



**ΠΑΝΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**Τμήμα Δημόσιας Διοίκησης
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών κατεύθυνσης
«Φορολογία και Ελεγκτική»**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Συγκριτική ανάλυση της μεθόδου δειγματοληψίας με
πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους (pps) σ' έναν
έλεγχο λογαριασμού απαιτήσεων**

ΤΕΡΖΗ Ι. ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ

Επιβλέπων καθηγητής: Γεώργιος Πετράκος

**Μέλη τριμελούς επιτροπής: Καθηγητής Αν. Τσάμης
Αναπ. Καθηγητής Ι. Φίλος**

Νοέμβριος 2014, Αθήνα

Περίληψη

Η μέθοδος δειγματοληψίας με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους (probability proportional to size sampling) είναι μία σχετικά σύγχρονη μέθοδος δειγματοληψίας, κατά την οποία η πιθανότητα επιλογής μίας μονάδας του πληθυσμού στο δείγμα είναι ανάλογη του μεγέθους (αξίας) της. Η δειγματοληψία pps εμφανίζεται στην κλασική της μορφή, αλλά και με μία παραλλαγή, η οποία χρησιμοποιείται στην ελεγκτική. Η εφαρμογή της έχει ως αποτέλεσμα οι μονάδες του πληθυσμού με μεγάλη αξία να επιλέγονται συχνότερα στο δείγμα. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιείται κατά κόρον στην ελεγκτική, καθώς ο ελεγκτής επιθυμεί να συμπεριλάβει στο δείγμα του μονάδες με αξία μεγαλύτερη από ένα συγκεκριμένο όριο.

Στην παρούσα εργασία αναλύεται το στατιστικό υπόβαθρο των ελεγκτικών διαδικασιών αυτής της δειγματοληψία για τον υπολογισμό του μεγέθους του δείγματος και τη διενέργεια του στατιστικού ελέγχου. Η ανάλυση αυτή κρίνεται χρήσιμη, διότι, τόσο στην ελληνική όσο και στην διεθνή βιβλιογραφία, η διαδικασία περιγράφεται μηχανιστικά με χρήση πινάκων. Επιπλέον, γίνεται σύγκριση της κλασικής μεθόδου δειγματοληψίας pps με την ελεγκτική της μορφή, τόσο θεωρητικά με τις πιθανότητες επιλογής των μονάδων του δείγματος όσο και εμπειρικά με την πρακτική της εφαρμογή σε πραγματικό πληθυσμό.

Abstract

Probability proportional to size sampling is a relatively modern method of sampling, with its basic principle being that the probability of a unit of the population to be selected in a sample is proportional to its size (value). Pps Sampling apart from its classical form has also a new variant which is used in auditing. When applying this method the units of the population with a high value are more likely to be selected in the sample. For that reason it is widely used in auditing, since the auditor wishes to include in his sample units with a value higher than a certain threshold.

In this paper we analyze the statistical background of the audit procedures of Pps sampling for the calculation of sample size and the performance of statistical test. This analysis is considered useful because both in Greek and international literature the procedure is mechanistically described with the use of tables. Moreover, we perform a comparison between the classical pps sampling and its variant used in audit not only with a theoretical analysis of the probability of a sample being selected but also through an empirical application in a real population.

Πίνακας περιεχομένων

Εισαγωγή	5
1. Οι κλασικές μέθοδοι στατιστικής δειγματοληψίας.....	6
1.1. Εισαγωγή.....	6
1.2. Απλή τυχαία δειγματοληψία (Simple random sampling)	6
1.3. Στρωματοποιημένη δειγματοληψία	10
1.4. Δειγματοληψία κατά συστάδες	13
1.4.1. Δειγματοληψία κατά συστάδες σε ένα στάδιο	14
1.4.2. Δειγματοληψία κατά συστάδες σε δύο στάδια	17
1.5. Δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους.....	18
1.6. Συμπεράσματα	20
2. Ελεγκτική δειγματοληψία	22
2.1. Εισαγωγή.....	22
2.2. Δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους - Probability Proportional to Size (pps) sampling	27
2.2.1. Γενικά.....	27
2.2.2. Υποθέσεις.....	29
2.2.3. Μέγεθος Δείγματος.....	30
2.2.4. Επιλογή δείγματος.....	35
2.2.5. Συγκριτική ανάλυση κλασικής και ελεγκτικής δειγματοληψίας pps.....	38
2.3. Εκτίμηση αποτελεσμάτων δείγματος.....	39
2.4. Πλεονεκτήματα – μειονεκτήματα	45
2.4.1. Πλεονεκτήματα	45
2.4.2. Μειονεκτήματα	46
3. Εφαρμογή δειγματοληψίας με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους.....	47
3.1. Εφαρμογή.....	47
3.2. Συμπεράσματα	57

Παράρτημα 1	60
Παράρτημα 2	65
Βιβλιογραφία	76

Εισαγωγή

Η δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους (probability proportional to size sampling) είναι μία σχετικά σύγχρονη μέθοδος δειγματοληψίας, καθώς η εφαρμογή της προϋποθέτει την χρήση υπολογιστικών αλγορίθμων. Βασική αρχή αυτής της μεθόδου είναι ότι η πιθανότητα επιλογής μίας μονάδας του πληθυσμού στο δείγμα είναι ανάλογη του μεγέθους (αξίας) της και η εφαρμογή της έχει ως αποτέλεσμα οι μονάδες του πληθυσμού με μεγάλη αξία να επιλέγονται συχνότερα στο δείγμα. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται κατά κόρον στην ελεγκτική, καθώς ο ελεγκτής επιθυμεί να συμπεριλάβει στο δείγμα του μονάδες με αξία μεγαλύτερη από ένα συγκεκριμένο όριο.

Επειδή μάλιστα επιθυμεί να ελέγξει όλες αυτές τις μονάδες, χρησιμοποιείται μία παραλλαγή της κλασικής μεθόδου pps, με τη χρήση της συστηματικής δειγματοληψίας, η οποία έχει σαν αποτέλεσμα την επιθυμητή ιδιότητα.

Σε αυτή την εργασία αναλύεται το στατιστικό υπόβαθρο των ελεγκτικών διαδικασιών της δειγματοληψίας με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους για τον υπολογισμό του μεγέθους του δείγματος και τη διενέργεια του στατιστικού ελέγχου. Η ανάλυση αυτή κρίνεται χρήσιμη διότι τόσο στην ελληνική όσο και στην διεθνή βιβλιογραφία η διαδικασία περιγράφεται μηχανιστικά με χρήση πινάκων, η οποία βέβαια ήταν απαραίτητη πριν αρχίσει η διαδεδομένη πλέον χρήση υπολογιστικών προγραμμάτων.

Επιπλέον, στη παρούσα εργασία γίνεται σύγκριση της κλασικής μεθόδου δειγματοληψίας pps με την ελεγκτική της μορφή τόσο θεωρητικά σχετικά με τις πιθανότητες επιλογής των μονάδων του δείγματος όσο και εμπειρικά με την πρακτική της εφαρμογή σε πραγματικό πληθυσμό.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναλύονται συγκριτικά οι σημαντικότερες κλασικές στατιστικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται αυτούσιες ή με παραλλαγές στην ελεγκτική δειγματοληψία, όπως η απλή τυχαία δειγματοληψία, η στρωματοποιημένη δειγματοληψία, η δειγματοληψία κατά συστάδες και τέλος η δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται εκτενής παρουσίαση της δειγματοληψίας pps και των αντίστοιχων αποτελεσμάτων του ελέγχου, ενώ συγκρίνεται η κλασική μέθοδος με εκείνη που χρησιμοποιείται στην ελεγκτική.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η πρακτική εφαρμογή της μεθόδου σε έναν πραγματικό πληθυσμό. Η εργασία ολοκληρώνεται με τα συμπεράσματα και τη σχετική βιβλιογραφία.

1. Οι κλασικές μέθοδοι στατιστικής δειγματοληψίας

1.1. Εισαγωγή

Η αναλυτική μελέτη των χαρακτηριστικών ενός πληθυσμού και η εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων είναι μία δύσκολη διαδικασία χωρίς τη βοήθεια της στατιστικής, καθώς είναι χρονοβόρα, δαπανηρή και μερικές φορές πρακτικά αδύνατη. Η στατιστική παρέχει για κάθε περίπτωση τις κατάλληλες μεθόδους για το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής, περιγραφής, ανάλυσης και επεξεργασίας ενός τυχαία επιλεγμένου υποσυνόλου.

Η διαδικασία επιλογής ενός υποσυνόλου του πληθυσμού ονομάζεται δειγματοληψία και το υποσύνολο του πληθυσμού που καταγράφεται ονομάζεται δείγμα. Ο σκοπός της δειγματοληψίας είναι η συλλογή δεδομένων από ένα υποσύνολο του πληθυσμού, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν για να εξάγουν συμπεράσματα που αφορούν σε εκτίμηση ή σε έλεγχο υποθέσεων για τα βασικά χαρακτηριστικά του πληθυσμού. Τα συμπεράσματα από την εκτίμηση ή τον έλεγχο υποθέσεων γενικεύονται σε ολόκληρο τον πληθυσμό και προσεγγίζονται ικανοποιητικά, όταν η επιλογή του γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι τυχαίο και αντιπροσωπευτικό. Αυτό επιτυγχάνεται όταν οι μονάδες του πληθυσμού επιλέγονται τυχαία και κάθε μία από αυτές έχει μία γνωστή πιθανότητα να επιλεγεί στο δείγμα. Η δειγματοληψία αυτή, δηλαδή η δειγματοληψία που βασίζεται στις πιθανότητες ονομάζεται στατιστική δειγματοληψία.

Οι μέθοδοι δειγματοληψίας προσδιορίζονται από την κατανομή επιλογής των πιθανοτήτων στις μονάδες του πληθυσμού και ξεκινούν από τις πιο απλές, όπως η απλή τυχαία δειγματοληψία και καταλήγουν στις πιο σύνθετες. Σε όλες τις μεθόδους έχουμε έναν πληθυσμό ο οποίος αποτελείται από καλά ορισμένες μονάδες. Ορίζεται ως ένα καλά ορισμένο σύνολο μονάδων των οποίων κάποια χαρακτηριστικά θέλουμε να εξετάσουμε και στατιστικός πληθυσμός το σύνολο των χαρακτηριστικών ενός πληθυσμού μετρημένο σε συγκεκριμένες κλίμακες (μεταβλητές) για όλες τις μονάδες του πληθυσμού.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις πιο διαδεδομένες μεθόδους δειγματοληψίας όπως η απλή τυχαία δειγματοληψία, η στρωματοποιημένη δειγματοληψία, η δειγματοληψία κατά συστάδες και τέλος η δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους.

1.2. Απλή τυχαία δειγματοληψία (Simple random sampling)

Η απλή τυχαία δειγματοληψία αποτελεί την πιο απλή μέθοδο δειγματοληψίας και έχει ευρεία εφαρμογή σε διάφορες μελέτες και έρευνες, λόγω της εύκολης διαδικασίας σχεδιασμού. Είναι η μέθοδος επιλογής n μονάδων από έναν πληθυσμό N , ο οποίος αποτελείται από $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ μονάδες, έτσι ώστε καθένα από τα δείγματα που μπορούν να σχεδιαστούν να έχει ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. Η μέθοδος αυτή

διακρίνεται σε δύο επιμέρους υποπεριπτώσεις δειγματοληψίας, την απλή τυχαία δειγματοληψία χωρίς επανάθεση (simple random sampling without replacement) και την απλή τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση (simple random sampling with replacement). Και στις δύο περιπτώσεις όλοι οι συνδυασμοί δειγμάτων του πληθυσμού έχουν την ίδια πιθανότητα επιλογής και το πλήθος δειγμάτων αυτών δίνεται από τον ακόλουθο τύπο (Cochran, 1977):

$${}_N C_n = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Η πιθανότητα που έχει το πρώτο δείγμα να επιλεγεί είναι $\frac{n}{N}$. Η πιθανότητα για το δεύτερο δείγμα, δεδομένου ότι το πρώτο δεν αποτελεί πλέον κομμάτι του πληθυσμού είναι $\frac{n-1}{N-1}$, για το τρίτο είναι $\frac{n-2}{N-2}$ κ.ο.κ. Ως εκ τούτου, η πιθανότητα που έχει κάθε δείγμα να επιλεγεί είναι ίση με $\frac{1}{{}_N C_n}$.

$$\frac{n}{N} \cdot \frac{n-1}{N-1} \cdot \frac{n-2}{N-2} \cdot \dots \cdot \frac{n-(n-1)}{N-(n-1)} = \frac{n!(N-n)!}{N!} = \frac{1}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{{}_N C_n}$$

Η διαδικασία επιλογής ενός από τα ${}_N C_n$ δείγματα ονομάζεται **απλή τυχαία δειγματοληψία χωρίς επανάθεση** (simple random sampling without replacement), διότι κάθε μονάδα μετά την επιλογή της στο τυχαίο δείγμα απομακρύνεται από τον πληθυσμό.

Στην **απλή τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση** (simple random sampling with replacement) όλες οι μονάδες του πληθυσμού έχουν ίση πιθανότητα να επιλεγούν στο δείγμα, διότι μετά από κάθε δοκιμή, η μονάδα επανατοποθετείται στον πληθυσμό. Η επανατοποθέτηση αυτή επιτρέπει στις μονάδες να επιλεγούν περισσότερες από μία φορές στο δείγμα. Έτσι, η πιθανότητα επιλογής μίας μονάδας του πληθυσμού είναι ανεξάρτητη από την επιλογή κάποιας άλλης μονάδας. Η πιθανότητα κάθε μονάδας ισούται με $\frac{1}{N}$ και η πιθανότητα κάθε δείγματος είναι ίση με $\frac{n}{N}$.

$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_N = \frac{1}{N}, \text{ δηλαδή } p_i = p \quad \forall i \in N$$

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1$$

p_i : η πιθανότητα που έχει μία μονάδα i να επιλεγεί στο δείγμα

1, 2, 3, ..., N: οι μονάδες του πληθυσμού

Τις περισσότερες φορές, όταν καθορίζεται ως μέθοδος επιλογής του δείγματος η απλή τυχαία δειγματοληψία, εννοείται η απλή τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση, διότι οι υπολογισμοί των εκτιμητριών είναι ευκολότεροι. Εξάλλου, αν ο πληθυσμός είναι πολύ μεγαλύτερος σε σχέση με το δείγμα, η επίπτωση στις πιθανότητες μετά την αφαίρεση των μονάδων μετά την πρώτη δοκιμή είναι ασήμαντη.

Στις δειγματοληψίες επιχειρείται η σημειακή εκτίμηση των χαρακτηριστικών ενός πληθυσμού μεταξύ των οποίων είναι μέση τιμή του πληθυσμού (μ), το συνολικό μέγεθος (Y), το ποσοστό μονάδων (p), ο αριθμός των μονάδων ενός πληθυσμού που ανήκουν σε μια ορισμένη κατηγορία (A) κ.α. (Cochran, 1977)

Εκτίμηση παραμέτρων

Η σημειακή εκτίμηση των χαρακτηριστικών του πληθυσμού και των αντίστοιχων διακυμάνσεων τους χρησιμεύουν τόσο στην κατασκευή των διαστημάτων δειγματοληψίας όσο και στον έλεγχο υποθέσεων που αφορούν στις παραμέτρους-χαρακτηριστικά που μελετάμε, ενώ διαφέρουν σε κάθε δειγματοληψία.

Έστω ένας πληθυσμός μεγέθους N με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 , από τον οποίο επιλέγεται ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n , έστω $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Η εκτιμήτρια της μέσης τιμής του πληθυσμού συμβολίζεται με $\hat{\mu}$ αντιπροσωπεύεται από τον μέσο όρο, τη διάμεσο, τον σταθμικό μέσο κλπ. Ο μέσος όρος (\bar{x}) είναι η καλύτερη εκτίμηση της μέσης τιμής (μ) όταν το δείγμα x_1, x_2, \dots, x_n ακολουθεί κανονική κατανομή. Επίσης, λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος η κατανομή του μέσου όρου είναι προσεγγιστικά κανονική για μεγάλα δείγματα.

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Η αντίστοιχη διακύμανση της εκτιμήτριας του μέσου, δεδομένου ότι η διακύμανση του πληθυσμού (σ^2) είναι γνωστή, υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}(1-f) \text{ όπου } f = \frac{n}{N}$$

Το $(1-f)$ ονομάζεται διορθωτικός παράγοντας (finite population corrections) χρησιμοποιείται στον τύπο της διακύμανσης, όταν ο πληθυσμός που πρόκειται να μελετήσουμε είναι πεπερασμένος. Οι τιμές του μπορεί να πάρει κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1.

$$0 \leq (1-f) \leq 1$$

Όταν ο λόγος $\frac{n}{N}$ τείνει στο άπειρο, ο διορθωτικός παράγοντας ισούται με τη μονάδα και δεν επηρεάζει την τιμή της διακύμανσης. Στην περίπτωση όμως που πάρουμε μεγάλο δείγμα, ο λόγος $\frac{n}{N}$ διαφέρει σημαντικά από το μηδέν και κατ' επέκταση μειώνει την τιμή της διακύμανσης.

Στην περίπτωση που η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη, η διακύμανση εκτιμήτριας $V(\bar{x})$ και το τυπικό σφάλμα $SE(\bar{x})$ υπολογίζονται ως εξής:

$$V(\bar{x}) = \frac{s^2}{n}(1-f) = \sigma_{\bar{x}}^2$$

$$SE(\bar{x}) = \sqrt{V(\bar{x})} = \frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{(1-f)}$$

Όπου s^2 είναι η δειγματική διακύμανση: $\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Έστω Y η συνολική αξία ενός πληθυσμού N μονάδων. Η εκτιμήτριά της συμβολίζεται με \hat{Y} και υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας την εκτιμήτρια της μέσης τιμής του πληθυσμού με το μέγεθος του πληθυσμού:

$$\hat{Y} = N\bar{x}$$

Αντίστοιχα, η διακύμανση εκτιμήτριας, δεδομένου ότι η διακύμανση του πληθυσμού (σ^2) είναι γνωστή, υπολογίζεται ως εξής:

$$V(\hat{Y}) = N^2 \frac{\sigma^2}{n}(1-f) \text{ όπου } f = \frac{n}{N}$$

Όταν η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη, η διακύμανση εκτιμήτριας $V(\hat{Y})$ και το τυπικό σφάλμα $SE(\hat{Y})$ υπολογίζονται από τους παρακάτω τύπους:

$$V(\hat{Y}) = N^2 \frac{s^2}{n}(1-f) = \sigma_{\hat{Y}}^2$$

$$SE(\hat{Y}) = N \frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{(1-f)}$$

Η απλή τυχαία δειγματοληψία χρησιμοποιείται κυρίως όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμες στο μητρώο μεταβλητές στρωματοποίησης ή ταξινόμησης και η επιλογή των μονάδων του δείγματος γίνεται από το σύνολο του πληθυσμού με τη χρήση πινάκων τυχαίων αριθμών ή με γεννήτρια τυχαίων αριθμών.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι πέρα από την αυτοτελή της χρήση, αυτή η μέθοδος χρησιμεύει και ως βάση για άλλες δειγματοληπτικές μεθόδους, όπως, η στρωματοποιημένη απλή τυχαία δειγματοληψία (stratified simple random sampling), η δειγματοληψία κατά συστάδες (cluster sampling), η δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους (probability proportional to size sampling) κ.α.

1.3. Στρωματοποιημένη δειγματοληψία

Η στρωματοποιημένη δειγματοληψία είναι η διαδικασία επιλογής ενός δείγματος n από έναν πληθυσμό N , ο οποίος είναι χωρισμένος σε υποπληθυσμούς. Οι υποπληθυσμοί αυτοί, γνωστοί ως στρώματα (strata), είναι ξένοι μεταξύ τους, δηλαδή κάθε μονάδα ανήκει μόνο σε έναν υποπληθυσμό, και το άθροισμα τους ισούται με ολόκληρο τον πληθυσμό.

$$N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_L = N$$

1, 2, 3, ..., L: υποπληθυσμοί, στρώματα

Ο τρόπος στρωματοποίησης του πληθυσμού είναι πολύ σημαντικός για την ακρίβεια των εκτιμητριών. Ο πληθυσμός πρέπει να διαιρεθεί με τέτοιο τρόπο ώστε τα στρώματα να είναι ομοιογενή στο εσωτερικό τους και ταυτόχρονα ετερογενή μεταξύ τους. Όσο πιο ομοιογενή είναι τα στρώματα στο εσωτερικό τους και ταυτόχρονα διαφέρουν μεταξύ τους, τόσο καλύτερη είναι η στρωματοποίηση.

Έστω ότι από κάθε στρώμα του πληθυσμού $h=1, 2, \dots, L$, επιλέγεται ένα απλό τυχαίο δείγμα μεγέθους n_h . Το σύνολο των δειγμάτων κάθε στρώματος δημιουργεί το δείγμα πληθυσμού ονομάζεται στρωματοποιημένο τυχαίο δείγμα (stratified random sample).

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_L = n$$

Ο καταμερισμός του δείγματος n στα L στρώματα του πληθυσμού γίνεται συνήθως έτσι ώστε να ισχύει η ακόλουθη σχέση $\frac{n_h}{n} = \frac{N_h}{N}$, η οποία εξασφαλίζει αναλογική αντιπροσώπευση των στρωμάτων στο δείγμα.

Αυτό σημαίνει ότι το μέγεθος του δείγματος από ένα στρώμα είναι ανάλογο του ποσοστού των μονάδων του πληθυσμού που το στρώμα εκπροσωπεί. Για παράδειγμα, έστω ότι ο πληθυσμός N χωρίζεται σε 2 στρώματα, N_1, N_2 αποτελούμενα από 2400 και 1600 μονάδες αντίστοιχα. Το μέγεθος του δείγματος του πρώτου στρώματος n_1

καλύπτει το 60% του συνολικού δείγματος. $\left(\frac{n_1}{n} = \frac{N_1}{N} = \frac{2400}{4000}\right)$.

Η παραπάνω διαδικασία επιλογής του δείγματος ονομάζεται **αναλογική στρωματοποιημένη τυχαία δειγματοληψία** (proportional stratified random

sampling) και είναι κατάλληλη, όταν οι διακυμάνσεις των στρώματων δεν διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους.

Εκτίμηση παραμέτρων

Έστω ένας πληθυσμός μεγέθους N με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 , από τον οποίο επιλέγεται ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n , x_1, x_2, \dots, x_n .

Ο πληθυσμός διαιρείται σε στρώματα $h=1, 2, 3, \dots, L$. Η μέση αξία των μονάδων κάθε στρώματος h , \bar{Y}_h , υπολογίζεται ως εξής:

$$\bar{Y}_h = \frac{1}{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} y_{hi}$$

i : ο δείκτης τιμών του χαρακτηριστικού που μελετάται

n_h : το μέγεθος του δείγματος για το στρώμα h

N_h : το μέγεθος του στρώματος h συνολικά

y : το χαρακτηριστικό του πληθυσμού που μελετάμε

y_{hi} : η i -οστή τιμή του χαρακτηριστικού y στο στρώμα h

Ο δειγματικός μέσος του στρώματος h_i

$$\bar{y}_h = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}$$

S_h^2 : η πληθυσμιακή διασπορά του στρώματος h

$$S_h^2 = \frac{1}{N_h - 1} \sum_{i=1}^{N_h} (y_{hi} - \bar{Y}_h)^2$$

s_h^2 : η δειγματική διασπορά του στρώματος h

$$s_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (y_{hi} - \bar{y}_h)^2$$

Όπως αναφέραμε παραπάνω, ο καταμερισμός του δείγματος n στα L στρώματα του πληθυσμού γίνεται αναλογικά. Το βάρος του στρώματος h στον πληθυσμό (W_h) προσδιορίζεται ως εξής:

$$W_h = \frac{N_h}{N}$$

Αντίστοιχα, το βάρος του στρώματος h στο δείγμα υπολογίζεται με τον παρακάτω τύπο:

$$w_h = \frac{n_h}{n}$$

Το ποσοστό των μονάδων που θα επιλεγούν κάθε στρώμα f_h είναι ίδιο για όλα τα στρώματα και ισούται με $\frac{n_h}{N_h}$.

Η συνολική αξία του στρώματος h , Y_h , υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας τη μέση αξία των μονάδων του στρώματος με τον πληθυσμό αυτού.

$$Y_h = N_h \bar{Y}_h$$

Η εκτίμηση πληθυσμιακού μέσου \bar{Y} υπολογίζεται ως εξής:

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^L \sum_{i=1}^{N_h} N_h \bar{Y}_h = \sum_{h=1}^L W_h \bar{Y}_h$$

Αντίστοιχα, υπολογίζονται η εκτιμήτρια του πληθυσμιακού μέσου $\hat{\bar{Y}}$ και η διακύμανση $V(\hat{\bar{Y}})$ για κάθε στρώμα $h=1, 2, \dots, L$

$$\hat{\bar{Y}} = \bar{y}_{st} = \sum_{h=1}^L W_h \bar{y}_h$$

$$V(\hat{\bar{Y}}) = V(\bar{y}_{st}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{S_h^2}{n_h} (1 - f_h)$$

Αν η πληθυσμιακή διασπορά S_h^2 του στρώματος h είναι άγνωστη, εκτιμάται η δειγματική διασπορά s_h^2 και η συνολική διακύμανση $V(\bar{y}_{st})$ εκτιμάται ως εξής:

$$s^2(\bar{y}_{st}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \cdot \frac{s_h^2}{n_h} \left(1 - \frac{n}{N}\right) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{s_h^2}{n_h} - \frac{1}{N} \sum_{h=1}^L W_h s_h^2$$

Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι τιμές του πληθυσμού έχουν μεγαλύτερη διακύμανση σε μερικά στρώματα σε σύγκριση με άλλα. Για να αντιπροσωπευθούν επαρκώς αυτά τα στρώματα στο δείγμα, θα πρέπει ο λόγος $\frac{n_h}{N_h}$ να είναι ανάλογος

της τυπικής απόκλισης S_h κάθε στρώματος. Αυτό σημαίνει ότι για να αυξηθεί η ακρίβεια των εκτιμήσεων, τα στρώματα με μεγαλύτερη διακύμανση από άλλα πρέπει να εκπροσωπούνται από μεγαλύτερο τμήμα του δείγματος. Υποθέτοντας ότι το δειγματοληπτικό κόστος ανά μονάδα είναι το ίδιο για όλα τα στρώματα, αποδεικνύεται ότι η διακύμανση του δείγματος $V(\bar{y}_{st})$ γίνεται ελάχιστη, αν τα μεγέθη του δείγματος των στρωμάτων n_1, n_2, \dots, n_L επιλεγούν ως εξής:

$$n_h = n \cdot \frac{W_h \cdot S_h}{\sum_{h=1}^L N_h S_h} = n \cdot \frac{N_h \cdot S_h}{\sum_{h=1}^L N_h S_h}$$

Ο σχεδιασμός αυτός είναι γνωστός ως βέλτιστος καταμερισμός του n με σταθερό κόστος ανά δειγματοληπτική μονάδα (optimum allocation with constant cost per unit) ή καταμερισμός κατά Neyman (Neyman allocation) (Cochran, 1977).

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι για να επιλεγεί η στρωματοποιημένη τυχαία δειγματοληψία ως μέθοδος επιλογής δείγματος, απαιτείται η ύπαρξη διαθέσιμης πρόσθετης πληροφορίας στο μητρώο με την μορφή μίας ή περισσότερων κατηγορικών μεταβλητών στρωματοποίησης, όπως για παράδειγμα φύλλο, τόπος διαμονής, μέγεθος εταιρίας, νομική μορφή εταιρίας κ.α, προκειμένου να είναι δυνατή η στρωματοποίηση του πληθυσμού.

Η στρωματοποιημένη τυχαία δειγματοληψία είναι πιο ακριβής από την τυχαία δειγματοληψία, καθώς δίνει πιο αντιπροσωπευτικό δείγμα και κατ' επέκταση πιο ακριβείς εκτιμήσεις για τις παραμέτρους. Για παράδειγμα, όταν επιλέγεται με απλή τυχαία δειγματοληψία ένα δείγμα 100 ανθρώπων από έναν πληθυσμό 1000 ανδρών και 1000 γυναικών, είναι θεωρητικά πιθανό να επιλεγούν στο δείγμα λίγοι ή κανένας από τους άνδρες, γεγονός το οποίο ενδεχομένως έχει επίπτωση στα αποτελέσματα. Αντίθετα, με την στρωματοποιημένη δειγματοληψία ο πληθυσμός, διαιρεμένος σε δύο στρώματα, δίνει ένα δείγμα 50 ανδρών και 50 γυναικών, διατηρώντας έτσι την αναλογία που υπάρχει στον πληθυσμό. (Sharon L. Lohr, 2009)

Επιπλέον, με τη στρωματοποίηση του πληθυσμού διευκολύνεται ο έλεγχος, καθώς είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί διαφορετική διαδικασία ελέγχου των μονάδων σε κάθε στρώμα, κάτι που μπορεί να οδηγήσει σε μικρότερο κόστος δειγματοληψίας. (Sharon L. Lohr, 2009)

Ωστόσο, είναι προφανές ότι όταν οι διαφορές μεταξύ των στρωμάτων είναι μικρές και στο εσωτερικό τους δεν υπάρχει ομοιογένεια, η στρωματοποιημένη δειγματοληψία δεν δίνει ακριβέστερη προσέγγιση του πληθυσμού σε σχέση με την απλή τυχαία δειγματοληψία.

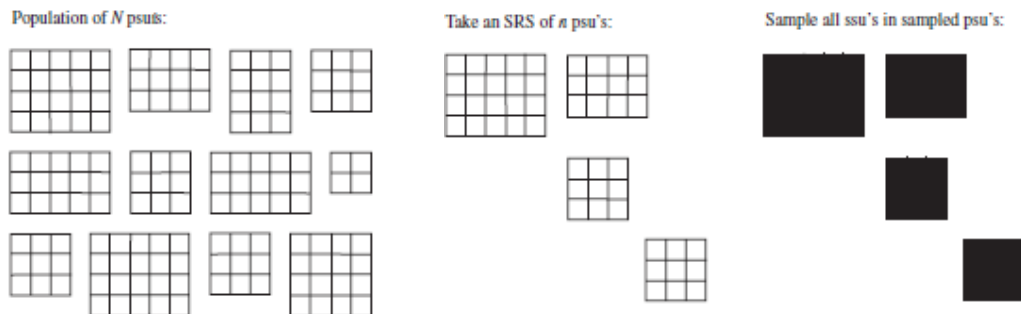
1.4. Δειγματοληψία κατά συστάδες

Δειγματοληψία κατά συστάδες (cluster sampling) ονομάζεται η διαδικασία επιλογής δείγματος από έναν πληθυσμό, ο οποίος χωρίζεται σε ανεξάρτητες συστάδες (clusters) και από αυτές επιλέγεται τυχαία ένα δείγμα συστάδων, οι οποίες εξετάζονται στο σύνολό τους ή σε ένα μέρος αυτών. Η συστάδα που επιλέγεται ονομάζεται δειγματική μονάδα πρώτου βαθμού (primary sampling unit, psu), ενώ οι μονάδες της συστάδας δειγματική μονάδα δεύτερου βαθμού (secondary sampling unit, ssu).

Η μέθοδος αυτή διαφέρει από της μεθόδους που μελετήσαμε μέχρι στιγμής. Στις προηγούμενες μεθόδους που μελετήσαμε η επιλογή του δείγματος αφορά στις μονάδες του πληθυσμού, ενώ στη δειγματοληψία κατά συστάδες, επιλέγονται τυχαία συστάδες, οι οποίες προϋπάρχουν ως πληροφορία για τον πληθυσμό. Πιο αναλυτικά, ο πληθυσμός αρχικά χωρίζεται σε συστάδες (clusters) ανεξάρτητες μεταξύ τους, από τις οποίες επιλέγονται τυχαία μερικές. Οι μονάδες των συστάδων που επιλέχθηκαν περιλαμβάνονται στο δείγμα είτε στο σύνολό τους είτε με ένα μέρος αυτών μετά από τυχαία επιλογή. Η διαδικασία επιλογής του δείγματος με τους παραπάνω τρόπους ονομάζεται δειγματοληψία κατά συστάδες σε ένα στάδιο (one-stage cluster sampling) και δειγματοληψία κατά συστάδες σε δύο στάδια (two-stage cluster sampling) αντίστοιχα.

1.4.1. Δειγματοληψία κατά συστάδες σε ένα στάδιο

Σε αυτή τη δειγματοληψία, επιλέγονται τυχαία μερικές συστάδες του πληθυσμού και οι μονάδες που ανήκουν σε αυτές περιλαμβάνονται στο δείγμα. Όπως βλέπουμε στην παρακάτω εικόνα, το δείγμα περιλαμβάνει το 100% των μονάδων των επιλεγμένων συστάδων και καθόλου τις μονάδες των συστάδων που δεν επελέγησαν.



Εικόνα 1: Δειγματοληψία κατά ομάδες σε ένα στάδιο

Εκτίμηση παραμέτρων

Στη δειγματοληψία κατά συστάδες, η εκτίμηση των παραμέτρων είναι σύνθετη, διότι όπως αναφέραμε παραπάνω, σε αντίθεση με άλλες μεθόδους υπάρχουν δύο είδη δειγματικών μονάδων, οι συστάδες (psus) και οι μονάδες αυτών (ssus).

Έστω ότι N είναι ο αριθμός των συστάδων του πληθυσμού και S ένα δείγμα των συστάδων αυτών. M_i είναι ο αριθμός των μονάδων στην συστάδα i , m_i ο αριθμός των μονάδων της συστάδας i που περιλαμβάνονται στο δείγμα και x_{ij} η μονάδα j της συστάδας i .

Ξεκινώντας από το πρώτο στάδιο, ο συνολικός αριθμός των μονάδων στον πληθυσμό είναι το άθροισμα των μονάδων όλων των συστάδων του πληθυσμού:

$$M_o = \sum_{i=1}^N M_i$$

Η μέση αξία της συστάδας i του πληθυσμού δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$y_i = \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij}$$

Η συνολική μέση αξία του πληθυσμού υπολογίζεται από το άθροισμα των μονάδων των N συστάδων ως εξής:

$$Y = \sum_{i=1}^N y_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij}$$

$$\text{με διακύμανση } S_i^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(y_i - \frac{Y}{N} \right)^2$$

Στο δεύτερο στάδιο, η μέση αξία των μονάδων του πληθυσμού υπολογίζεται ως εξής:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \frac{x_{ij}}{M_o}$$

Η μέση αξία των μονάδων κάθε συστάδας i του πληθυσμού δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{M_i} \frac{x_{ij}}{M_i} = \frac{y_i}{M_i}$$

$$\text{με πληθυσμιακή διακύμανση ανά μονάδα } S^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \frac{(x_{ij} - \bar{x})^2}{M_o - 1}$$

$$\text{και για κάθε συστάδα } S_i^2 = \sum_{j=1}^{M_i} \frac{(x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{M_i - 1}$$

Θα εξετάσουμε την απλή περίπτωση κατά την οποία όλες οι συστάδες του πληθυσμού έχουν τον ίδιο αριθμό μονάδων (ssus), $M_i = m_i = M$.

Έστω ότι επιλέχθηκε με απλή τυχαία δειγματοληψία ένα δείγμα n συστάδων. Η εκτιμήτρια της μέσης αξίας των μονάδων των συστάδων που επιλέχθηκαν στο δείγμα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\bar{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^s y_i}{n}$$

Αντίστοιχα, η εκτιμήτρια της συνολικής αξίας του πληθυσμού υπολογίζεται ως εξής:

$$\hat{Y} = \frac{N}{n} \cdot \sum_{i=1}^s y_i$$

με διακύμανση $V(\hat{Y}) = N^2 \frac{S_y^2}{n} (1-f)$ και τυπικό σφάλμα $SE(\hat{Y}) = N \frac{S_y}{\sqrt{n}} \sqrt{(1-f)}$

Η εκτίμηση της διακύμανσης του πληθυσμού υπολογίζεται ως εξής:

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^s \left(y_i - \frac{\bar{y}}{N} \right)^2$$

Για να εκτιμήσουμε τη μέση αξία των μονάδων, διαιρούμε τη συνολική αξία των συστάδων \hat{Y} με τον αριθμό των μονάδων του πληθυσμού. Στην περίπτωσή μας, επειδή ο αριθμός των μονάδων του πληθυσμού είναι ίδιος σε κάθε συστάδα (M), ο συνολικός αριθμός των μονάδων υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό των μονάδων μίας συστάδας με τον αριθμό των μονάδων του πληθυσμού.

$$\hat{x} = \frac{\hat{y}}{NM}$$

Η διακύμανση και η τυπικό σφάλμα υπολογίζεται ως εξής:

$$V(\hat{x}) = \frac{S_y^2}{nM^2} (1-f)$$

$$SE(\hat{x}) = \frac{1}{M} \frac{S_y}{\sqrt{n}} \sqrt{(1-f)}$$

Τέλος, το βάρος για κάθε μονάδων των επιλεγμένων συστάδων είναι $w_{ij} = \frac{N}{n}$. Έτσι,

όπως συμβαίνει και στη στρωματοποιημένη δειγματοληψία, μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μέση αξία του πληθυσμού υπολογίζοντας το άθροισμα του γινομένου της συνολικής αξίας κάθε ομάδας και του βάρους που έχει κάθε ομάδα, το οποίο στην περίπτωση μας είναι ίδιο για όλες.

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{S_i} w_{ij} x_{ij}}{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{S_i} w_{ij}} = \frac{\hat{y}}{NM}$$

Η δειγματοληψία κατά συστάδες σε ένα στάδιο χρησιμοποιείται σε πολλές έρευνες στις οποίες το δειγματοληπτικό κόστος επιλογής μερικών από τις μονάδες των συστάδων που επιλέχθηκαν είναι δεν διαφέρει πολύ από το δειγματοληπτικό κόστος

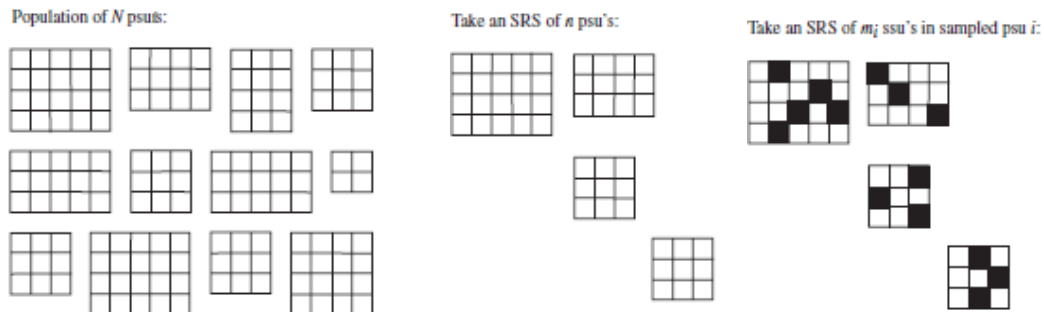
των συστάδων. Για παράδειγμα, σε μία έρευνα για την εκπαίδευση, ως συστάδα μπορούμε να θεωρήσουμε μία αίθουσα μαθητών. Σε αυτή την αίθουσα όλοι οι μαθητές συμπεριλαμβάνονται στο δείγμα, καθώς το πρόσθετο δειγματοληπτικό κόστος για τη εξέταση όλων των μονάδων στο δείγμα είναι αμελητέο. (Sharon L. Lohr, 2009)

1.4.2. Δειγματοληψία κατά συστάδες σε δύο στάδια

Όπως είδαμε παραπάνω, στη δειγματοληψία κατά συστάδες σε ένα στάδιο, εξετάζουμε όλες τις μονάδες (ssus) που περιλαμβάνονται στις επιλεγμένες συστάδες (psus). Σε πολλές περιπτώσεις όμως, τα χαρακτηριστικά μίας συστάδας είναι κοινά και για το λόγο αυτό μπορούμε να πάρουμε ένα δείγμα μονάδων κάθε επιλεγμένης συστάδας και όχι όλες τις μονάδες που απαρτίζεται, διατηρώντας χαμηλό το δειγματοληπτικό κόστος. Αυτή η διαδικασία επιλογής δείγματος ονομάζεται δειγματοληψία κατά συστάδες σε δύο στάδια. Τα στάδια, όταν οι δειγματοληπτικές μονάδες πρώτου και δεύτερου βαθμού έχουν την ίδια πιθανότητα να επιλεγούν στο δείγμα, είναι τα εξής:

1^ο στάδιο: Επιλέγουμε με απλή τυχαία δειγματοληψία ένα δείγμα n συστάδων (psus) από έναν πληθυσμό N , διαιρεμένο σε h συστάδες.

2^ο στάδιο: Επιλέγουμε με απλή τυχαία δειγματοληψία ένα δείγμα m_i μονάδων (ssus) από τις επιλεγμένες ομάδες (psus).



Εικόνα 2 Δειγματοληψία κατά ομάδες σε δύο στάδια

Η δειγματοληψία κατά συστάδες έχει μικρότερο δειγματοληπτικό κόστος σε σύγκριση με τις μεθόδους που παρατέθηκαν παραπάνω, όμως, όπως είναι φυσικό, δίνει μικρότερη ακρίβεια στις εκτιμήτριες. Αυτό συμβαίνει διότι αφενός στο δείγμα δεν περιλαμβάνονται μονάδες από όλες τις συστάδες του πληθυσμού, και αφετέρου μερικές συστάδες τείνουν να είναι ομοιογενείς στο εσωτερικό τους, δηλαδή οι μονάδες που αποτελούνται τείνουν να έχουν κοινά χαρακτηριστικά μεταξύ τους σε σχέση με άλλες μονάδες οι οποίες επιλέγονται τυχαία από όλο τον πληθυσμό. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, κατά την εξέταση του δείγματος, να επαναλαμβάνεται η ίδια

πληροφορία χωρίς να αποκτάται νέα, εμποδίζοντας έτσι την αύξηση της ακρίβειας της εκτίμησης.

Εκ πρώτης όψεως, η μέθοδος αυτή φαίνεται ότι μοιάζει με τη στρωματοποιημένη δειγματοληψία, διότι και στις δύο μεθόδους το δείγμα επιλέγεται, αφού πρώτα ο πληθυσμός διαιρεθεί σε επιμέρους υποπληθυσμούς. Ωστόσο, στη δειγματοληψία κατά συστάδες, υπάρχουν υποπληθυσμοί οι οποίοι είτε δεν συμμετέχουν καθόλου στο δείγμα είτε περιλαμβάνονται εξολοκλήρου, κάτι που δεν συμβαίνει στη στρωματοποιημένη δειγματοληψία. Η μέθοδος αυτή είναι πιο ακριβής όταν οι μονάδες κάθε συστάδας έχουν μεγάλη διακύμανση/ετερογένεια ώστε να αντιπροσωπεύουν όσο γίνεται περισσότερες μονάδες του πληθυσμού. Αυτό επιτυγχάνεται κατ' αρχήν από το μέγεθος της συστάδας. Όσο μεγαλύτερη είναι η συστάδας, τόσο μεγαλύτερη είναι και η διακύμανση των μονάδων που την αποτελούν. Αντίθετα, στη δειγματοληψία κατά στρώματα επιδιώκεται ομοιογένεια στο εσωτερικό τους και ετερογένεια μεταξύ τους.

1.5. Δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους

Στις μεθόδους δειγματοληψίας που συζητήσαμε μέχρι στιγμής, η πιθανότητα επιλογής μίας δειγματικής μονάδας είναι ίδια για όλες τις μονάδες/ομάδες του πληθυσμού. Η προσέγγιση αυτή όμως πολλές φορές δεν είναι τόσο αποτελεσματική. Η χρήση διαφορετικής πιθανότητας μπορεί να οδηγήσει σε ακριβέστερη εκτίμηση του χαρακτηριστικού που μελετάμε.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε διεξάγουμε μία έρευνα για τα πανεπιστήμια της χώρας. Σύμφωνα με τη δειγματοληψία κατά ομάδες, επιλέγουμε με απλή τυχαία δειγματοληψία κάποια πανεπιστήμια και στη συνέχεια είτε επιλέγουμε τυχαία προς εξέταση μερικά τμήματα αυτών, είτε τα εξετάζουμε στο σύνολό τους, χωρίς να λάβουμε υπόψη το μέγεθος των πανεπιστημίων, τη γεωγραφική του θέση κ.α. Για παράδειγμα ένα πανεπιστήμιο με 20.000 φοιτητές έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί με ένα πανεπιστήμιο 10.000 φοιτητών. Εφαρμόζοντας όμως δειγματοληψία κατά ομάδες με διαφορετική πιθανότητα επιλογής, δηλαδή επιλέγοντας τυχαία n πανεπιστήμια με πιθανότητα ανάλογη του αριθμού των φοιτητών τους, εκτιμάμε την πληθυσμιακή παράμετρο με μεγαλύτερη ακρίβεια μειώνοντας τη διακύμανση και διατηρώντας χαμηλό το δειγματοληπτικό κόστος.

Αντίστοιχα, πολλές φορές μπορούμε να εφαρμόσουμε τη στρωματοποιημένη δειγματοληψία δίνοντας στις μονάδες του πληθυσμού διαφορετική πιθανότητα να επιλεγούν στο δείγμα. Για παράδειγμα, σε μία έρευνα για τα ετήσια έξοδα διαφήμισης των εταιρειών είναι αναγκαίο να διαιρέσουμε τον πληθυσμό σε στρώματα ανάλογα με τον ετήσιο τζίρο κάθε εταιρείας και να δώσουμε μεγαλύτερη πιθανότητα επιλογής στις εταιρείες με μεγάλο τζίρο, διότι είναι φυσικό εταιρείες με μεγάλο τζίρο να έχουν περισσότερα έξοδα διαφήμισης από μικρές εταιρείες.

Ωστόσο, είναι δυνατό να επιλέξουμε δείγμα από μονάδες με άνιση πιθανότητα επιλογής, χωρίς να διαιρέσουμε τον πληθυσμό σε ομάδες ή στρώματα. Η διαδικασία επιλογής δείγματος με αυτό τον τρόπο ονομάζεται δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους (probability proportional to size sampling) και βασίζεται στην αντιστοίχιση μίας πιθανότητας ψ_i σε κάθε μονάδα του πληθυσμού $i=1,2,3,\dots,N$ και στη συνέχεια στην επιλογή στην επιλογή ενός δείγματος n από το σύνολο των δυνατών δειγμάτων.

Εκτίμηση παραμέτρων

Πριν ξεκινήσουμε τη μελέτη της εκτίμησης των παραμέτρων, πρέπει να αναφέρουμε ότι είναι δυνατό να επιλέξουμε το δείγμα με ή χωρίς επανατοποθέτηση. Υποθέτουμε αρχικά ότι η δειγματοληψία γίνεται με επανατοποθέτηση. Στην περίπτωση αυτή, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η πιθανότητα των μονάδων του πληθυσμού δεν αλλάζει μετά την επιλογή της πρώτης μονάδας.

Έστω ένας πληθυσμός μεγέθους N με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 , από τον οποίο θέλουμε να επιλέξουμε τυχαία δείγμα μεγέθους n , x_1, x_2, \dots, x_n .

Η πιθανότητα που έχει κάθε μονάδα του πληθυσμού N να επιλεγεί συμβολίζεται με p_i και είναι διαφορετική για κάθε μονάδα. Το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των μονάδων ισούται με ένα.

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1$$

1, 2, 3, ..., N : οι μονάδες του πληθυσμού

Αντίστοιχα, η στάθμιση για την μονάδα i είναι η εξής

$$w_i = \frac{1}{p_i}$$

Η εκτιμήτρια της συνολικής αξίας των μονάδων του πληθυσμού συμβολίζεται με \hat{Y} και υπολογίζεται ως εξής:

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{p_i}$$

Η πληθυσμιακή και διακύμανση S^2 υπολογίζεται ως εξής:

$$S^2 = \sum_{i=1}^N p_i \left(\frac{x_i}{p_i} - \sum_{i=1}^N x_i \right)^2$$

Στην περίπτωση της δειγματοληψίας με επανατοποθέτηση είναι δυνατό μερικές μονάδες του πληθυσμού να εμφανιστούν στο δείγμα περισσότερες από μία φορά,

ανάλογα με την πιθανότητα επιλογής κάθε μονάδας. Οι εκτιμήτριες των παραμέτρων προσδιορίζονται συνυπολογίζοντας τη μονάδα που έχει βγει δύο ή περισσότερες στο δείγμα. (Sharon L. Lohr, 2009)

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθούμε και στην περίπτωση δειγματοληψίας χωρίς επανατοποθέτηση, καθώς θεωρείται πιο αποτελεσματική ιδιαίτερα για πληθυσμούς μικρού μεγέθους. Η θεωρία της δειγματοληψίας χωρίς επανατοποθέτηση είναι περίπλοκη, διότι η πιθανότητα επιλογής μιας μονάδα του πληθυσμού μεταβάλλεται και εξαρτάται από τη σειρά που θα επιλεγεί στο δείγμα (Pfeffermann D, 1998).

Έστω p_i η πιθανότητα που έχει μία μονάδα i του πληθυσμού να επιλεγεί πρώτη προς εξέταση.

$$P(i) = p_i$$

Η πιθανότητα της μονάδας k να επιλεγεί δεύτερη στο δείγμα εξαρτάται από το ποια μονάδα επιλέχθηκε πρώτη.

$$P(k | i) = p_i \cdot \frac{p_k}{1 - p_i}$$

Αντίστοιχα, αν επιλεγεί πρώτη η μονάδα k , τότε η πιθανότητα της μονάδας i ισούται με $P(i | k) = p_k \cdot \frac{p_i}{1 - p_k}$. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι οι πιθανότητες

$P(i | k)$ και $P(k | i)$ δεν είναι ίδιες και η διαφορά έγκειται στη σειρά επιλογής.

Προσθέτοντας τις δύο αυτές πιθανότητες, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα που έχει το δείγμα δύο μονάδων i, k (π_{ik}) να επιλεγεί προς εξέταση:

$$\pi_{ik} = p_i \cdot \frac{p_k}{1 - p_i} + p_k \cdot \frac{p_i}{1 - p_k}$$

1.6. Συμπεράσματα

Κάθε μέθοδος δειγματοληψίας έχει τα δικά της πλεονεκτήματα - αδυναμίες και η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου εξαρτάται από πολλούς διαφορετικούς παράγοντες, όπως η επιθυμητή ακρίβεια των βασικών εκτιμητριών, η διαθεσιμότητα του μητρώου, η ύπαρξη κατάλληλων μεταβλητών στρωματοποίησης, οι μέθοδοι ανάλυσης και τέλος ο διαθέσιμος προϋπολογισμός. (William G. Cochran, 1977).

Η απλή τυχαία δειγματοληψία αποτελεί τη βασική μέθοδο επιλογής δείγματος λόγω της εύκολης εφαρμογής. Σε αυτή τη μέθοδο, δεν απαιτούνται πρόσθετες πληροφορίες

για τον πληθυσμό και όλες οι μονάδες του πληθυσμού έχουν την ίδια πιθανότητα επιλογής. Στην περίπτωση όπου υπάρχουν διαθέσιμες πληροφορίες ώστε να είναι εφικτή η στρωματοποίηση του πληθυσμού, τότε η στρωματοποιημένη δειγματοληψία θεωρείται πιο αποτελεσματική διότι αφενός πετυχαίνουμε μικρότερη διακύμανση της εκτιμήτριας με αποτέλεσμα μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα και αφετέρου μικρότερο μέγεθος δείγματος με την προϋπόθεση βέβαια ότι έχει στρωματοποιηθεί σωστά ο πληθυσμός, δηλαδή τα στρώματα του πληθυσμού παρουσιάζουν ομοιογένεια εντός και ετερογένεια εκτός.

Στην περίπτωση που επιθυμούμε να διατηρήσουμε χαμηλό το κόστος δειγματοληψίας, είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε τη δειγματοληψία κατά συστάδες, με την προϋπόθεση όμως ότι υπάρχει η πληροφορία για τη διάρθρωση του πληθυσμού σε συστάδες μέσα στο μητρώο. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή δίνει στην εκτιμήτρια μικρότερη ακρίβεια από τη στρωματοποιημένη δειγματοληψία, διότι αφενός εξετάζει μερικές από τις συστάδες του πληθυσμού και αφετέρου οι συστάδες αυτές τείνουν να είναι ομοιογενείς στο εσωτερικό τους κι έτσι κατά την εξέταση μερικών συστάδων του πληθυσμού δεν συγκεντρώνουμε νέες πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού. Ωστόσο, δίνει τα βέλτιστα αποτελέσματα, όταν παρουσιάζεται ετερογένεια στο εσωτερικό των συστάδων και ομοιογένεια μεταξύ τους. Αυτό συμβαίνει διότι επιτυγχάνεται η αντιπροσωπευτικότητα των συστάδων στον πληθυσμό.

Τέλος, πέρα από τις ανωτέρω βασικές μεθόδους επιλογής δείγματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την δειγματοληψία πιθανοτήτων (δειγματοληψία ανάλογη του μεγέθους), χωρίς να απαιτείται η διαίρεση του πληθυσμού σε στρώματα/συστάδες. Η μέθοδος αυτή προσδιορίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια τις εκτιμήτριες των παραμέτρων καθώς οι μονάδες μεγαλύτερου μεγέθους έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να επιλεγούν στο δείγμα και εφαρμόζεται μόνο στην περίπτωση που όλες οι τιμές των μονάδων του πληθυσμού είναι διαθέσιμες προκειμένου να υπολογιστούν οι αντίστοιχες πιθανότητες των μονάδων. Όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, η δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους χρησιμοποιείται ευρέως στην ελεγκτική, διότι οι ελεγκτές επιθυμούν να περιλαμβάνουν στο δείγμα τους κυρίως μονάδες μεγάλης λογιστικής αξίας.

2. Ελεγκτική δειγματοληψία

2.1. Εισαγωγή

Σύμφωνα με τα διεθνή λογιστικά πρότυπα (ΔΠΕ), ελεγκτική δειγματοληψία είναι η εφαρμογή ελεγκτικών διαδικασιών σε λιγότερο από το 100% των μονάδων του πληθυσμού που πρόκειται να ελεγχθεί, με τέτοιο τρόπο ώστε όλες οι μονάδες δειγματοληψίας να έχουν μία ορισμένη πιθανότητα επιλογής, παρέχοντας έτσι στον ελεγκτή λελογισμένη βάση επί της οποίας θα εξαγάγει συμπεράσματα για ολόκληρο τον πληθυσμό. Παρόμοιος είναι και ο ορισμός της ελεγκτικής δειγματοληψίας στα αμερικάνικα λογιστικά πρότυπα (SAS 430), σύμφωνα με τα οποία ελεγκτική δειγματοληψία είναι η εφαρμογή ελεγκτικών διαδικασιών σε λιγότερο από το 100% των στοιχείων ενός λογαριασμού ή μίας τάξης συναλλαγών, η οποία επιτρέπει στους ελεγκτές να αποκτήσουν και να αξιολογήσουν ελεγκτικά τεκμήρια για τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού που μελετά, ώστε να εξαγάγουν συμπεράσματα για τον πληθυσμό.

Η δειγματοληψία ελέγχου διακρίνεται σε στατιστική και μη στατιστική. Ένα δείγμα ονομάζεται μη στατιστικό (nonstatistical or judgmental), όταν ο ελεγκτής εκτιμά το δειγματοληπτικό κίνδυνο, χρησιμοποιώντας την επαγγελματική του κρίση και όχι στατιστικές μεθόδους. Αντίθετα, το στατιστικό δείγμα είναι αποτέλεσμα πιθανοτήτων και μαθηματικών υπολογισμών και για να χαρακτηριστεί ένα δείγμα στατιστικό πρέπει η πιθανότητα μίας παρατήρησης να επιλεγεί στο δείγμα να είναι γνωστή – όχι απαραίτητα ίση – και τα αποτελέσματα του δείγματος να υπολογιστούν μαθηματικά, σύμφωνα με τη θεωρία των πιθανοτήτων. Επιπλέον, στη στατιστική δειγματοληψία ο δειγματοληπτικός κίνδυνος ποσοτικοποιείται και αυτό βοηθά στην επιλογή του κατάλληλου μεγέθους δείγματος. Ωστόσο πρέπει να σημειώσουμε ότι τόσο η στατιστική όσο και η μη στατιστική δειγματοληψία απαιτούν την επαγγελματική κρίση του ελεγκτή κατά το σχεδιασμό, την επιλογή και την αξιολόγηση του δείγματος.

Οι μέθοδοι δειγματοληψίας που χρησιμοποιούνται στην ελεγκτική χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τη δειγματοληψία χαρακτηριστικού και τη δειγματοληψία μεταβλητής. Η δειγματοληψία χαρακτηριστικού χρησιμοποιείται όταν ο ελεγκτής επιθυμεί να εξετάσει το ποσοστό εμφάνισης ενός χαρακτηριστικού στον πληθυσμό. Αφορά δηλαδή στα ποιοτικά χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού και εφαρμόζεται σε δοκιμασίες δικλίδων (test of controls), οι οποίες σχετίζονται με την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας του σχεδιασμού και της λειτουργίας του συστήματος εσωτερικού ελέγχου. Αν και η υπεργεωμετρική κατανομή είναι θεωρητικά η κατάλληλη για τις περισσότερες εφαρμογές του ελέγχου, στην πράξη, για λόγους ευκολίας, χρησιμοποιούνται κυρίως η διωνυμική κατανομή και η κατανομή Poisson.

Αντίθετα, η δειγματοληψία μεταβλητής χρησιμοποιείται για την εξέταση ποσοτικών χαρακτηριστικών, και εφαρμόζεται σε δοκιμασίες λεπτομερειών (substantive tests). Η δειγματοληψία μεταβλητής βασίζεται στη χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος,

σύμφωνα με το οποίο η μέση τιμή ενός μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων παρατηρήσεων, ακολουθεί κατά προσέγγιση κανονική κατανομή, ανεξαρτήτως από το ποια κατανομή ακολουθούν οι παρατηρήσεις. Αυτό έχει προκαλέσει ανησυχίες, διότι στη λογιστική και ιδιαίτερα στην ελεγκτική οι διαφορές μεταξύ της λογιστικής αξίας και της αξίας που προκύπτει μετά τον έλεγχο δεν είναι συμμετρικές και η χρήση της κανονικής κατανομής οδηγεί σε δείγμα μεγαλύτερο από το επιθυμητό. (Gillett, 2000). Η δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους λύνει αυτό το πρόβλημα, διότι, παρόλο που χρησιμοποιεί τη στατιστική θεωρία της δειγματοληψίας χαρακτηριστικών, εξάγει συμπεράσματα σε νομισματικές μονάδες και όχι σε ποσοστό λάθους.

Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου δειγματοληψίας εξαρτάται από το αντικείμενο ελέγχου και το εύρος των πληροφοριών που είναι διαθέσιμες για τον πληθυσμό. Η απόφαση για τη μέθοδο που θα χρησιμοποιηθεί βασίζεται στις διαθέσιμες πληροφορίες που έχει ο ελεγκτής για τον προς έλεγχο λογαριασμό. Για παράδειγμα, όταν είναι η αξία κάθε φυσικής μονάδας του πληθυσμού γνωστή, κατ' αρχήν είναι δυνατή η εφαρμογή είτε της δειγματοληψίας με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους είτε της δειγματοληψία διαφορών. Ωστόσο, εάν εκτιμά ότι δεν υπάρχουν πολλά λάθη στον πληθυσμό που πρόκειται να ελέγχει, επιλέγει τη μέθοδο pps, διότι ο μεγάλος αριθμός των μηδενικών τιμών των διαφορών ως αποτέλεσμα της δειγματοληψίας διαφορών δημιουργούν πρόβλημα στην κανονικότητα της κατανομής.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση της δειγματοληψίας με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους, κρίνεται αναγκαίο να αναφερθούμε στον ελεγκτικό κίνδυνο και σε κάποια βασικά χαρακτηριστικά της δειγματοληψίας, όπως είναι ο δειγματοληπτικός και ο μη δειγματοληπτικός κίνδυνος, το αναμενόμενο ποσό σφάλματος, το ουσιώδες μέγεθος και το ουσιώδες μέγεθος εκτέλεσης.

Το ΔΠΕ 200 αναφέρει ότι ως βάση για τη γνώμη του ελεγκτή, θεωρείται η απόκτηση εύλογης διασφάλισης για το εάν οι οικονομικές καταστάσεις ως σύνολο είναι απαλλαγμένες από ουσιώδη λάθη και παραλείψεις, οι οποίες μπορεί να οφείλονται σε εκούσια ή ακούσια λάθη.

Η εύλογη διασφάλιση αποτελεί διασφάλιση υψηλού επιπέδου. Αυτό επιτυγχάνεται όταν ο ελεγκτής έχει αποκτήσει επαρκή και κατάλληλα αποδεικτικά στοιχεία προκειμένου να μειώσει τον ελεγκτικό κίνδυνο δηλαδή τον κίνδυνο να εκφράζει μια μη ενδεδειγμένη γνώμη όταν οι οικονομικές καταστάσεις είναι ουσιωδώς εσφαλμένες, σε αποδεκτά χαμηλό επίπεδο.

Ωστόσο, η εύλογη διασφάλιση δεν ταυτίζεται με την απόλυτη διασφάλιση (εγγύηση) λόγω των εγγενών περιορισμών ενός ελέγχου, οι οποίοι κυρίως απορρέουν από τα ελεγκτικά τεκμήρια, επί των οποίων ο ανεξάρτητος ελεγκτής βασίζεται για την διατύπωση της γνώμης του και τα οποία χαρακτηρίζονται ως πειστικά (persuasive) και όχι ως αδιαμφισβήτητα (conclusive). Για τον λόγο αυτό ο ελεγκτής δεν αναμένεται, και δεν μπορεί, να μειώσει τον ελεγκτικό κίνδυνο στο μηδέν και

επομένως δεν μπορεί να έχει την απόλυτη διασφάλιση ότι οι οικονομικές καταστάσεις είναι απαλλαγμένες από ουσιώδη σφάλματα και παραλείψεις.

Οι ενδογενείς περιορισμοί ενός ελέγχου προκύπτουν από τη φύση της χρηματοοικονομικής αναφοράς τη φύση των ελεγκτικών διαδικασιών και την ανάγκη ο έλεγχος να πραγματοποιηθεί μέσα σε εύλογο χρονικό διάστημα και με λογικό κόστος. Λόγω αυτών των περιορισμών, υπάρχει ένας αναπόφευκτος κίνδυνος κάποια σημαντικά σφάλματα στις οικονομικές καταστάσεις να μην εντοπισθούν, ακόμη και αν ο έλεγχος έχει σωστά σχεδιαστεί και εκτελεστεί σύμφωνα με τα ΔΠΕ. Η εκ των υστέρων ανακάλυψη ενός σημαντικού σφάλματος στις οικονομικές καταστάσεις που προκύπτει από απάτη ή λάθος δεν υποδηλώνει από μόνη της μια αποτυχία στη διεξαγωγή ενός ελέγχου σύμφωνα με τα ΔΠΕ.

Ωστόσο, οι ενδογενείς περιορισμοί ενός ελέγχου δεν αποτελούν λόγο για τον ελεγκτή να είναι ικανοποιημένος με ελεγκτικά τεκμηρία που είναι λιγότερο από πειστικά. Το εάν ο ελεγκτής έχει διενεργήσει έναν έλεγχο σύμφωνα με τα ΔΠΕ καθορίζεται από τις ελεγκτικές διαδικασίες που εκτελέστηκαν στις περιστάσεις, την επάρκεια και την καταλληλότητα των ελεγκτικών τεκμηρίων που αποκτήθηκαν ως αποτέλεσμα αυτών και την καταλληλότητα της έκθεσης του ελεγκτή στηριγμένης σε μια αξιολόγηση αυτών των τεκμηρίων, ενόψει των γενικών σκοπών του ελεγκτή.

Ελεγκτικός κίνδυνος, όπως αναφέραμε παραπάνω, είναι ο κίνδυνος ο ελεγκτής να εκφράσει μη ενδεδειγμένη γνώμη ελέγχου, όταν οι οικονομικές καταστάσεις είναι ουσιωδώς εσφαλμένες. Ο ελεγκτής προκειμένου να μειώσει τον ελεγκτικό κίνδυνο σε ένα αποδεκτά χαμηλό επίπεδο μπορεί να αποκτήσει διαφορετικούς τύπους τεκμηρίων από διαφορετικές πηγές. Ο ελεγκτικός κίνδυνος είναι συνάρτηση του ενδογενή κινδύνου, του κινδύνου εσωτερικών δικλίδων και του κινδύνου εντοπισμού. Για τον προσδιορισμό του απαιτείται η επαγγελματική κρίση του ελεγκτή καθώς είναι δύσκολο να ποσοτικοποιηθεί με ακρίβεια.

$$AR = IR \cdot CR \cdot DR$$

Ενδογενής κίνδυνος (Inherent Risk) – η πιθανότητα ο λογαριασμός να περιέχει ουσιώδη σφάλματα λόγω της φύσης του, υποθέτοντας ότι δεν λειτουργεί κανένα σύστημα εσωτερικών δικλίδων.

Κίνδυνος εσωτερικών δικλίδων (Control Risk) – η πιθανότητα οι διάφοροι μηχανισμοί και οι διαδικασίες εσωτερικών δικλίδων να μην εντοπίσουν ή αποτρέψουν ουσιώδη σφάλματα στις οικονομικές καταστάσεις.

Κίνδυνος εντοπισμού (Detection Risk) – η πιθανότητα ο έλεγχος να μην εντοπίσει τα σφάλματα που υπάρχουν στις οικονομικές καταστάσεις. Ο κίνδυνος εντοπισμού αναλύεται περαιτέρω στις αναλυτικές διαδικασίες και στη δοκιμασία λεπτομερειών.

Αναλυτικές διαδικασίες (Analytical Procedures) – η πιθανότητα οι αναλυτικές διαδικασίες ή άλλες διαδικασίες λεπτομερειών να μην εντοπίσουν τυχόν ουσιώδες σφάλμα

Δοκιμασίες λεπτομερειών (Test of Details) – ο κίνδυνος εσφαλμένης αποδοχής (β)

Σύμφωνα με τα ΔΕΠ, δειγματοληπτικός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος το συμπέρασμα του ελεγκτή που προκύπτει από το δείγμα να είναι διαφορετικό από το συμπέρασμα, εάν έλεγχε το σύνολο του πληθυσμού. Ο κίνδυνος αυτός μπορεί να οδηγήσει σε δύο τύπους εσφαλμένων συμπερασμάτων:

- Κίνδυνος εσφαλμένης αποδοχής (risk of incorrect acceptance) – ο κίνδυνος να συμπεράνει ο ελεγκτής βάσει των αποτελεσμάτων της δειγματοληψίας ότι στον υπό έλεγχο λογαριασμό δεν υπάρχουν ουσιώδη σφάλματα, ενώ στην πραγματικότητα υπάρχουν. Ο κίνδυνος αυτός είναι γνωστός ως σφάλμα τύπου II και συνδέεται άμεσα με το μοντέλο του ελεγκτικού κινδύνου.

$$AR = IR \cdot CR \cdot DR \Leftrightarrow AR = IR \cdot CR \cdot AP \cdot TD \Leftrightarrow TD = \frac{AR}{IR \cdot CR \cdot AP}$$

Ο κίνδυνος εσφαλμένης αποδοχής, επηρεάζεται από το ανεκτό ποσό σφάλματος που έχει ορίσει ο ελεγκτής. Όσο μικρότερο είναι το ποσό σφάλματος που μπορεί να δεχτεί, τόσο αυξάνεται ο κίνδυνος εσφαλμένης αποδοχής. Επιπλέον, συσχετίζεται αρνητικά με το μέγεθος του δείγματος.

- Κίνδυνος εσφαλμένης απόρριψης (risk of incorrect rejection) - ο κίνδυνος εσφαλμένης απόρριψης, γνωστός ως σφάλμα τύπου I, είναι ο κίνδυνος να συμπεράνει ο ελεγκτής ότι ο πληθυσμός είναι ουσιωδώς εσφαλμένος ενώ στην πραγματικότητα δεν είναι. Ο κίνδυνος αυτός προσδιορίζεται από τον ελεγκτή και αποτελεί τον κίνδυνο που είναι πρόθυμος να αποδεχτεί.

Ως μη δειγματοληπτικό κίνδυνο τα ΔΕΠ ορίζουν τον κίνδυνο ο ελεγκτής να εξαγάγει εσφαλμένο συμπέρασμα για οποιοδήποτε λόγο που δεν σχετίζεται με τον δειγματοληπτικό κίνδυνο, όπως για παράδειγμα τη χρήση ακατάλληλων ελεγκτικών διαδικασιών.

Ο ελεγκτικός κίνδυνος και το ουσιώδες μέγεθος για το οποίο θα μιλήσουμε στη συνέχεια, εξετάζονται καθ' όλη τη διάρκεια του ελέγχου, ειδικότερα όταν (ΔΠΕ 320):

- Εντοπίζονται και εκτιμώνται οι κίνδυνοι ουσιώδους σφάλματος
- Καθορίζεται η φύση, ο χρόνος και η έκταση περαιτέρω ελεγκτικών διαδικασιών
- Αξιολογείται η επίπτωση των μη διορθωμένων σφαλμάτων, εάν υπάρχουν, στις οικονομικές καταστάσεις και στη διαμόρφωση της γνώμης στην έκθεση του ελεγκτή

Ο όρος ουσιώδες μέγεθος ή σημαντικότητα εφαρμόζεται από τον ελεγκτή στην φάση του σχεδιασμού του ελεγκτικού έργου, στην φάση της εκτέλεσης, και στην φάση της αξιολόγησης των λαθών και παραλείψεων που έχουν εντοπισθεί καθώς και εκείνων που δεν έχουν καταχωρηθεί (εάν υπάρχουν) στις οικονομικές καταστάσεις Σύμφωνα με τα ΔΕΠ, ουσιώδες μέγεθος (materiality) είναι τα σφάλματα ή οι παραλείψεις τα οποία θεωρούνται σημαντικά και θα μπορούσαν, ατομικά ή αθροιστικά, να επηρεάσουν τις οικονομικές αποφάσεις των χρηστών που λαμβάνονται βάσει των χρηματοοικονομικών καταστάσεων. Η σημαντικότητα εξαρτάται από το μέγεθος και τη φύση της παράλειψης ή του σφάλματος, κρινόμενη υπό τις συγκεκριμένες περιστάσεις και επηρεάζεται από το μέγεθος ή η φύση του κονδυλίου, ή ένας συνδυασμός και των δύο.

Ο σχεδιασμός του ελέγχου αποκλειστικά για τον εντοπισμό ατομικά ουσιωδών σφαλμάτων παραβλέπει το γεγονός ότι το σύνολο των ατομικά μη ουσιωδών σφαλμάτων μπορεί να κάνει τις οικονομικές καταστάσεις να είναι ουσιωδώς εσφαλμένες και δεν αφήνει περιθώριο για πιθανά μη εντοπισμένα σφάλματα. Το ουσιώδες μέγεθος εκτέλεσης (το οποίο σύμφωνα με τον ορισμό είναι ένα ή περισσότερα ποσά) τίθεται για να μειώσει σε κατάλληλα χαμηλό επίπεδο την πιθανότητα ότι το άθροισμα των μη διορθωμένων και μη εντοπισμένων σφαλμάτων στις οικονομικές καταστάσεις υπερβαίνει το ουσιώδες μέγεθος για τις οικονομικές καταστάσεις ως σύνολο.

Ομοίως, το ουσιώδες μέγεθος εκτέλεσης που σχετίζεται με επίπεδο ουσιώδους μεγέθους που καθορίζεται για συγκεκριμένη κατηγορία συναλλαγών, υπόλοιπο λογαριασμού ή γνωστοποίηση, τίθεται για να μειώσει σε κατάλληλα χαμηλό επίπεδο την πιθανότητα ότι το άθροισμα των μη διορθωμένων και μη εντοπισμένων σφαλμάτων σε εκείνη τη συγκεκριμένη κατηγορία συναλλαγών, υπόλοιπο λογαριασμού ή γνωστοποίηση υπερβαίνει το επίπεδο ουσιώδους μεγέθους για εκείνη τη συγκεκριμένη κατηγορία συναλλαγών, υπόλοιπο λογαριασμού ή γνωστοποίηση. Ο καθορισμός του ουσιώδους μεγέθους εκτέλεσης δεν είναι ένας απλός μηχανικός υπολογισμός και περιλαμβάνει την άσκηση επαγγελματικής κρίσης. Επηρεάζεται από την κατανόηση του ελεγκτή για την οντότητα, που επικαιροποιείται κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης διαδικασιών εκτίμησης κινδύνου, καθώς και από τη φύση και την έκταση των σφαλμάτων που εντοπίστηκαν σε προηγούμενους ελέγχους και εξ' αυτού από τις προσδοκίες του ελεγκτή σε σχέση με σφάλματα στην τρέχουσα περίοδο.

2.2. Δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους - Probability Proportional to Size (pps) sampling

2.2.1. Γενικά

Η δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους (probability proportional to size sampling) είναι μία μέθοδος δειγματοληψίας η οποία στηρίζεται στην κατανομή Poisson και θεωρείται μία τροποποιημένη μορφή της δειγματοληψίας χαρακτηριστικού (attribute sampling). Η μέθοδος αυτή δύναται να χρησιμοποιηθεί τόσο σε δοκιμασίες δικλίδων (tests of controls) όσο και σε δοκιμασίες λεπτομερειών (substantive tests) καθώς χρησιμοποιεί τη δειγματοληψία χαρακτηριστικού και εξάγει τα αποτελέσματα σε νομισματικές μονάδες.

Η δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους συναντάται συχνά και ως δειγματοληψία της νομισματικής μονάδας (monetary unit sampling), καθώς επικεντρώνεται στις νομισματικές μονάδες του πληθυσμού και εξάγει συμπεράσματα για το συνολικό ποσό λαθών αυτού σε νομισματικές μονάδες. Σε αυτή τη μέθοδο ο πληθυσμός αποτελείται από νομισματικές μονάδες και ορίζεται ως το σύνολο των νομισματικών μονάδων που απαρτίζουν τη λογιστική αξία ενός λογαριασμού. Για παράδειγμα, σε ένα σύνολο 2000 λογαριασμών εισπρακτέων με συνολική λογιστική αξία 3.000.000€, ο πληθυσμός απαρτίζεται από 3.000.000 μονάδες και όχι από 2.000, όπως συμβαίνει στη δειγματοληψία μεταβλητής.

Κάθε νομισματική μονάδα του πληθυσμού έχει ίση πιθανότητα να επιλεγεί στο δείγμα.

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \dots = \psi_N$$

ψ : η πιθανότητα μία νομισματική μονάδα να επιλεγεί στο δείγμα

1,2,3,...N: οι νομισματικές μονάδες που απαρτίζουν τον πληθυσμό

Οι νομισματικές μονάδες χρησιμοποιούνται ως μονάδα δειγματοληψίας και το στοιχείο που περιέχει την επιλεγείσα νομισματική μονάδα επιλέγεται τελικά στο δείγμα. Πιο αναλυτικά, όταν επιλέγεται προς εξέταση μία νομισματική μονάδα, δεν ελέγχεται αυτή καθαυτή, αλλά ο λογαριασμός που την περιλαμβάνει. Λειτουργεί, δηλαδή, σαν αγκίστρι και παίρνει μαζί της ολόκληρη τη φυσική μονάδα. (Guy et al, 2002)

$$p_i = \frac{BV_i}{\sum_{i=1}^j BV_i}$$

p_i : η πιθανότητα που έχει μία φυσική μονάδα να επιλεγεί στο δείγμα

$BV_1, BV_2, BV_3, \dots, BV_j$: η λογιστική αξία των φυσικών μονάδων του πληθυσμού 1,2,3,...,j

Είναι φανερό ότι ο έλεγχος κατευθύνεται σε μονάδες μεγαλύτερης αξίας, αφού οι μονάδες με μεγαλύτερη καταγεγραμμένη λογιστική αξία (book value) έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα επιλογής. Για παράδειγμα, ένας λογαριασμός αξίας 100.000 ευρώ έχει δέκα φορές μεγαλύτερη πιθανότητα να επιλεγεί από ένα λογαριασμό 10.000 ευρώ.

Είναι φανερό ότι η δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους μπορεί να καταλήξει σε μικρότερο δείγμα, διότι τόσο το μέγεθος του δείγματος όσο και η επιλογή των μονάδων που το απαρτίζουν δεν εξαρτώνται από τον αριθμό των φυσικών μονάδων του πληθυσμού, αλλά από τη λογιστική τους αξία. Σημειώνεται επίσης ότι απαραίτητη προϋπόθεση για την επιλογή αυτής της μεθόδου είναι η γνώση της αξίας κάθε επιμέρους λογαριασμού.

Με τη βοήθεια του ακόλουθου παραδείγματος, μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα όλα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω. Έστω ότι ο ελεγκτής θέλει να ελέγξει το υπόλοιπο 87 λογαριασμών εισπρακτέων με συνολική λογιστική αξία \$5.321.074,10. Γνωρίζοντας τη λογιστική αξία κάθε επιμέρους λογαριασμού, μπορεί να υπολογίσει εύκολα την πιθανότητα που έχει κάθε λογαριασμός να επιλεγεί στο δείγμα (p_i). Για παράδειγμα, η πιθανότητα να επιλεγεί ο πρώτος λογαριασμός ισούται με $0,0279$ ($148.421,70/5.321.074,10=0,0279$).

Document Date	Account	Book Value in USD	p_i	Document Date	Account	Book Value in USD	p_i
28/01/13	1	148.421,70	0,0279	18/06/13	42	107.537,00	0,0202
29/01/13	2	33.778,38	0,0063	23/07/13	43	79.181,62	0,0149
29/01/13	3	73.644,80	0,0138	04/07/13	44	100.684,81	0,0189
28/02/13	4	4.527,56	0,0009	09/07/13	45	73.830,59	0,0139
31/01/13	5	70.431,36	0,0132	19/07/13	46	73.097,45	0,0137
26/02/13	6	101.928,40	0,0192	19/07/13	47	128.392,20	0,0241
31/01/13	7	5.701,50	0,0011	23/07/13	48	85.329,31	0,0160
31/01/13	8	117.389,10	0,0221	24/07/13	49	10.971,62	0,0021
19/02/13	9	113.063,40	0,0212	09/08/13	50	98.266,38	0,0185
19/02/13	10	6.995,14	0,0013	14/08/13	51	73.496,00	0,0138
19/02/13	11	105.554,61	0,0198	26/09/13	52	20.675,70	0,0039
27/02/13	12	75.014,40	0,0141	30/09/13	53	718,17	0,0001
08/03/13	13	108.358,04	0,0204	27/08/13	54	50.472,25	0,0095
08/03/13	14	22.020,00	0,0041	31/08/13	55	80.426,91	0,0151
15/03/13	15	118.634,16	0,0223	17/09/13	56	243.406,50	0,0457
15/03/13	16	76.157,26	0,0143	19/09/13	57	4.830,10	0,0009
19/03/13	17	22.734,35	0,0043	20/09/13	58	59.834,74	0,0112
15/04/13	18	14.695,82	0,0028	20/09/13	59	53.217,10	0,0100
12/04/13	19	79.067,49	0,0149	20/09/13	60	68.878,16	0,0129
12/04/13	20	9.313,15	0,0018	02/10/13	61	53.003,47	0,0100
24/04/13	21	192.849,40	0,0362	30/09/13	62	4.722,43	0,0009
30/05/13	22	120.806,70	0,0227	22/11/13	63	62.746,50	0,0118
22/05/13	23	89.765,55	0,0169	22/11/13	64	76.402,61	0,0144
30/04/13	24	123.357,28	0,0232	23/10/13	65	109.229,30	0,0205
30/04/13	25	94.186,75	0,0177	31/10/13	66	2.714,00	0,0005
30/04/13	26	138.611,90	0,0260	22/11/13	67	55.044,47	0,0103
28/05/13	27	24.572,00	0,0046	12/11/13	68	78.283,40	0,0147
22/05/13	28	8.685,51	0,0016	15/11/13	69	7.570,35	0,0014
19/06/13	29	67.778,00	0,0127	19/11/13	70	69.851,83	0,0131
29/05/13	30	65.882,50	0,0124	19/11/13	71	3.618,66	0,0007
19/06/13	31	4.926,25	0,0009	19/12/13	72	6.690,30	0,0013
28/06/13	32	4.919,62	0,0009	11/12/13	73	60.504,80	0,0114
29/05/13	33	80.435,20	0,0151	16/12/13	74	49.000,79	0,0092
30/05/13	34	28.951,40	0,0054	16/12/13	75	54.318,50	0,0102
12/06/13	35	73.149,99	0,0137	17/12/13	76	1.965,76	0,0004
12/06/13	36	19.929,73	0,0037	31/12/13	77	124.127,00	0,0233

17/06/13	37	6.398,46	0,0012	31/12/13	78	36.515,02	0,0069
17/06/13	38	62.872,13	0,0118	31/12/13	79	126.350,45	0,0237
17/06/13	39	89.053,44	0,0167	31/12/13	80	78.518,40	0,0148
18/06/13	40	62.714,30	0,0118	31/12/13	81	80.992,37	0,0152
18/06/13	41	98.380,35	0,0185			5.321.074,10	1,00

Όπως φαίνεται από τον πίνακα, οι λογαριασμοί με μεγάλη λογιστική αξία έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να επιλεγούν στο δείγμα σε σχέση με λογαριασμούς μικρότερης αξίας. Για παράδειγμα, ο λογαριασμός 56 με αξία 243.406,50 δολάρια έχει 0,0457 πιθανότητα να επιλεγεί. Η πιθανότητα αυτή είναι διπλάσια και πλέον από αυτή του λογαριασμού 42, ο οποίος έχει περίπου τη μισή λογιστική αξία. Αυτός θεωρείται ότι είναι ο βασικός λόγος που οι ελεγκτές χρησιμοποιούν αυτή τη μέθοδο για τη συλλογή ελεγκτικών τεκμηρίων, λόγω του περιορισμένου κόστους, επιθυμούν να ελέγξουν πρωτίστως τους λογαριασμούς με τη μεγαλύτερη λογιστική αξία.

2.2.2. Υποθέσεις

Προκειμένου να εφαρμόσουμε τη μέθοδο δειγματοληψίας με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους η λογιστική αξία κάθε φυσικής μονάδας του πληθυσμού πρέπει να είναι γνωστή. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, η πιθανότητα που έχει κάθε φυσική μονάδα να επιλεγεί στο δείγμα εξαρτάται αναλογικά από την αξία της. Ως εκ τούτου, υποθέτουμε ότι η λογιστική αξία κάθε φυσικής μονάδας του πληθυσμού είναι γνωστή, ώστε να είναι εφικτός ο υπολογισμός της πιθανότητας που έχει να επιλεγεί στο δείγμα.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το εκτιμώμενο ποσοστό λάθους στον πληθυσμό είναι χαμηλό (μικρότερο από 10%). Όπως είναι γνωστό η διαδικασία εκτίμησης του ποσοστού σφάλματος στον πληθυσμό είναι διωνυμικό πείραμα και ο αριθμός των σφαλμάτων ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή. Όμως, στην περίπτωση κατά την οποία το ποσοστό λάθους είναι μικρότερο από 10% και το μέγεθος του δείγματος n μεγαλύτερο από 30, η διωνυμική κατανομή προσεγγίζεται ικανοποιητικά από μια άλλη θεωρητική κατανομή, την κατανομή του Poisson, αποφεύγοντας έτσι τους περίπλοκους υπολογισμούς της διωνυμικής κατανομής. Ειδικότερα, καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος και μειώνεται το ποσοστό σφαλμάτων, η προσέγγιση αυτή γίνεται καλύτερη.

Η μέθοδος δειγματοληψίας με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους απαιτεί την ύπαρξη μεγάλης συνολικής λογιστική αξία του πληθυσμού. Αυτή η υπόθεση είναι συνέχεια της προηγούμενης καθώς για την προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής από την κατανομή Poisson, απαιτείται μεγάλο μέγεθος δείγματος, κάτι που επιτυγχάνεται από το μέγεθος του πληθυσμού. Όπως προκύπτει και από τον μαθηματικό τύπο μεγέθους του δείγματος, αυτά τα δύο μεγέθη συνδέονται θετικά μεταξύ τους.

Τέλος υποθέτουμε ότι το ποσό λάθους σε μία φυσική μονάδα δεν γίνεται να ξεπερνά τη λογιστική της αξία. Για παράδειγμα, εάν η αξία ενός λογαριασμού είναι 1000 ευρώ, το λάθος δεν μπορεί να ξεπερνά τα 1000 ευρώ. Από αυτή τη υπόθεση γίνεται

φανερό ότι η δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους είναι κατάλληλη για την ύπαρξη σφάλματος υπερεκτίμησης σε ένα λογαριασμό.

2.2.3. Μέγεθος Δείγματος

Στη διαδικασία του σχεδιασμού της δειγματοληψίας, ένα πολύ σημαντικό βήμα μετά την επιλογή της κατάλληλης μεθόδου είναι ο προσδιορισμός του μεγέθους δείγματος (sampling size). Ο προσδιορισμός αυτός γίνεται έτσι ώστε να επιτευχθεί το ανεκτό επίπεδο ελεγκτικού κινδύνου και η επιθυμητή ακρίβεια με το λιγότερο δυνατό κόστος. Η διαδικασία αυτή επιτυγχάνεται με τους κατάλληλους μαθηματικούς αλγόριθμους που συνοδεύουν τη δειγματοληψία.

Το μέγεθος του δείγματος συμβολίζεται με n και αποτελεί τον αριθμό των μονάδων του πληθυσμού που επιλέχθηκαν προς εξέταση. Παρόλο που στη δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους ο πληθυσμός απαρτίζεται από νομισματικές μονάδες, το μέγεθος του δείγματος αποτελείται από φυσικές μονάδες. Αυτό είναι λογικό, διότι ο ελεγκτής θέλει να ελέγξει την αξία των λογαριασμών και όχι τις μεμονωμένες νομισματικές μονάδες που επιλέχθηκαν. Αυτές λειτουργούν βοηθητικά στην επιλογή των φυσικών μονάδων που πρόκειται να εξεταστούν.

Στη δειγματοληψία PPS, το μέγεθος του δείγματος υπολογίζεται από την κατανομή Poisson ως εξής:

Ορίζουμε ως λ τον αναμενόμενο αριθμό των σφαλμάτων, δηλαδή την εκτίμηση του ελεγκτή για τον αριθμό των εσφαλμένων μονάδων που υπάρχουν στο λογαριασμό:

$$\lambda = n \cdot p$$

Το λ αποτελεί το γινόμενο του μεγέθους του δείγματος (n) και της πιθανότητας να είναι μία νομισματική μονάδα εσφαλμένη (p).

Η πιθανότητα (p) θεωρείται ως ένα όριο, πάνω από το οποίο ο ελεγκτής αμφισβητεί την ορθότητα του λογαριασμού και υπολογίζεται διαιρώντας το ανεκτό ποσό σφάλματος (TM) με τον πληθυσμό (BV):

$$p = \frac{TM}{BV}$$

Ειδικότερα, είναι η πιθανότητα της ερευνητικής υπόθεσης H_1 , σύμφωνα με την οποία αν ο ελεγκτής καταλήξει σε ποσοστό σφάλματος μεγαλύτερο από αυτό που έχει ορίσει ως p , θα απορρίψει τη βασική υπόθεση H_0 , δηλαδή ότι ο λογαριασμός είναι απαλλαγμένος από ουσιώδη σφάλματα. (Menzefricke U. 1983)

Το ανεκτό ποσό σφάλματος (TM) είναι το οριακό μέγεθος του σφάλματος πριν αυτό καταστεί ουσιώδες. Είναι το χρηματικό ποσό που ορίζει ο ελεγκτής και βάσει του οποίου επιδιώκει να αποκτήσει κατάλληλο επίπεδο διασφάλισης ότι το πραγματικό σφάλμα στον πληθυσμό δεν υπερβαίνει αυτό το χρηματικό ποσό.

Από τα παραπάνω, λύνοντας ως προς n , μπορούμε εύκολα να εξάγουμε τον τύπο του μεγέθους του δείγματος:

$$\lambda = n \cdot p = n \cdot \frac{TM}{BV} \Leftrightarrow n = \frac{\lambda \cdot BV}{TM}$$

Όπως είναι φανερό, το μέγεθος του δείγματος συσχετίζεται κατ' αρχήν θετικά με τη συνολική καταγεγραμμένη λογιστική αξία των λογαριασμών (BV), καθώς η αύξηση της συνολικής αξίας του λογαριασμού οδηγεί στην αύξηση του μεγέθους του δείγματος. Επιπλέον, το μέγεθος του δείγματος συνδέεται θετικά με τον αναμενόμενο αριθμό λαθών (λ), αφού για να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια, δεδομένου ότι αναμένονται πολλά λάθη στο λογαριασμό, ο ελεγκτής θα αυξήσει το μέγεθος του δείγματος. Αντίθετα, υπάρχει αρνητική σχέση ανάμεσα στο μέγεθος του δείγματος και στο ανεκτό ποσό σφάλματος (TM). Εάν αυξηθεί το ανεκτό ποσό σφάλματος, δηλαδή αυξηθεί το ποσό εκείνο πάνω από το σφάλμα καθίσταται ουσιώδες, σημαίνει ότι ο ελεγκτής αρκείται στο να επιλέξει μικρότερο δείγμα για δεδομένη ακρίβεια και επίπεδο ελεγκτικού κινδύνου.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να αναφέρουμε ότι τόσο ο πληθυσμός όσο και το ανεκτό ποσό σφάλματος προσδιορίζονται από τον ελεγκτή. Ο πληθυσμός, όπως έχουμε αναφέρει, είναι ένα σύνολο στοιχείων από το οποίο επιλέγεται το δείγμα και για το οποίο ο ελεγκτής επιθυμεί να βγάλει ένα συμπέρασμα (ΔΕΠ 530). Προσδιορίζεται δε από το αντικείμενο του ελέγχου. Για παράδειγμα, εάν ο ελεγκτής επιθυμεί να ελέγξει την αξία των λογαριασμό εισπρακτέων, θα ορίσει ως πληθυσμό τη συνολική αξία των λογαριασμών εισπρακτέων.

Αντίστοιχα, ο ελεγκτής προσδιορίζει το ανεκτό σφάλμα έτσι ώστε να αντιμετωπίσει τον κίνδυνο το σύνολο των μεμονωμένων μη ουσιωδών σφαλμάτων να καταστήσει τις οικονομικές καταστάσεις ουσιωδώς εσφαλμένες και να παράσχει περιθώριο για πιθανά μη εντοπισμένα σφάλματα. (ISA 530). Στην πράξη, το ποσό αυτό ισούται με το ουσιώδες μέγεθος εκτέλεσης (performance materiality), το οποίο είναι συνήθως το 50% του ουσιώδους μεγέθους (overall materiality)

Θεωρητικά, κατά το σχεδιασμό του δείγματος, ο ελεγκτής πρέπει να καταναίμει το ουσιώδες μέγεθος (overall materiality), το οποίο αφορά το σύνολο των οικονομικών καταστάσεων, στους υπό έλεγχο λογαριασμούς. Το ποσό που θα προκύψει για κάθε λογαριασμό αποτελεί το ανεκτό ποσό σφάλματος του λογαριασμού αυτού (Guy et al, 2002). Η αναλογική κατανομή του ουσιώδους μεγέθους στους λογαριασμούς θεωρείται αρκετά συντηρητική διότι αφενός θα ελεγχθούν λογαριασμοί μικρής ελεγκτικής σημασίας και αφετέρου μία συναλλαγή θα ελεγχθεί από πολλούς λογαριασμούς.

Στη μέθοδο δειγματοληψίας με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους, ο ελεγκτής έχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει ως ανεκτό ποσό σφάλματος, το ουσιώδες μέγεθος και ανά αποφύγει την κατανομή αυτού στους επιμέρους λογαριασμούς (Guy et al, 2002).

Αυτό είναι εφικτό στην περίπτωση κατά την οποία ο ελεγκτής έχει προσδιορίσει τον ενδογενή κίνδυνο και τον κίνδυνο εσωτερικό δικλίδων σε χαμηλό επίπεδο, καθώς η χρήση ολόκληρου του ουσιώδους μεγέθους ως ανεκτό ποσό σφάλματος περιορίζει σημαντικά το μέγεθός του δείγματος.

Όσον αφορά στον αναμενόμενο αριθμός σφαλμάτων (λ), η τιμή του προκύπτει από τον τύπο του κινδύνου εσφαλμένης αποδοχής (β) και από τον τύπο του κινδύνου εσφαλμένης απόρριψης (α).

Πιο αναλυτικά, ο κίνδυνος εσφαλμένης αποδοχής (risk of incorrect acceptance) είναι ο κίνδυνος να συμπεράνει ο ελεγκτής βάσει των αποτελεσμάτων της δειγματοληψίας ότι στον υπό έλεγχο λογαριασμό δεν υπάρχουν ουσιώδη σφάλματα, ενώ στην πραγματικότητα υπάρχουν. Ο κίνδυνος αυτός είναι γνωστός ως σφάλμα τύπου II και συνδέεται άμεσα με το μοντέλο του ελεγκτικού κινδύνου (Kaplan R., 1975).

$$P(X \leq k) = \sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^j}{j!} = \beta$$

Ο κίνδυνος εσφαλμένης απόρριψης (risk of incorrect rejection), γνωστός ως σφάλμα τύπου I, είναι ο κίνδυνος να συμπεράνει ο ελεγκτής ότι ο πληθυσμός είναι ουσιώδως εσφαλμένος ενώ στην πραγματικότητα δεν είναι.

$$1 - P(X \leq k) = 1 - \sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^j}{j!} \leq \alpha \quad \text{όπου } \lambda = n \cdot \mu$$

Όπου μ είναι το ποσοστό σφάλματος ενός λογαριασμού, το οποίο υπάρχει μεν, δεν είναι όμως αρκετό ώστε ο ελεγκτής να συμπεράνει ότι ο λογαριασμός έχει ουσιώδη λάθη (Gillett, 2000). Το ποσοστό αυτό αποτελεί το ποσοστό της βασικής υπόθεσης H_0 του ελέγχου.

Για να βρούμε λοιπόν την τιμή του λ πρέπει να βρούμε τη μικρότερη δυνατή τιμή k ώστε να ισχύουν οι παρακάτω δύο σχέσεις:

$$P(X \leq k) = \sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^j}{j!} \geq \beta \quad \text{όπου } \lambda = n \cdot \frac{TM}{BV}$$

$$1 - P(X \leq k) = 1 - \sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^j}{j!} \leq \alpha \quad \text{όπου } \lambda = n \cdot \mu$$

Ο αναμενόμενος αριθμός εσφαλμένων μονάδων (k) είναι ο αριθμός των σφαλμάτων που αναμένεται ότι υπάρχουν στο δείγμα. Εκτιμάται από τον ελεγκτή κατά την επαγγελματική του κρίση και με βάση την εμπειρία και τη γνώση για τη συγκεκριμένη επιχείρηση.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον αναμενόμενο αριθμό λαθών (λ) για κάθε τιμή k και για δεδομένο κίνδυνο β . Όμως, τις περισσότερες φορές η τιμή του κινδύνου εσφαλμένης

αποδοχής δεν αντιστοιχεί ακριβώς στις τιμές που αναγράφονται στον πίνακα, δεδομένου ότι αποτελεί συνάρτηση του μοντέλου ελεγκτικού κινδύνου.

Αριθμός λαθών	Κίνδυνος εσφαλμένης αποδοχής (β)						
	$\beta=1\%$	$\beta=2\%$	$\beta=5\%$	$\beta=10\%$	$\beta=15\%$	$\beta=20\%$	$\beta=25\%$
0	4,605	3,689	2,996	2,303	1,897	1,609	1,386
1	6,638	5,572	4,744	3,890	3,372	2,994	2,693
2	8,406	7,225	6,296	5,322	4,723	4,279	3,920
3	10,045	8,767	7,754	6,681	6,014	5,515	5,109
4	11,605	10,242	9,154	7,994	7,267	6,721	6,274
5	13,108	11,668	10,513	9,275	8,495	7,906	7,423
6	14,571	13,059	11,842	10,532	9,703	9,075	8,558
7	16,000	14,423	13,148	11,771	10,897	10,233	9,684
8	17,403	15,763	14,435	12,995	12,078	11,380	10,802
9	18,783	17,085	15,705	14,206	13,249	12,519	11,914
10	20,145	18,390	16,962	15,407	14,411	13,651	13,020
11	21,490	19,682	18,208	16,598	15,566	14,777	14,121
12	22,821	20,962	19,443	17,782	16,715	15,897	15,217
13	24,139	22,230	20,669	18,958	17,857	17,013	16,310
14	25,446	23,490	21,886	20,128	18,995	18,125	17,400
15	26,743	24,740	23,097	21,292	20,128	19,233	18,486

Με τη στατιστική γλώσσα προγραμματισμού R είναι εύκολο να βρεθεί ο αριθμός των μονάδων που αναμένεται να είναι εσφαλμένες (k), ώστε να ισχύουν οι παραπάνω ανισότητες. Η αντίστοιχη εντολή δίνεται παρακάτω:

```
> f<- function(lambda) ppois(k, lambda) -  $\beta$ 
```

```
uniroot(f, c(0, 10))
```

```
f<- function(lambda) 1-ppois(k, lambda) -  $\alpha$ 
```

```
> uniroot(f, c(0, 10))
```

Κάνοντας δοκιμές με διαφορετικές τιμές k για δεδομένο α , β ($\beta=5\%$ και $\alpha=10\%$), μπορούμε να βρούμε την τιμή k , η οποία δίνει το μικρότερο δυνατό δείγμα.

```
> f<- function(lambda) ppois(4, lambda) - 0.05
```

```
> uniroot(f, c(0, 10))
```

```
$root
```

```
[1] 9.153528
```

Είναι φανερό λοιπόν ότι το μέγεθος του δείγματος, πέρα από τους άλλους παράγοντες, επηρεάζεται, επίσης, από το επίπεδο του κινδύνου δειγματοληψίας που ο ελεγκτής είναι πρόθυμος να αποδεχτεί (β), τον κίνδυνο α . Όταν ο ελεγκτής επιθυμεί να μειώσει τον κίνδυνο δειγματοληψίας τότε αυξάνει το μέγεθος του δείγματος. Αυτό γίνεται πιο κατανοητό, όταν ο ελεγκτής αποφασίσει να ελέγξει όλους τους λογαριασμούς του πληθυσμού. Στην περίπτωση αυτή ο κίνδυνος δειγματοληψίας μηδενίζεται.

Ωστόσο, πολλές φορές ο ελεγκτής δεν γνωρίζει τον αναμενόμενο αριθμό σφαλμάτων (λ), παρά μόνο, βασιζόμενος σε προηγούμενη εμπειρία, ένα αναμενόμενο συνολικό ποσό σφάλματος (Gillett, 2000). Εναλλακτικά, προκειμένου να υπολογίσουμε το μέγεθος του δείγματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αναμενόμενο ποσό σφαλμάτων, υποθέτοντας ότι το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό, δηλαδή το μέγεθος του των σφαλμάτων του δείγματος είναι ανάλογο με αυτό του πληθυσμού.

$$\frac{EM}{BV} = \frac{k}{n},$$

Ο αναμενόμενος αριθμός σφαλμάτων (λ) για $k=0,1,2,3,\dots,n$ υπολογίζεται ως εξής:

$$EM = BV \cdot \frac{k}{n} \Leftrightarrow EM = BV \cdot k \cdot \frac{TM}{\lambda \cdot BV} \Leftrightarrow EM = \frac{k \cdot TM}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{k \cdot TM}{EM}$$

Όμως πολλές φορές το αναμενόμενο ποσό σφάλματος δεν αντιστοιχεί ακριβώς σε ένα συγκεκριμένο αριθμό σφαλμάτων. Αντίθετα, βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς k και $k+1$. Στην περίπτωση αυτή, ο αναμενόμενος αριθμός σφαλμάτων (λ) υπολογίζεται ως εξής (Monetary unit sampling, a belief-function implementation for audit and accounting applications, Gillett, 2000):

$$\lambda = \lambda_k + \frac{EM - EM_k}{EM_{k+1} - EM_k} \cdot (\lambda_{k+1} - \lambda_k)$$

Μελετώντας τον τύπο υπολογισμού του μεγέθους του δείγματος της δειγματοληψίας με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους παρατηρούμε ότι δεν διαφέρει πολύ από τύπους άλλων μεθόδων (Dyckhoorn et al, 1984). Μετασχηματίζοντας τον αντίστοιχο τύπο της δειγματοληψίας μεταβλητής, προκύπτει το εξής:

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot SD \cdot N}{A} \right)^2 = \frac{(Z_{\alpha/2}^2 + Z_{\beta/2}^2) \cdot SD^2 \cdot N^2}{PM^2}$$

A: Αποδεκτή ακρίβεια (precision)

$$A = PM \cdot \frac{Z_{\alpha/2}}{Z_{\alpha/2} + Z_{\beta/2}}$$

$Z_{\alpha/2}$: Συντελεστής επιπέδου εμπιστοσύνης (confidence level coefficient)

$Z_{\beta/2}$: Συντελεστής για τον κίνδυνο εσφαλμένης αποδοχής (risk of incorrect acceptance coefficient)

SD: τυπική απόκλιση (standard deviation)

N: Πληθυσμός (population)

PM: Ουσιώδες μέγεθος εκτέλεσης (performance materiality)

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω τύπο, το μέγεθος του δείγματος επηρεάζεται από το μέγεθος του πληθυσμού και την κατανομή του, το σφάλμα τύπου I και II, το

ανεκτό ποσό σφάλματος, ισοδύναμο του ουσιώδους μεγέθους εκτέλεσης, και τη διακύμανση.

Αντίστοιχα, στη δειγματοληψία pps το μέγεθος του δείγματος, $n = \frac{\lambda \cdot BV}{TM}$ είναι

επίσης συνάρτηση του πληθυσμού, ο οποίος σε αυτή την περίπτωση ισούται με τη συνολική λογιστική αξία του λογαριασμού, του ανεκτού ποσού σφάλματος, και τέλος του αναμενόμενου αριθμού σφαλμάτων, λ .

Στην κατανομή Poisson η διακύμανση ισούται με το λ , ενώ ταυτόχρονα το τελευταίο εξαρτάται το σφάλμα τύπου I και II, δεδομένου ότι η τιμή του εξάγεται από τις δύο ανισότητες που αναφέρθηκαν παραπάνω.

2.2.4. Επιλογή δείγματος

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, οι ελεγκτές επιλέγουν το απαιτούμενο δείγμα με τη βοήθεια της συστηματικής δειγματοληψίας. Η συστηματική δειγματοληψία χρησιμοποιείται κυρίως πριν τη μηχανογράφηση των λογιστηρίων όπου όλοι οι φυσικοί πληθυσμοί καταγράφονται σε μακρείς καταλόγους. Σύμφωνα με αυτή την τεχνική, η επιλογή του δείγματος γίνεται με ένα σταθερό και προκαθορισμένο (συστηματικό) τρόπο. Η επιλογή της πρώτης μονάδας του δείγματος γίνεται τυχαία, και στη συνέχεια επιλέγονται οι υπόλοιπες μονάδες που απέχουν η μία από την άλλη ένα σταθερό και καθορισμένο διάστημα. Στην πράξη επιλέγεται τυχαία μία μονάδα ως σημείο εκκίνησης (random start, RS) και μετά επιλέγεται κάθε νιοστή μονάδα μέχρι α συμπληρωθεί το δείγμα.

Η επιλογή δείγματος με συστηματική δειγματοληψία παρόλο που θεωρείται τυχαία, λαμβάνει υπόψη τη θέση που κατέχουν οι μονάδες στον κατάλογο. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι δύο μονάδες που βρίσκονται δίπλα η μία στην άλλη δεν πρόκειται να επιλεγούν μαζί στο δείγμα.

Η τεχνική αυτή, όπως αναφέραμε παραπάνω, απαιτεί τον υπολογισμό του διαστήματος δειγματοληψίας SI (sampling interval) γνωστό και ως βήμα, το οποίο υπολογίζεται διαιρώντας τον πληθυσμό με το μέγεθος του δείγματος.

$$SI = \frac{BV}{n}$$

Έχοντας βρει το διάστημα αυτό, καθορίζουμε το σημείο εκκίνησης και επιλέγουμε τυχαία μία νομισματική μονάδα από το διάστημα [1,SI]. Ο πρώτος προς έλεγχο λογαριασμός είναι η φυσική μονάδα, η οποία αθροιστικά περιέχει αυτή τη χρηματική μονάδα. Έπειτα, στο σημείο εκκίνησης που βρήκαμε προσθέτουμε το βήμα SI προκειμένου να βρούμε την επόμενη νομισματική μονάδα και ούτω καθεξής μέχρι να επιλέξουμε όλες τις απαιτούμενες μονάδες.

$$RS, RS + SI, RS + 2SI, \dots, RS + (n - 1)SI$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η συστηματική δειγματοληψία επιτυγχάνει αυτόματα τη στρωματοποίηση του πληθυσμού, διότι επιλέγονται πάντα προς έλεγχο όλες οι φυσικές μονάδες του πληθυσμού που έχουν αξία μεγαλύτερη από το διάστημα δειγματοληψίας (SI). Αυτό είναι γενικά επιθυμητό στην ελεγκτική, καθώς ο ελεγκτής επιδιώκει να ελέγξει όλους τους λογαριασμούς με μεγάλη λογιστική αξία.

Ωστόσο, όταν χρησιμοποιείται συστηματική επιλογή, ο ελεγκτής πρέπει να ελέγξει την πιθανή περιοδικότητα στις τιμές των μονάδων του πληθυσμού, όσον αφορά τη σειρά εμφάνισής τους στη λίστα. Ειδικότερα, πρέπει να επιβεβαιώσει ότι οι μονάδες του πληθυσμού δεν είναι δομημένες με τέτοιο τρόπο, ώστε το διάστημα δειγματοληψίας να αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο μοτίβο στον πληθυσμό, διότι το δείγμα δεν θα είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού.

Σε συνέχεια του προηγούμενου παραδείγματος, ας υποθέσουμε ότι το δείγμα αποτελείται από 20 μονάδες. Το διάστημα δειγματοληψίας υπολογίζεται ως εξής:

$$SI = \frac{BV}{n} = \frac{5.321.074,10}{25} = 212.842,96$$

Κατά τη διαδικασία επιλογής, ο ελεγκτής για να καθορίσει το σημείο εκκίνησης, επιλέγει τυχαία ένα από τα πρώτα 212.843 δολάρια, που περιλαμβάνονται στο διάστημα [1, 212.843]. Έστω ότι επιλέχθηκε τυχαία το 121.439^ο δολάριο. Παρατηρώντας τον πίνακα βλέπουμε ότι το δολάριο αυτό αντιστοιχεί στο λογαριασμό 1 ο οποίος θα είναι ο πρώτος προς έλεγχο λογαριασμός. Στη συνέχεια, στην αξία αυτή προστίθεται το διάστημα δειγματοληψίας προκειμένου να βρεθεί ο επόμενος λογαριασμός που θα συμπεριληφθεί στο δείγμα. Το 334.282^ο δολάριο (121.439+212.843=334.282) είναι η δεύτερη μονάδα που επιλέγεται και ο λογαριασμός που αντιστοιχεί σε αυτή τη μονάδα είναι ο δεύτερος προς έλεγχο λογαριασμός δεύτερος λογαριασμός ο οποίος θα συμπεριληφθεί στο δείγμα είναι ο λογαριασμός 6.

Η διαδικασία αυτή θα επαναληφθεί μέχρι να συμπληρωθούν όλες οι μονάδες του δείγματος. Στην περίπτωση που επιλεγεί δολάριο το οποίο ανήκει σε λογαριασμό ο οποίος έχει ήδη επιλεγεί στο δείγμα, είναι δυνατό να μην παραληφθεί. Ωστόσο, η διαδικασία ελέγχου μειώνεται χρονικά, αφού ο λογαριασμός αυτός ελέγχεται μία φορά.

Οι λογαριασμοί που θα επιλεγούν τελικά στο δείγμα είναι οι ακόλουθοι:

		Book Value in	
Accounts		USD	
RS	121.439	1	148.421,70
RS+SI	334.282	6	101.928,40
RS+2SI	547.125	8	117.389,10
RS+3SI	759.968	11	105.554,61
RS+4SI	972.811	14	22.020,00
RS+5SI	1.185.654	17	22.734,35
RS+6SI	1.398.497	21	192.849,40
RS+7SI	1.611.340	22	120.806,70
RS+8SI	1.824.183	24	123.357,28
RS+9SI	2.037.026	26	138.611,90
RS+10SI	2.249.869	33	80.435,20

RS+11SI	2.462.712	38	62.872,13
RS+12SI	2.675.555	41	98.380,35
RS+13SI	2.888.398	43	79.181,62
RS+14SI	3.101.240	45	73.830,59
RS+15SI	3.314.083	47	128.392,20
RS+16SI	3.526.926	51	73.496,00
RS+17SI	3.739.769	55	80.426,91
RS+18SI	3.952.612	56	243.406,50
RS+19SI	4.165.455	60	68.878,16
RS+20SI	4.378.298	65	109.229,30
RS+21SI	4.591.141	68	78.283,40
RS+22SI	4.803.984	74	49.000,79
RS+23SI	5.016.827	78	36.515,02
RS+24SI	5.229.670	80	78.518,40

Document Date	Account	Book Value in USD	Commulative value
28/01/13	1	148.421,70	148.421,70
29/01/13	2	33.778,38	182.200,08
29/01/13	3	73.644,80	255.844,88
28/02/13	4	4.527,56	260.372,44
31/01/13	5	70.431,36	330.803,80
26/02/13	6	101.928,40	432.732,20
31/01/13	7	5.701,50	438.433,70
31/01/13	8	117.389,10	555.822,80
19/02/13	9	113.063,40	668.886,20
19/02/13	10	6.995,14	675.881,34
19/02/13	11	105.554,61	781.435,95
27/02/13	12	75.014,40	856.450,35
08/03/13	13	108.358,04	964.808,39
08/03/13	14	22.020,00	986.828,39
15/03/13	15	118.634,16	1.105.462,55
15/03/13	16	76.157,26	1.181.619,81
19/03/13	17	22.734,35	1.204.354,16
15/04/13	18	14.695,82	1.219.049,98
12/04/13	19	79.067,49	1.298.117,47
12/04/13	20	9.313,15	1.307.430,62
24/04/13	21	192.849,40	1.500.280,02
30/05/13	22	120.806,70	1.621.086,72
22/05/13	23	89.765,55	1.710.852,27
30/04/13	24	123.357,28	1.834.209,55
30/04/13	25	94.186,75	1.928.396,30
30/04/13	26	138.611,90	2.067.008,20
28/05/13	27	24.572,00	2.091.580,20
22/05/13	28	8.685,51	2.100.265,71
19/06/13	29	67.778,00	2.168.043,71
29/05/13	30	65.882,50	2.233.926,21
19/06/13	31	4.926,25	2.238.852,46
28/06/13	32	4.919,62	2.243.772,08
29/05/13	33	80.435,20	2.324.207,28
30/05/13	34	28.951,40	2.353.158,68
12/06/13	35	73.149,99	2.426.308,67
12/06/13	36	19.929,73	2.446.238,40
17/06/13	37	6.398,46	2.452.636,86
17/06/13	38	62.872,13	2.515.508,99
17/06/13	39	89.053,44	2.604.562,43
18/06/13	40	62.714,30	2.667.276,73
18/06/13	41	98.380,35	2.765.657,08
18/06/13	42	107.537,00	2.873.194,08
23/07/13	43	79.181,62	2.952.375,70
04/07/13	44	100.684,81	3.053.060,51
09/07/13	45	73.830,59	3.126.891,10
19/07/13	46	73.097,45	3.199.988,55
19/07/13	47	128.392,20	3.328.380,75
23/07/13	48	85.329,31	3.413.710,06
24/07/13	49	10.971,62	3.424.681,68
09/08/13	50	98.266,38	3.522.948,06
14/08/13	51	73.496,00	3.596.444,06

26/09/13	52	20.675,70	3.617.119,76
30/09/13	53	718,17	3.617.837,93
27/08/13	54	50.472,25	3.668.310,18
31/08/13	55	80.426,91	3.748.737,09
17/09/13	56	243.406,50	3.992.143,59
19/09/13	57	4.830,10	3.996.973,69
20/09/13	58	59.834,74	4.056.808,43
20/09/13	59	53.217,10	4.110.025,53
20/09/13	60	68.878,16	4.178.903,69
02/10/13	61	53.003,47	4.231.907,16
30/09/13	62	4.722,43	4.236.629,59
22/11/13	63	62.746,50	4.299.376,09
22/11/13	64	76.402,61	4.375.778,70
23/10/13	65	109.229,30	4.485.008,00
31/10/13	66	2.714,00	4.487.722,00
22/11/13	67	55.044,47	4.542.766,47
12/11/13	68	78.283,40	4.621.049,87
15/11/13	69	7.570,35	4.628.620,22
19/11/13	70	69.851,83	4.698.472,05
19/11/13	71	3.618,66	4.702.090,71
19/12/13	72	6.690,30	4.708.781,01
11/12/13	73	60.504,80	4.769.285,81
16/12/13	74	49.000,79	4.818.286,60
16/12/13	75	54.318,50	4.872.605,10
17/12/13	76	1.965,76	4.874.570,86
31/12/13	77	124.127,00	4.998.697,86
31/12/13	78	36.515,02	5.035.212,88
31/12/13	79	126.350,45	5.161.563,33
31/12/13	80	78.518,40	5.240.081,73
31/12/13	81	80.992,37	5.321.074,10
		5.321.074,10	-

2.2.5. Συγκριτική ανάλυση κλασικής και ελεγκτικής δειγματοληψίας pps

Από το παραπάνω παράδειγμα είναι φανερό ότι η χρήση της συστηματικής δειγματοληψίας δίνει σε ορισμένες μονάδες 100% πιθανότητα να επιλεγούν στο δείγμα. Συγκεκριμένα, οι λογαριασμοί με λογιστική αξία ίση ή μεγαλύτερη από το διάστημα δειγματοληψίας (212.843 δολάρια) επιλέγονται πάντα στο δείγμα. Για παράδειγμα ο λογαριασμός 56 με αξία 243.406,50 δολάρια θα επιλεγεί στο δείγμα για κάθε διαφορετικό σημείο εκκίνησης.

$$BV_i \geq SI, \quad p_i = 1$$

Ωστόσο, όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο, η μέθοδος δειγματοληψίας με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους δίνει στις μονάδες του πληθυσμού πιθανότητα ανάλογη της λογιστικής τους αξία και οι πιθανότητες όλων των μονάδων του πληθυσμού αθροίζουν στην μονάδα.

$$p_i = \frac{BV_i}{\sum_{i=1}^j BV_i} \quad \text{και}$$

$BV_1, BV_2, BV_3, \dots, BV_j$: η λογιστική αξία των φυσικών μονάδων του πληθυσμού 1,2,3,...,j

Κατ' αυτόν τον τρόπο, στο παράδειγμα μας ο λογαριασμός 56 έχει 4,6% πιθανότητα να επιλεγεί στο δείγμα και όχι 100%, όπως συμβαίνει με τη συστηματική δειγματοληψία.

Ας δούμε στη συνέχεια τι συμβαίνει στις μονάδες με μικρότερη λογιστική αξία από το διάστημα δειγματοληψίας. Σύμφωνα με τη θεωρία της κλασικής μεθόδου, η πιθανότητα υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο για όλες τις μονάδες και το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των μονάδων ισούται με ένα.

$$\sum_{i=1}^j p_i = 1$$

Αντίθετα, με τη χρήση της συστηματικής δειγματοληψίας οι μονάδες με μικρότερη λογιστική αξία από το διάστημα δειγματοληψίας φαίνεται να έχουν πιθανότητα ανάλογη με τη λογιστική προς αξία προς το διάστημα δειγματοληψίας, αφού όσο η λογιστική αξία κάθε μονάδας πλησιάζει αυτό το διάστημα, τόσο αυξάνεται η πιθανότητα να επιλεγεί στο δείγμα.

$$BV_i \leq SI, \quad p_i = \frac{BV_i}{SI}$$

Η παραλλαγή της κλασικής μεθόδου pps που χρησιμοποιούν οι ελεγκτές θυμίζει τη στρωματοποιημένη δειγματοληψία, κατά την οποία είναι δυνατό να επιλέξουν προς εξέταση το 100% των μονάδων ενός στρώματος με μονάδες μεγάλης αξίας και λιγότερο από το 100% των μονάδων των άλλων στρωμάτων, αφού και στις δύο περιπτώσεις ο ελεγκτής επιθυμεί οπωσδήποτε να συμπεριλάβει στο δείγμα του όλες τις μονάδες πάνω από μία συγκεκριμένη αξία. Η αξία αυτή στην πρώτη περίπτωση προκύπτει από το διάστημα δειγματοληψίας και στη δεύτερη περίπτωση από τη στρωματοποίηση των μονάδων.

Ωστόσο, η χρήση της συστηματικής δειγματοληψίας διαφοροποιεί την κατανομή των πιθανοτήτων. Ενώ στην κλασική δειγματοληψία pps η κατανομή των πιθανοτήτων αθροίζει στη μονάδα, στην ελεγκτική της μορφή το άθροισμα των πιθανοτήτων των μονάδων μεγάλης αξίας υπερβαίνει τη μονάδα, δεδομένου ότι κάθε μονάδα με αξία πάνω από το βήμα έχει 100% να επιλεγεί προς εξέταση. Επιπλέον μείζονος σημασίας για περαιτέρω μελέτη αποτελεί η κατανομή των πιθανοτήτων των μονάδων με αξία μικρότερη από το διάστημα δειγματοληψίας.

2.3. Εκτίμηση αποτελεσμάτων δείγματος

Το επόμενο στάδιο μετά την επιλογή του δείγματος είναι η εκτίμηση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την εξέταση του δείγματος. Η εκτίμηση των

αποτελεσμάτων του δείγματος βασίζεται στον υπολογισμό ενός ανώτατου ορίου σφάλματος (upper error limit), το οποίο αποτελεί μία εκτίμηση του μέγιστου ποσού σφάλματος που υπάρχει στο λογαριασμό.

Το ανώτατο όριο σφάλματος (UEL) αποτελείται από δύο βασικά στοιχεία, τα προβαλλόμενα σφάλματα (projected misstatements) και την ακρίβεια (allowance for sampling risk). Η ακρίβεια αναλύεται περαιτέρω στη βασική ακρίβεια (basic precision) και στην αυξητική ανοχή στατιστικού λάθους (incremental allowance). Ο τύπος του ανώτατου ορίου σφάλματος μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$UEL = Pr M + BP + IA$$

UEL: Ανώτατο όριο σφάλματος (upper error limit)

PrM: Προβαλλόμενο σφάλμα (projected misstatement)

BP: Βασική ακρίβεια (basic precision)

IA: Αυξητική ανοχή στατιστικού λάθους (incremental allowance)

- **Προβαλλόμενο σφάλμα - Projected misstatement**

Η αναγωγή του ποσού των σφαλμάτων στον πληθυσμό αποτελεί την καλύτερη εκτίμηση του ελεγκτή για το πιθανό ποσό των σφαλμάτων που υπάρχει στο λογαριασμό και υπολογίζεται από την άθροιση κάθε επιμέρους προβαλλόμενου σφάλματος.

$$Pr M = \sum_{i=1}^k Pr M_i$$

Ο υπολογισμός του προβαλλόμενου σφάλματος μίας φυσικής μονάδας εξαρτάται από τη λογιστική της αξία. Όταν η λογιστική αξία μίας φυσικής μονάδας i είναι μικρότερη από το διάστημα δειγματοληψίας (sampling interval), η αναγωγή του λάθους στον πληθυσμό προκύπτει πολλαπλασιάζοντας το ποσοστό λάθους σε μία φυσική μονάδα (tainting) με το διάστημα δειγματοληψίας (SI).

$$Pr M_i = t_i \cdot SI = t_i \cdot \frac{BV}{n}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, k - s$$

1,2,3,...,k-s: φυσικές μονάδες με λογιστική αξία μικρότερη του διαστήματος δειγματοληψίας.

Το ποσοστό λάθους μίας φυσικής μονάδας i (t_i) είναι ο λόγος του ποσού λάθους της φυσικής μονάδας προς τη λογιστική της αξία (Neter J. et al, 1985).

$$t_i = \frac{BV_i - AV_i}{BV_i}$$

BV_i : η καταγεγραμμένη (λογιστική) αξία της φυσικής μονάδας i (book value)

AV_i : η αξία της φυσικής μονάδας i που προέκυψε μετά τον έλεγχο (audit value)

Το ποσοστό αυτό αποτελεί το σχετικό λάθος ανά νομισματική μονάδα και μπορεί να πάρει τιμές από μηδέν έως ένα. Ο περιορισμός αυτός προκύπτει αφενός από την αρχική υπόθεση της μεθόδου, σύμφωνα με την οποία το ποσό λάθους σε μία φυσική μονάδα δεν γίνεται να ξεπερνά τη λογιστική της αξία και αφετέρου από το γεγονός ότι το ποσοστό αυτό αποτελεί το σχετικό λάθος ανά νομισματική μονάδα και είναι αδύνατον μία νομισματική μονάδα να είναι λάθος περισσότερο από 100%.

$$0 < t_i \leq 1$$

Με βάση τον τύπο του ποσοστού λάθους μίας φυσικής μονάδας (t), ο παραπάνω περιορισμός ισχύει όταν το σφάλμα της φυσικής μονάδας είναι σφάλμα υπερεκτίμησης (overstatement). Μόνο σε αυτή την περίπτωση το ποσό λάθους μίας φυσικής μονάδας είναι μικρότερο ή ίσο από τη λογιστική αξία αυτής,

$$BV_i - AV_i \leq BV_i$$

Δεδομένου ότι ο έλεγχος στοχεύει σε λάθη υπερεκτίμησης, όταν αυτό το ποσοστό λάθους είναι ίσο με τη μονάδα, σημαίνει ότι όλο το ποσό της φυσικής μονάδας που περιλαμβάνεται στο δείγμα είναι λάθος.

Εάν εντοπιστούν φυσικές μονάδες με ποσοστό λάθους μεγαλύτερο από τη μονάδα, αντιμετωπίζονται διαφορετικά και δεν λαμβάνονται υπόψη στον συγκεκριμένο έλεγχο. Η ύπαρξη τέτοιων μονάδων δημιουργεί πρόβλημα, διότι αφενός οι μονάδες αυτές έχουν μικρότερη πιθανότητα να επιλεγούν στο δείγμα, από την πραγματική και αφετέρου κατά την εκτίμηση των αποτελεσμάτων το ποσοστό αυτό αυξάνει υπερβολικά το προβαλλόμενο σφάλμα.

Οι φυσικές μονάδες με λογιστική αξία μικρότερη από το διάστημα δειγματοληψίας αντιπροσωπεύουν άλλες μονάδες, οι οποίες δεν επιλέχθηκαν στο δείγμα. Για το λόγο αυτό το ποσοστό λάθους στη φυσική μονάδα ανάγεται κατ' αρχήν σε όλο το διάστημα από το οποίο επιλέχθηκε.

Αντίθετα, για τις φυσικές μονάδες των οποίων η λογιστική αξία είναι ίση ή μεγαλύτερη με το διάστημα δειγματοληψίας, ως σφάλμα αναγωγής στον πληθυσμό θεωρείται όλο το ποσό λάθους. Αυτό συμβαίνει, διότι η φυσική μονάδα δεν αντιπροσωπεύει κάποια άλλη μη επιλεγθείσα μονάδα. Όλες οι μονάδες με λογιστική αξία είναι ίση ή μεγαλύτερη από το διάστημα δειγματοληψίας περιλαμβάνονται στο δείγμα. (Whittington et al, 2009)

$$\Pr M_i = BV_i - AV_i, \quad i = k - s + 1, k - s + 2, \dots, k - s + s$$

$k-s+1, k-s+2, \dots, k$: φυσικές μονάδες με λογιστική αξία ίση ή μεγαλύτερη του διαστήματος δειγματοληψίας.

Εάν κατά τον έλεγχο του δείγματος δεν εντοπίστηκε κανένα σφάλμα, ο ελεγκτής εκτιμά ότι το ποσό των προβαλλόμενων λαθών είναι μηδέν.

- **Ακρίβεια – Allowance for sampling risk**

Η ακρίβεια αποτελείται από δύο στοιχεία, τη βασική ακρίβεια (basic precision) και την αυξητική ανοχή στατιστικού λάθους (incremental allowance). Η βασική ακρίβεια (BP) είναι το ανώτατο όριο σφάλματος, όταν δεν υπάρχουν λάθη στο δείγμα. Υπολογίζεται πάντα πολλαπλασιάζοντας το διάστημα δειγματοληψίας με το μέσο αριθμό σφαλμάτων χωρίς κανένα αναμενόμενο σφάλμα ($k=0$), γνωστό και ως συντελεστή αξιοπιστίας (reliability factor), για ένα δεδομένο επίπεδο κινδύνου.

$$BP = SI \cdot \lambda_0 = \frac{BV}{n} \cdot \lambda_0$$

Η αυξητική ανοχή στατιστικού λάθους (incremental allowance) είναι μία πρόσθετη αύξηση της ακρίβειας για τα λάθη που υπάρχουν στο δείγμα. Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούνται τα προβαλλόμενα ποσά σφαλμάτων των οποίων η λογιστική αξία είναι μικρότερη από το διάστημα δειγματοληψίας. Ειδικότερα, είναι το άθροισμα των ποσών αυτών, αφού πρώτα τοποθετηθούν σε φθίνουσα σειρά και πολλαπλασιαστούν με ένα συντελεστή πρόσθετης ακρίβειας, ο οποίος ονομάζεται incremental factor (IF).

Στη διεθνή βιβλιογραφία, ο συντελεστής αυτό είναι γνωστός και ως

$$IA = \sum_{i=1}^{k-s} [\Pr M_i \cdot [(\lambda_i - \lambda_{i-1}) - 1]], \quad i = 1, 2, 3, \dots, k - s$$

Ο συντελεστής αυτός για το πρώτο προβαλλόμενο ποσό υπολογίζεται ως εξής:

$$IF = (\lambda_1 - \lambda_0) - 1$$

Αριθμός λαθών	$IF = (\lambda_1 - \lambda_0) - 1$						
	$\beta=1\%$	$\beta=2\%$	$\beta=5\%$	$\beta=10\%$	$\beta=15\%$	$\beta=20\%$	$\beta=25\%$
0	-	-	-	-	-	-	-
1	1,033	0,883	0,748	0,587	0,475	0,385	0,307
2	0,768	0,653	0,552	0,432	0,351	0,285	0,227
3	0,639	0,542	0,458	0,359	0,291	0,236	0,189
4	0,560	0,475	0,400	0,313	0,253	0,206	0,165
5	0,503	0,426	0,359	0,281	0,228	0,185	0,149
6	0,463	0,391	0,329	0,257	0,208	0,169	0,135
7	0,429	0,364	0,306	0,239	0,194	0,158	0,126
8	0,403	0,340	0,287	0,224	0,181	0,147	0,118
9	0,380	0,322	0,270	0,211	0,171	0,139	0,112
10	0,362	0,305	0,257	0,201	0,162	0,132	0,106
11	0,345	0,292	0,246	0,191	0,155	0,126	0,101
12	0,331	0,280	0,235	0,184	0,149	0,120	0,096
13	0,318	0,268	0,226	0,176	0,142	0,116	0,093
14	0,307	0,260	0,217	0,170	0,138	0,112	0,090
15	0,297	0,250	0,211	0,164	0,133	0,108	0,086

Κάθε επιπρόσθετο σφάλμα αυξάνει το ανώτατο όριο σφάλματος (UEL). Μάλιστα, η τοποθέτηση των προβαλλόμενων λαθών σε φθίνουσα σειρά σε συνδυασμό με τον συντελεστή της πρόσθετης ακρίβειας ο οποίος, όπως φαίνεται από τον πίνακα, ακολουθεί φθίνουσα πορεία, αυξάνουν ακόμα περισσότερο την αυξητική ανοχή στατιστικού λάθους (IA).

Όταν οι φυσικές μονάδες του δείγματος με λογιστική αξία μικρότερη από το διάστημα δειγματοληψίας δεν έχουν σφάλματα, η αυξητική ανοχή στατιστικού λάθους (IA) είναι μηδέν.

Συνοψίζοντας, το ανώτατο όριο σφάλματος (UEL) είναι το άθροισμα του προβαλλόμενου ποσού σφάλματος, της βασικής ακρίβειας και της αυξητικής ανοχής στατιστικού λάθους.

$$\begin{aligned}
UEL &= \frac{BV}{n} \cdot \lambda_0 + \left[\frac{BV}{n} \cdot t_1 + \frac{BV}{n} \cdot t_2 + \dots + \frac{BV}{n} \cdot t_{k-s} \right] + \\
&+ \left[(BV_{k-s+1} - AV_{k-s+1}) + \dots + (BV_{k-s+s} - AV_{k-s+s}) \right] + \\
&+ \left[\frac{BV}{n} \cdot t_{(1)} \cdot [(\lambda_1 - \lambda_0) - 1] + \frac{BV}{n} \cdot t_{(2)} \cdot [(\lambda_2 - \lambda_1) - 1] + \dots + \frac{BV}{n} \cdot t_{(k)} \cdot [(\lambda_k - \lambda_{k-1}) - 1] \right] = \\
&= \frac{BV}{n} \cdot \lambda_0 + \frac{BV}{n} \cdot (t_1 + t_2 + \dots + t_{k-s}) + \sum_{i=k-s+1}^k (BV_i - AV_i) + \frac{BV}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k-s} [t_{(i)} \cdot (\lambda_i - \lambda_{i-1})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{(1)} &= \max \{t_1, t_2, \dots, t_{k-s}\} \\
t_{(2)} &= \max \{t_1, t_2, \dots, t_{k-s}\} - \{t_{(1)}\} \\
&\vdots \\
t_{(k-s)} &= \max \{t_1, t_2, \dots, t_{k-s}\} - \{t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(k-s-1)}\}
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, στην περίπτωση που ο ελεγκτής εντοπίσει λάθη υποεκτίμησης (understatements), αφαιρεί το άθροισμα των προβαλλόμενων λαθών υποεκτίμησης από το ανώτατο όριο σφάλματος.

$$PrM_u = t_i \cdot SI = t_i \frac{BV}{n}$$

Το πιθανό ποσό των σφαλμάτων υποεκτίμησης που υπάρχει στο λογαριασμό (MLE_U) υπολογίζεται ως εξής:

$$MLE_U = \sum_{i=1}^l t_i \cdot SI = \sum_{i=1}^l t_i \cdot \frac{BV}{n}$$

Μετά από αυτή τη διαδικασία, ο ελεγκτής συγκρίνει το ανώτατο όριο σφάλματος με το ανεκτό ποσό σφάλματος. Εάν το όριο αυτό είναι ίσο ή μικρότερο από το ανεκτό ποσό σφάλματος, ο ελεγκτής βάσει των αποτελεσμάτων της δειγματοληψίας μπορεί να συμπεράνει ότι για ένα συγκεκριμένο επίπεδο κινδύνου, ο λογαριασμός δεν περιέχει ουσιώδη σφάλματα.

Αντίθετα, εάν το ανώτατο όριο σφάλματος είναι μεγαλύτερο από το ανεκτό ποσό σφάλματος, ο ελεγκτής δεν μπορεί να συμπεράνει ότι ο λογαριασμός δεν περιέχει ουσιώδη σφάλματα. Στην περίπτωση αυτή, απαιτείται προσαρμογή μερικών σφαλμάτων ώστε το ανώτατο όριο σφάλματος να μην υπερβαίνει το ανεκτό ποσό σφάλματος. (Whittington R. et al. 2009)

2.4. Πλεονεκτήματα – μειονεκτήματα

2.4.1. Πλεονεκτήματα

1. Η μέθοδος δειγματοληψίας με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους επικεντρώνεται στις φυσικές μονάδες με μεγαλύτερη λογιστική αξία, καθώς δίνει σε αυτές αναλογικά μεγαλύτερη πιθανότητα να επιλεγούν στο δείγμα.
2. Δεδομένου ότι ο ελεγκτής αναμένει λίγα σφάλματα ή καθόλου στον πληθυσμό, η μέθοδος αυτή επιτυγχάνει μικρότερο δείγμα σε σχέση με άλλες μεθόδους δειγματοληψίας (π.χ. δειγματοληψία μεταβλητών).
3. Ο ελεγκτής δεν αντιμετωπίζει δυσκολία να προσαρμόσει τα αποτελέσματα της δειγματοληψίας σε νομισματικές μονάδες, διότι, χρησιμοποιώντας τη δειγματοληψία χαρακτηριστικών (attribute sampling), εξάγει απευθείας αποτελέσματα σε νομισματικές μονάδες.
4. Δεν απαιτείται η γνώση της τυπικής απόκλισης για να προσδιοριστεί το μέγεθος του δείγματος.
5. Οι διαφορές που θα προκύψουν από τον έλεγχο του δείγματος δεν χρειάζεται να έχουν κανονική κατανομή. Σε όλες τις άλλες μεθόδους είναι απαραίτητη η κανονικότητα των ενδεχόμενων διαφορών. (Guy et al, 2002)
6. Λύνεται το πρόβλημα εντοπισμού μεγάλου και ασυνήθιστου σφάλματος, διότι το σφάλμα αυτό είναι σφάλμα υπερτίμησης κι έτσι δίνει στη φυσική μονάδα μεγαλύτερη πιθανότητα να επιλεγεί στο δείγμα.
7. Γίνεται αυτόματα στρωματοποίηση του πληθυσμού, αφενός από την πιθανότητα που έχουν οι φυσικές μονάδες να επιλέγουν στο δείγμα βάσει της λογιστικής τους αξίας και αφετέρου από το διάστημα δειγματοληψίας στην περίπτωση που ο ελεγκτής ακολουθήσει τη συστηματική μέθοδο επιλογής δείγματος. (Whittington & Pany, Principles of Auditing)
8. Είναι δυνατόν να ελεγχθούν μαζί δύο ή περισσότεροι λογαριασμοί γιατί, ενώ έχουν διαφορετικές αξίες και διακυμάνσεις, η χρηματική τους μονάδα είναι ομοιογενής. (Guy et al, 2002)
9. Ακολουθώντας τη δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους, ο ελεγκτής δύναται να χρησιμοποιήσει το ουσιώδες μέγεθος (overall materiality) ως ανεκτό ποσό σφάλματος (tolerable misstatement), αποφεύγοντας έτσι τις διαδικασίες κατανομής του στους επιμέρους λογαριασμούς των οικονομικών καταστάσεων. (Guy et al, 2002)

2.4.2. Μειονεκτήματα

1. Η δειγματοληψία pps δεν είναι κατάλληλη για λογαριασμούς με σφάλματα υποεκτίμησης (understatements), διότι οι φυσικές μονάδες που περιέχουν τέτοιου είδους σφάλματα έχουν μικρότερη πιθανότητα να επιλεγούν στο δείγμα και οι λογαριασμοί με μηδενικά ή αρνητικά υπόλοιπα δεν έχουν καμία πιθανότητα να επιλεγούν στο δείγμα. (Guy et al, 2002)
2. Προϋποθέτει ότι το ποσό λάθους σε μία φυσική μονάδα δεν ξεπερνά την λογιστική της αξία. (Guy et al, 2002)
3. Εάν ο ελεγκτής εκτιμά ότι υπάρχουν πολλά σφάλματα στον πληθυσμό, η μέθοδος αυτή δίνει μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος σε σχέση με άλλες μεθόδους δειγματοληψίας. (Guy et al, 2002)
4. Η δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους χρησιμοποιείται όταν αναμένεται ότι θα προκύψουν λίγα ή καθόλου σφάλματα. Αν το δείγμα περιέχει πολλά σφάλματα, ο ελεγκτής δεν θα μπορέσει να πετύχει μεγάλη ακρίβεια, διότι το upper error limit θα είναι πολύ υψηλό και υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να αποδεχτεί εσφαλμένα την ορθότητα του λογαριασμού. (Susumu Ueno, Statistical auditing and Classical Variables Sampling)

3. Εφαρμογή δειγματοληψίας με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους

3.1. Εφαρμογή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο δειγματοληψίας με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους για να ελέγξουμε έναν λογαριασμό απαιτήσεων, ο οποίος περιλαμβάνει 1057 τιμολόγια με συνολική λογιστική αξία 3.525.012,00 δολάρια. Οι λογαριασμοί απαιτήσεων και γενικότερα οι λογαριασμοί του ενεργητικού έχουν την τάση να περιλαμβάνουν σφάλματα υπερεκτίμησης, εμφανίζοντας έτσι καταγεγραμμένη λογιστική αξία μεγαλύτερη από την πραγματική.

Για πρακτικούς λόγους, επειδή δεν είναι εφικτός ο πραγματικός έλεγχος των τιμολογίων που αποτελούν το δείγμα, δημιουργήσαμε λάθη υπερεκτίμησης (overmisstatements) σε ποσοστό 2,5% της συνολικής του αξίας και τα ενσωματώσαμε τυχαία στις μονάδες του πληθυσμού. Η συνολική αξία του των σφαλμάτων ισούται με 90.219,81 δολάρια.

Οι λογαριασμοί που περιέχουν σφάλματα είναι οι ακόλουθοι:

	Τιμολόγιο	Πραγματική αξία τιμολογίου	Αξία σφάλματος	Καταγεγραμμένη λογιστική αξία
Σφάλμα 1	207	26.130,31	40.000,00	66.130,31
Σφάλμα 2	399	260,00	3.000,00	3.260,00
Σφάλμα 3	584	60.593,59	7.568,22	68.161,81
Σφάλμα 4	785	493,80	6.978,27	7.472,07
Σφάλμα 5	864	391,64	6.978,27	7.369,91
Σφάλμα 6	622	1.415,78	13.956,54	15.372,32
Σφάλμα 7	363	1.304,28	11.738,52	13.042,80
			90.219,81	

Πριν προχωρήσουμε στη διαδικασία δειγματοληψίας είναι αναγκαίο να υποθέσουμε τα εξής:

Ανεκτό ποσό σφάλματος (TM): 261.232 δολάρια

Κίνδυνος εσφαλμένης απόρριψης (α): 5%

Κίνδυνος εσφαλμένης αποδοχής (β): 15%

Αναμενόμενο ποσό σφαλμάτων στον πληθυσμό (EM): 60.000 δολάρια

Ποσοστό σφάλματος ενός λογαριασμού (μ): 0,015

Μέγεθος δείγματος

Έχοντας όλες τις απαραίτητες πληροφορίες, μπορούμε να υπολογίσουμε το απαιτούμενο μέγεθος του δείγματος (n) και να επιλέξουμε προς εξέταση τις αντίστοιχες μονάδες.

$$\lambda = n \cdot p = n \cdot \frac{TM}{BV} \Leftrightarrow n = \frac{\lambda \cdot BV}{TM}$$

Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το μέγεθος του δείγματος προσδιορίζεται από την κατανομή Poisson. Ως εκ τούτου απαιτείται ο υπολογισμός της πιθανότητας (p) πάνω από την οποία ο ελεγκτής αμφισβητεί την ορθότητα του λογαριασμού.

$$p = \frac{TM}{BV} = \frac{261.232}{3.525.012} = 0,074$$

Τέλος, για να προσδιορίσουμε τον αναμενόμενο αριθμός σφαλμάτων (λ), αρκεί να βρούμε τη μικρότερη δυνατή τιμή k , έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις:

$$P(X \leq k) = \sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^j}{j!} \geq 0,10 \text{ όπου } \lambda = n \cdot p$$

$$1 - P(X \leq k) = 1 - \sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^j}{j!} \leq 0,05 \text{ όπου } \lambda = n \cdot \mu$$

Για $k=2$, ο αναμενόμενος αριθμός λαθών για $\beta=15\%$ είναι 4,723 και για $\alpha=5\%$ 0,818.

```
f<- function(lambda) ppois(2, lambda) - 0.15
```

```
> uniroot(f, c(0, 10))
```

```
$root
```

```
[1] 4.723053
```

```
> f<- function(lambda) 1-ppois(2, lambda) - 0.05
```

```
> uniroot(f, c(0, 10))
```

```
$root
```

```
[1] 0.8176657
```

Λύνοντας τις παρακάτω ανισότητες, παρατηρούμε ότι δεν ικανοποιούνται και οι δύο σχέσεις.

$$\lambda = n \cdot 0,0794 \geq 4,723 \Leftrightarrow n \geq \frac{4,723}{0,0794} \Leftrightarrow n \geq 59,48 \approx 60 \text{ απορρίπτεται}$$

$$\lambda = n \cdot 0,015 \leq 0,818 \Leftrightarrow n \leq \frac{0,818}{0,015} \Leftrightarrow n \leq 54,53 \approx 55 \text{ απορρίπτεται}$$

Έτσι θα συνεχίσουμε τις δοκιμές μέχρι να βρούμε το μέγεθος του δείγματος που ικανοποιεί και τις δύο ανισότητες.

Για $k=3$, ο αναμενόμενος αριθμός λαθών για $\beta=15\%$ είναι 6,014 και για $\alpha=5\%$ 1,37.

$$\lambda = n \cdot 0,0794 \geq 6,014 \Leftrightarrow n \geq \frac{6,014}{0,0794} \Leftrightarrow n \geq 75,74 \approx 76 \text{ δεκτό}$$

Για $k=3$, $\lambda=1,37$

$$\lambda = n \cdot 0,015 \leq 1,37 \Leftrightarrow n \leq \frac{1,37}{0,015} \Leftrightarrow n \leq 91,33 \approx 92 \text{ δεκτό}$$

Για $k=2$ παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται και οι δύο σχέσεις. Συγκεκριμένα, το μέγεθος του δείγματος πρέπει να είναι ίσο ή μεγαλύτερο από 76 μονάδες και μικρότερο από 92 μονάδες. Δεδομένου ότι επιλέγουμε τη μικρότερη δυνατή τιμή μεταξύ του ορίου αυτού, το μέγεθος του δείγματος ανέρχεται σε 76 μονάδες.

Ο προσδιορισμός του μεγέθους του δείγματος είναι ίδιος τόσο στην κλασική δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους όσο και στην ελεγκτική δειγματοληψία pps. Από την επιλογή του δείγματος κι έπειτα οι δύο εκδοχές της δειγματοληψίας pps εμφανίζουν αξιοσημειώτες διαφορές.

Επιλογή δείγματος και εκτίμηση των αποτελεσμάτων

Κλασική μέθοδος δειγματοληψίας pps

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι κάθε νομισματική μονάδα του πληθυσμού έχει ίση πιθανότητα να επιλεγεί στο δείγμα. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα που έχει κάθε μονάδα του πληθυσμού N είναι ανάλογη της λογιστικής της αξίας και το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των μονάδων ισούται με την μονάδα.

$$p_i = \frac{BV_i}{\sum_{i=1}^j BV_i}$$

Η στάθμιση κάθε φυσικής μονάδας i δίνεται από τον παρακάτω τύπο.

$$w_i = \frac{1}{p_i}$$

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{p_i}$$

Η πληθυσμιακή και διακύμανση S^2 υπολογίζεται ως εξής:

$$S^2 = \sum_{i=1}^N p_i \left(\frac{x_i}{p_i} - \sum_{i=1}^N x_i \right)^2$$

Εκτίμηση αποτελεσμάτων

Επειδή γνωρίζουμε τις μονάδες του πληθυσμού που περιέχουν σφάλματα, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε εάν αυτές οι εσφαλμένες μονάδες εντοπίστηκαν στο δείγμα.

	Τιμολόγιο	Πραγματική αξία τιμολογίου	Αξία σφάλματος	Καταγεγραμμένη λογιστική αξία
Σφάλμα 1	207	26.130,31	40.000,00	66.130,31
Σφάλμα 3	584	60.593,59	7.568,22	68.161,81
Σφάλμα 4	785	493,80	6.978,27	7.472,07
			54.546,49	

Με τη χρήση της R υπολογίζουμε την εκτιμήτρια της μέσης τιμής και της διακύμανσης ως εξής:

```
> x<-data$value # πληθυσμός
> w<-x/sum(x) # πιθανότητες των μονάδων του πληθυσμού
> set.seed(1)
> n<-sample(x,76,prob=y)
> n
[1] 61759 27481 7276 1055 72610 1096 780 4707 5400 251091
[11] 50624 66130 3210 18657 1945 7326 2782 346 18770 1857
[21] 794 44689 3803 76666 25144 11562 141825 9104 1099 12916
[31] 5924 3949 5650 35659 1294 2901 1465 68162 1972 7333
[41] 1295 3028 1498 4620 5043 1457 124318 5400 1774 2205
[51] 5400 1068 5942 19530 46568 37033 8228 4400 2422 5997
```

```
[61] 791 9880 5370 7472 2497 12852 4870 1420 44364 948
[71] 7322 1091 7315 7350 4707 854
```

```
> set.seed(1)
```

```
> w<-sample(y,76,prob=y)
```

```
> w
```

```
[1] 1.752026e-02 7.796017e-03 2.064111e-03 2.992904e-04 2.059855e-02
[6] 3.109215e-04 2.212763e-04 1.335317e-03 1.531913e-03 7.123139e-02
[11] 1.436140e-02 1.876026e-02 9.106370e-04 5.292758e-03 5.517723e-04
[16] 2.078295e-03 7.892187e-04 9.815589e-05 5.324815e-03 5.268078e-04
[21] 2.252479e-04 1.267771e-02 1.078864e-03 2.174919e-02 7.133040e-03
[26] 3.279995e-03 4.023399e-02 2.582691e-03 3.117726e-04 3.664108e-03
[31] 1.680565e-03 1.120282e-03 1.602835e-03 1.011601e-02 3.670917e-04
[36] 8.229776e-04 4.156022e-04 1.933671e-02 5.594318e-04 2.080281e-03
[41] 3.673754e-04 8.590059e-04 4.249639e-04 1.310636e-03 1.430636e-03
[46] 4.133327e-04 3.526747e-02 1.531913e-03 5.032617e-04 6.255310e-04
[51] 1.531913e-03 3.029783e-04 1.685671e-03 5.540418e-03 1.321076e-02
[56] 1.050580e-02 2.334181e-03 1.248225e-03 6.870912e-04 1.701274e-03
[61] 2.243968e-04 2.802833e-03 1.523402e-03 2.119713e-03 7.083678e-04
[66] 3.645952e-03 1.381558e-03 4.028363e-04 1.258551e-02 2.689358e-04
[71] 2.077160e-03 3.095031e-04 2.075174e-03 2.085103e-03 1.335317e-03
[76] 2.422692e-04
```

```
> weighted.mean(n,w)
```

```
[1] 93681.69
```

```
> weighted.var <- function(n, w, na.rm = FALSE) {
```

```
+   if(na.rm) {
```

```
+     w <- w[i <- !is.na(n)]
```

```
+     n <- n[i]
```

```
+   }
```

```
+   sum.w <- sum(w)
```

```
+   sum.w2 <- sum(w^2)
```

```

+ mean.w <- sum(n * w) / sum(w)
+ (sum.w / (sum.w^2 - sum.w2)) * sum(w * (n - mean.w)^2, na.rm =
+ na.rm)
+ }
> sqrt(weighted.var(n,w))
[1] 84820.68

```

$$\hat{Y} + d_{\alpha} \cdot SD(\hat{Y}) \Leftrightarrow 93681,69 + 1,98 \cdot 84.820,68 = 93.681,69 + 84.822,96 = 178.504,35$$

Παρατηρούμε ότι το ανεκτό ποσό σφάλματος, το οποίο ανέρχεται σε 261.232 δολάρια, είναι μεγαλύτερο από το ανώτατο όριο σφάλματος που προέκυψε από τη δειγματοληψία (178.505,35). Αυτό σημαίνει ότι δεχόμαστε τη βασική υπόθεση ελέγχου και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι λογαριασμός δεν περιέχει ουσιώδη σφάλματα.

Ο Lohr (2009) στο βιβλίο του εκτιμά τις διαφορές (BV-AV) με την κανονική κατανομή, κάτι που δημιουργεί πρόβλημα διότι υπάρχουν πολλές μηδενικές τιμές.

$$h_1 = \frac{diff_1}{p_1} = \frac{40.000}{\frac{66.130,31}{3.525.012}} = 2.132.161,18$$

$$Diff. \text{ per dollar} = \frac{h_1}{BV} = \frac{\frac{diff_1}{p_1}}{BV} = \frac{2.132.161,18}{3.525.012} = 0,6048$$

$$h_2 = \frac{diff_2}{p_2} = \frac{7.568,22}{\frac{68.161,81}{3.525.012}} = 391.393,16$$

$$Diff. \text{ per dollar} = \frac{h_2}{BV} = \frac{\frac{diff_2}{p_2}}{BV} = \frac{391.393,16}{3.525.012} = 0,1110$$

$$h_3 = \frac{diff_3}{p_3} = \frac{6.978,27}{\frac{7472,07}{3.525.012}} = 3.292.057,69$$

$$Diff. \text{ per dollar} = \frac{h_3}{BV} = \frac{p_3}{BV} = \frac{3.292.057,69}{3.525.012} = 0,9342$$

$$\sum Diff. \text{ per dollar} = \sum \frac{p_3}{BV} = 0,6048 + 0,1110 + 0,9342 = 1,65$$

Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, ο μέσος όρος των διαφορών (BV-AV) των μονάδων του δείγματος και των διαφορών ανά δολάριο είναι 737,11 και 0,0226 δολάρια αντίστοιχα. Το συνολικό σφάλμα για τον πληθυσμό υπολογίζεται διαιρώντας τη συνολική αξία του λογαριασμού με το μέσο σφάλμα ανά δολάριο (3.525.012*0,0226= 79.665,27 δολάρια)

Ελεγκτική δειγματοληψία pps

Στην ελεγκτική δειγματοληψία pps το επόμενο στάδιο μετά τον προσδιορισμό του μεγέθους του δείγματος (n=76) είναι η επιλογή του δείγματος με συστηματική δειγματοληψία. Αρχικά υπολογίζουμε το διάστημα δειγματοληψίας ως εξής:

$$SI = \frac{BV}{n} = \frac{3.525.012,00}{76} = 46.382$$

Έχοντας βρει το διάστημα αυτό, καθορίζουμε το σημείο εκκίνησης και επιλέγουμε τυχαία μία νομισματική μονάδα από το διάστημα [1,49714].

```
set.seed(11)
```

```
> s<-sample(1:49714,1)
```

```
> s
```

```
[1] 13784
```

	Commulative value	Accounts	Book Value in USD
RS	13.784	12	5.400,46
RS+SI	60.166	30	35.658,50
RS+2SI	106.547	37	94.243,33
RS+3SI	152.929	37	94.243,33
RS+4SI	199.311	41	20.479,52
RS+5SI	245.693	45	37.032,67
RS+6SI	292.074	67	44.688,66
RS+7SI	338.456	68	13.440,97
RS+8SI	384.838	74	4.932,56
RS+9SI	431.220	98	19.681,47
RS+10SI	477.601	106	27.480,98
RS+11SI	523.983	118	677,50
RS+12SI	570.365	140	25.143,62
RS+13SI	616.747	152	2.422,03

RS+14SI	663.128	170	2.700,18
RS+15SI	709.510	177	2.202,82
RS+16SI	755.892	189	19.530,34
RS+17SI	802.274	197	10.003,78
RS+18SI	848.655	207	66.130,31
RS+19SI	895.037	208	7.322,32
RS+20SI	941.419	227	10.100,00
RS+21SI	987.800	234	5.650,46
RS+22SI	1.034.182	250	20.250,11
RS+23SI	1080564	281	890,00
RS+24SI	1126946	311	1.157,00
RS+25SI	1173327	317	777,75
RS+26SI	1219709	324	4.870,48
RS+27SI	1266091	368	54.726,00
RS+28SI	1312473	403	251.090,68
RS+29SI	1358854	403	251.090,68
RS+30SI	1405236	403	251.090,68
RS+31SI	1451618	403	251.090,68
RS+32SI	1498000	403	251.090,68
RS+33SI	1544381	403	251.090,68
RS+34SI	1590763	419	124.317,50
RS+35SI	1637145	419	124.317,50
RS+36SI	1683527	419	124.317,50
RS+37SI	1729908	435	4.574,73
RS+38SI	1776290	455	536,89
RS+39SI	1822672	484	5.042,56
RS+40SI	1869053	522	1.563,12
RS+41SI	1915435	560	7.332,99
RS+42SI	1961817	961	268,05
RS+43SI	2008199	584	68.161,81
RS+44SI	2054580	584	68.161,81
RS+45SI	2100962	622	15.372,32
RS+46SI	2147344	624	61.759,33
RS+47SI	2193726	633	5.658,50
RS+48SI	2240107	667	18.816,00
RS+49SI	2286489	685	969,44
RS+50SI	2332871	697	1.464,61
RS+51SI	2379253	730	5.090,00
RS+52SI	2425634	770	642,75
RS+53SI	2472016	805	5.370,00
RS+54SI	2518398	819	76.665,87
RS+55SI	2564780	564	487,55
RS+56SI	2611161	853	72.609,66
RS+57SI	2657543	853	72.609,66
RS+58SI	2703925	858	50.623,75
RS+59SI	2750306	869	23.442,88
RS+60SI	2796688	874	752,89
RS+61SI	2843070	907	4.618,46
RS+62SI	2889452	917	141.824,59
RS+63SI	2935833	917	141.824,59
RS+64SI	2982215	917	141.824,59
RS+65SI	3028597	951	663,52
RS+66SI	3074979	933	21.504,00
RS+67SI	3121360	956	766,29
RS+68SI	3167742	970	44.363,97
RS+69SI	3214124	985	28.556,52

RS+70SI	3260506	992	2.431,33
RS+71SI	3306887	1005	8.423,51
RS+72SI	3353269	1011	12.852,32
RS+73SI	3399651	1023	5.942,44
RS+74SI	3446033	1029	2.553,19
RS+75SI	3492414	1042	4.039,19

Ο πρώτος προς έλεγχο λογαριασμός είναι το τιμολόγιο 12 αξίας 5.400, αφού αθροιστικά περιέχει τη χρηματική μονάδα 13.784. Έπειτα, στο σημείο εκκίνησης (13.784) προσθέτουμε το βήμα 46.382 προκειμένου να βρούμε την επόμενη νομισματική μονάδα και ούτω καθεξής μέχρι να επιλέξουμε όλες τις απαιτούμενες μονάδες.

Εκτίμηση αποτελεσμάτων δείγματος

Για την εκτίμηση των αποτελεσμάτων του δείγματος αρκεί να υπολογίσουμε το ανώτατο όριο σφάλματος (upper error limit), το οποίο αποτελεί μία εκτίμηση του μέγιστου ποσού σφάλματος που υπάρχει στο λογαριασμό.

$$UEL = Pr M + BP + IA$$

Τα λάθη που εντοπίστηκαν στο δείγμα δίνονται παρακάτω:

	Τιμολόγιο	Πραγματική αξία τιμολογίου	Αξία σφάλματος	Καταγεγραμμένη λογιστική αξία
Σφάλμα 1	207	26.130,31	40.000,00	66.130,31
Σφάλμα 3	584	60.593,59	7.568,22	68.161,81
Σφάλμα 6	622	1.415,78	13.956,54	15.372,32

Το ποσοστό λάθους των τιμολογίων 207, 584, 622 υπολογίζεται ως εξής:

$$t_1 = \frac{BV_1 - AV_1}{BV_1} = \frac{40.000}{66.130,31} = 0,60487$$

$$t_2 = \frac{BV_2 - AV_2}{BV_2} = \frac{7.568,22}{68.161,81} = 0,11103$$

$$t_3 = \frac{BV_3 - AV_3}{BV_3} = \frac{13.956,54}{15.272,32} = 0,91385$$

Ο υπολογισμός του προβαλλόμενου σφάλματος μίας φυσικής μονάδας εξαρτάται από τη λογιστικής της αξία.

$$\text{Για } BV_i < SI, \text{ Pr } M_3 = t_3 \cdot SI = 0,91385 \cdot 46.382 = 42.386,19$$

Για $BV_i \geq SI$, όλο το ποσό σφάλματος λαμβάνεται ως σφάλμα αναγωγής στον πληθυσμό.

$$\Pr M_1 = BV_1 - AV_1 = 40.000$$

$$\Pr M_2 = BV_2 - AV_2 = 7.568,22$$

$$\Pr M = \sum_{i=1}^3 \Pr M_i = 40.000 + 7.568,22 + 42.386,19 = 89.954,41$$

$$\text{Βασική ακρίβεια: } BP = 46.382 \cdot 1,895 = 87.893,89$$

```
> f<- function(lambda) rpois(0, lambda) - 0.15
```

```
> uniroot(f, c(0, 10))
```

```
$root
```

```
[1] 1.897135
```

Αυξητική ανοχή στατιστικού για τις εσφαλμένες μονάδες με λογιστική αξία μικρότερη του διαστήματος δειγματοληψίας

$$IA = \Pr M_1 \cdot [(\lambda_1 - \lambda_0) - 1] = 42.386,19 \cdot 0,475 = 20.133,44$$

Αφού υπολογίσαμε όλα τα μέλη της παρακάτω εξίσωσης, μπορούμε να βρούμε το ανώτατο όριο σφάλματος για τον λογαριασμό.

$$UEL = \Pr M + BP + IA = 89.954,41 + 87893,89 + 20.133,44 = 197.981,74$$

Τέλος γίνεται σύγκριση του ανώτατου ορίου σφάλματος (UEL) με το ανεκτό ποσό σφάλματος (TM), το οποίο ανέρχεται σε 261.232 δολάρια. Όπως είναι φανερό, βάσει των αποτελεσμάτων της δειγματοληψίας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο λογαριασμός δεν περιέχει ουσιώδη λάθη, αφού το ανώτατο όριο σφάλματος είναι μικρότερο από το ανεκτό ποσό σφάλματος

3.2. Συμπεράσματα

Η δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους χρησιμοποιείται ευρέως στην ελεγκτική τα τελευταία χρόνια ως η κύρια στατιστική μεθοδολογία για την επιλογή δείγματος και εξαγωγής συμπερασμάτων στα πλαίσια του ελέγχου λεπτομερειών. Στην παρούσα εργασία διακρίναμε δύο είδη pps, την κλασική δειγματοληψία pps και την ελεγκτική δειγματοληψία pps. Οι δύο αυτές μέθοδοι που αναλύθηκαν θεωρητικά και εμπειρικά παρουσιάζουν δομικές διαφορές, όπως είναι η διαφορετική κατανομή των πιθανοτήτων των μονάδων του πληθυσμού, η διαφορετική επιλογή δείγματος και οι διαφορές στη μεθοδολογία (κατανομές, διαστήματα εμπιστοσύνης, έλεγχος υποθέσεων).

Ως μέθοδος δειγματοληψίας η pps και στις δύο μορφές παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα. Κύριο χαρακτηριστικό αυτής της δειγματοληψίας, το αποτελεί και το βασικό της πλεονέκτημα έναντι άλλων στατιστικών μεθόδων, είναι ότι επικεντρώνεται στις φυσικές μονάδες με μεγαλύτερη καταγεγραμμένη λογιστική αξία και η πιθανότητα κάθε μονάδας είναι ανάλογη με το μέγεθός της. Όσο μεγαλύτερη είναι η αξία της φυσικής μονάδας, τόσο αυξάνεται η πιθανότητά της να επιλεγεί στο δείγμα. Έτσι, η εφαρμογή της μεθόδου pps σε έναν λογαριασμό με λάθη υπερεκτίμησης, όπως στο λογαριασμό απαιτήσεις, διευκολύνει τον εντοπισμό των λαθών, καθώς το ποσό του λάθους μία μονάδας δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα σε αυτή τη μονάδα να επιλεγεί προ εξέταση.

Επιπλέον, επιτυγχάνεται αυτόματα η στρωματοποίηση του πληθυσμού ανάλογα με τη λογιστική τους αξία και κατ' επέκταση την πιθανότητα που έχει κάθε μία να επιλεγεί στο δείγμα. Μάλιστα στην περίπτωση της ελεγκτικής pps, εφόσον ο ελεγκτής ακολουθήσει τη συστηματική μέθοδο επιλογής δείγματος, η στρωματοποίηση επίσης επιτυγχάνεται και από το διάστημα δειγματοληψίας. Ο πληθυσμός στρωματοποιείται ανάλογα με την πιθανότητα επιλογής των μονάδων στο δείγμα και ο ελεγκτής εφαρμόζοντας δειγματοληψία ο ελεγκτής εξετάζει πλήρως το στρώμα του πληθυσμού που περιλαμβάνει μονάδες με καταγεγραμμένη λογιστική αξία μεγαλύτερη από το διάστημα δειγματοληψίας.

Είναι εξίσου σημαντικό να αναφέρουμε ότι η δειγματοληψία με πιθανότητα ανάλογη του μεγέθους είναι ένας συνδυασμός της δειγματοληψίας χαρακτηριστικού και της δειγματοληψία μεταβλητής, καθώς είναι μια μέθοδος η οποία λαμβάνει υπόψη όχι μόνο την ποσότητα των σφαλμάτων (δειγματοληψία χαρακτηριστικού) αλλά και το μέγεθός τους (δειγματοληψία μεταβλητής). Η δειγματοληψία pps δύναται να χρησιμοποιηθεί τόσο σε δοκιμασίες δικλίδων όσο και σε δοκιμασίες λεπτομερειών, καθώς χρησιμοποιεί τη δειγματοληψία χαρακτηριστικού και εξάγει συμπεράσματα για το συνολικό ποσό λαθών αυτού σε νομισματικές μονάδες.

Όπως φαίνεται από την εφαρμογή που παρουσιάζεται αναλυτικά στο τρίτο κεφάλαιο, στην ελεγκτική μορφή του pps σύμφωνα με τα διεθνή πρότυπα ελέγχου οι μονάδες με αξία μεγαλύτερη από το διάστημα δειγματοληψίας περιλαμβάνονται με βεβαιότητα

στο δείγμα, ενώ στην κλασική της μορφή η μέθοδος αυτή δίνει σε όλες οι μονάδες του πληθυσμού πιθανότητα επιλογής ανάλογη με την αξία τους. Αυτό σημαίνει ότι μια μονάδα μεγάλης αξίας είναι πιθανό – έστω και θεωρητικά- να μην επιλεγεί στο δείγμα. Πράγματι, στην πρώτη περίπτωση το δείγμα που επιλέξαμε από τον λογαριασμό απαιτήσεων περιλαμβάνει και τις δώδεκα φυσικές μονάδες οι οποίες είναι μεγαλύτερες από 46.382 δολάρια. Στη δεύτερη περίπτωση η κλασική pps περιλαμβάνει ένα μεγάλο τις περισσότερες από τις μονάδες των οποίων η αξία είναι μεγαλύτερη από το βήμα, όχι όμως όλες. Δύο από τις δώδεκα μονάδες δεν περιλαμβάνονται στο δείγμα.

Επιπλέον, παρατηρείται διαφορετική προσέγγιση στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων του δείγματος. Στην κλασική pps εκτιμάται ένα διάστημα εμπιστοσύνης εντός του οποίου εκτιμάται ότι θα βρίσκεται το συνολικό ποσό λάθους για δεδομένο δειγματοληπτικό κίνδυνο. Το διάστημα αυτό προκύπτει από την εκτιμήτρια του ποσού λάθους που υπάρχει στον πληθυσμό πλέον την ακρίβεια για δεδομένο δειγματοληπτικό κίνδυνο και μας δίνει το ανώτατο όριο σφάλματος που δύναται να περιέχει ο λογαριασμός ώστε να συμπεράνουμε ότι δεν είναι ουσιωδώς εσφαλμένος. Αντίθετα, στην ελεγκτική της μορφή η pps εφαρμόζει μια σειρά από υπολογισμούς συναθροίζοντας τα προβαλλόμενα σφάλματα, τη βασική και την πρόσθετη ακρίβεια.

Συγκρίνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα του δείγματος παρατηρούμε πρωτίστως ότι και στις δύο περιπτώσεις το ανεκτό ποσό σφάλματος είναι μικρότερο από ανώτατο όριο σφάλματος. Τα ανώτατα όρια στις δύο μορφές του pps για δεδομένο δειγματοληπτικό κίνδυνο είναι περίπου στο ίδιο επίπεδο, παρουσιάζουν ωστόσο απόκλιση 20.000 δολάρια περίπου. Αυτό ίσως προκύπτει από αυξητική ανοχή στατιστικού λάθους η οποία είναι μία πρόσθετη αύξηση της ακρίβειας για τα λάθη που υπάρχουν στο δείγμα.

Όπως είδαμε παραπάνω, τα αποτελέσματα από την εκτίμηση του δείγματος είναι σχεδόν τα ίδια. Και στις δύο περιπτώσεις για δεδομένο δειγματοληπτικό κίνδυνο, συμπεραίνουμε ότι ο λογαριασμός απαιτήσεων που ελέγχουμε δεν περιέχει ουσιώδη σφάλματα. Μένει όμως να διερευνήσουμε σε μελλοντική έρευνα τις τελικές εκτιμήσεις των μεθόδων στην περίπτωση που αλλάζουν οι διάφορες παράμετροι, όπως το ποσοστό και το μέγεθος των σφαλμάτων, η κρίσιμη τιμή, το ανεκτό ποσό σφάλματος και τους κινδύνους τύπου I και II).

Αντιθέτως, η δειγματοληψία pps δεν θεωρείται κατάλληλη μέθοδος για λογαριασμούς με σφάλματα υποεκτίμησης. Οι φυσικές μονάδες που περιέχουν τέτοιου είδους σφάλματα έχουν μικρότερη πιθανότητα να επιλεγούν στο δείγμα, διότι το ποσό σφάλματος μειώνει την πραγματική αξία της μονάδας και κατ' επέκταση την πιθανότητα επιλογής της. Στην περίπτωση που εντοπιστούν λάθη υποεκτίμησης λειτουργούν διορθωτικά για το ανώτατο όριο σφάλματος. Ωστόσο, όταν υπάρχουν πολλά τέτοια λάθη ο ελεγκτής θα πρέπει να επιλέξει μία άλλη μέθοδος δειγματοληψίας, η οποία να μην επηρεάζεται από την ποιότητα των λαθών (υπερεκτίμησης – υποεκτίμησης).

Τέλος, η δειγματοληψία pps χρησιμοποιείται όταν αναμένεται ότι θα προκύψουν λίγα ή καθόλου σφάλματα. Ο προσδιορισμός του αναμενόμενου αριθμού λαθών στηρίζεται στην επαγγελματική του κρίση του ελεγκτή, στον βαθμό κατανόησης του περιβάλλοντος της επιχείρησης και στα αποτελέσματα ελέγχων προηγούμενων ετών. Μελετώντας τον τύπο του μεγέθους του δείγματος και του προσδιορισμού του ανώτατου ορίου σφάλματος, τους οποίους παρουσιάσαμε αναλυτικά στο δεύτερο κεφάλαιο, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ο αριθμός των σφαλμάτων που αναμένεται ότι υπάρχουν στον λογαριασμό συνδέεται θετικά με το μέγεθος του δείγματος. Έτσι, ο μεγάλος αριθμός λαθών οδηγεί σε αύξηση του μεγέθους του δείγματος, αφού για να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια ο ελεγκτής θα πρέπει να επιλέξει περισσότερες μονάδες στο δείγμα του. Αντίστοιχα, επηρεάζεται και το ανώτατο όριο σφάλματος. Όταν αναμένουμε πολλά λάθη στον πληθυσμό, τα αποτελέσματα από την εκτίμηση του δείγματος δίνουν μεγάλο ποσό λαθους, ως ανώτατο όριο σφάλματος, με αποτέλεσμα να μην επιτυγχάνεται η επιθυμητή ακρίβεια για δεδομένο επίπεδο κινδύνου.

Οι αδυναμίες αυτές αποτελούν ερευνητική πρόκληση που εστιάζεται κυρίως στην βελτίωση της μεθόδου εκτίμησης του ανώτατου ορίου σφάλματος. Είναι ενδιαφέρον να μελετηθούν μελλοντικά τα αποτελέσματα από την εκτίμηση του δείγματος στην περίπτωση που υπάρχουν αρκετά λάθη στον προς έλεγχο λογαριασμό μεταξύ των οποίων και λάθη υποεκτίμησης όπως επίσης και η δυνατότητα βελτίωσης της μεθόδου για την εκτίμηση του ανώτατου ορίου σφάλματος.

Παράρτημα 1

Πληθυσμός

1	723,68	266	1.054,69	531	529,04	796	1.845,37
2	1.103,48	267	589,18	532	847,42	797	3.187,86
3	677,93	268	1.742,21	533	3.111,48	798	1.010,75
4	1.081,07	269	1.121,00	534	622,20	799	1.265,60
5	481,33	270	4.400,00	535	1.418,63	800	345,00
6	3.027,67	271	263,11	536	3.100,50	801	261,74
7	345,29	272	318,78	537	446,16	802	780,00
8	758,70	273	793,86	538	320,97	803	955,99
9	670,45	274	255,59	539	1.052,68	804	572,76
10	847,28	275	768,63	540	1.324,36	805	5.370,00
11	1.436,83	276	1.777,44	541	500,32	806	6.146,34
12	5.400,46	277	971,74	542	1.123,20	807	391,64
13	1.040,00	278	621,50	543	2.197,44	808	1.188,44
14	290,00	279	5.650,46	544	382,24	809	391,64
15	1.143,00	280	2.084,40	545	2.751,10	810	445,67
16	1.440,50	281	890,00	546	357,92	811	1.631,62
17	4.706,80	282	957,13	547	2.237,13	812	328,17
18	3.824,64	283	652,29	548	1.349,86	813	798,01
19	4.587,41	284	904,40	549	799,00	814	660,00
20	4.706,80	285	1.710,72	550	642,86	815	1.292,50
21	3.685,31	286	1.208,55	551	286,80	816	952,10
22	3.480,28	287	814,96	552	1.380,60	817	1.296,00
23	1.405,94	288	1.118,46	553	1.373,40	818	1.068,00
24	6.076,16	289	1.051,77	554	803,57	819	76.665,87
25	33,38	290	724,81	555	714,00	820	2.328,82
26	790,26	291	1.227,20	556	585,28	821	350,00
27	617,05	292	7.332,36	557	1.327,48	822	1.257,41
28	1.463,77	293	683,78	558	1.246,50	823	1.024,31
29	1.226,61	294	815,69	559	783,50	824	829,37
30	35.658,50	295	1.153,53	560	7.332,99	825	944,27
31	1.477,73	296	1.016,60	561	369,90	826	872,42
32	1.664,01	297	816,40	562	1.380,00	827	3.302,47
33	2.711,72	298	683,15	563	839,10	828	478,04
34	317,59	299	862,75	564	487,55	829	607,34
35	1.233,83	300	1.294,68	565	315,00	830	1.090,80
36	900,90	301	1.294,68	566	1.940,00	831	876,66
37	94.243,33	302	495,00	567	791,32	832	3.803,23
38	436,56	303	467,50	568	2.084,50	833	2.790,47
39	461,00	304	650,00	569	261,44	834	607,73
40	1.333,00	305	492,00	570	1.960,00	835	1.013,24
41	20.479,52	306	692,10	571	3.710,96	836	1.555,78
42	487,05	307	356,36	572	402,80	837	3.481,18
43	394,40	308	1.192,88	573	883,87	838	640,65
44	289,08	309	797,29	574	4.062,52	839	1.388,08
45	37.032,67	310	531,53	575	585,00	840	356,95
46	310,13	311	1.157,00	576	4.072,50	841	694,04
47	373,72	312	832,87	577	1.684,70	842	1.156,97
48	939,38	313	325,24	578	423,03	843	1.339,20
49	1.245,05	314	484,67	579	1.081,91	844	634,50

50	907,92	315	619,41	580	337,57	845	696,47
51	1.005,15	316	748,61	581	1.170,66	846	342,85
52	1.098,67	317	777,75	582	392,88	847	332,31
53	294,23	318	336,11	583	485,86	848	1.526,79
54	437,66	319	274,51	584	68.161,81	849	553,71
55	331,63	320	372,84	585	538,29	850	1.109,01
56	588,33	321	745,62	586	3.903,05	851	590,15
57	7.425,60	322	1.251,45	587	1.008,95	852	248,73
58	1.084,00	323	1.062,10	588	3.591,24	853	72.609,66
59	1.304,17	324	4.870,48	589	1.060,67	854	1.358,84
60	616,50	325	559,40	590	1.010,30	855	1.360,00
61	612,47	326	478,05	591	756,81	856	310,95
62	1.364,69	327	1.485,71	592	958,50	857	498,00
63	647,85	328	253,33	593	327,00	858	50.623,75
64	940,80	329	433,85	594	711,36	859	641,49
65	9.103,50	330	538,08	595	1.929,20	860	755,47
66	3.166,80	331	328,54	596	10.270,55	861	767,49
67	44.688,66	332	994,31	597	1.713,93	862	480,06
68	13.440,97	333	1.294,20	598	5.400,46	863	1.228,96
69	6.936,64	334	1.294,20	599	3.114,06	864	7.369,91
70	12.548,47	335	502,52	600	439,14	865	391,64
71	3.460,17	336	1.337,35	601	5.000,00	866	391,64
72	8.227,55	337	7.075,27	602	276,61	867	1.274,59
73	2.071,78	338	1.393,30	603	375,90	868	974,35
74	4.932,56	339	722,30	604	478,00	869	23.442,88
75	5.418,00	340	3.927,01	605	1.991,30	870	18.657,47
76	8.053,50	341	1.014,00	606	347,50	871	5.615,46
77	1.772,82	342	5.456,09	607	6.750,34	872	614,30
78	1.142,21	343	464,44	608	1.202,50	873	483,92
79	910,22	344	382,00	609	638,50	874	752,89
80	1.212,25	345	5.400,46	610	1.434,65	875	681,48
81	603,80	346	689,98	611	628,00	876	819,00
82	1.463,49	347	716,00	612	1.573,85	877	891,33
83	705,77	348	1.420,00	613	3.240,00	878	900,31
84	731,32	349	460,37	614	2.430,90	879	1.058,48
85	1.457,89	350	389,05	615	1.245,19	880	1.045,00
86	1.376,56	351	3.186,00	616	1.152,94	881	628,00
87	346,32	352	1.433,37	617	1.494,01	882	785,00
88	1.309,00	353	395,54	618	263,77	883	540,20
89	3.812,25	354	1.731,47	619	1.348,23	884	730,41
90	804,20	355	2.623,26	620	268,13	885	572,92
91	875,32	356	997,15	621	3.132,90	886	1.756,74
92	795,00	357	5.000,00	622	15.372,32	887	1.081,03
93	1.300,81	358	5.200,00	623	944,20	888	1.944,72
94	1.169,29	359	684,91	624	61.759,33	889	716,40
95	2.861,76	360	763,36	625	244,53	890	772,22
96	2.009,36	361	1.181,18	626	593,88	891	3.440,00
97	1.032,46	362	1.308,65	627	2.383,16	892	261,01
98	19.681,47	363	13.042,80	628	815,71	893	244,64
99	5.400,46	364	717,39	629	11.535,81	894	977,11
100	1.789,99	365	277,80	630	513,21	895	355,07
101	840,97	366	454,86	631	5.400,46	896	593,96
102	8.292,68	367	750,00	632	5.650,46	897	595,40

103	1.039,38	368	54.726,00	633	5.658,50	898	2.025,17
104	1.444,48	369	264,00	634	1.215,60	899	2.016,32
105	2.782,00	370	515,00	635	9.418,73	900	1.457,45
106	27.480,98	371	638,64	636	955,19	901	2.181,07
107	880,74	372	1.725,00	637	278,78	902	744,12
108	2.996,11	373	5.400,46	638	1.054,69	903	904,40
109	3.468,80	374	611,28	639	675,35	904	1.655,03
110	1.389,90	375	5.810,46	640	423,36	905	9.880,00
111	2.981,00	376	348,04	641	461,97	906	2.363,79
112	2.971,41	377	1.927,20	642	1.251,19	907	4.618,46
113	693,76	378	1.332,89	643	345,64	908	1.971,68
114	559,48	379	2.370,08	644	3.982,50	909	1.710,59
115	498,60	380	388,23	645	1.076,89	910	1.710,59
116	1.926,82	381	338,15	646	1.172,47	911	1.710,59
117	8.800,00	382	429,20	647	449,77	912	2.053,19
118	677,50	383	1.164,69	648	242,99	913	1.655,53
119	670,00	384	634,20	649	259,32	914	861,27
120	4.080,00	385	1.143,37	650	3.184,12	915	1.263,54
121	1.010,00	386	578,82	651	750,10	916	1.774,57
122	1.039,00	387	414,60	652	557,15	917	141.824,59
123	2.988,28	388	457,60	653	1.234,49	918	1.164,89
124	2.988,28	389	1.076,55	654	387,94	919	1.028,93
125	670,00	390	1.728,12	655	394,65	920	520,90
126	1.250,00	391	1.235,00	656	939,25	921	46.567,60
127	1.076,00	392	798,01	657	292,05	922	819,13
128	1.237,00	393	1.293,10	658	429,18	923	566,78
129	7.150,00	394	937,73	659	1.553,18	924	283,79
130	1.374,00	395	3.116,02	660	378,74	925	330,11
131	1.570,00	396	318,44	661	521,41	926	1.774,43
132	2.842,40	397	716,72	662	1.761,19	927	1.774,43
133	484,80	398	931,75	663	1.200,00	928	1.243,13
134	3.025,75	399	3.260,00	664	1.101,10	929	5.400,46
135	1.560,96	400	240,78	665	1.165,62	930	2.508,90
136	1.926,82	401	7.392,63	666	381,78	931	412,36
137	2.664,61	402	256,14	667	18.816,00	932	923,39
138	3.082,69	403	251.090,68	668	645,21	933	21.504,00
139	1.926,82	404	935,19	669	5.950,46	934	650,10
140	25.143,62	405	1.684,28	670	4.763,30	935	3.548,10
141	5.068,90	406	5.658,50	671	385,00	936	1.231,88
142	1.845,68	407	1.035,48	672	6.506,16	937	325,29
143	1.934,22	408	1.086,48	673	856,51	938	1.107,47
144	2.887,50	409	2.592,10	674	1.944,64	939	1.105,91
145	2.981,00	410	312,05	675	336,53	940	805,09
146	810,30	411	273,12	676	2.575,00	941	1.774,43
147	951,50	412	501,04	677	991,38	942	1.774,43
148	1.308,14	413	1.267,48	678	647,19	943	1.791,89
149	3.606,52	414	947,79	679	599,55	944	3.402,75
150	678,14	415	994,79	680	412,00	945	7.325,89
151	572,34	416	859,17	681	1.134,38	946	570,00
152	2.422,03	417	1.852,75	682	1.507,42	947	362,00
153	762,54	418	1.006,53	683	253,21	948	1.590,00
154	611,92	419	124.317,50	684	275,76	949	412,00
155	5.739,56	420	324,00	685	969,44	950	27,49

156	800,00	421	345,89	686	8.331,23	951	663,52
157	11.000,00	422	269,22	687	1.104,08	952	1.175,20
158	1.190,78	423	1.294,41	688	1.161,49	953	1.060,84
159	1.402,18	424	1.917,50	689	1.094,61	954	260,00
160	2.730,78	425	1.377,22	690	23.829,34	955	338,90
161	3.719,44	426	697,00	691	809,45	956	766,29
162	670,00	427	3.205,00	692	1.354,40	957	384,34
163	1.060,00	428	908,00	693	893,68	958	392,80
164	2.901,47	429	1.098,87	694	614,34	959	3.794,11
165	804,04	430	682,50	695	4.035,00	960	1.089,52
166	4.275,34	431	1.435,00	696	1.889,10	961	268,05
167	2.312,00	432	1.618,00	697	1.464,61	962	773,37
168	804,04	433	7.350,00	698	902,00	963	1.521,26
169	804,04	434	507,00	699	350,00	964	251,06
170	2.700,18	435	4.574,73	700	1.405,00	965	1.262,63
171	32.600,76	436	662,00	701	1.481,18	966	350,00
172	714,00	437	601,00	702	1.612,37	967	1.067,95
173	992,56	438	863,28	703	5.923,80	968	495,38
174	7.311,85	439	2.766,42	704	3.758,72	969	1.600,00
175	3.361,02	440	1.150,50	705	4.400,00	970	44.363,97
176	1.182,32	441	300,00	706	486,00	971	809,91
177	2.202,82	442	1.227,53	707	401,40	972	606,61
178	722,10	443	350,00	708	959,40	973	2.924,77
179	751,50	444	1.988,53	709	1.562,28	974	1.909,37
180	1.312,90	445	1.912,82	710	386,52	975	875,36
181	7.500,22	446	546,25	711	472,65	976	825,76
182	2.490,36	447	746,07	712	833,40	977	6.916,46
183	1.410,84	448	13.367,21	713	747,85	978	4.664,12
184	2.647,80	449	2.769,38	714	747,84	979	2.660,00
185	12.915,68	450	5.400,46	715	747,84	980	898,33
186	841,40	451	5.997,44	716	747,84	981	998,34
187	1.038,10	452	786,00	717	1.037,15	982	1.770,53
188	1.611,35	453	398,26	718	747,84	983	1.770,53
189	19.530,34	454	527,12	719	747,84	984	1.770,53
190	1.401,24	455	536,89	720	747,84	985	28.556,52
191	617,20	456	427,56	721	761,08	986	2.613,39
192	3.471,32	457	5.475,99	722	445,30	987	1.455,30
193	1.080,00	458	1.547,33	723	1.456,71	988	11.631,50
194	20.390,40	459	1.395,74	724	1.659,51	989	743,82
195	817,96	460	647,55	725	3.205,19	990	1.777,66
196	930,04	461	1.081,65	726	747,84	991	4.741,84
197	10.003,78	462	1.321,02	727	309,94	992	2.431,33
198	696,44	463	2.201,84	728	1.560,00	993	1.223,64
199	2.475,46	464	1.357,06	729	961,04	994	1.223,25
200	1.289,08	465	309,47	730	5.090,00	995	1.336,50
201	7.315,14	466	3.948,62	731	1.197,50	996	6.113,66
202	1.838,02	467	1.162,40	732	2.602,41	997	1.797,92
203	1.533,08	468	1.095,52	733	821,11	998	3.919,30
204	493,70	469	925,32	734	452,63	999	3.642,08
205	3.107,68	470	765,18	735	983,32	1000	7.375,56
206	1.190,86	471	549,36	736	4.839,93	1001	7.186,78
207	66.130,31	472	355,84	737	1.091,28	1002	1.452,89
208	7.322,32	473	400,50	738	422,23	1003	2.346,80

209	7.336,42	474	1.658,82	739	644,93	1004	4.403,86
210	1.044,98	475	2.549,18	740	254,11	1005	8.423,51
211	7.322,32	476	4.866,10	741	525,55	1006	2.316,60
212	778,32	477	1.474,20	742	442,21	1007	1.055,45
213	977,08	478	1.128,60	743	2.430,90	1008	952,03
214	2.514,96	479	320,40	744	1.404,52	1009	1.246,42
215	1.976,13	480	2.462,40	745	536,34	1010	26.305,36
216	1.597,70	481	1.482,32	746	343,03	1011	12.852,32
217	5.453,60	482	953,75	747	1.418,63	1012	1.900,35
218	548,08	483	756,41	748	2.646,80	1013	1.868,43
219	3.549,14	484	5.042,56	749	819,84	1014	1.094,40
220	675,68	485	2.496,82	750	1.367,04	1015	4.889,60
221	320,28	486	2.205,05	751	673,40	1016	786,07
222	348,79	487	1.865,75	752	272,80	1017	969,35
223	371,86	488	282,40	753	1.651,05	1018	5.369,73
224	378,50	489	1.500,00	754	2.420,60	1019	18.770,02
225	770,00	490	671,80	755	922,87	1020	1.267,03
226	3.210,00	491	1.556,10	756	544,37	1021	1.131,90
227	10.100,00	492	431,40	757	389,82	1022	2.729,46
228	5.300,00	493	2.008,00	758	747,84	1023	5.942,44
229	793,72	494	325,30	759	747,84	1024	2.930,80
230	392,10	495	1.940,00	760	747,84	1025	21.378,49
231	5.650,46	496	261,50	761	747,84	1026	11.561,59
232	19.905,47	497	1.438,26	762	747,84	1027	1.536,14
233	5.650,46	498	767,01	763	853,66	1028	3.815,25
234	5.650,46	499	2.333,12	764	3.155,44	1029	2.553,19
235	385,00	500	4.620,00	765	747,84	1030	2.201,10
236	347,00	501	3.891,59	766	747,84	1031	1.529,46
237	792,00	502	1.076,20	767	747,84	1032	1.099,67
238	5.650,46	503	512,55	768	747,84	1033	1.202,85
239	6.055,45	504	599,97	769	1.856,63	1034	4.406,29
240	1.946,80	505	887,64	770	642,75	1035	1.111,67
241	7.541,80	506	643,80	771	747,84	1036	7.276,44
242	2.258,80	507	357,67	772	747,84	1037	2.852,12
243	351,00	508	392,49	773	4.850,00	1038	8.192,24
244	398,28	509	838,32	774	474,40	1039	5.073,12
245	765,59	510	1.103,43	775	486,90	1040	4.133,59
246	1.234,42	511	600,00	776	1.241,31	1041	1.498,28
247	920,08	512	1.025,18	777	347,85	1042	4.039,19
248	652,72	513	1.394,90	778	713,34	1043	2.924,35
249	1.850,68	514	835,93	779	853,92	1044	3.339,35
250	20.250,11	515	710,22	780	317,43	1045	2.420,46
251	780,00	516	302,78	781	591,52	1046	2.653,81
252	322,46	517	292,63	782	4.501,53	1047	928,63
253	302,17	518	1.360,00	783	827,98	1048	78,17
254	666,50	519	287,76	784	609,75	1049	4.046,52
255	1.056,37	520	1.053,00	785	7.472,07	1050	912,74
256	1.294,20	521	450,92	786	488,73	1051	3.872,29
257	5.234,75	522	1.563,12	787	469,00	1052	1.146,33
258	361,08	523	814,76	788	1.620,19	1053	940,93
259	1.019,56	524	286,39	789	495,17	1054	1.702,70
260	461,37	525	1.729,37	790	392,18	1055	944,01
261	1.010,39	526	1.196,02	791	577,34	1056	2.534,63

262	265,60	527	387,18	792	1.270,00	1057	3.844,20
263	1.498,19	528	316,21	793	290,80		3.525.012,00
264	1.953,40	529	712,13	794	598,06		
265	638,51	530	1.495,00	795	1.291,29		

Παράρτημα 2

Πληθυσμός – Συστηματική δειγματοληψία

	value in USD	commulative value		value in USD	commulative value
1	723,68	723,68	531	529,04	1.876.660,88
2	1.103,48	1.827,16	532	847,42	1.877.508,30
3	677,93	2.505,09	533	3.111,48	1.880.619,78
4	1.081,07	3.586,16	534	622,20	1.881.241,98
5	481,33	4.067,49	535	1.418,63	1.882.660,61
6	3.027,67	7.095,16	536	3.100,50	1.885.761,11
7	345,29	7.440,45	537	446,16	1.886.207,27
8	758,70	8.199,15	538	320,97	1.886.528,24
9	670,45	8.869,60	539	1.052,68	1.887.580,91
10	847,28	9.716,88	540	1.324,36	1.888.905,27
11	1.436,83	11.153,71	541	500,32	1.889.405,59
12	5.400,46	16.554,17	542	1.123,20	1.890.528,79
13	1.040,00	17.594,17	543	2.197,44	1.892.726,23
14	290,00	17.884,17	544	382,24	1.893.108,47
15	1.143,00	19.027,17	545	2.751,10	1.895.859,57
16	1.440,50	20.467,67	546	357,92	1.896.217,49
17	4.706,80	25.174,47	547	2.237,13	1.898.454,62
18	3.824,64	28.999,11	548	1.349,86	1.899.804,48
19	4.587,41	33.586,52	549	799,00	1.900.603,48
20	4.706,80	38.293,32	550	642,86	1.901.246,34
21	3.685,31	41.978,63	551	286,80	1.901.533,14
22	3.480,28	45.458,90	552	1.380,60	1.902.913,74
23	1.405,94	46.864,84	553	1.373,40	1.904.287,14
24	6.076,16	52.941,00	554	803,57	1.905.090,71
25	33,38	52.974,38	555	714,00	1.905.804,71
26	790,26	53.764,64	556	585,28	1.906.389,99
27	617,05	54.381,69	557	1.327,48	1.907.717,47
28	1.463,77	55.845,46	558	1.246,50	1.908.963,97
29	1.226,61	57.072,07	559	783,50	1.909.747,47
30	35.658,50	92.730,57	560	7.332,99	1.917.080,46
31	1.477,73	94.208,30	561	369,90	1.917.450,36
32	1.664,01	95.872,31	562	1.380,00	1.918.830,36
33	2.711,72	98.584,03	563	839,10	1.919.669,46
34	317,59	98.901,62	564	487,55	1.920.157,01
35	1.233,83	100.135,45	565	315,00	1.920.472,01
36	900,90	101.036,35	566	1.940,00	1.922.412,01
37	94.243,33	195.279,68	567	791,32	1.923.203,33
38	436,56	195.716,24	568	2.084,50	1.925.287,83
39	461,00	196.177,24	569	261,44	1.925.549,27
40	1.333,00	197.510,24	570	1.960,00	1.927.509,27
41	20.479,52	217.989,76	571	3.710,96	1.931.220,23

42	487,05	218.476,81	572	402,80	1.931.623,03
43	394,40	218.871,21	573	883,87	1.932.506,90
44	289,08	219.160,29	574	4.062,52	1.936.569,42
45	37.032,67	256.192,96	575	585,00	1.937.154,42
46	310,13	256.503,09	576	4.072,50	1.941.226,92
47	373,72	256.876,81	577	1.684,70	1.942.911,62
48	939,38	257.816,19	578	423,03	1.943.334,65
49	1.245,05	259.061,24	579	1.081,91	1.944.416,56
50	907,92	259.969,16	580	337,57	1.944.754,13
51	1.005,15	260.974,31	581	1.170,66	1.945.924,79
52	1.098,67	262.072,98	582	392,88	1.946.317,67
53	294,23	262.367,21	583	485,86	1.946.803,53
54	437,66	262.804,87	584	68.161,81	2.014.965,34
55	331,63	263.136,50	585	538,29	2.015.503,63
56	588,33	263.724,83	586	3.903,05	2.019.406,68
57	7.425,60	271.150,43	587	1.008,95	2.020.415,63
58	1.084,00	272.234,43	588	3.591,24	2.024.006,87
59	1.304,17	273.538,60	589	1.060,67	2.025.067,54
60	616,50	274.155,10	590	1.010,30	2.026.077,84
61	612,47	274.767,56	591	756,81	2.026.834,65
62	1.364,69	276.132,25	592	958,50	2.027.793,15
63	647,85	276.780,10	593	327,00	2.028.120,15
64	940,80	277.720,90	594	711,36	2.028.831,51
65	9.103,50	286.824,40	595	1.929,20	2.030.760,71
66	3.166,80	289.991,20	596	10.270,55	2.041.031,26
67	44.688,66	334.679,86	597	1.713,93	2.042.745,19
68	13.440,97	348.120,82	598	5.400,46	2.048.145,65
69	6.936,64	355.057,46	599	3.114,06	2.051.259,71
70	12.548,47	367.605,93	600	439,14	2.051.698,85
71	3.460,17	371.066,10	601	5.000,00	2.056.698,85
72	8.227,55	379.293,64	602	276,61	2.056.975,46
73	2.071,78	381.365,42	603	375,90	2.057.351,36
74	4.932,56	386.297,98	604	478,00	2.057.829,36
75	5.418,00	391.715,98	605	1.991,30	2.059.820,66
76	8.053,50	399.769,48	606	347,50	2.060.168,16
77	1.772,82	401.542,30	607	6.750,34	2.066.918,50
78	1.142,21	402.684,51	608	1.202,50	2.068.121,00
79	910,22	403.594,74	609	638,50	2.068.759,50
80	1.212,25	404.806,99	610	1.434,65	2.070.194,15
81	603,80	405.410,79	611	628,00	2.070.822,15
82	1.463,49	406.874,28	612	1.573,85	2.072.396,00
83	705,77	407.580,05	613	3.240,00	2.075.636,00
84	731,32	408.311,37	614	2.430,90	2.078.066,90
85	1.457,89	409.769,26	615	1.245,19	2.079.312,09
86	1.376,56	411.145,82	616	1.152,94	2.080.465,03
87	346,32	411.492,14	617	1.494,01	2.081.959,04
88	1.309,00	412.801,14	618	263,77	2.082.222,81
89	3.812,25	416.613,39	619	1.348,23	2.083.571,04
90	804,20	417.417,59	620	268,13	2.083.839,17
91	875,32	418.292,91	621	3.132,90	2.086.972,07
92	795,00	419.087,91	622	15.372,32	2.102.344,38
93	1.300,81	420.388,72	623	944,20	2.103.288,58
94	1.169,29	421.558,00	624	61.759,33	2.165.047,91

95	2.861,76	424.419,76	625	244,53	2.165.292,44
96	2.009,36	426.429,12	626	593,88	2.165.886,32
97	1.032,46	427.461,58	627	2.383,16	2.168.269,48
98	19.681,47	447.143,06	628	815,71	2.169.085,19
99	5.400,46	452.543,52	629	11.535,81	2.180.621,00
100	1.789,99	454.333,51	630	513,21	2.181.134,21
101	840,97	455.174,48	631	5.400,46	2.186.534,67
102	8.292,68	463.467,16	632	5.650,46	2.192.185,13
103	1.039,38	464.506,54	633	5.658,50	2.197.843,63
104	1.444,48	465.951,02	634	1.215,60	2.199.059,23
105	2.782,00	468.733,02	635	9.418,73	2.208.477,96
106	27.480,98	496.214,00	636	955,19	2.209.433,15
107	880,74	497.094,74	637	278,78	2.209.711,93
108	2.996,11	500.090,85	638	1.054,69	2.210.766,62
109	3.468,80	503.559,65	639	675,35	2.211.441,97
110	1.389,90	504.949,55	640	423,36	2.211.865,33
111	2.981,00	507.930,55	641	461,97	2.212.327,30
112	2.971,41	510.901,96	642	1.251,19	2.213.578,49
113	693,76	511.595,72	643	345,64	2.213.924,13
114	559,48	512.155,20	644	3.982,50	2.217.906,63
115	498,60	512.653,80	645	1.076,89	2.218.983,52
116	1.926,82	514.580,62	646	1.172,47	2.220.155,99
117	8.800,00	523.380,62	647	449,77	2.220.605,76
118	677,50	524.058,12	648	242,99	2.220.848,75
119	670,00	524.728,12	649	259,32	2.221.108,07
120	4.080,00	528.808,12	650	3.184,12	2.224.292,19
121	1.010,00	529.818,12	651	750,10	2.225.042,29
122	1.039,00	530.857,12	652	557,15	2.225.599,44
123	2.988,28	533.845,40	653	1.234,49	2.226.833,93
124	2.988,28	536.833,68	654	387,94	2.227.221,87
125	670,00	537.503,68	655	394,65	2.227.616,52
126	1.250,00	538.753,68	656	939,25	2.228.555,77
127	1.076,00	539.829,68	657	292,05	2.228.847,82
128	1.237,00	541.066,68	658	429,18	2.229.277,00
129	7.150,00	548.216,68	659	1.553,18	2.230.830,17
130	1.374,00	549.590,68	660	378,74	2.231.208,91
131	1.570,00	551.160,68	661	521,41	2.231.730,32
132	2.842,40	554.003,08	662	1.761,19	2.233.491,51
133	484,80	554.487,88	663	1.200,00	2.234.691,51
134	3.025,75	557.513,63	664	1.101,10	2.235.792,61
135	1.560,96	559.074,59	665	1.165,62	2.236.958,23
136	1.926,82	561.001,41	666	381,78	2.237.340,01
137	2.664,61	563.666,02	667	18.816,00	2.256.156,01
138	3.082,69	566.748,71	668	645,21	2.256.801,22
139	1.926,82	568.675,53	669	5.950,46	2.262.751,68
140	25.143,62	593.819,14	670	4.763,30	2.267.514,98
141	5.068,90	598.888,04	671	385,00	2.267.899,98
142	1.845,68	600.733,72	672	6.506,16	2.274.406,14
143	1.934,22	602.667,94	673	856,51	2.275.262,65
144	2.887,50	605.555,44	674	1.944,64	2.277.207,29
145	2.981,00	608.536,44	675	336,53	2.277.543,82
146	810,30	609.346,74	676	2.575,00	2.280.118,82
147	951,50	610.298,24	677	991,38	2.281.110,20

148	1.308,14	611.606,38	678	647,19	2.281.757,39
149	3.606,52	615.212,90	679	599,55	2.282.356,94
150	678,14	615.891,04	680	412,00	2.282.768,94
151	572,34	616.463,38	681	1.134,38	2.283.903,32
152	2.422,03	618.885,41	682	1.507,42	2.285.410,74
153	762,54	619.647,95	683	253,21	2.285.663,95
154	611,92	620.259,87	684	275,76	2.285.939,71
155	5.739,56	625.999,43	685	969,44	2.286.909,15
156	800,00	626.799,43	686	8.331,23	2.295.240,38
157	11.000,00	637.799,43	687	1.104,08	2.296.344,46
158	1.190,78	638.990,21	688	1.161,49	2.297.505,94
159	1.402,18	640.392,39	689	1.094,61	2.298.600,55
160	2.730,78	643.123,17	690	23.829,34	2.322.429,90
161	3.719,44	646.842,61	691	809,45	2.323.239,34
162	670,00	647.512,61	692	1.354,40	2.324.593,74
163	1.060,00	648.572,61	693	893,68	2.325.487,42
164	2.901,47	651.474,08	694	614,34	2.326.101,76
165	804,04	652.278,12	695	4.035,00	2.330.136,76
166	4.275,34	656.553,46	696	1.889,10	2.332.025,86
167	2.312,00	658.865,46	697	1.464,61	2.333.490,47
168	804,04	659.669,50	698	902,00	2.334.392,47
169	804,04	660.473,54	699	350,00	2.334.742,47
170	2.700,18	663.173,72	700	1.405,00	2.336.147,47
171	32.600,76	695.774,48	701	1.481,18	2.337.628,65
172	714,00	696.488,48	702	1.612,37	2.339.241,02
173	992,56	697.481,04	703	5.923,80	2.345.164,82
174	7.311,85	704.792,89	704	3.758,72	2.348.923,54
175	3.361,02	708.153,91	705	4.400,00	2.353.323,54
176	1.182,32	709.336,23	706	486,00	2.353.809,54
177	2.202,82	711.539,05	707	401,40	2.354.210,94
178	722,10	712.261,15	708	959,40	2.355.170,34
179	751,50	713.012,65	709	1.562,28	2.356.732,62
180	1.312,90	714.325,55	710	386,52	2.357.119,14
181	7.500,22	721.825,77	711	472,65	2.357.591,79
182	2.490,36	724.316,13	712	833,40	2.358.425,19
183	1.410,84	725.726,97	713	747,85	2.359.173,04
184	2.647,80	728.374,77	714	747,84	2.359.920,88
185	12.915,68	741.290,45	715	747,84	2.360.668,72
186	841,40	742.131,85	716	747,84	2.361.416,56
187	1.038,10	743.169,95	717	1.037,15	2.362.453,71
188	1.611,35	744.781,30	718	747,84	2.363.201,55
189	19.530,34	764.311,64	719	747,84	2.363.949,39
190	1.401,24	765.712,88	720	747,84	2.364.697,23
191	617,20	766.330,08	721	761,08	2.365.458,31
192	3.471,32	769.801,40	722	445,30	2.365.903,61
193	1.080,00	770.881,40	723	1.456,71	2.367.360,32
194	20.390,40	791.271,80	724	1.659,51	2.369.019,83
195	817,96	792.089,76	725	3.205,19	2.372.225,02
196	930,04	793.019,80	726	747,84	2.372.972,86
197	10.003,78	803.023,58	727	309,94	2.373.282,80
198	696,44	803.720,02	728	1.560,00	2.374.842,80
199	2.475,46	806.195,48	729	961,04	2.375.803,84
200	1.289,08	807.484,56	730	5.090,00	2.380.893,84

201	7.315,14	814.799,70	731	1.197,50	2.382.091,33
202	1.838,02	816.637,72	732	2.602,41	2.384.693,74
203	1.533,08	818.170,80	733	821,11	2.385.514,85
204	493,70	818.664,50	734	452,63	2.385.967,48
205	3.107,68	821.772,18	735	983,32	2.386.950,80
206	1.190,86	822.963,04	736	4.839,93	2.391.790,73
207	66.130,31	889.093,35	737	1.091,28	2.392.882,01
208	7.322,32	896.415,67	738	422,23	2.393.304,24
209	7.336,42	903.752,09	739	644,93	2.393.949,17
210	1.044,98	904.797,07	740	254,11	2.394.203,28
211	7.322,32	912.119,38	741	525,55	2.394.728,83
212	778,32	912.897,70	742	442,21	2.395.171,04
213	977,08	913.874,78	743	2.430,90	2.397.601,94
214	2.514,96	916.389,74	744	1.404,52	2.399.006,46
215	1.976,13	918.365,87	745	536,34	2.399.542,80
216	1.597,70	919.963,57	746	343,03	2.399.885,83
217	5.453,60	925.417,17	747	1.418,63	2.401.304,46
218	548,08	925.965,25	748	2.646,80	2.403.951,26
219	3.549,14	929.514,39	749	819,84	2.404.771,10
220	675,68	930.190,07	750	1.367,04	2.406.138,14
221	320,28	930.510,35	751	673,40	2.406.811,54
222	348,79	930.859,14	752	272,80	2.407.084,34
223	371,86	931.231,00	753	1.651,05	2.408.735,39
224	378,50	931.609,50	754	2.420,60	2.411.155,99
225	770,00	932.379,50	755	922,87	2.412.078,86
226	3.210,00	935.589,50	756	544,37	2.412.623,23
227	10.100,00	945.689,50	757	389,82	2.413.013,05
228	5.300,00	950.989,50	758	747,84	2.413.760,89
229	793,72	951.783,21	759	747,84	2.414.508,73
230	392,10	952.175,31	760	747,84	2.415.256,57
231	5.650,46	957.825,77	761	747,84	2.416.004,41
232	19.905,47	977.731,25	762	747,84	2.416.752,25
233	5.650,46	983.381,71	763	853,66	2.417.605,91
234	5.650,46	989.032,17	764	3.155,44	2.420.761,35
235	385,00	989.417,17	765	747,84	2.421.509,19
236	347,00	989.764,17	766	747,84	2.422.257,03
237	792,00	990.556,17	767	747,84	2.423.004,87
238	5.650,46	996.206,63	768	747,84	2.423.752,71
239	6.055,45	1.002.262,08	769	1.856,63	2.425.609,34
240	1.946,80	1.004.208,88	770	642,75	2.426.252,09
241	7.541,80	1.011.750,68	771	747,84	2.426.999,93
242	2.258,80	1.014.009,48	772	747,84	2.427.747,77
243	351,00	1.014.360,48	773	4.850,00	2.432.597,77
244	398,28	1.014.758,76	774	474,40	2.433.072,17
245	765,59	1.015.524,35	775	486,90	2.433.559,07
246	1.234,42	1.016.758,76	776	1.241,31	2.434.800,38
247	920,08	1.017.678,84	777	347,85	2.435.148,23
248	652,72	1.018.331,56	778	713,34	2.435.861,57
249	1.850,68	1.020.182,24	779	853,92	2.436.715,49
250	20.250,11	1.040.432,35	780	317,43	2.437.032,92
251	780,00	1.041.212,35	781	591,52	2.437.624,44
252	322,46	1.041.534,81	782	4.501,53	2.442.125,97
253	302,17	1.041.836,98	783	827,98	2.442.953,95

254	666,50	1.042.503,48	784	609,75	2.443.563,70
255	1.056,37	1.043.559,85	785	7.472,07	2.451.035,77
256	1.294,20	1.044.854,05	786	488,73	2.451.524,50
257	5.234,75	1.050.088,80	787	469,00	2.451.993,50
258	361,08	1.050.449,88	788	1.620,19	2.453.613,69
259	1.019,56	1.051.469,44	789	495,17	2.454.108,86
260	461,37	1.051.930,81	790	392,18	2.454.501,04
261	1.010,39	1.052.941,20	791	577,34	2.455.078,38
262	265,60	1.053.206,80	792	1.270,00	2.456.348,38
263	1.498,19	1.054.704,98	793	290,80	2.456.639,18
264	1.953,40	1.056.658,38	794	598,06	2.457.237,24
265	638,51	1.057.296,89	795	1.291,29	2.458.528,53
266	1.054,69	1.058.351,58	796	1.845,37	2.460.373,90
267	589,18	1.058.940,76	797	3.187,86	2.463.561,76
268	1.742,21	1.060.682,97	798	1.010,75	2.464.572,51
269	1.121,00	1.061.803,97	799	1.265,60	2.465.838,11
270	4.400,00	1.066.203,97	800	345,00	2.466.183,11
271	263,11	1.066.467,08	801	261,74	2.466.444,85
272	318,78	1.066.785,86	802	780,00	2.467.224,85
273	793,86	1.067.579,72	803	955,99	2.468.180,84
274	255,59	1.067.835,31	804	572,76	2.468.753,60
275	768,63	1.068.603,94	805	5.370,00	2.474.123,60
276	1.777,44	1.070.381,38	806	6.146,34	2.480.269,94
277	971,74	1.071.353,12	807	391,64	2.480.661,58
278	621,50	1.071.974,62	808	1.188,44	2.481.850,02
279	5.650,46	1.077.625,08	809	391,64	2.482.241,66
280	2.084,40	1.079.709,48	810	445,67	2.482.687,33
281	890,00	1.080.599,48	811	1.631,62	2.484.318,95
282	957,13	1.081.556,61	812	328,17	2.484.647,12
283	652,29	1.082.208,90	813	798,01	2.485.445,12
284	904,40	1.083.113,30	814	660,00	2.486.105,12
285	1.710,72	1.084.824,02	815	1.292,50	2.487.397,62
286	1.208,55	1.086.032,56	816	952,10	2.488.349,72
287	814,96	1.086.847,52	817	1.296,00	2.489.645,72
288	1.118,46	1.087.965,98	818	1.068,00	2.490.713,72
289	1.051,77	1.089.017,74	819	76.665,87	2.567.379,59
290	724,81	1.089.742,55	820	2.328,82	2.569.708,41
291	1.227,20	1.090.969,75	821	350,00	2.570.058,41
292	7.332,36	1.098.302,11	822	1.257,41	2.571.315,82
293	683,78	1.098.985,89	823	1.024,31	2.572.340,13
294	815,69	1.099.801,58	824	829,37	2.573.169,50
295	1.153,53	1.100.955,11	825	944,27	2.574.113,77
296	1.016,60	1.101.971,71	826	872,42	2.574.986,19
297	816,40	1.102.788,11	827	3.302,47	2.578.288,66
298	683,15	1.103.471,26	828	478,04	2.578.766,70
299	862,75	1.104.334,01	829	607,34	2.579.374,04
300	1.294,68	1.105.628,69	830	1.090,80	2.580.464,84
301	1.294,68	1.106.923,37	831	876,66	2.581.341,50
302	495,00	1.107.418,37	832	3.803,23	2.585.144,73
303	467,50	1.107.885,87	833	2.790,47	2.587.935,20
304	650,00	1.108.535,87	834	607,73	2.588.542,93
305	492,00	1.109.027,87	835	1.013,24	2.589.556,17
306	692,10	1.109.719,97	836	1.555,78	2.591.111,95

307	356,36	1.110.076,33	837	3.481,18	2.594.593,13
308	1.192,88	1.111.269,21	838	640,65	2.595.233,78
309	797,29	1.112.066,50	839	1.388,08	2.596.621,85
310	531,53	1.112.598,03	840	356,95	2.596.978,80
311	1.157,00	1.113.755,03	841	694,04	2.597.672,84
312	832,87	1.114.587,90	842	1.156,97	2.598.829,81
313	325,24	1.114.913,14	843	1.339,20	2.600.169,01
314	484,67	1.115.397,81	844	634,50	2.600.803,51
315	619,41	1.116.017,22	845	696,47	2.601.499,98
316	748,61	1.116.765,82	846	342,85	2.601.842,83
317	777,75	1.117.543,57	847	332,31	2.602.175,14
318	336,11	1.117.879,68	848	1.526,79	2.603.701,92
319	274,51	1.118.154,19	849	553,71	2.604.255,63
320	372,84	1.118.527,03	850	1.109,01	2.605.364,64
321	745,62	1.119.272,65	851	590,15	2.605.954,79
322	1.251,45	1.120.524,09	852	248,73	2.606.203,52
323	1.062,10	1.121.586,19	853	72.609,66	2.678.813,18
324	4.870,48	1.126.456,67	854	1.358,84	2.680.172,02
325	559,40	1.127.016,07	855	1.360,00	2.681.532,02
326	478,05	1.127.494,12	856	310,95	2.681.842,97
327	1.485,71	1.128.979,83	857	498,00	2.682.340,97
328	253,33	1.129.233,16	858	50.623,75	2.732.964,72
329	433,85	1.129.667,01	859	641,49	2.733.606,21
330	538,08	1.130.205,09	860	755,47	2.734.361,68
331	328,54	1.130.533,63	861	767,49	2.735.129,17
332	994,31	1.131.527,93	862	480,06	2.735.609,23
333	1.294,20	1.132.822,13	863	1.228,96	2.736.838,18
334	1.294,20	1.134.116,33	864	7.369,91	2.744.208,09
335	502,52	1.134.618,85	865	391,64	2.744.599,73
336	1.337,35	1.135.956,20	866	391,64	2.744.991,37
337	7.075,27	1.143.031,47	867	1.274,59	2.746.265,95
338	1.393,30	1.144.424,77	868	974,35	2.747.240,30
339	722,30	1.145.147,07	869	23.442,88	2.770.683,18
340	3.927,01	1.149.074,08	870	18.657,47	2.789.340,66
341	1.014,00	1.150.088,08	871	5.615,46	2.794.956,12
342	5.456,09	1.155.544,17	872	614,30	2.795.570,42
343	464,44	1.156.008,61	873	483,92	2.796.054,34
344	382,00	1.156.390,61	874	752,89	2.796.807,23
345	5.400,46	1.161.791,07	875	681,48	2.797.488,71
346	689,98	1.162.481,05	876	819,00	2.798.307,71
347	716,00	1.163.197,05	877	891,33	2.799.199,04
348	1.420,00	1.164.617,05	878	900,31	2.800.099,35
349	460,37	1.165.077,42	879	1.058,48	2.801.157,83
350	389,05	1.165.466,47	880	1.045,00	2.802.202,83
351	3.186,00	1.168.652,47	881	628,00	2.802.830,83
352	1.433,37	1.170.085,84	882	785,00	2.803.615,83
353	395,54	1.170.481,38	883	540,20	2.804.156,03
354	1.731,47	1.172.212,85	884	730,41	2.804.886,43
355	2.623,26	1.174.836,11	885	572,92	2.805.459,35
356	997,15	1.175.833,26	886	1.756,74	2.807.216,09
357	5.000,00	1.180.833,26	887	1.081,03	2.808.297,12
358	5.200,00	1.186.033,26	888	1.944,72	2.810.241,84
359	684,91	1.186.718,16	889	716,40	2.810.958,24

360	763,36	1.187.481,52	890	772,22	2.811.730,46
361	1.181,18	1.188.662,70	891	3.440,00	2.815.170,46
362	1.308,65	1.189.971,35	892	261,01	2.815.431,47
363	13.042,80	1.203.014,15	893	244,64	2.815.676,11
364	717,39	1.203.731,54	894	977,11	2.816.653,22
365	277,80	1.204.009,34	895	355,07	2.817.008,29
366	454,86	1.204.464,20	896	593,96	2.817.602,25
367	750,00	1.205.214,20	897	595,40	2.818.197,65
368	54.726,00	1.259.940,20	898	2.025,17	2.820.222,83
369	264,00	1.260.204,20	899	2.016,32	2.822.239,14
370	515,00	1.260.719,20	900	1.457,45	2.823.696,60
371	638,64	1.261.357,84	901	2.181,07	2.825.877,66
372	1.725,00	1.263.082,84	902	744,12	2.826.621,78
373	5.400,46	1.268.483,30	903	904,40	2.827.526,18
374	611,28	1.269.094,58	904	1.655,03	2.829.181,21
375	5.810,46	1.274.905,04	905	9.880,00	2.839.061,21
376	348,04	1.275.253,08	906	2.363,79	2.841.425,00
377	1.927,20	1.277.180,28	907	4.618,46	2.846.043,47
378	1.332,89	1.278.513,17	908	1.971,68	2.848.015,14
379	2.370,08	1.280.883,25	909	1.710,59	2.849.725,73
380	388,23	1.281.271,48	910	1.710,59	2.851.436,32
381	338,15	1.281.609,63	911	1.710,59	2.853.146,91
382	429,20	1.282.038,83	912	2.053,19	2.855.200,10
383	1.164,69	1.283.203,52	913	1.655,53	2.856.855,62
384	634,20	1.283.837,72	914	861,27	2.857.716,89
385	1.143,37	1.284.981,09	915	1.263,54	2.858.980,43
386	578,82	1.285.559,91	916	1.774,57	2.860.755,00
387	414,60	1.285.974,51	917	141.824,59	3.002.579,59
388	457,60	1.286.432,11	918	1.164,89	3.003.744,48
389	1.076,55	1.287.508,66	919	1.028,93	3.004.773,41
390	1.728,12	1.289.236,78	920	520,90	3.005.294,31
391	1.235,00	1.290.471,78	921	46.567,60	3.051.861,91
392	798,01	1.291.269,78	922	819,13	3.052.681,04
393	1.293,10	1.292.562,88	923	566,78	3.053.247,82
394	937,73	1.293.500,61	924	283,79	3.053.531,61
395	3.116,02	1.296.616,63	925	330,11	3.053.861,72
396	318,44	1.296.935,07	926	1.774,43	3.055.636,15
397	716,72	1.297.651,79	927	1.774,43	3.057.410,58
398	931,75	1.298.583,54	928	1.243,13	3.058.653,71
399	3.260,00	1.301.843,54	929	5.400,46	3.064.054,17
400	240,78	1.302.084,32	930	2.508,90	3.066.563,07
401	7.392,63	1.309.476,95	931	412,36	3.066.975,43
402	256,14	1.309.733,09	932	923,39	3.067.898,82
403	251.090,68	1.560.823,77	933	21.504,00	3.089.402,82
404	935,19	1.561.758,96	934	650,10	3.090.052,92
405	1.684,28	1.563.443,24	935	3.548,10	3.093.601,02
406	5.658,50	1.569.101,74	936	1.231,88	3.094.832,90
407	1.035,48	1.570.137,22	937	325,29	3.095.158,19
408	1.086,48	1.571.223,70	938	1.107,47	3.096.265,66
409	2.592,10	1.573.815,80	939	1.105,91	3.097.371,57
410	312,05	1.574.127,85	940	805,09	3.098.176,66
411	273,12	1.574.400,97	941	1.774,43	3.099.951,09
412	501,04	1.574.902,01	942	1.774,43	3.101.725,52

413	1.267,48	1.576.169,49	943	1.791,89	3.103.517,41
414	947,79	1.577.117,28	944	3.402,75	3.106.920,16
415	994,79	1.578.112,07	945	7.325,89	3.114.246,04
416	859,17	1.578.971,24	946	570,00	3.114.816,04
417	1.852,75	1.580.823,99	947	362,00	3.115.178,04
418	1.006,53	1.581.830,51	948	1.590,00	3.116.768,04
419	124.317,50	1.706.148,01	949	412,00	3.117.180,04
420	324,00	1.706.472,01	950	27,49	3.117.207,53
421	345,89	1.706.817,90	951	663,52	3.117.871,05
422	269,22	1.707.087,12	952	1.175,20	3.119.046,25
423	1.294,41	1.708.381,53	953	1.060,84	3.120.107,09
424	1.917,50	1.710.299,03	954	260,00	3.120.367,09
425	1.377,22	1.711.676,25	955	338,90	3.120.705,99
426	697,00	1.712.373,25	956	766,29	3.121.472,28
427	3.205,00	1.715.578,25	957	384,34	3.121.856,62
428	908,00	1.716.486,25	958	392,80	3.122.249,42
429	1.098,87	1.717.585,12	959	3.794,11	3.126.043,53
430	682,50	1.718.267,62	960	1.089,52	3.127.133,05
431	1.435,00	1.719.702,62	961	268,05	3.127.401,10
432	1.618,00	1.721.320,62	962	773,37	3.128.174,47
433	7.350,00	1.728.670,62	963	1.521,26	3.129.695,73
434	507,00	1.729.177,62	964	251,06	3.129.946,79
435	4.574,73	1.733.752,35	965	1.262,63	3.131.209,41
436	662,00	1.734.414,35	966	350,00	3.131.559,41
437	601,00	1.735.015,35	967	1.067,95	3.132.627,36
438	863,28	1.735.878,63	968	495,38	3.133.122,74
439	2.766,42	1.738.645,05	969	1.600,00	3.134.722,74
440	1.150,50	1.739.795,55	970	44.363,97	3.179.086,71
441	300,00	1.740.095,55	971	809,91	3.179.896,62
442	1.227,53	1.741.323,08	972	606,61	3.180.503,23
443	350,00	1.741.673,08	973	2.924,77	3.183.428,00
444	1.988,53	1.743.661,61	974	1.909,37	3.185.337,37
445	1.912,82	1.745.574,43	975	875,36	3.186.212,73
446	546,25	1.746.120,68	976	825,76	3.187.038,49
447	746,07	1.746.866,75	977	6.916,46	3.193.954,95
448	13.367,21	1.760.233,96	978	4.664,12	3.198.619,07
449	2.769,38	1.763.003,34	979	2.660,00	3.201.279,07
450	5.400,46	1.768.403,80	980	898,33	3.202.177,40
451	5.997,44	1.774.401,24	981	998,34	3.203.175,74
452	786,00	1.775.187,24	982	1.770,53	3.204.946,27
453	398,26	1.775.585,50	983	1.770,53	3.206.716,80
454	527,12	1.776.112,62	984	1.770,53	3.208.487,33
455	536,89	1.776.649,51	985	28.556,52	3.237.043,85
456	427,56	1.777.077,07	986	2.613,39	3.239.657,24
457	5.475,99	1.782.553,06	987	1.455,30	3.241.112,54
458	1.547,33	1.784.100,38	988	11.631,50	3.252.744,04
459	1.395,74	1.785.496,12	989	743,82	3.253.487,86
460	647,55	1.786.143,67	990	1.777,66	3.255.265,53
461	1.081,65	1.787.225,32	991	4.741,84	3.260.007,37
462	1.321,02	1.788.546,34	992	2.431,33	3.262.438,70
463	2.201,84	1.790.748,18	993	1.223,64	3.263.662,34
464	1.357,06	1.792.105,24	994	1.223,25	3.264.885,59
465	309,47	1.792.414,71	995	1.336,50	3.266.222,09

466	3.948,62	1.796.363,33	996	6.113,66	3.272.335,75
467	1.162,40	1.797.525,73	997	1.797,92	3.274.133,67
468	1.095,52	1.798.621,25	998	3.919,30	3.278.052,97
469	925,32	1.799.546,57	999	3.642,08	3.281.695,05
470	765,18	1.800.311,75	1000	7.375,56	3.289.070,62
471	549,36	1.800.861,11	1001	7.186,78	3.296.257,39
472	355,84	1.801.216,95	1002	1.452,89	3.297.710,29
473	400,50	1.801.617,45	1003	2.346,80	3.300.057,09
474	1.658,82	1.803.276,27	1004	4.403,86	3.304.460,95
475	2.549,18	1.805.825,45	1005	8.423,51	3.312.884,46
476	4.866,10	1.810.691,55	1006	2.316,60	3.315.201,06
477	1.474,20	1.812.165,75	1007	1.055,45	3.316.256,51
478	1.128,60	1.813.294,35	1008	952,03	3.317.208,54
479	320,40	1.813.614,75	1009	1.246,42	3.318.454,96
480	2.462,40	1.816.077,15	1010	26.305,36	3.344.760,33
481	1.482,32	1.817.559,47	1011	12.852,32	3.357.612,64
482	953,75	1.818.513,22	1012	1.900,35	3.359.513,00
483	756,41	1.819.269,62	1013	1.868,43	3.361.381,43
484	5.042,56	1.824.312,18	1014	1.094,40	3.362.475,83
485	2.496,82	1.826.809,00	1015	4.889,60	3.367.365,43
486	2.205,05	1.829.014,05	1016	786,07	3.368.151,50
487	1.865,75	1.830.879,80	1017	969,35	3.369.120,84
488	282,40	1.831.162,20	1018	5.369,73	3.374.490,57
489	1.500,00	1.832.662,20	1019	18.770,02	3.393.260,59
490	671,80	1.833.334,00	1020	1.267,03	3.394.527,63
491	1.556,10	1.834.890,10	1021	1.131,90	3.395.659,52
492	431,40	1.835.321,50	1022	2.729,46	3.398.388,98
493	2.008,00	1.837.329,50	1023	5.942,44	3.404.331,42
494	325,30	1.837.654,80	1024	2.930,80	3.407.262,21
495	1.940,00	1.839.594,80	1025	21.378,49	3.428.640,70
496	261,50	1.839.856,30	1026	11.561,59	3.440.202,29
497	1.438,26	1.841.294,56	1027	1.536,14	3.441.738,43
498	767,01	1.842.061,57	1028	3.815,25	3.445.553,68
499	2.333,12	1.844.394,69	1029	2.553,19	3.448.106,87
500	4.620,00	1.849.014,69	1030	2.201,10	3.450.307,97
501	3.891,59	1.852.906,28	1031	1.529,46	3.451.837,43
502	1.076,20	1.853.982,48	1032	1.099,67	3.452.937,10
503	512,55	1.854.495,03	1033	1.202,85	3.454.139,95
504	599,97	1.855.095,00	1034	4.406,29	3.458.546,24
505	887,64	1.855.982,64	1035	1.111,67	3.459.657,91
506	643,80	1.856.626,44	1036	7.276,44	3.466.934,35
507	357,67	1.856.984,11	1037	2.852,12	3.469.786,47
508	392,49	1.857.376,60	1038	8.192,24	3.477.978,71
509	838,32	1.858.214,92	1039	5.073,12	3.483.051,83
510	1.103,43	1.859.318,35	1040	4.133,59	3.487.185,42
511	600,00	1.859.918,35	1041	1.498,28	3.488.683,69
512	1.025,18	1.860.943,53	1042	4.039,19	3.492.722,88
513	1.394,90	1.862.338,43	1043	2.924,35	3.495.647,23
514	835,93	1.863.174,36	1044	3.339,35	3.498.986,58
515	710,22	1.863.884,58	1045	2.420,46	3.501.407,04
516	302,78	1.864.187,36	1046	2.653,81	3.504.060,85
517	292,63	1.864.479,99	1047	928,63	3.504.989,48
518	1.360,00	1.865.839,98	1048	78,17	3.505.067,65

519	287,76	1.866.127,74	1049	4.046,52	3.509.114,17
520	1.053,00	1.867.180,74	1050	912,74	3.510.026,91
521	450,92	1.867.631,66	1051	3.872,29	3.513.899,20
522	1.563,12	1.869.194,78	1052	1.146,33	3.515.045,53
523	814,76	1.870.009,54	1053	940,93	3.515.986,46
524	286,39	1.870.295,93	1054	1.702,70	3.517.689,16
525	1.729,37	1.872.025,30	1055	944,01	3.518.633,17
526	1.196,02	1.873.221,32	1056	2.534,63	3.521.167,80
527	387,18	1.873.608,50	1057	3.844,20	3.525.012,00
528	316,21	1.873.924,71			
529	712,13	1.874.636,84			
530	1.495,00	1.876.131,84			

Βιβλιογραφία

- Cochran W. (1977) *Sampling Techniques*, 3rd edition, New York: John Wiley & Sons Inc.
- Dykxhoorn H., Sinning K. (1984) ‘The lack of uniformity in statistical audit Sampling terminology’, *Journal of Accounting Education*, Fall. vol. 2, no. 2, pp. 153-161
- Gillett P. (2000) ‘Monetary unit sampling, a belief-function implementation for audit and accounting applications’, *International Journal of Approximate Reasoning*, no. 25, pp. 43-70.
- Guy D., Carmichael D., Whittington R. (2002) *Audit Sampling: An introduction*, 5th edition, New York: John Wiley & Sons Inc.
- Higgins H., Nandram B. (2009) ‘Monetary unit sampling: Improving estimation of the total audit error’, *Advances in Accounting, incorporating Advances in International Accounting*, vol. 25, pp. 174–182.
- Kaplan R. (1975) ‘Sample Size Computations for Dollar-Unit’, *Journal of Accounting Research*, vol. 13, pp. 126-133
- Neter J., Johnson J., Leitch R. (1985) ‘Characteristics of Dollar-Unit Taints and Error Rates in Accounts Receivable and Inventory’, *The Accounting Review*, vol. 60, no. 3 July, pp. 488-499.
- Lohr S. (2009) *Sampling: Design and Analysis*, 2nd edition, Boston: Brooks/Cole
- Menzefrickev U. (1983) ‘On Sampling Plan Selection with Dollar-Unit Sampling’, *Journal of Accounting Research*, vol. 21, no. 1, Spring, pp. 96-105.
- Pfeffermann D., Skinner S., Holmes D., Goldstein H., Rasbash J. (1998) ‘Weighting for Unequal Selection Probabilities in Multilevel Models’, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)*, vol. 60, no. 1, pp. 23-40.
- Whittington R., Pany K. (2009) *Principles of Auditing and Other Assurance Services*, 17th edition, London: Mc Graw Hill Higher Education.
- Ueno S. (1990) ‘Statistical Auditing and Classical Variables Sampling’, *Journal of Kanazawa College of Economics*, vol. 23, no. 3, pp. 39-61.
- ISA 200, Overall Objectives of the Independent Auditor and the Conduct of an Audit in Accordance with International Standards on Auditing, *International Federation of Accountants (IFAC)*
- ISA 300, Planning an Audit of Financial Statements, *International Federation of Accountants (IFAC)*

ISA 315, Identifying and Assessing the Risks of Material Misstatement through Understanding the Entity and Its Environment, *International Federation of Accountants (IFAC)*

ISA 320, Materiality in Planning and Performing an Audit, *International Federation of Accountants (IFAC)*

ISA 450, Evaluation of Misstatements Identified during the Audit, *International Federation of Accountants (IFAC)*

ISA 530, Audit Sampling, *International Federation of Accountants (IFAC)*

SAS 430 Audit Sampling

Γενική Βιβλιογραφία

Πετράκος Γ. (2011) *Εισαγωγή στη στατιστική της καθημερινότητάς μας*, εκδόσεις Σταμούλη.

Brewer K. (1963) 'Model of systematic sampling with unequal probabilities', *Australian Journal of Statistic*, April, vol. 5, no. 1, pp. 5-13

Cox D. SnellSource E., (1979) 'On Sampling and the Estimation of Rare Errors', *Biometrika Trust*, vol. 66, no. 1, April, pp. 125-132

Guidance note on sampling methods for audit authorities (under article 62 of regulation (ec) no 1083/2006 and article 16 of commission regulation (ec) n° 1028/2006)

Knight P. (1979) 'Statistical Sampling in Auditing: An Auditor's Viewpoint', *Journal of the Royal Statistical Society, series D (The Statistician)*, vol. 28, no. 4, December, pp. 253-266.

Rittenberg L. Schwieger B., Johnstone K., (2008) *Auditing: A Business Risk Approach*, 6th Edition, Ohio, Thomson Higher Education.

Rohrbach K. (1986) 'Monetary Unit Acceptance Sampling', *Journal of Accounting Research*, vol. 24, No. 1, Spring, pp. 127-150.

Rosen B. (1997) 'On sampling with probability proportional to size', *Journal of Statistical Planning and Inference*, no. 62, pp. 159-191.

ScottSource W. (1979) 'Discussion of Materiality Allocation in Audit Planning: A Feasibility Study', *Journal of Accounting Research*, vol. 17, pp. 231-238.