, τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, τάξεων, τοῦ αὐτοῦ—ἴσου δηλ.—διαστήματος, τότε εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναγάγωμεν τὰς συχνότητας ἑκάστης τάξεως, ἑκατέρας τῶν συναρτήσεων, εἰς τόσον τοῖς ο|ο, ὡς πρὸς τὸ σύνολον τῶν συχνοτήτων τούτων καὶ ἀκολούθως νὰ προβῶμεν εἰς τὴν γραφικὴν ἀναπαράστασιν αὐτῶν, συναρτήσει τῶν δι' ἑκάστην τῶν ἐμπειρικῶν συναρτήσεων μορφουμένων ἀθροιστικῶν σειρῶν. Ἐὰν νῦν ἑνώσωμεν, δι' ἑκάστην ἀναπαράστασιν, τὰ σημεῖα $\chi = \chi_i$ καὶ $\Psi_i = \sum_{\nu=1}^{i} \sigma(\chi_i)\,\Delta\chi = \Phi(\chi_i)$ διὰ γραμμῆς πολυγωνικῆς, θὰ προκύψῃ δι' ἑκατέραν τῶν σειρῶν, ἡ ἀντίστοιχος εἰς ταύτην γραφικὴ ἀναπαράστασις, ἥτις λόγῳ τῆς μορφῆς αὐτῆς καλεῖται, ὡς προελέχθη, καὶ Στατιστικὴ Ἁψίς, ὅτε ἡ σύγκρισις πλέον εἶναι εὔκολος.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ ω, τὴν γωνίαν ἣν σχηματίζει ἡ εὐθεία ἥτις ἑνώνει τὰ σημεῖα (χ_i, Ψ_i) καὶ (χ_{i+1}, Ψ_{i+1}) μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστὸν

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{\chi_{i+1} - \chi_i} = \sigma(\chi_i + 1) \qquad (*)$$

ἤτοι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὴν τεταγμένην εἰς τὸ σημεῖον $\chi = \chi_i + 1$, τῆς ἀρχικῆς ἐμπειρικῆς συναρτήσεως $y_i = \sigma(\chi_i)$.

Ἑπομένως εἰς τὴν περιοχὴν ὅπου ἡ καμπύλη $y_i = \sigma(\chi_i)$ θὰ ἐμφανίζῃ τὸ μέγιστον αὐτῆς, ἡ καμπύλη $\Psi_i = \Phi(\chi_i)$ θὰ παρουσιάζῃ τὴν μεγαλυτέραν αὐτῆς κλίσιν.

Ἐὰν δὲ ἡ ἐμπειρικὴ καμπύλη ἀντικατασταθῇ ὑπὸ προσεγγιζούσης ἀναλυτικῆς τοιαύτης, εἰς τὰ μέγιστα τῆς $y = \sigma(\chi)$ θὰ ἀντιστοιχῶσι τὰ σημεῖα καμπῆς τῆς $\Psi = \Phi(\chi)$.

Ἐκτὸς ὅμως τῶν συγκρίσεων αἱ Ἀψῖδες χρησιμεύουσι διὰ τὸν γραφικὸν προσδιορισμὸν τῆς διαμέσου, τῶν τεταρτημορίων, τῶν δεκατημορίων, καὶ τῶν ἑκατοστημορίων.

Πράγματι, ἂν τῆς συναρτήσεως $y_i = \sigma(\chi_i)$ μετασχηματίσωμεν τὰς συχνότητας ἑκάστης τάξεως εἰς τόσον τοῖς o|o ὡς πρὸς τὸ σύνολον αὐτῶν, τότε θὰ ἔχωμεν $\Sigma\sigma(\chi) = N = 100$ o|o.

Ἡ διάμεσος ὅμως εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς (τετμημένη ἐπὶ τῆς γραφικῆς) ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς $\frac{N}{2} = 50$ o|o, τοῦ συνόλου τῶν συχνοτήτων.

Τὸ πρῶτον τεταρτημόριον ὁμοίως, $T_1 = \frac{N}{4} = 25$ o|o, τὸ τρίτον τοιοῦτον ἐπίσης, $T_3 = \frac{3N}{4} = 75$ o|o, τοῦ συνόλου τῶν συχνοτήτων.

Τὸ πρῶτον δεκατημόριον $D_1 = \frac{N}{10} = 10$ o|o, τὸ δεύτερον $D_2 = \frac{2N}{10} = 20$ o|o κλπ. τοῦ συνόλου τῶν συχνοτήτων.

Ἐὰν ἑπομένως, προβῶμεν εἰς τὴν χάραξιν τῆς $\Psi_i = \Phi(\chi_i)$ μετὰ προηγούμενον, ἐννοεῖται, μετασχηματισμὸν τῶν συχνοτήτων ἑκάστης τάξεως εἰς τόσον τοῖς o|o ὡς πρὸς τὸ σύνολον αὐτῶν καὶ τὴν συναρτήσει τούτων μόρφωσιν τῆς $\Psi_i = \Phi(\chi_i)$, τότε ἂν ἐκ τοῦ μέσου τῆς μεγίστης τεταγμένης τῆς ἀθροιστικῆς καμπύλης ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων αὕτη θὰ τάμῃ ταύτην—τὴν ἀθροιστικὴν καμπύλην—εἰς τὸ σημεῖον Μ, ἡ τετμημένη οὗτινος ἔσται ἡ ζητουμένη Δ ι ά μ ε σ ο ς. Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον τεταρτημόριον ἄγοντες τὴν παράλληλον κατὰ τὸ 1/4

(*) Καθ' ὅσον ἐπειδὴ $\Psi_i = \sum_{\nu=1}^{i} \sigma(\chi_\nu)\,\Delta\chi = \Delta\chi\,[\sigma(\chi_1) + \sigma(\chi_2) + \dots + \sigma(\chi_\nu)]$ καὶ $\Psi_{i+1} = \Delta\chi\,[\sigma(\chi_1) + \sigma(\chi_2) + \dots + \sigma(\chi_i) + \sigma(\chi_{i+1})]$, ὅθεν διὰ ἀφαιρέσεως τῆς πρώτης ἰσότητος τῆς δευτέρας, κατὰ μέλη, προκύπτει ὁ τύπος, τοῦ $\Delta\chi$ λαμβανομένου ἴσου πρὸς 1.

τοῦ ὕψους τῆς μεγίστης τεταγμένης, τὸ τρίτον τεταρτημόριον κατὰ τὰ τρία τέταρτα αὐτῆς κλπ. Ὁμοίως προκειμένου περὶ προσδιορισμοῦ τῶν διαφόρων δεκατημορίων καὶ ἑκατοστημορίων.

Ἐὰν διὰ τὸν γραφικὸν προσδιορισμὸν τῶν ὡς ἄνω σταθερῶν χρησιμοποιεῖται τετραγωνισμένος χάρτης—κλίμακος ὡς γνωστὸν 1 : 100—ἐπειδὴ κάθε τετραγωνίδιον ἔχει μῆκος πλευρᾶς 10 χιλιοστά, ἂν λαμβάνεται ὡς τάξις τιμῶν μεταβλητῆς ἰσόμηκες πρὸς τὴν πλευρὰν τούτου ἄνυσμα, πίπτῃ δὲ ἡ διάμεσος μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς βάσεως τοῦ τετραγωνιδίου, θὰ ἀναχθῇ τὸ προστεθησόμενον εἰς χιλιοστά, μέρος τῆς βάσεως τοῦ τετραγωνιδίου εἰς τὴν τιμὴν τῆς ἀρχῆς αὐτοῦ, δι᾽ ἀναγωγῆς τούτου εἰς μέρη τοῦ διαστήματος τῆς τάξεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς. Ἐὰν π. χ. ἡ διάμεσος πίπτῃ μεταξὺ τῆς 4 καὶ 5 διαιρέσεως, εἰς ἀπόστασιν πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς 4 διαιρέσεως 7 χιλ. παριστᾷ δὲ ἡ τετάρτη διαίρεσις τὸν ἀριθμὸν 25, ἡ πέμπτη τὸν ἀριθμὸν 30, τοῦ διαστήματος συνεπῶς ὄντος 5 μονάδες, τότε ἡ διάμεσος θὰ εἶναι

$$\Delta = 25 + \frac{5\times 7}{10} = 28{,}5.$$

Αἱ κατωτέρω ἐφαρμογαὶ εὐκολύνουσι τὴν κατανόησιν τῆς ἐκτεθείσης χαράξεως.

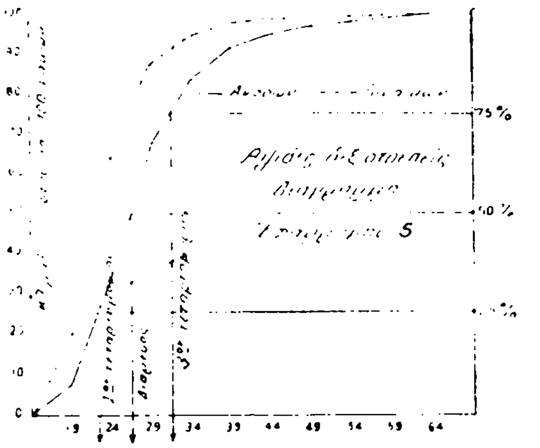
Ἐ φ α ρ μ ο γ ὴ 5.

Ἡ κατανομὴ τῶν νυμφευθέντων ἀνδρῶν καὶ γυναικῶν καθ᾽ ἡλικίαν τὸ 1932, δίδεται ὑπὸ τοῦ κάτωθι πίνακος εἰς τόσον τοῖς °/₀₀ τοῦ συνόλου τῶν νυμφευθέντων κατὰ φύλλον.

Ἡλικία	Ἄνδρες $\sigma(\chi_i)$	Γυναῖκες $f(\chi_i)$
— 20	67,27	199,99
20—24	270,77	450,97
25—29	336,75	226,21
30—34	160,31	70,24
35—39	81,75	31,64
40—44	37,92	11,65
45—49	22,16	5,63
50—54	10,88	1,99
55—59	6,64	1,03
60—64	2,97	0,26
65—	2,58	0,39
Σύνολον	1000	1000

Ὁ ἄνω πίναξ, μετασχηματίζεται, κατὰ τὰ προεκτεθέντα, ὡς κάτωθι :

Ἡλικία κάτω τῶν	Ἄνδρες	Γυναῖκες
20	67,27	199,99
24	338,04	650,96
29	674,79	877,17
34	835,10	947,41
39	916,85	979,05
44	954,77	990,70
49	976,93	996,33
54	987,81	998,32
59	994,45	999,35
64	997,42	999,61
69	1000.—	1000.—



Σχῆμα 6

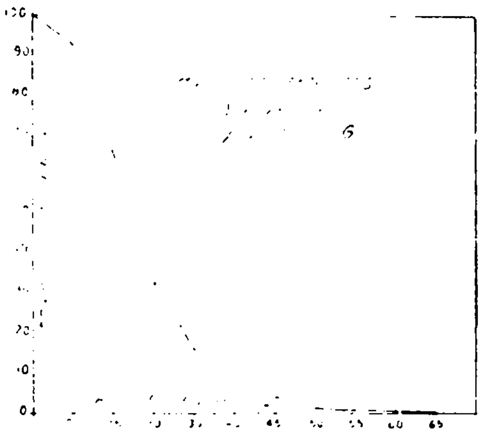
Ἡ ἀψὶς τοῦ ἄνω σχήματος εἶναι δεξιοτρεπής, διότι βαίνει ἀνιοῦσα ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά.

Κατωτέρω παραθέτομεν ἀριστερότροπον ἀθροιστικὴν σειρὰν ὑπολογισθεῖσαν συναρτήσει τῶν δεδομένων τῆς πρώτης στήλης (ποσοστὸν ἀνδρῶν) τῆς 5 ἐφαρμογῆς.

Ἐφαρμογὴ 6.

Ἡλικία ἄνω	Ποσοστὸν γάμων ἀνδρῶν $F(\chi_i)$
16	1000.—
20	932,73
25	661,96
30	325,21
35	164,90
40	83,15
45	45,23
50	23,07
55	12,19
60	5,55
65	2,58

Ἡ γραφικὴ χάραξις δίδεται ὑπὸ τοῦ σχήματος.



Σχῆμα 7

Ἡ ἀψὶς τοῦ ἄνω σχήματος εἶναι ἀριστερότροπος, διότι βαίνει ἀνιοῦσα ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἢ κατέρχεται ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά.

§ 8. *Καμπύλαι συγκεντρώσεως.*

Αὗται χρησιμοποιοῦνται οὐ μόνον διὰ τὴν σύγκρισιν συναρτήσεων συχνοτήτων ὁμοειδῶν φαινομένων ἰδίας κατηγορίας ἀλλὰ ἐπίσης καὶ διὰ τὴν σπουδὴν τῆς μεταβλητικότητος αὐτῶν.

Αἱ χαράξεις αὗται ἐφαρμόζονται διὰ τὰς συγκρίσεις, πρὸ παντός, τῶν συναρτήσεων κατανομῆς τοῦ ἐθνικοῦ πλούτου, τοῦ εἰσοδήματος, τῶν κεφαλαίων καὶ τῶν κερδῶν ἀνωνύμων ἑταιρειῶν κλπ., κατὰ κλιμάκια καὶ ἀριθμὸν κατόχων, εἰσοδηματιῶν, κεφαλαίων κλπ.

Πρὸς χάραξιν τῶν καμπύλων συγκεντρώσεως, ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ λαμβάνεται ὁ ἀριθμὸς τῶν περιπτώσεων, ὅστις παριστᾷ τὸν ὑπ' ὄψει χαρακτῆρα, ὅστις εἶναι κατώτερος δεδομένου τινος ὁρίου, ὡς ἀντίστοιχος δὲ τούτου τεταγμένη λαμβάνεται τὸ σύνολον τῶν συχνοτήτων αἵτινες εὑρίσκονται κάτωθι τοῦ ἀντιστοίχου ὁρίου.

Ἐξυπακούεται ὅτι ἡ χάραξις διενεργεῖται μετὰ προγενεστέραν ἀναγωγὴν εἰς τόσον τοῖς %, τῶν ὅρων τῶν ἀθροιστικῶν σειρῶν, τόσον τῆς τῶν περιπτώσεων ὅσον καὶ τῆς τοῦ θεωρουμένου χαρακτῆρος, ὡς πρὸς τὸ σύνολον ἑκατέρας τούτων.

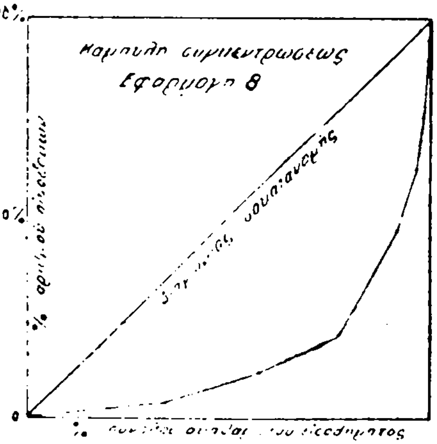
Ἐ φ α ρ μ ο γ ὴ 8.

Ὁ κάτωθι πίναξ δίδει τὴν κατανομὴν τῶν παρ' ἡμῖν κατὰ τὸ 1929 φορολογουμένων οἰκοδομῶν μετὰ τοῦ ἐτησίου ἀκαθαρίστου εἰσοδήματος αὐτῶν.

Ἀκαθάριστον ἐτήσιον εἰσόδημα	ἀριθμὸς οἰκοδομῶν	ἐτήσιον ἀκαθάριστον εἰσόδημα εἰς χιλ. δρ.
ἕως 3000 δρ.	96.632	144.948
3000 – 5000	68.669	274.676
5000 – 10000	57.579	431.842
10000 – 25000	40.174	703.045
25000 – 50000	14.319	536.963
50000 – 100000	6.061	454.575
100000 – 250000	2.595	454.125
250000 – 500000	505	189.375
500000 καὶ ἄνω	173	129.750
	286.707	3.319.299

Ὁ ἄνω πίναξ μετασχηματίζεται εἰς τὸν κάτωθι, κατὰ τὰ ἐκτεθέντα.

Ἀκαθάριστον ἐτήσιον εἰσόδημα		ἀριθμὸς οἰκοδομῶν	(α) % τοῦ συνόλου	ἐτήσιον ἀκαθάριστον εἰσόδημα	(β) % τοῦ συνόλου
κάτω τῶν	3.000	96.632	33,62	144.948	4,36
» »	5.000	165.301	57,52	419.624	12,63
» »	10.000	222.880	77,56	851.466	25,64
» »	25.000	263.054	91,54	1.554.511	46,82
» »	50.000	277.373	96,52	2.091.474	63,—
» »	100.000	283.434	98,63	2.546.049	76,68
» »	250.000	286.029	99,53	3.000.174	90,36
» »	500.000	286.534	99,71	3.189.549	96,07
» »	20.000.000	286.707	100.—	3.319.299	100.—



Σχῆμα 8

Τὰ δεδομένα τῆς στήλης (α) φέρονται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ, ἀντιστοίχως δὲ αὐτῶν ἄγονται ὡς τεταγμέναι τὰ δεδομένα τῆς στήλης (β). Ἡ ἕνωσις τοῦ πέρατος τῶν τεταγμένων τούτων δι' εὐθειῶν παρέχει τὴν ζητουμένην καμπύλην συγκεντρώσεως ἢ τὴν τοῦ Lorenz.

Αὕτη παριστᾷ τὸν τρόπον τῆς κατανομῆς καὶ τὴν μεταβλητικότητα τοῦ θεωρουμένου φαινομένου, καθ' ὅσον ἐὰν ὁ σπουδαζόμενος χαρακτήρ, ὅστις ἐπὶ τοῦ προκειμένου εἶναι τὸ ἐτήσιον ἀκαθάριστον εἰσόδημα, ἦτο ὁ αὐτὸς (ἴσος) καθ' ὅλας τὰς περιπτώσεις, δηλ. εἰς ἑκάστην κλίμακα ἐτησίου εἰσοδήματος, τὸ σχεδιάγραμμα θὰ ἦτο ὡς ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου, ἥτις διὰ τοῦτο καὶ καλεῖται Διαγώνιος ἰσοκατανομῆς. Τοῦτο θὰ ἀπετέλει τὴν περίπτωσιν μεγίστης ἰσότητος ἢ ἐλαχίστης μεταβλητικότητος. Ἀντιθέτως, ἐφ' ὅσον ἡ ἀνισότης ἐπιτείνεται, ἐπὶ τοσοῦτον ἡ γραφικὴ μετάφρασις τῶν στηλῶν (α) καὶ (β) θὰ ἐμφανισθῇ ὡς καμπύλη ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον κοίλη. Ἡ συγκέντρωσις τῶν εἰσοδημάτων εἰς ἀριθμόν τινα, περιωρισμένον, ἀτόμων θὰ παράσχῃ καμπύλην, σχεδὸν συμπίπτουσαν μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου. Ἀντιθέτως μικροτέρα ἀνισότης θὰ παρασταθῇ διὰ καμπύλης προσεγγιζούσης ἐπὶ μᾶλλον τὴν διαγώνιον. Τὸ γεγονὸς ὅτι δύνανται νὰ χαραχθῶσι πλεῖσται καμπύλαι τοῦ εἴδους τούτου, ἔχουσαι, οὐχ' ἧττον τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον καταλήξεως ἐν τῷ τετραγώνῳ, εὐκολύνει, αἰσθητῶς, τὰς συγκρίσεις μεταξὺ τῶν διαφόρων κατανομῶν αἵτινες ἀναπαρίστανται ὑπὸ διαφόρων καμπύλων συγκεντρώσεως.

§ 9. *Σύγκρισις ἐμπειρικῶν καμπύλων.*

Ἡ σύγκρισις τῶν χρονολογικῶν συναρτήσεων, αἵτινες παριστῶσι φαινόμενα ἑτεροειδῆ σκοπὸν ἔχει: 1ον νὰ καταστήσῃ ἐμφανεῖς τὰς ἀντιστρόφους σχέσεις τῶν ὑπ' ὄψει φαινομένων, 2ον νὰ ὑποβοηθήσῃ τὴν ἀνεύρεσιν καὶ διαπίστωσιν τῆς, τυχόν, ὑφισταμένης σταθερότητος εἰς τὰς σχέσεις ταύτας, 3ον νὰ χρησιμεύσῃ διὰ τὴν σπουδὴν τῶν φάσεων καὶ τῶν ἐναλλαγῶν αὐτῶν, 4ον νὰ ὑποβοηθήσῃ τὴν διόρθωσιν τῶν, τυχόν, ἐσφαλμένων δεδομένων ἢ καὶ τὴν συμπλήρωσιν τούτων, ἐφ' ὅσον ταῦτα ἐμφανίζουσι χάσματα. Ἡ ἔνταξις ἐν τῷ αὐτῷ διαγράμματι ἁπλῶς καὶ μόνον γραφικῶν, αἵτινες ἀφορῶσι δύο ἢ πλείονα διάφορα φαινόμενα, δὲν ἀποτελεῖ τὸ ἅπαντον διὰ τὴν σύγκρισιν αὐτῶν.

Κατὰ κανόνα, δέον ἡ σχέσις μεταξὺ τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν τεταγμένων εἰς ἀμφότερα τὰ διαγράμματα νὰ εἶναι ἡ αὐτή· ἄλλως πᾶσα, τυχόν, ἐπιχειρουμένη σύγκρισις ἄγει εἰς, ἀπολύτως, ἐσφαλμένα συμπεράσματα.

Ἀπαραιτήτως, πρὸ πάσης συγκρίσεως διὰ γραφικῶν χαράξεων, δέον νὰ διαπιστοῦται, ἐὰν ἀμφότεραι ἔχωσι χαραχθῇ μὲ τὴν αὐτὴν κλίμακα. Ἐὰν ἡ κλῖμαξ ἀμφοτέρων τῶν γραφικῶν δὲν εἶναι ἡ αὐτή, τότε ἑνοποιοῦμεν ταύτην, ἀντικαθιστῶντες τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν δεδομένων διὰ τοῦ ποσοστοῦ αὐτῶν ὡς πρὸς τὴν μέσην τιμὴν ὁλοκλήρου τῆς χρονικῆς περιόδου ἑκατέρας τῶν συναρτήσεων, κατὰ τὰ ἐκτεθέντα εἰς τὴν 5 §.

Οὐχ ἧττον ἡ ἔνταξις, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ διαγράμματος, δύο γραφικῶν παριστωσῶν ἑτεροειδῆ φαινόμενα ἐπὶ σκοπῷ συγκρίσεως τούτων, δύναται καὶ ἄλλως νὰ γίνῃ ἤτοι ἀντὶ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δεδομένων νὰ χαραχθῶσι.

1ον. Αἱ ἀποκλίσεις ἑκάστης τούτων ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου αὐτῶν μέσου.

2ον. Αἱ αὐταὶ ὡς ἄνω ἀποκλίσεις, ἀναχθεῖσαι εἰς ποσοστὰ τοῦ μέσου σφάλματος τετραγώνου τῆς ἀντιστοίχου συναρτήσεως.

Ἐὰν δηλ. $A(\chi)$ ὁ μέσος τῶν δεδομένων τοῦ ἑνὸς τῶν φαινομένων, ἡ ἀπόλυτος ἀπόκλισις τοῦ τυχόντος δεδομένου (ὅρου) θὰ δίδεται ὑπὸ $\xi_i = \chi_i - A(\chi)$ καὶ ἡ ἀνηγμένη τοιαύτη ὑπὸ $\lambda_i = \frac{\xi_i}{\sigma} = \frac{\chi_i - A(\chi)}{\sigma}$, ὅπου

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma \xi_i^2}{\nu}}$, τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου τῆς δοθείσης συναρτήσεως καὶ

οὕτω ὁμοίως διὰ τὰ λοιπὰ φαινόμενα.

Οὐχ ἧττον ὅμως ἐπειδὴ ἡ ἔντασις τῆς μεταβολῆς ἑκάστης χρονολογικῆς συναρτήσεως, ὡς καὶ κάθε ἄλλης ἐμπειρικῆς συναρτήσεως, μετρεῖται ὑπὸ τοῦ μέσου σφάλματος τετραγώνου σ, πρὸς ἀπαλοιφὴν τῆς κατὰ τὰ ἄνω διαφορᾶς τῆς ἐντάσεως τῶν μεταβολῶν πολ/ζεται ἡ σειρὰ τῶν ἀπολύτων ἀποκλίσεων ξ_i τῆς πρώτης συναρτήσεως ἐπὶ τὸν λόγον $K = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, ὅπου σ_1, σ_2 τὰ μέσα σφάλματα τετραγώνου τῆς πρώτης καὶ δευτέρας συναρτήσεως καὶ ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι $\sigma_1 < \sigma_2$.

Ἐν ἄλλαις λέξεσιν ὑποκαθιστῶμεν τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα (τεταγμένας), ἑκάστης χρονολογικῆς συναρτήσεως, διὰ τῶν ἀποκλίσεων αὐτῶν ὡς πρὸς τὸν μέσον ἀριθμητικὸν τῶν ἀντιστοίχων δεδομένων καὶ πολλαπλασιάζομεν τὰς ἀποκλίσεις τῆς πρώτης συναρτήσεως ἐπὶ τὸ πηλῖκον τῶν δύο μέσων σφαλμάτων τετραγώνου καὶ τοῦτο ἐφ᾽ ὅσον τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου τῆς δευτέρας συναρτήσεως εἶναι μεῖζον τοῦ τῆς πρώτης· ἄλλως διαιροῦμεν τὰς ἀποκλίσεις τῆς πρώτης σειρᾶς διὰ τοῦ πηλίκου τῶν δύο μέσων σφαλμάτων τετραγώνου.

3ον. Παραλλαγὴ τῆς ἄνω μεθόδου εἶναι καὶ ἡ ἀπαλοίφουσα οὐ μόνον τὴν διαφορὰν τῆς ἐντάσεως τῶν μεταβολῶν ἀλλὰ καὶ ἡ ἐκμηδενίζουσα τὴν ἐκ τῆς κινήσεως μακρᾶς διαρκείας προκύπτουσαν τοιαύτην.

Πρὸς τοῦτο ἡ ἐμπειρικὴ συνάρτησις $y_i = \sigma(\chi_i)$ ἀντικαθίσταται ὑπὸ τῆς προσεγγιζούσης ἀναλυτικῆς τοιαύτης $Z = f(\chi)$, (ἐπὶ τῇ συνθήκῃ ὅπως

Ζω y) ἥτις καὶ καλεῖται σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς κ ι ν ή σ ε ω ς μ α κ ρ ᾶ ς δ ι α ρ κ ε ί α ς τοῦ ὑπ' ὄψει φαινομένου ἢ τ ά σ ι ς αὐτοῦ. Τούτου γενομένου ἐξευρίσκονται αἱ εἰς τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς χ ἀντιστοιχοῦσαι ἀποκλίσεις $+\varepsilon = y - Z$ καὶ συναρτήσει αὐτῶν καθορίζεται τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{\nu}}$.

Πρὸς χάραξιν νῦν τῆς καμπύλης λαμβάνονται ὡς τεταγμέναι τοῦ χ_i αἱ ἀποκλίσεις ε_i ἀναχθεῖσαι εἰς μέρη τοῦ σ δηλ. αἱ $\frac{\varepsilon_i}{\sigma}$.

Ἡ ἄνω μέθοδος προϋποθέτει ὅτι τὰ δεδομένα εἶναι μέσα ἐτήσια καὶ συνεπῶς **ἀπηλλαγμένα** τῆς ἐ π ο χ ι α κ ῆ ς δ ι α κ υ μ ά ν σ ε ω ς, **ἄλλως, ἐὰν ταῦτα** εἶναι μηνιαῖα, πρέπει ἐκ τούτων νὰ ἀπαλοιφῇ ἡ ἐποχιακὴ διακύμανσις πρῶτον **καὶ εἶτα** νὰ ἐφαρμοσθῇ **ἡ** ἐκτεθεῖσα μέθοδος.

Ἐ φ α ρ μ ο γ ὴ 9.

Αἱ στεμματικαὶ ἀποδόσεις τῆς Βρώμης καὶ τῆς Σικάλεως διὰ τὰ ἔτη 1928—1935 δίδονται ὡς κάτωθι:

			Ἀ π ο κ λ ί σ ε ι ς			
ἔτος	Βρώμη	Σίκαλις	Βρώμης	Σικάλεως		
			ξ	φ	ξ^2	φ^2
1928	68	80	—1	1	1	1
1929	59	60	—10	—19	100	361
1930	63	73	—6	—6	36	36
1931	55	66	—14	—13	196	169
1932	74	78	5	—1	25	1
1933	97	96	28	17	784	289
1934	73	85	4	6	16	36
1935	64	100	—5	21	25	441
Μέση ἀπόδοσις 69		70			1183	1334

Τὸ μ. σφάλμα τετραγώνου, ἀπὸ τοῦ μέσου, τῆς Βρώμης εἶναι

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\Sigma\xi^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{1183}{8}} = 12{,}16$$

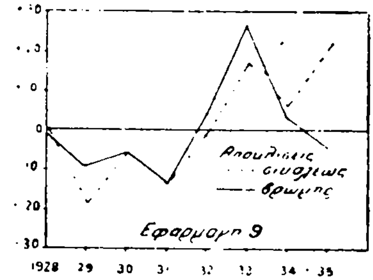
ὁμοίως τῆς Σικάλεως εἶναι $\sigma_2 = \sqrt{\frac{1334}{8}} = 12{,}91$

καὶ $K = \frac{12{,}16}{12{,}91} = 0{,}94$

Ἑπομένως ὁ πίναξ τῶν ἀποκλίσεων μετατρέπεται εἰς τὸν κάτωθι.

Ἀποκλίσεις μετὰ ἀπαλοιφὴν τῆς διαφορᾶς ἐντάσεως τῶν μεταβολῶν

ἔτος	Βρώμη	Σίκαλις
1928	— 0,94	1
1929	— 9,40	—19
1930	— 5,64	— 6
1931	—13,16	—13
1932	4,70	— 1
1933	26,32	17
1934	3,76	6
1936	— 4,70	21



Σχῆμα 9

§ 10. Πολικὰ Διαγράμματα.

Ἡ χάραξις τῶν πολικῶν διαγραμμάτων προϋποθέτει γνῶσιν ὁρισμῶν τινων, οὓς παρέχομεν κατωτέρω. Ὄντως, ἡ θέσις σημείου τινὸς Μ ἔν τινι ἐπιπέδῳ δύναται νὰ ὁρισθῇ, ἂν δοθῇ τυχοῦσα εὐθεία Χ'Χ καὶ σημεῖόν τι ἐπ' αὐτῆς, τὸ Ο, ὑπὸ τῆς εὐθείας ἥτις ἑνώνει τὸ σημεῖον Ο μετὰ τοῦ Μ, τῆς ΟΜ καὶ τῆς γωνίας ἣν σχηματίζει ἡ εὐθεία ΟΜ μετὰ τοῦ ἄξονος Χ'Χ. Ἡ εὐθεία Χ'Χ καλεῖται πολικὸς ἄξων, τὸ σημεῖον Ο, πόλος, ἡ εὐθεία ΟΜ, ἐπιβατικὴ ἀκτὶς καὶ ἡ γωνία ΧΟΜ, πολικὴ γωνία. Συμβολικῶς ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς παρίσταται διὰ τοῦ ρ καὶ ἡ πολικὴ γωνία διὰ τοῦ ω καὶ τὸ σημεῖον Μ, τὸ ἔχον συντεταγμένας ρ καὶ ω, πολικὰς καλουμένας, διὰ τοῦ Μ (ρ, ω).

Ἐὰν ρ λαμβάνῃ τὰς ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$ τιμάς, τότε παριστᾷ πάντως τὰ ἐπὶ τῆς, διὰ τῶν σημείων Ο καὶ Μ διερχομένης, εὐθείας σημεῖα, ἐὰν νῦν ω λαμβάνῃ τὰς ἀπὸ ο ἕως 360° τιμάς, τότε ἡ ἡμιευθεία ΟΜ διαγράφει περιφέρειαν, ἐὰν ρ σταθερόν, κέντρον ἔχουσαν τὸν πόλον καὶ ἀκτῖνα τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα καὶ ἑπομένως δίδει πάντα τὰ σημεῖα τοῦ γραφομένου κύκλου, ἐὰν ρ μεταβλητὸν ταὐτοχρόνως, τότε δίδει πάντα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἐφ' οὗ κεῖται.

Ἂν ἔχῃ δοθῇ ὁ πόλος καὶ ὁ πολικὸς ἄξων, τότε αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἐντελῶς ὡρισμέναι καὶ ἀντιστρόφως.

Εἰς τὰ πολικὰ διαγράμματα οἱ τεταγμέναι ἄγονται περί τι κεντρικὸν σημεῖον (πόλον) διὰ νὰ ἀχθῶσι ἐκ τούτου ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων ὅστις, εἰς ταῦτα, λαμβάνει κυκλικὴν μορφήν.

Ἐξυπακούεται ὅτι αἱ τεταγμέναι ἔχουσι μῆκος ἀνάλογον πρὸς τὴν ὑπ' ὄψει συχνότητα ἣν ἀναπαριστῶσι. Οὕτω τὸ γεγονὸς θὰ κεῖται εἰς ἀπόστασιν Μ ἀπὸ τοῦ πόλου, ὅτε ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς ΟΜ θὰ εἶναι ἡ τεταγμένη.

Ἡ χρῆσις τῶν πολικῶν διαγραμμάτων πληροῖ διττὴν ἀνάγκην, ἤτοι:

1ον. Διὰ τὴν ἀναπαράστασιν χρονολογικῶν συναρτήσεων μορφῆς μᾶλλον ἢ ἧττον περιοδικῆς, περιόδου συνηθέστατα ἐτησίας καὶ

2ον. Διὰ τὴν ἀναπαράστασιν ὡρισμένων ποιοτοποσοτικῶν κατανομῶν.

Ἐὰν νῦν πρόκειται περὶ περιοδικῆς χρονολογικῆς συναρτήσεως ἀπαραίτητον τυγχάνει νὰ ἐξαλειφθῇ ἡ διαφορὰ ἥτις ὑφίσταται ὡς ἐκ τῆς ἀνίσου διαρκείας εἰς ἡμέρας τῶν διαφόρων μηνῶν, διὰ τῆς ἀναγωγῆς πάντων τούτων εἰς μῆνας διαρκείας ἑκάστου 30 ἡμερῶν.

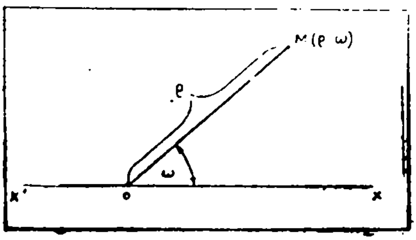
Ἐὰν ὅθεν $N = \Sigma\sigma(\chi_i)$ τὸ σύνολον τῶν ἐτησίων συχνοτήτων καὶ $\sigma(\chi_i)$ ἡ συχνότης τοῦ μηνὸς χ_i, θὰ ἔχωμεν διὰ τοῦτον νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἔκφρασιν

$$K = \frac{\sigma(\chi_i)\,1000}{\Sigma\sigma(\chi_i)} \cdot \frac{E}{M}$$

ὅπου Ε=365, Μ=διάρκεια ἀντιστοίχου μηνὸς εἰς ἡμέρας, 31,30 καὶ 28 ἢ 29 διὰ τὸν Φεβρουάριον, ἀναλόγως ἂν τὸ ἔτος εἶναι δίσεκτον ἢ ὄχι.

Ἐὰν ὅθεν τὸ φαινόμενον ἀναφέρεται εἰς ἐκδηλώσεις μηνιαίας κατά τι ἔτος, πρὸς γραφικὴν ἀναπαράστασιν τῆς περιοδικότητος τῶν ἐκδηλώσεων αὐτοῦ, γράφομεν περιφέρειαν κύκλου εἰς ἣν ἡ ἀκτὶς ἰσοῦται, συμβατικῶς, πρὸς τὸν μηνιαῖον μέσον τῶν συνολικῶν αὐτοῦ συχνοτήτων. Εἶτα διαιροῦμεν τὴν γραφεῖσαν περιφέρειαν εἰς 12 ἴσα μέρη, διὰ τόξων βαινόντων ἐπὶ ἴσων ἐπικέντρων γωνιῶν 30° καὶ ἑνοῦμεν τὰ σημεῖα διαιρέσεως τῆς περιφερείας μετὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς διὰ ἀκτίνων. Τὰς ἀκτίνας ταύτας κατὰ τάξιν διαδοχῆς θεωροῦμεν ὡς παριστώσας τοὺς διαδοχικοὺς μῆνας Ἰανουάριον, Φεβρουάριον κλπ.

Ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ἥτις παριστᾷ τὸν Ἰανουάριον λαμβάνομεν ἄνυσμα ἀνάλογον πρὸς τὴν κατὰ τὸν μῆνα τοῦτον συχνότητα τοῦ ὑπ' ὄψει φαινομένου καὶ ἐφεξῆς οὕτω:

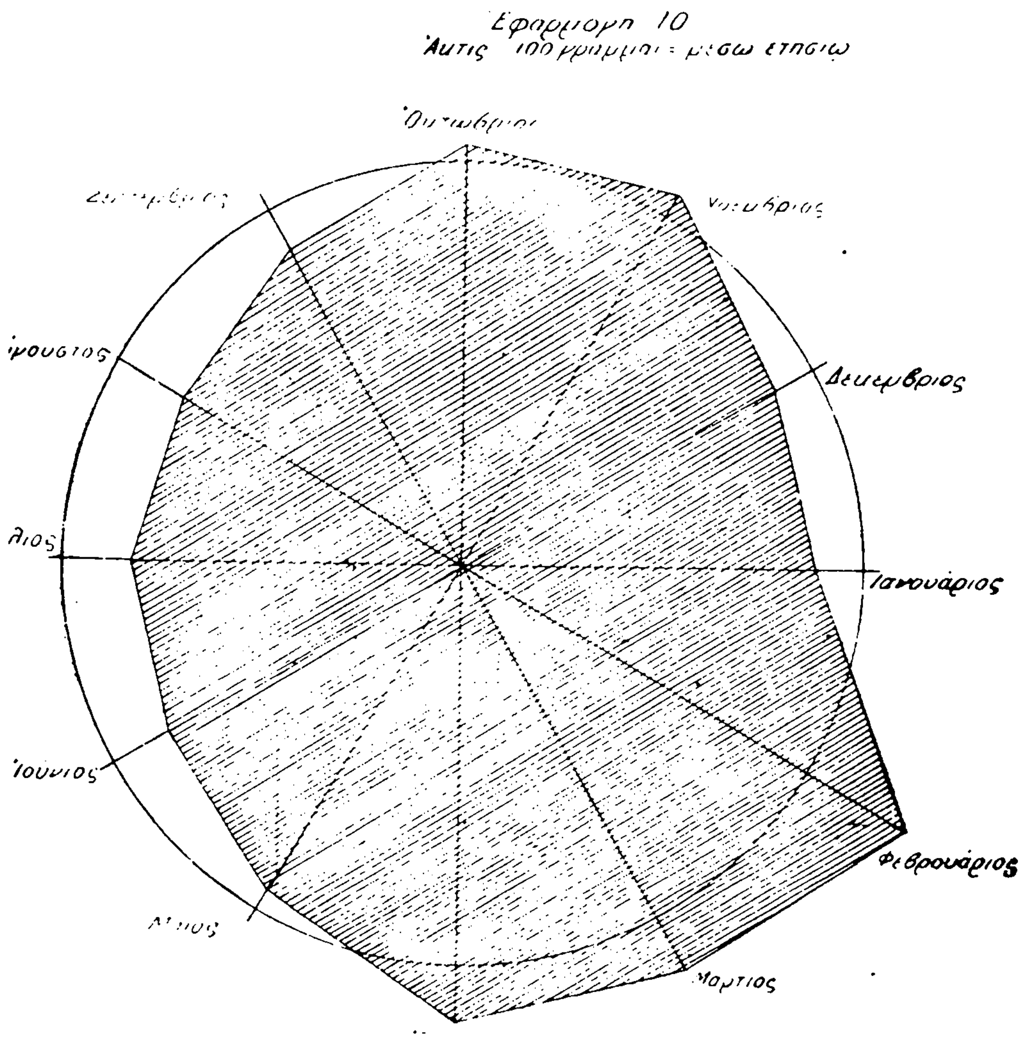


Σχημα 9α

'Εφαρμογὴ 10.

Αἱ κατὰ μῆνα γεννήσεις ζώντων τὸ 1933 δίδονται ὡς κάτωθι :

Μὴν	Γεννήσεις σ (χ_i)	‰	Πολ/σται. ἀναγωγῆς	Ποσοστὸν μετὰ ἀπαλοιφὴν ἀνίσου διαρτῶν μηνῶν
'Ιανουάριος	15.639	82,5	11,77	94.7 ‰
Φεβρουάριος	18.991	100,2	13,03	130,6
Μάρτιος	20.481	108	11,77	127,1
'Απρίλιος	18 036	95,1	12,17	115,7
Μάϊος	15.396	81,2	11,77	95,6
'Ιούνιος	13.318	70,2	12,17	85,4
'Ιούλιος	13.210	69,7	11,77	82,0
Αὔγουστος	12.990	68,5	11,77	80,6
Σεπτέμβριος	13.761	72,6	12,17	88,3
'Οκτώβριος	16.772	88,5	11,77	104,1
Νοέμβριος	16.582	87,5	12,17	106,5
Δεκέμβριος	14.407	76,	11,77	89,4
Σύνολον	189.583	1000		1200



Τὰ πολικὰ διαγράμματα χρησιμεύουσι, ὡς προελέχθη, καὶ διὰ τὴν ἀναπαράστασιν ποιοτοποσοτικῶν κατανομῶν. Ἁπλοῦν παράδειγμα θὰ καταστήσῃ σαφῆ τὸν τρόπον τῆς τοιαύτης ἀναπαραστάσεως.

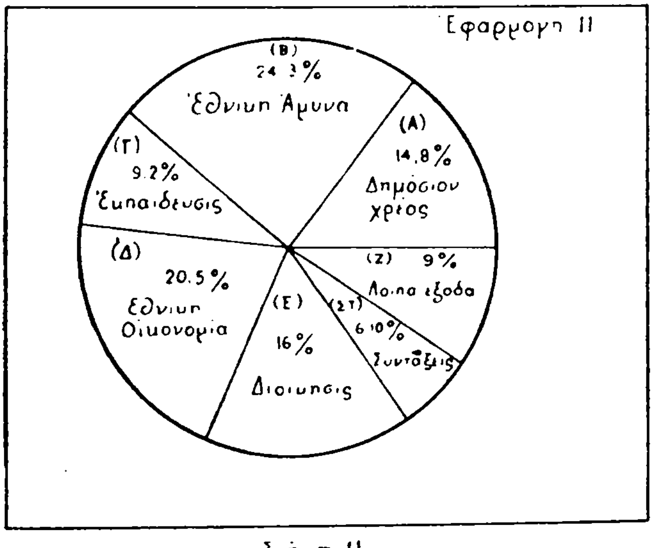
Ἐφαρμογὴ 11.

Ἡ κατανομὴ τῶν ἐξόδων τοῦ Ἑλληνικοῦ Κράτους διὰ τὸ 1935]36 δίδεται ὡς κάτωθι.

Ἔξοδα	ἑκατ. δρ.	%	Ἀντίστοιχον τόξον (κατὰ προσέγγισιν)
1) Δημ. Χρέος	1.608,2	14,8	53°
2) Ἐθν. Ἄμυνα	2.643,3	24,3	88°
3) Ἐκπαίδευσις	1.001,8	9,2	33°
4) Ἐθν. οἰκονομία	2.230,3	20,5	74°
5) Διοίκησις	1.740,8	16	58°
6) Συντάξεις	659,4	6,1	22°
7) Λοιπὰ ἔξοδα	978,2	9	32°
σύνολον	10.862	100	360°

Ἐπειδὴ εἰς τὸν γραφόμενον κύκλον ἡ ἀκτὶς λαμβάνεται ἴση πρὸς τὴν μονάδα, τὸ ἐμβαδὸν τούτου θὰ δίδεται ὑπὸ $2\pi = 100\ \%$, ἀλλὰ ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου $2\pi = 360°$, κάθε 1 % τοῦ ἐμβαδοῦ θὰ δίδεται ὑπὸ κυκλικοῦ τομέως τόξου 3°,6΄. Ἐὰν ὅθεν τὸ ποσοστὸν ἑκάστης κατηγορίας ἐξόδων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3°,6΄, θὰ παράσχῃ τὸ τόξον τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τομέως, οὗ τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα, ὡς ἄλλως τε φαίνεται καὶ ἐκ τοῦ παραδείγματος, ἰσοῦται πρὸς 360°.

Ἡ τοιαύτη χάραξις προσήκει διὰ τὴν ἀναπαράστασιν στατικῶν φαινομένων, ὡς οἱ ἰσολογισμοὶ τῶν ἑταιριῶν, ἡ κατανομὴ καθ' ὁμάδας ἡλικιῶν ἴσου διαστήματος ἀτόμων πληρούντων δεδομένην ἰδιότητα κλπ.



Σχῆμα 11

§ *11.* ***Ἡμιλογαριθμικὰ διαγράμματα.***

Τὰ δισδιάστατα ἱστορικὰ διαγράμματα, ὧν ἡ χάραξις ἐπιτελεῖται συναρτήσει τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δεδομένων, εἰς φυσικοὺς ἀριθμοὺς δηλ., εὐκόλως δύνανται νὰ γίνωσιν ἀφορμαὶ σφαλμάτων, καθ' ὅσον ἡ κλῖμαξ τούτων (δηλ. τῶν τεταγμένων) καθορίζεται κατὰ διαιρέσεις συμβατικάς, ἐπειδὴ αὕτη, ὡς προελέχθη, στηρίζεται ἐπὶ ἑνὸς μέσου.

Ἐὰν ἡ μοναδικὴ αὕτη τιμὴ ληφθῇ ὡς τεταγμένη αἱ διακυμάνσεις ἀσθενοῦς, ἀπολύτως, σημασίας μόλις θὰ καταστῶσιν ἐμφανεῖς, ἂν καὶ ἡ σχετικὴ τούτων σημασία, ἀναφορικῶς πρὸς τὰ ἑκατέρωθεν αὐτῶν δεδομένα, πιθανόν, νὰ εἶναι μεγίστη. Τὸ τοιοῦτον προέρχεται καθ' ὅσον μετὰ ἀριθμητικῆς κλίμακος ὀρθογωνίων διαγραμμάτων, ἡ θέσις τυχόντος σημείου ἐπὶ τῶν τεταγμένων μεταβάλλεται κατὰ τὸ αὐτὸ μέτρον, οὐχ' ἧττον ὅμως ἡ ἡ σχετικὴ σημασία τῶν ἐπερχομένων μεταβολῶν κατὰ τὴν διάρκειαν χρονικῆς τινος περιόδου ἐνδιαφέρει περισσότερον, ἐν γένει, τοῦ σχετικοῦ αὐτῶν μεγέθους, δι' ὃ πρὸς ἀναπαράστασιν γραφικῶς, τῶν σχετικῶν μεταβολῶν χρονολογικοῦ φαινομένου τινός, ἀνατρέχομεν εἰς τὰς ἡμιλογαριθμικὰς καμπύλας εἰς ἃς ἀντικαθιστῶμεν τοὺς ἀπολύτους ἀριθμούς, ἐπὶ τῆς κλίμακος τῶν τεταγμένων, διὰ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν.

Τὰ μειονεκτήματα τῆς διὰ ὀρθογωνίων διαγραμμάτων ἀναπαραστάσεως τῶν μεταβολῶν φαινομένου τινος, διὰ τοῦ χρόνου, καθίστανται ἔτι σοβαρώτερα, ὅταν αἱ τεταγμέναι τούτου παρίστανται εἰς τόσον τοῖς %.

Ἐάν, π.χ. κατά τινα ἐποχὴν νόμισμά τι κατέλθῃ κάτω τοῦ ἀρτίου, π.χ., εἰς τὰ 80 % αὐτοῦ, κατ' ἄλλην δὲ ἐποχήν, μεταγενεστέραν, ἀπὸ τὰ 40 % εἰς τὰ 20 %, ἡ ἀλλαγὴ αὕτη ἐπὶ τῶν διαγραμμάτων θὰ εἶναι, κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις, 20γραμμικαὶ μονάδες, δηλ. ἡ αὐτή, καίτοι ἐν τῇ πραγματικότητι, ἡ δευτέρα μεταβολὴ εἶναι ἡ μᾶλλον σημαντική, διότι κατὰ μὲν τὴν πρώτην ὁ πληθυσμὸς ἀπώλεσε τὰ 20 % τῆς περιουσίας του, ἐνῷ κατὰ τὴν δευτέραν τὰ 50 % αὐτῆς.

Τὸ μειονέκτημα τοῦτο τῆς γραφικῆς ἀναπαραστάσεως θεραπεύεται ἐφ' ὅσον πρὸς ἀναπαράστασιν τῶν διαδοχικῶν μεταβολῶν τῆς ἐμπειρικῆς συναρτήσεως $y=\sigma(\chi)$ εἰσάγονται αἱ γεωμετρικαὶ ἀποκλίσεις (1).

Πρὸς τοῦτο εἰσάγομεν σύστημα συντεταγμένων φ, χ, τοιοῦτον ὥστε ἡ μεταβολὴ τῆς τεταγμένης φ νὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς μεταβολῆς τῆς τεταγμένης y δηλ.

$d\varphi = K.\dfrac{dy}{y}$, ὅπου K ὁ συντελεστὴς ἀναλογίας

ἢ καὶ δι' ὁλοκληρώσεως $\varphi = K\lambda o\gamma y + A$

ἂν δέ, $K=1$ καὶ $A=o$, τότε $\varphi=\lambda o\gamma y$.

---

1) Περὶ ὧν ἴδε εἰς Στατιστικὴν Κ. Ἀθανασιάδου : Μέσοι.

Ἐὰν νῦν διὰ τῶν σημείων (χ_i, $λογy_i$) διέλθη πολυγωνικὴ γραμμή, ἔσται τὸ ζητούμενον ἡ μ ι λ ο γ α ρ ι θ μ ι κ ὸ ν δ ι ά γ ρ α μ μ α ἢ ἡ ἡ μ ι λ ο γ α ρ ι θ μ ι κ ὴ κ α μ π ύ λ η.

Ἐν ἄλλοις λέξεσιν τὰ ἡμιλογαριθμικὰ διαγράμματα εἶναι διαγράμματα λόγων (πηλίκων) καὶ οὐχὶ ποσοτήτων, καθ' ὅσον αἱ κατακόρυφοι ἴσοι ἀποστάσεις παριστῶσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἀδιαφόρως τοῦ μέρους τῆς κλίμακος ἐφ' οὗ λαμβάνονται.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α.

Ἐὰν διά τι φαινόμενον Α ἔχομεν τὰς τιμὰς 10, 16, 24, 34 καὶ 38 κατὰ τὰ ἔτη τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 καὶ τ_5, θὰ ἔχωμεν

Φαινόμενον	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5
Α	10	16	24	34	38
Λογάριθμοι	1	1,20412	1,38021	1,53248	1,57978
Διαφοραὶ λογαρ.	0,204	0,176	0,156	0,048	
Ἀντίστοιχοι ἀριθμοὶ	1,6	$1{,}5=\frac{24}{16}$,	$1{,}417=\frac{34}{24}$,	$1{,}198=\frac{38}{34}$	

Πρὸς χάραξιν ἡμιλογαριθμικῆς καμπύλης, λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ, τὰ ἀνύσματα 1, 2, 3, ... καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, τὰ μεγέθη λογ1, λογ2, ...

Πάντως εἰς τὸ ἐμπόριον ὑφίσταται χάρτης τετραγωνισμένος, οὗτινος ἡ μία τῶν κλιμάκων εἶναι λογαριθμική.

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι τὰ ἡμιλογαριθμικὰ διαγράμματα ἐπιβάλλονται διὰ τὴν ἀναπαράστασιν γραφικῶν συναρτήσεων ὧν αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ ταχύτατα ἀνέρχονται ἢ κατέρχονται, αὐξάνουσιν ἢ ἐλαττοῦνται καὶ εἶναι ἐντελῶς διάφοροι αἱ τιμαὶ τοῦ τέλους τῶν τιμῶν τῆς ἀρχῆς αὐτῶν.

Ἡ σύγκρισις ἡμιλογαριθμικῶν καμπύλων παριστωσῶν δύο φαινόμενα γίνεται, 1ον) χαρασσομένων τούτων ἐπὶ τῆς αὐτῆς λογαριθμικῆς κλίμακος καὶ ἐπὶ διαφανοῦ χάρτου, 2ον ἐπιτιθεμένων τῶν διαγραμμάτων αὐτῶν καὶ μετατιθεμένης τῆς κατωτέρας, παραλλήλως πρὸς ἑαυτήν, μέχρις οὗ αὕτη προσεγγίσει τὴν ἀνωτέραν καμπύλην, εὑρισκομένου τοῦ μεγίστου δυνατοῦ τῆς συμπτώσεως, ὅτε εἰς τὴν θέσιν ταύτην χαράσσεται αὕτη ἐκ δευτέρου, τοῦθ' ὅπερ ἐπιτρέπει τὴν σύγκρισιν τῶν δύο ἡμιλαγαριθμικῶν καμπύλων ἐπειδὴ ὁμοιότης μεταξὺ τῶν δύο λογαριθμικῶν καμπύλων ἐμφαίνει ἀντιστοιχίαν εἰς τὰς ἀναλόγους μεταβολὰς αὐτῶν.

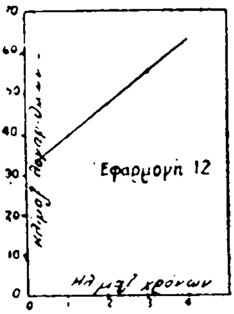
Πρὸς ἀπαλοιφὴν τῶν διακυμάνσεων, κατὰ τὴν σύγκρισιν, γραφικῶς, ἡμιλογαριθμικῶν καμπύλων αἵτινες παριστῶσι χρονολογικὰς συναρτήσεις ἑτεροειδεῖς, μετασχηματίζομεν ταύτας εἰς ἀριθμοδεικτικὰς σειρὰς (εἰς τόσον τοῖς °/₀) καὶ ἀκολούθως γράφομεν εἰς πίνακα τὰς χρονολογίας (ἔτη) καὶ ἀντιστοίχως αὐτῶν τὰς τιμὰς τῶν συναρτήσεων.

Ἐκ τούτου λαμβάνομεν τὰς μεγίστας καὶ ἐλαχίστας αὐτῶν, κεχωρισμένως κατὰ συνάρτησιν, ὡς καὶ τοὺς μέσους τῶν διακυμάνσεων τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου, παριστωμένους εἰς τόσον τοῖς °/₀ τοῦ μεγίστου. Οὕτω μία διακύμανσις α % τῆς μιᾶς σειρᾶς ἀντιστοιχεῖ εἰς β % διακύμανσιν τῆς ἄλλης. Πρέπει τότε νὰ ζητηθῇ ἀντιστοιχία, ὅσῳ τὸ δυνατόν, μᾶλλον στενὴ καὶ νὰ υἱοθετηθῇ ἡ ὑπόθεσις ὅτι μέρος τοῦ ἀριθμοῦ τῆς δευτέρας σειρᾶς οὐδεμίαν ἐπίδρασιν ἀσκεῖ ἐπὶ τοῦ ποσοστοῦ τῆς πρώτης καὶ νὰ εὑρεθῇ ποῖον μέρος δέον νὰ ἀφαιρεθῇ ἵνα τὰ β % τοῦ συνόλου ἀντιστοιχοῦσι πρὸς α % τοῦ ὑπολοίπου. Τὸ μέσον ποσοστὸν τῆς δευτέρας σειρᾶς ἀνέρχεται εἰς Β %, β % δίδουσι β' % ἅτινα ἀποτελοῦσι τὰ α % τοῦ Α %, μέσου ποσοστοῦ τῆς πρώτης σειρᾶς. Ἡ διαφορὰ Β %—Α % δέον νὰ ἀφαιρεθῇ πρὸ τῆς λήψεως τῶν λογαρίθμων.

Ἐφαρμογὴ 12.

Κατὰ τὰ πειράματα τοῦ Dr Kendrick ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ Bacilum coli εἰς σειρὰν διαδοχικῶν ὡρῶν εἶναι ὁ κάτωθι

χρόνος ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως πειράματος	Ἀριθμὸς Βακίλλων	Λογάριθμος
0	1.760	3.246
1 ὥρα	11.419	4.058
2 »	72.000	4.857
3 »	380.000	5.580
4 »	2.600.000	6.415
κ.λ.π.	κ.λ.π.	κ.λ.π.



Σχῆμα 12

Ἐφαρμογὴ 13.

Τὸ ποσοστὸν γάμων καὶ τὸ ποσοστὸν τῶν ἀπασχολουμένων ἐργατῶν διὰ τὰ ἔτη 1865|1893 ἐν Ἀγγλίᾳ δίδεται ὑπὸ τοῦ κάτωθι πίνακος (1).

Ἔτη	% Γάμων (1)	% ἀπασχολ. ἐργατῶν (2)	% ἀπασχολ. ἐργατῶν Μεῖον 12,7 (3)
1865	17,5	98	85,3
1866	17,5	96,9	84,1
1867	16,5	92,7	80
1868	16,1	91,5	78,8
1869	15,9	92,6	79,9

1) Ἐκ τοῦ A. Bowley: Statistics.

1870	16,1	95,7	83
1871	16,7	98,2	85,5
1872	17,4	98,9	86,2
1873	17,6	98,7	86
1874	17	98,2	85,5
1875	16,7	97,5	84,8
1876	16,5	96,4	83,7
1877	15,7	95,6	82,9
1878	15,2	93,7	81
1879	14,4	87,5	74,8
1880	14,9	94,1	81,4
1881	15,1	96,5	83,8
1882	15,5	98,1	85,4
1883	15,5	97,8	85,1
1884	15,1	92,6	79,9
1885	14,5	91	78,3
1886	14,2	90,45	77,7
1887	14,4	92,6	79,9
1888	14,4	95,2	82,5
1889	15	97,9	85,2
1890	15,5	97,9	85,2
1891	15,6	96,5	83,8
1892	15,4	93,7	81.—
1893	15,7	92,5	79,8

Ἐκ τοῦ ἄνω πίνακος καταρτίζεται ὁ κάτωθι (τῶν τριῶν πρώτων στηλῶν).

Ποσοστὸν γάμων °/₀₀

ἔτη	Μεγίστου	Ἐλαχίστου	Διαφοραὶ	°/₀ τοῦ μεγίστου
1869		15,9		
1873	17,6		1,7	10
1879		14,4	3,2	18
1882—83	15,5		1,1	7
1886		14,2	1,3	8
1891	15,6		1,4	9
1893		14,7	0,9	6
				9,7

Ποσοστὸν ἀπασχολουμένων ἐργατῶν

ἔτη	Μεγίστου	Ἐλαχίστου	Διαφοραί	°/₀ τοῦ μεγίστου
1868		91,5		
1872	98,9		7,4	7,5
1879		87,5	11,4	11,5
1882	98,1		10,6	10,8
1886		90,5	7,6	7,8
1889—90	97,9		7,4	7,6
1893		92,5	5,4	5,5
				8,4

ἤτοι διακύμανσις 8,4 °/₀ εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀπασχολουμένων ἐργατῶν ἀντιστοιχεῖ διακύμανσις 9,7 °/₀ τοῦ ποσοστοῦ γάμων. Τὸ μέσον ποσοστὸν τῶν ἀπησχολημένων ἐργατῶν τῶν trade unions ἀνῆλθε κατὰ τὴν θεωρουμένην περίοδον εἰς 95,1 °/₀. Τὰ 8,4 °/₀ τῶν 95,1 °/₀ δίδουσι 7,99 °/₀ ἅτινα ἰσοῦνται πρὸς τὰ 9,7 °/₀ τοῦ 82,4. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ 95,1 καὶ 82,4 ἤτοι 12,7 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄνευ ἐπιδράσεως καὶ νὰ ἀφαιρεθῇ πρὸ τῆς λήψεως τῶν λογαρίθμων. Ἡ χάραξις, ἅμα ληφθῶσι οἱ λογάριθμοι τῶν στηλῶν (1) καὶ (3) εἶναι εὔκολος.

§ 12. *Λογαριθμικὰ διαγράμματα.*

Εἰς ταῦτα ἀμφότεραι αἱ κλίμακες εἶναι λογαριθμικαί, χρησιμοποιοῦνται δὲ μόνον πρὸς ἀναπαράστασιν ἐμπειρικῶν συναρτήσεων συχνοτήτων.

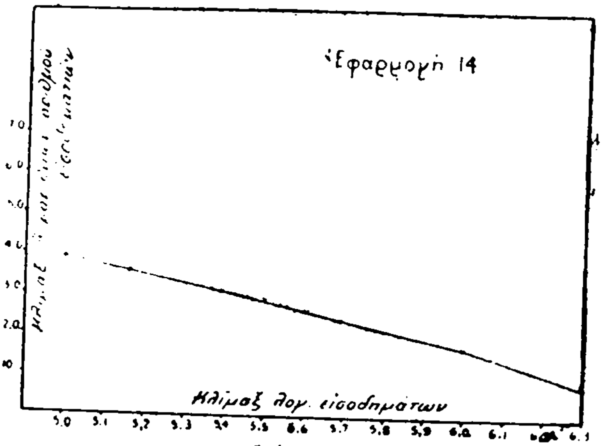
Πρὸς τοῦτο ἡ $y_i = \sigma(\chi_i)$ μετατρέπεται εἰς ἀθροιστικὴν συνάρτησιν $\Psi_i = \Phi(\chi_i)$ καὶ ἀκολούθως ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ λαμβάνονται οἱ λογάριθμοι τῶν $\chi_1, \chi_2, \ldots$ ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος y οἱ λογάριθμοι τῶν $\Phi(\chi_i)$ διὰ $i=1, 2, \ldots$ Ἡ ἕνωσις τῶν σημείων [λογχ_i, λογ$\Phi(\chi_i)$] διὰ πολυγωνικῆς γραμμῆς, εὐθυγράμμου μᾶλλον, παρέχει τὸ ζητούμενον λογαριθμικὸν διάγραμμα.

Ἡ μέθοδος αὕτη μετασχηματίζει προσεγγιζόντως τὴν καμπύλην συχνοτήτων εἰς εὐθεῖαν μὲν γραμμήν, ἂν ἡ προσεγγίζουσα ταύτης ἀναλυτικὴ ἔκφρασις εἶναι ὑπερβολικῆς μορφῆς, εἰς παραβολὴν δὲ ἀνωτέρου βαθμοῦ ἂν εἶναι ἐκθετική, ἐν ᾗ ἡ μεταβλητὴ εἰκονίζεται εἰς τὸν ἐκθέτην μὲ βαθμὸν ἴσον ἢ ἀνώτερον τοῦ 2. Διὰ τοῦτο ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται μέθοδος ἀ ν α μ ο ρ φ ώ σ ε ω ς τῆς δοθείσης ἐμπειρικῆς συναρτήσεως συχνοτήτων.

Ἐ φ α ρ μ ο γ ὴ 1 4.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐχόντων τὸ 1930 παρ' ἡμῖν εἰσόδημα ἀνώτερον τοῦ ἐν τῇ πρώτῃ στήλῃ ἀναγραφομένου δίδεται ὑπὸ τοῦ κάτωθι πίνακος.

Εἰσόδημα ἀνώτερον τοῦ χ	ἀριθμὸς εἰσοδηματιῶν Φ (χ)	λογχ$_i$	λογΦ (χ$_i$)
100.000	8.880	5,00000	3,94841
150.000	4.179	5,17609	3,62107
250.000	1.379	5,39794	3,13156
500.000	289	5,69897	2,46090
1.000.000	56	6,00000	1,74819
2.000.000	7	6,30103	0,84510



Σχῆμα 13

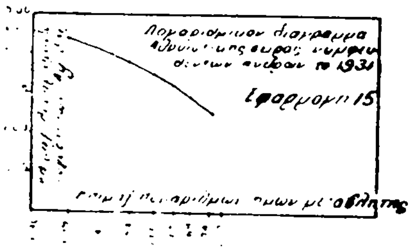
Ἐ φ α ρ μ ο γ ὴ 15.

Ἡ κατανομὴ τῶν νυμφευθέντων ἀνδρῶν τὸ 1931 καθ' ὁμάδας 5ετεῖς ἡλικιῶν δίδεται ὡς κάτωθι.

Ἡλικίαι	ἀριθμὸς νυμφευθέντων	Ἡλικία ἄνω χ$_i$	Φ (χ$_i$)
20—24	10.501	20	36.095
25—29	13.072	25	25.594
30—34	6.220	30	12.522
35—39	3.174	35	6.302
40—44	1.470	40	3.128
45—49	861	45	1.658
50—54	425	50	797
55—59	275	55	372
60—64	115	60	115
σύνολον	36.095		

λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν χ_i καὶ Φ (χ_i) ἔχομεν τὸν ἑξῆς πίνακα

λογχ_i	λογ Φ (χ_i)
1,30103	4,55745
1,39794	4,40807
1,47712	4,09760
1,54407	3,79948
1,60206	3,49527
1,65321	3,21985
1,69897	2,90146
1,74036	2,57054
1,77815	2,06070



Σχημα 14

§ 13. *Στερεογράμματα.*

Τὰ μέχρι τοῦδε θεωρηθέντα διαγράμματα (δισδιάστατα καὶ πολικὰ) χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν ἀναπαράστασιν ἐμπειρικῶν συναρτήσεων τῆς μορφῆς $y_i = \sigma (\chi_i)$, εἴτε αὗται ἀναφέρονται εἰς κατανομὴν κατὰ συχνότητας ἢ διαδοχικὰς ἐν τῷ χρόνῳ ἐκδηλώσεις.

Ἂν ὅμως πρόκειται περὶ γραφικῆς ἀναπαραστάσεως ἐμπειρικῆς τινος συναρτήσεως τῆς μορφῆς $Z_{i,\mu} = \sigma (\chi_i, y_\mu)$ ἢ ἐν ἄλλαις λέξεσιν περί τινος πολυτόμου κατατάξεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, τότε ἡ ἀναπαράστασις αὐτῆς δι' ἐπιπέδου σχήματος περιπλέκεται, ἐπειδὴ ἡ ἑκάστοτε τῆς δοθείσης συναρτήσεως τιμὴ εἶναι συνάρτησις δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν (1).

1) Πολύτομος κατάταξις πρώτου βαθμοῦ λέγεται ὅταν τὰ στοιχεῖα τοῦ θεωρουμένου συνόλου κατανέμονται εἰς πλείστας τάξεις ἰδιοτήτων A_1, A_2, . . . οὕτως ὥστε νὰ ἰσχύῃ, κατὰ τὴν Ἄλγεβραν τῆς Λογικῆς, ἡ σχέσις

$A_1 + A_2 + \ldots + A_\mu = I$ καὶ ἐπὶ πλέον

$(A_1) + (A_2) + \ldots + (A_\mu) = N$, τὸ πλῆθος τῶν θεωρουμένων στοιχείων.

Ἡ τοιαύτη κατάταξις λέγεται δευτέρου βαθμοῦ, ὅταν τὰ στοιχεῖα αὐτῆς κατανέμονται καὶ κατά τινα ἄλλην ἰδιότητα Β, οὕτως ὥστε νὰ ἔχωμεν

$B_1 + B_2 + \ldots B_\nu = I$ καὶ $(B_1) + (B_2) + \ldots + (B_\nu) = N$

λαμβανομένων νῦν ὑπ' ὄψει συγχρόνως τῶν δύο ἰδιοτήτων Α καὶ Β, ὅτε τὸ στοιχεῖον ὅπερ κέκτηται ταὐτοχρόνως τὰς ἰδιότητας, A_μ καὶ B_ν θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν

Ἐὰν λοιπὸν τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα παρέχωνται ὑπὸ μορφὴν πινάκων διπλῆς εἰσόδου, τότε αἱ συχνότητες τῶν ὑπ' ὄψει μεταβλητῶν ἀπαρτίζουσι ζεύγη, ὧν τὰ στοιχεῖα χ_i, y_μ χαρακτηρίζονται ὑπὸ μιᾶς τιμῆς τοῦ χ ἀφ' ἑνός, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὑπὸ ἄλλης τοῦ y, τῶν τοιούτων ὅμως πινάκων ἢ τῶν ἀντιστοιχουσῶν αὐτοῖς ἐμπειρικῶν συναρτήσεων $Z_{i,\mu}=\sigma\ (\chi_i, y_\mu)$ ἡ γραφικὴ ἀναπαράστασις δὲν γίνεται κατὰ τὰς ἐκτεθείσας μεθόδους, ἀλλὰ κατὰ ἄλλας τοιαύτας, δεδομένου ὅτι ἡ προσεγγίζουσα ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τῶν $Z_{i,\mu}=\sigma\ (\chi_i, y_\mu)$ δὲν παριστᾷ ἐπίπεδον γραμμήν, ἀλλὰ ἐπιφάνειαν ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων.

Διὰ νὰ καταστήσωμεν σαφῆ τὰ ἀνωτέρω περὶ πολυτόμων κατατάξεων β' βαθμοῦ, ὑποθέσωμεν ὅτι προτιθέμεθα νὰ ἀναπαραστήσωμεν γραφικῶς τὰ δεδομένα τοῦ κάτωθι πίνακος διπλῆς εἰσόδου.

Y	X	Νίτρον εἰς πάουντ κατὰ ἑκτάριον									
		0—19,9	20—39,9	40—59,9	60—79,9	80—99,9	100—119,9	120—139,9	140—159,9	160—179,9	Σύνολ.
Ἀπόδοσις σίτου εἰς μποῦσελ κατὰ ἑκτάριον	32—35,9				5	16	12	4	5	2	44
	28—31,9			1	20	21	8	4	1		55
	24—27,9			16	19						35
	20—23,9			13							13
	16—19,9		12								12
	12—15,9		8								8
	8—11,9	3	5								8
	4—7,9	10									10
	0—3,9	8									8
Σύνολον		21	25	30	44	37	20	8	6	2	193

Ὁ ἄνω ἀριθμητικὸς πίναξ παρέχει τὰς τιμὰς τῆς ἐμπειρικῆς συναρτήσεως $Z_{i,\mu}=\sigma\ (\chi_i, y_\mu)$, ὅπου χ ἡ ἰδιότης: νίτρον εἰς πάουντ κατὰ ἑκτάριον καὶ y, ἡ ἰδιότης: ἀπόδοσις σίτου εἰς μποῦσελ κατὰ ἑκτάριον, οὕτω διὰ $\chi=80-99{,}9$ καὶ $y=28-31{,}9$, $Z=21$ καὶ ἐφεξῆς οὕτω. Ἡ γραφικὴ ἀναπαράστασις τοῦ ἄνω πίνακος ἀπαιτεῖ χρῆσιν στερεογράμματος ἤτοι ἐπιφανείας ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων. Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα πῶς θὰ διενεργηθῇ ἡ κατασκευὴ τοιούτου στερεογράμματος; θὰ κατασκευασθῇ στερεὸν σχῆμα ἢ θὰ ἀπεικονισθῇ ἐπί τινος ἐπιπέδου διὰ δισδιαστάτου σχήματος; Συνήθως χρησιμοποιεῖται ἡ δευτέρα μέθοδος ὡς ἑξῆς: ἐπί τινος ἐπιπέδου ἐπιφανείας (π.χ. χάρτου) χαράσσομεν σειρὰς γραμμῶν παραλλήλων αἵτινες ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὴν θέσιν ἑκάστης

τάξιν $A_\mu B_\nu$ ἧς ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων εἶναι $(A_\mu B_\nu)$ καὶ ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς τῶν τάξεων μν θὰ ἔχωμεν $(A_1 B_1)+(A_1 B_2)+\ldots+(A_1 B_\nu)+\ldots+(A_\mu B_\nu)=N$ κλπ.
Πλείονα ἴδε Στατιστικὴν Κ. Ἀθανασιάδου, σελίδ. 37 καὶ ἐφεξῆς.

τῶν στηλῶν τοῦ δεδομένου ἀριθμητικοῦ πίνακος διπλῆς εἰσόδου, ὅστις καὶ καλεῖται *πίναξ συμπτώσεως*, ἤτοι γραμμὰς κατακορύφους, διὰ τὴν εἰς νίτρον χρησιμοποίησιν κατὰ ἑκτάριον, φερομένας εἰς τετμημένας καὶ γραμμὰς ὁριζοντίας διὰ τὰς ἀποδόσεις τοῦ σίτου εἰς μποῦσελ κατὰ ἑκτάριον φερομένας εἰς τεταγμένας. Προκύπτει διὰ τῆς προκαταρκτικῆς ταύτης χαράξεως εἶδος δικτυωτῆς ἐπιφανείας, εἰς τὴν τομὴν τῶν γραμμῶν τῆς ὁποίας θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑψώσωμεν καθέτους, μήκους ἀντιστοίχως ἴσου πρὸς τὴν συχνότητα ἥτις ἀνταποκρίνεται εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς στήλης καὶ τῆς γραμμῆς κατὰ τὸν ἀριθμητικὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ πέρατα ὅλων τῶν καθέτων τούτων θὰ προκύψῃ στερεά τις ἐπιφάνεια ἥτις καλεῖται *ἐπιφάνεια συχνότητος* καὶ ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὰς συνήθεις *καμπύλας κατανομῆς* ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. Ἐὰν ἡ κατανομὴ τῶν συχνοτήτων εἶναι ἡ ἰδεώδης δηλ. ἀκολουθῇ τὸν νόμον τοῦ Γκάους, τότε ἡ μορφὴ τῆς ἐπιφανείας συχνότητος εἶναι ἡ παρεχομένη ὑπὸ τοῦ σχήματος 16 καὶ καλεῖται *ἐλλειψοειδὲς ἴσης πιθανότητος*, καθ' ὅσον οἱαδήποτε τομὴ ταύτης ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ βον καὶ γον συντεταγμένα ἐπίπεδα θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν τῆς καμπύλης τῆς πιθανότητος τῶν σφαλμάτων ἢ τοῦ Γκάους, ὑπὸ ἐπιπέδου δὲ παραλλήλου τῷ πρώτῳ τοιούτῳ θὰ ἔχῃ μορφὴν ἐλλείψεως. Ἡ κατασκευὴ τῶν στερεογραμμάτων στηρίζεται ἐξ ὁλοκλήρου ἐπὶ τοῦ τρόπου τῆς παραστάσεως σημείου τινὸς ἐν τῷ χώρῳ (1).

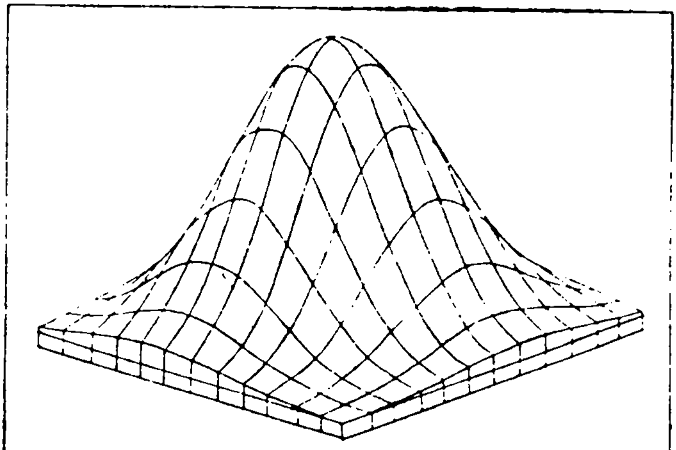
Τὰ στερεογράμματα παρέχουσι μέγα ἐνδιαφέρον ἐφ' ὅσον κατασκευάζονται ἔκτυπα (en relief), οὐχ' ἧττον ὅμως διότι ταῦτα στοιχίζουσιν ἀκριβὰ εἶναι ἐλαχίστη ἡ χρῆσις τῶν τοιούτων κατασκευῶν.

Ἐκτὸς ὅμως τοῦ παρεχομένου ἐνδιαφέροντος, ἡ ἀντικατάστασις τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων τυχόντος πίνακος συμπτώσεως ὑπὸ στερεᾶς ἐπιφανείας (στερεογράμματος) εἶναι χρήσιμος δι' ἐκείνους μόνον οἵτινες κατέχουσι μᾶλλον ἢ ἧττον ἐκτεταμένας γνώσεις ἐπὶ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας τοῦ χώρου· οἱ ἀσχολούμενοι ὅμως εἰς τὴν σπουδὴν τῶν οἰκονομικῶν καὶ κοινωνικῶν φαινομένων, ὧν πλειστάκις παρέχονται ὑπὸ μορφὴν πινάκων συμπτώσεως αἱ ποσοτικαὶ ἐκδηλώσεις, διαθέτουσι τὰς ὀλιγωτέρας, κατὰ κανόνα

---

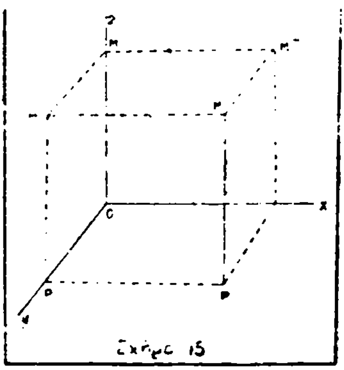
1) Ἐὰν πρὸς τοῦτο θεωρήσωμεν τρία ἐπίπεδα τεμνόμενα ἀνὰ δύο κατὰ γωνίαν ὀρθήν, τότε προκύπτει ἡ τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία οχyz, σχετικῶς πρὸς τὰ ἐπίπεδα ἧς, τὰ καλούμενα καὶ *συντεταγμένα ἐπίπεδα* ἤτοι τὰ χοy, χοz, yoz, δύναται νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις τοῦ σημείου Μ, καθ' ὅσον ἂν ἐκ τοῦ Μ ἀχθῶσι κάθετα ἐπίπεδα ἐπὶ τὰ συντεταγμένα, ταῦτα θὰ τμήσωσι τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα κατὰ τάς ὑπὸ τοῦ σχήματος ἐμφαινομένας εὐθείας, ἐξ ὧν αἱ, $O\Pi = P'P = M''M''' = M'M = \chi$ ἡ *τετμημένη* τοῦ σημείου Μ, $\Pi P = OP' = M''M' = M'''M = y$, ἡ *τεταγμένη* τοῦ Μ, καὶ $PM = \Pi M''' = OM'' = P'M' = z$ ἡ *κατηγμένη* αὐτοῦ. Συμβολικῶς αἱ τρεῖς συντεταγμέναι τοῦ Μ παρίστανται ὑπὸ χ, y καὶ z. Καὶ αὐτὸ δὲ τοῦτο τὸ σημεῖον Μ τὸ ἔχον τὰς χ, y, z ὡς συντεταγμένας ὑπὸ Μ (χ, y, z). Ἡ εὐθεία ΟΧ καλεῖται ἄξων τῶν χ, ἡ ΟΨ ἄξων τῶν y καὶ ἡ ΟΖ ἄξων τῶν z, τὸ ἐπίπεδον ΧΟΨ πρῶτον συντεταγμένον ἐπίπεδον, τὸ ἐπίπεδον ΧΟΖ, δεύ-

σχεδόν, γνώσεις ἐπὶ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, ὡς ὀρθῶς τονίζει ὁ Βέλγος Στατιστικὸς A. Julin. Δὲν πρέπει ὅμως νὰ λησμονῆται καὶ ἡ ἄποψις τοῦ Στατιστικοῦ Levasseur «ὅτι αἱ γραφικαὶ στατιστικαὶ εἶναι μέσον κυρίως ἐκλαϊκεύσεως τῶν ἀριθμῶν, ἐφ' ὅσον ὅσως αὗται ἀπαιτοῦσι προσπαθείας διὰ τὴν σπουδὴν καὶ σύγκρισιν τῶν ὅσων παριστῶσι, τότε δὲν πρέπει νὰ ὑφίστανται» καὶ προκειμένου περὶ στερεογραμμάτων δυστυχῶς, ὁ ἀφορισμὸς οὗτος ἐφαρμόζεται πλήρως, ὡς ἐκ τοῦ πολυπλόκου τῆς ἐμφανίσεως αὐτῶν.



Ἐπιφάνεια ἐπικωδωνοειδοῦς ἰσοπιθανότητος
Σχῆμα 16

τερον συντεταγμένον ἐπίπεδον, τὸ ἐπίπεδον ΨΟΖ, τρίτον συντεταγμένον ἐπίπεδον. Ὁμοίως φαίνεται ὅτι, ὅταν δοθῇ σημεῖόν τι αἱ τρεῖς τούτου συντεταγμέναι ὡς πρός τι σύστημα συντεταγμένων ἐπιπέδων εἶναι ἐντελῶς ὡρισμέναι καὶ ἀντιστρόφως.



Σχῆμα 15

§ 14. *Χαρτογράμματα.*

Ταῦτα, ὡς ἄλλως τε δηλοῦται καὶ ἐκ τοῦ ὀνόματος αὐτῶν ἐντοπίζουσι ἐπί τινος γεωγραφικοῦ χάρτου τὰ φαινόμενα ἅτινα παριστῶσι. Οὐχ ἧττον τὸ ὄνομα τοῦτο, κατ' ἐπέκτασιν, ἐδόθη καὶ εἰς ἄλλας γραφικὰς ἀναπαραστάσεις αἵτινες, ἄνευ γεωγραφικῶν δεδομένων, ἐμφαίνουσι τὴν σχετικὴν ἔντασιν γεγονότος τινος, τῇ βοηθείᾳ χρωμάτων ἢ ἐσκιασμένων τμημάτων, χωρὶς διὰ τοῦτο νὰ παρίσταται ἀνάγκη ἀναδρομῆς εἰς μετρήσεις μηκῶν ἢ ἐπιφανειῶν, αἵτινες προσιδιάζουσι εἰς τὰ διαγράμματα.

Τὰ χαρτογράμματα κατανέμονται εἰς: 1ον) Χάρτας διαγραμματικούς. 2ον) Ἐγχρώμους χάρτας. 3ον) Χάρτας ζωνῶν. 4ον) Χάρτας ἰσοσταθμικῶν καμπύλων.

§ 15. *Διαγραμματικοὶ χάρται*

Εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῶσι ἐπὶ χαρτῶν, οὐδὲν ἀναγραφόντων, διαγράμματα ἐπὶ σκοπῷ ἐντοπισμοῦ τῶν πρὸς ἀναπαράστασιν γεγονότων. Τὸ ἐπὶ τοῦ προκειμένου πρωτεῦον στοιχεῖον εἶναι τὸ διάγραμμα, τὸ παρεπόμενον ὁ γεωγραφικὸς χάρτης, καίτοι τὸ τελευταῖον δὲν σημαίνει ὅτι ὁ χάρτης στερεῖται σημασίας. Θὰ εἶναι δυνατὸν κάτωθι ἑκάστου διαγράμματος νὰ σημειοῦται τὸ ὄνομα τῆς περιοχῆς ἣν ἀφορᾷ τοῦτο, οὐχ' ἧττον ὅμως ἡ ἔνταξις ἑκάστου διαγράμματος εἰς αὐτὴν ταύτην τὴν περιοχὴν ὅπου τὸ παρατηρηθὲν γεγονὸς ἐξειλίχθη, καθιστᾷ τὸ σύνολον τῶν τοιούτων διαπιστώσεων ἧττον ὑποβλητικὸν καὶ ἐναργές.

Ἐὰν πρόκειται περὶ καλλιεργείας σιτηρῶν ἢ ἀμπέλων, ἀναλογίας γεννήσεων ἢ θανάτων ἀνὰ 1000 κατοίκους κλπ. ἡ χρησιμοποίησις τοιούτου χάρτου εἶναι χρησιμότητος μεγίστης, διότι κατὰ πρῶτον συναθροίζει τὰ πρὸς μελέτην στοιχεῖα καὶ ἑλκύει τὴν προσοχὴν ἐπὶ τῆς συγκεντρώσεως αὐτῶν, ἤ, ἐπίσης, ἐπὶ τῆς διασπορᾶς των, καὶ δεύτερον διότι ὑποβάλλει τὴν σπουδὴν τῶν σχέσεων τῶν φαινομένων μετὰ τοῦ περιβάλλοντος ἐνῷ ταῦτα ἐκδηλοῦνται.

Αἱ γραφικαὶ χαράξεις συνδεδυασμέναι μετὰ τῶν χαρτογραμμάτων ἀπαρτίζουσι πολύτιμον ὄργανον διὰ τὴν ἀναπαράστασιν συνθέτων φαινομένων. Οὕτω κατὰ τὴν Βιομηχανικὴν ἀπογραφὴν τοῦ 1896 ἐν Βελγίῳ, ὁ Α. Julin, διὰ τὴν ἀναπαράστασιν τοῦ φαινομένου τῆς ἕλξεως ἥτις ἀσκεῖται ὑπὸ τῶν βιομηχανικῶν κέντρων ἐπὶ τῶν ἐγγὺς τούτων περιοχῶν κατεσκεύασε χαρτόγραμμα ἐμφαῖνον: 1ον) τὰς Κοινότητας ἐξ ὧν ἀπετελεῖτο τὸ ὑπ' ὄψει Βιομηχανικὸν Κέντρον, 2ον) τὰς Κοινότητας εἰς ἃς κατῴκουν ἐργάται μεταβαίνοντες ἐκ τούτων, πρὸς ἐργασίαν, εἰς τὸ ὡς ἄνω Βιομηχανικὸν Κέντρον, 3ον) τὸν ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν τούτων — κατὰ προσέγγισιν, 4ον) τὴν Βιομηχανικὴν ὁμάδα ἐξ ἧς ἐξηρτᾶτο τὸ ἐπάγγελμα αὐτῶν.

Ἀφ' οὗ δὲ καθώρισε τὴν ἔννοιαν «Βιομηχανικὸν Κέντρον» ἐχάραξε ἐπὶ τοῦ γεωγραφικοῦ χάρτου (μᾶλλον τοπογραφικοῦ μεγάλης κλίμακος διὰ τὴν κυριολεξίαν) τὴν περίμετρον τῶν Κοινοτήτων ἐξ ὧν τὸ Βιομ. Κέντρον ἀπηρτίζετο, πέριξ οὕτινος ἦσαν διατεταγμέναι αἱ κοινότητες, τῶν ὁποίων μέρος τοῦ βιομηχανικοῦ πληθυσμοῦ αὐτῶν μετέβαινεν εἰς τὸ κέντρον τοῦτο πρὸς ἐργασίαν.

Διὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν καὶ τὴν ὁμάδα εἰς ἣν ἀνῆκον, ἐκάλεσε διά τινος ἀριθμοῦ τάξεως ἑκάστην ἐπαγγελματικὴν ὁμάδα. Ἡ παρουσία ἐργατῶν ἀνηκόντων εἴς τινα βιομηχανικὴν ὁμάδα ἐσημειοῦτο, δι' ἑκάστην κοινότητα, διὰ τῆς ἀναγραφῆς ἐπὶ τῆς περιοχῆς τῆς Κοινότητος ταύτης· ἑνὸς τετραγωνιδίου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἀνεγράφετο ἀριθμός τις ἀντιστοιχῶν πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῆς τάξεως τῆς ὁμάδος (8 τάξεις ἐν ὅλῳ ὁμάδων ἐπαγγελμάτων). Οἱ ὄρθιοι ἀριθμοὶ παρίστων δεκάδας, οἱ κεκλιμένοι κλάσμα δεκάδος ἐργατῶν ἀνηκόντων εἰς τὴν βιομηχανίαν πρὸς ἣν τὸ ψηφίον τοῦτο ἀντεστοίχει.

§ 16. *Ἔγχρωμοι Στατιστικοὶ Χάρται.*

Εἰς τὰς στατιστικὰς ἐργασίας, τὰ πλεῖστα τῶν δεδομένων δημοσιεύονται κατά τινα βάσιν γεωγραφικὴν ἢ πολιτικήν. Κατόπιν τούτου ἡ ἀνάγκη τῆς χρησιμοποιήσεως χαρτῶν πρὸς ἐντοπισμὸν τῶν ὑπ' ὄψει φαινομένων εἶναι ἀπαραίτητος· ἀντὶ ὅμως τῆς χρήσεως διαγραμμάτων, χρησιμοποιοῦνται χρωματισμοί, διὰ νὰ ἐκφράσωσι τὴν σχετικὴν σημασίαν τῶν πορισμάτων.

Καίτοι ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἁπλουστάτη καὶ ἀπηλλαγμένη σχεδὸν δυσκολιῶν, ἐν τούτοις εἶναι δυνατὸν νὰ συνεπάγεται, πολλάκις, σφάλματα χονδροειδῆ ὡς ἐκ τῆς ἀνυπαρξίας σχέσεως μεταξὺ τῆς γεωγραφικῆς μονάδος καὶ τοῦ πρὸς ἀναπαράστασιν εἰδικοῦ φαινομένου. Ἐὰν εἰς τὴν γεωγραφικὴν ἀπογραφὴν εἰσαχθῇ ὡς γεωγραφικὴ μονὰς γραφικῆς ἀναπαραστάσεως ἡ κατὰ Ἐφετεῖον ὑποδιαίρεσις τῆς χώρας, τὰ ἐξαγόμενα τῆς ἀναπαραστάσεως θὰ εἶναι ἐσφαλμένα. Ἐλλείψει ὅθεν φυσικῆς καὶ ἀναντιρρήτου ὑποδιαιρέσεως χρησιμοποιεῖται ἡ διοικητικὴ τοιαύτη, ἐξ ὧν ὁμοιογενεστέρα παρ' ἡμῖν, ὡς εἶναι αὐτονόητον, τυγχάνει ἡ Κοινότης. Ἡ ἀρχὴ ἐφ' ἧς στηρίζεται ἡ κατασκευὴ τῶν ἐγχρώμων στατιστικῶν χαρτῶν εἶναι ἡ ἑξῆς: Ἐὰν δοθῇ σύνθετόν τι φαινόμενον οὕτινος αἱ ἐκδηλώσεις εἶναι μᾶλλον ἢ ἧττον ἔντονοι, συναθροίσωμεν δὲ τὰς ἐκδηλώσεις ταύτας καθ' ὁμάδας, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ταύτας συμβατικῶς διὰ χρωμάτων, κατά τινα γενομένην δεκτὴν ἀντιστοιχίαν κλίμακός τινος χρωματισμοῦ, ἐπὶ τῇ συνθήκῃ ὅπως ὁ ἀνοικτότερος χρωματισμὸς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀσθενεστέραν πυκνότητα καὶ ὁ βαθύτερος χρωματισμὸς εἰς τὴν ἐντονοτέραν πυκνότητα ἐκδηλώσεως τοῦ φαινομένου. Ἡ κλῖμαξ τοῦ φαινομένου δύναται νὰ καθορισθῇ λαμβανομένων ὑπ' ὄψει ἢ τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν ἢ τῶν σχετικῶν (ἀναλόγων) τοιούτων.

Ὅσον ἀφορᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν χρησιμοποιητέων χρωμάτων κανὼν δὲν ὑφίσταται, καθ' ὅσον ἄλλοι τάσσονται ὑπὲρ τοῦ ἑνιαίου χρωματισμοῦ μετὰ κλίμακος ἀποχρώσεων τούτου περιωρισμένης, ἄλλοι δὲ ὑπὲρ τῆς πολυχρωμίας, οὐχ' ἧττον μέγας ἀριθμὸς χρωμάτων δέον νὰ ἀποφεύγεται, ἵνα μὴ δημιουργεῖται σύγχισις. Παράδειγμα ἐγχρώμου στατιστικοῦ χάρτου ὑπάρχει εἰς τὸ ἄρθρον 'Ελλὰς τοῦ 'Εγκυκλ. Λεξικοῦ, εἰς τοῦτο δίδεται ἡ πυκνότης τοῦ πληθυσμοῦ ἀνὰ 1 τετρ. χιλ., χρησιμοποιοῦνται δὲ πρὸς ἀναπαράστασιν ταύτης 6 χρωματισμοί.

§ 17. *Χάρται μετὰ ζωνῶν.*

Οἱ χάρται οὗτοι χρησιμοποιοῦνται κυρίως εἰς τὴν στατιστικὴν ἀναπαράστασιν τῶν μεταφορῶν καὶ πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῶν γεωγραφικῶν χαρτῶν χαράσσονται ἔγχρωμοι ζῶναι, κατὰ τὴν φορὰν τῶν συγκοινωνιακῶν ὁδῶν, εὔρους ἀναλόγου πρὸς τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ φαινομένου ὅπερ ἀναπαριστῶσι. Τὰ διαγράμματα ταῦτα ἔχουσι τὸ πλεονέκτημα νὰ συνενῶσι πληροφορίας αἵτινες ἀναφέρονται εἰς ποσότητας καὶ παρέχουσιν, ὡς ἐκ τούτου, μεγάλας ὑπηρεσίας εἰς τὴν ἐν γένει στατ. τῶν μεταφορῶν (σιδηροδρομικῶν, θαλασσίων, ποταμίων, ὁδικῶν κλπ.).

'Η χάραξις τοιούτων χαρτῶν οὐδεμίαν δυσκολίαν ἐμφανίζει, δεδομένου ὅτι τὸ εὖρος ἑκάστης ζώνης, συμβατικῶς παριστᾷ ὡρισμένην (ἀριθμὸν τόννων ἐμπορευμάτων π.χ.) ποσότητα.

'Εκάστη ζώνη δύναται νὰ ἀναλύεται εἰς πλείονας ἄλλας παραλλήλους, εὔρους μικροτέρου, καθ' ὅσον τὸ φαινόμενον ὅπερ ἀναπαριστᾷ αὕτη δυνατὸν νὰ ἀναλυθῇ εἰς πλείονα μερικὰ ὁμοειδῆ πρὸς τοῦτο π.χ. μεταφοραὶ διὰ θαλάσσης (δι' ἀ]π φορτηγῶν, δι' ἀ]π ἐπιβατικῶν, δι' ἱστιοφόρων, διὰ φορτίδων κλπ.).

§ 18. *Χάρται μετὰ ἰσοσταθμικῶν καμπύλων.*

'Η χάραξις τούτων στηρίζεται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀρχῆς ἐφ' ἧς κατασκευάζονται οἱ ὑψομετρικοὶ χάρται, οἱ χάρται τῶν ἰσοβαρῶν (μετεωρολογικοί), οἱ χάρται τῶν ἰσοθέρμων (μετεωρολογικοί), οἱ χάρται τῶν ἰσοβαθῶν (ναυτικοί) κλπ. Οὕτω ἂν ὑφίστανται ἔν τινι χώρᾳ ὁμοειδῆ φαινόμενα, τῆς αὐτῆς ἐντάσεως ἢ φθινούσης τοιαύτης, τότε διὰ τῶν σημείων τοῦ αὐτοῦ ἐνδιαφέροντος, μεταξὺ τῶν ὁρίων ἑκάστης τάξεως, διέρχεται ἰσοσταθμικὴ καμπύλη, ἥτις ἐν τῇ εὐρυτάτῃ ἐννοίᾳ καὶ κατ' ἐπέκτασιν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γεωμετρικὸς τόπος σημείων ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἔντασιν.

'Η χάραξις τῶν ὡς εἴρηται χαρτῶν εἶναι ἐφικτή, ἐφ' ὅσον δι' ἕκαστον σημεῖον τῆς περιοχῆς (κοινότητος) διαθέτομεν τὰς ἀναγκαιούσας πληροφορίας.

'Η μέθοδος αὕτη εἶναι λίαν κοπιώδης καὶ ἀπαιτεῖ χρόνον ἱκανὸν πρὸς ἐκτέλεσιν, δὲν ἀποκλείει δὲ τὰ σφάλματα, καὶ κατὰ τὴν χάραξιν καὶ κατὰ τὴν χρῆσιν τῶν τοιούτων χαρτῶν, δι' ὃ συνήθως προτιμῶνται οἱ ἔγχρωμοι στατιστικοὶ χάρται.