ΠΑΝΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΗΣ ΝΕΟΚΛΑΣΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ: ΟΨΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ ΜΙΑΣ ΔΙΑΜΑΧΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
υποστηριζόμενη από τον:
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ ΒΟΥΓΙΟΥΚΛΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΑΘΗΝΑ, 1995

ΠΑΝΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΗΣ ΝΕΟΚΛΑΣΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ: ΟΨΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ ΜΙΑΣ ΔΙΑΜΑΧΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
υποστηριζόμενη από τον:
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ ΒΟΥΓΙΟΥΚΛΑΚΗ

ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΣΤΑΜΑΤΗΣ (Επιβλέπων)
ΙΩΑΝΝΗΣ ΒΑΒΟΥΡΑΣ
ΞΑΝΘΗ ΠΕΤΡΙΝΙΩΤΗ

ΑΘΗΝΑ, 1995

Στους γονείς μου

Στον αδελφό μου

Πρωτίστως, ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα της διατριβής, καθηγητή Γ.Σταμάτη, που πίστευε σε εμένα και με βοήθησε ουσιαστικά με τις επίμονες και οξυδερκείς επιστημονικές παρατηρήσεις του κατά την διάρκεια των συχνότατων ανταλλαγών απόψεων που είχα την χαρά να έχω μαζί του. Η συμβολή του υπήρξε πράγματι ανεκτίμητη στην τελική διαμόρφωση της διατριβής. Τον ευχαριστώ όμως ακόμη περισσότερο για την αμέριστη ηθική συμπαράσταση και υποστήριξη στην ολοκλήρωση της προσπάθειάς μου.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τους κ.κ. αναπληρωτή καθηγητή Ι.Βαβούρα και αναπληρώτρια καθηγήτρια Ξ.Πετρινιώτη για το προσωπικό τους ενδιαφέρον και την πολύτιμη ηθική βοήθεια που μου παρείχαν.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κ.κ. καθηγητές Τ.Γιαννίτση, Μ.Λουκάκη, Κ. Τσούρο και Π.Ρέππα για την τιμή που μου έκαναν να δεχθούν να αποτελέσουν μέλη της επταμελούς επιτροπής.

Δεν θα μπορούσα να μην αναφερθώ στη συμβολή του κ. Κ.Κοντοβασίλη, με τον οποίο με συνδέει μια βαθειά φιλία. Η ολοκλήρωση της εργασίας μου οφείλει πολλά στην μαθηματική βοήθεια που μου προσέφερε επί μακρό χρονικό διάστημα, για την οποία τον ευχαριστώ θερμά.

Κλείνοντας, θα πρέπει να ευχαριστήσω τον κ. Ν.Εξάκουστο για την πολύτιμη συνδρομή του στην επίλυση ορισμένων τεχνικών προβλημάτων, καθώς και την κ. Μ.Ιωαννάτου για τις χρησιμότατες υποδείξεις που είχε την καλωσύνη να μου προτείνει.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το θεωρητικό πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής ορίζεται από την αντιπαράθεση, που έλαβε χώρα από τα τέλη της δεκαετίας του 50 έως τις αρχές της δεκαετίας του 80, μεταξύ ενός κύκλου οικονομολόγων που έγιναν γνωστοί τελικά με την ονομασία "νεορικαρντιανοί" από την προσπάθεια τους να αναβιώσουν την προβληματική της κλασικής θεωρίας της αξίας και της κατανομής του προϊόντος[1] και, από την άλλη μεριά, των κυριότερων υποστηρικτών της νεοκλασικής θεωρίας του κεφαλαίου και της μεγέθυνσης, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται ορισμένοι από τους θεμελιωτές της στην τελευταία της εκδοχή.[2]

Όπως είναι γνωστό, η θεωρητική διαμάχη μεταξύ των ανωτέρω σχολών περιστράφηκε κυρίως γύρω από τα ακόλουθα θεμελιώδη θέματα:

1. Την εγκυρότητα της έννοιας του "κεφαλαίου", όπως αυτό ορίζεται στην νεοκλασική θεωρία του κεφαλαίου και της μεγέθυνσης, δηλαδή ως *ομοιογενές* μέγεθος, το οποίο χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

a) Είναι μετρήσιμο, ανεξάρτητα από την κατανομή του καθαρού προϊόντος και συνακόλουθα του προσδιορισμού των τιμών. Επομένως, έχει μια ιδιαίτερη διάσταση, διαφορετική της χρηματικής.

b) Δεδομένου του "μεγέθους" του, της διαθέσιμης ποσότητας εργασίας και της μακροοικονομικής συνάρτησης παραγωγής, μπορούμε να προσδιορίσουμε:

- Την κατανομή του καθαρού προϊόντος μεταξύ των συντελεστών παραγωγής και
- Το συνολικό καθαρό προϊόν της οικονομίας.

---

[1] Οι επιφανέστεροι από τους οποίους είναι οι Sraffa, Robinson, Pasinetti, Garegnani κ.α.

[2] Όπως οι Samuelson, Solow, Hahn κ.α.

c) Έχει μια ιδιαίτερη τιμή: το επιτόκιο, το οποίο, όπως κι η τιμή κάθε άλλου αγαθού, προσδιορίζεται από τις νεοκλασικές σχέσεις προσφοράς και ζήτησης του αγαθού.

2. Την εγκυρότητα της νεοκλασικής θεωρίας της παραγωγής ή της επιλογής τεχνικής, σύμφωνα με την οποία, δεδομένης της διαθέσιμης τεχνολογίας της οικονομίας, η αύξηση (μείωση) του επιτοκίου ή, αντίστοιχα, η μείωση (αύξηση) του ονομαστικού ωρομισθίου επιφέρει μείωση (αύξηση) της έντασης κεφαλαίου, δηλαδή οδηγεί στην χρησιμοποίηση τεχνικών παραγωγής με μικρότερη (μεγαλύτερη) ένταση κεφαλαίου και, αντίστοιχα, μικρότερη (μεγαλύτερη) παραγωγικότητα της εργασίας ή κατά κεφαλή κατανάλωση.

Η διδακτορική διατριβή, χωρίς να αντικρούει την ορθότητα των βασικών ενστάσεων-θέσεων της νεορικαρντιανής κριτικής στην επικρατούσα νεοκλασική θεωρία του κεφαλαίου, αποσκοπεί αφενός μεν στην διασαφήνιση ορισμένων πλευρών της που αναφέρονται κυρίως στον προσδιορισμό των τιμών παραγωγής και στην επιλογής τεχνικής και αφετέρου στην υπέρβαση του στενού ορίζοντα της προβληματικής όχι μόνο των νεορικαρντιανών, αλλά γενικότερα του συνόλου των αντιπαρατιθέμενων μερών.

Πιο συγκεκριμένα, η διατριβή διαρθρώνεται ως εξής:

1. Στο Μέρος (Ι) εξετάζεται ο σχηματισμός των τιμών ισορροπίας ή τιμών κόστους, που αντιστοιχούν σε μια τυχαία, εξωγενώς καθορισμένη τιμή είτε του ποσοστού κέρδους είτε του ονομαστικού ωρομισθίου, μιας γραμμικής τεχνικής παραγωγής τύπου Leontief ή Sraffa. Τεχνικές παραγωγής όπως οι παραπάνω αποτέλεσαν το κοινό αναλυτικό πλαίσιο αναφοράς των πρωταγωνιστών της συζήτησης.

Ειδικότερα, η μελέτη του σχηματισμού των τιμών ισορροπίας αναφέρεται σε ορισμένες διασπώμενες τεχνικές παραγωγής, οι οποίες κατέχουν "περιθωριακή" σημασία στην βιβλιογραφία. Με αυτό εννοούμε τεχνικές παραγωγής οι οποίες είτε συζητήθηκαν σπανιότατα στην βιβλιογραφία, όπως αυτές στις οποίες η μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής[3] είναι μικρότερη της

---

[3] Η μη βασική υποτεχνική ή μη βασικό υποσύστημα, όπως συνηθέστερα ονομάζεται στην βιβλιογραφία,

μέγιστης τιμής του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής[4,5] είτε η ύπαρξη τους παραγνωρίστηκε πλήρως, όπως αυτές στις οποίες η μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής είναι ίση της μέγιστης τιμής του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής.[6,7]

Από την εξέταση των ανωτέρω "περιθωριακών" περιπτώσεων συνάγονται γενικότερα συμπεράσματα για τον προσδιορισμό των τιμών παραγωγής μιας γραμμικής τεχνικής παραγωγής, τα οποία επιτρέπουν την διατύπωση προτάσεων που αφορούν γενικά τις γραμμικές τεχνικές παραγωγής. Για το σκοπό αυτό, στην διατριβή παρατίθεται μια εξαντλητική διερεύνηση όλων των δυνατών λύσεων - οικονομικά και μη οικονομικά σημαντικών - των τιμών των παραγόμενων εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου w (του ποσοστού κέρδους r), που αντιστοιχούν σε κάθε μη αρνητική τιμή του ποσοστού κέρδους r (του ονομαστικού ωρομισθίου w). Με βάση την ανωτέρω διερεύνηση, θεμελιώνονται αυστηρά οι ακόλουθες "αιρετικές" θέσεις:

αντιστοιχεί στα μη βασικά εμπορεύματα. Μη βασικά εμπορεύματα ονομάζουμε τα εμπορεύματα εκείνα που δεν εισέρχονται, άμεσα ή έμμεσα, στην παραγωγή όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων.

4 Η βασική υποτεχνική ή βασικό υποσύστημα, όπως συνηθέστερα ονομάζεται στην βιβλιογραφία, αντιστοιχεί στα βασικά εμπορεύματα. Βασικά εμπορεύματα ονομάζουμε τα εμπορεύματα εκείνα που εισέρχονται, άμεσα ή έμμεσα, στην παραγωγή όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων.

5 Η ανωτέρω περίπτωση, στην πλέον απλή της μορφή, της αποτελεί το παράδειγμα των φασολιών (beans) που αναφέρει ο Sraffa [1985, Παράρτημα Β]. Όμως, ο Sraffa δεν απέδωσε στο παράδειγμα που περιέγραφε την προσήκουσα ιδιαίτερη προσοχή και, κατά συνέπεια, δε στάθηκε δυνατό να συνάγει τα θεωρητικά συμπεράσματα που αναφέρονται στη συνέχεια.

6 Ο προσδιορισμός των τιμών και της σύνθεσης του πρότυπου εμπορεύματος στην περίπτωση γραμμικών τεχνικών παραγωγής, όπως οι ανωτέρω, δεν έχει απασχολήσει μέχρι σήμερα την βιβλιογραφία. Μοναδική εξαίρεση αποτελεί η εργασία των Βουγιουκλάκη και Μαριόλη [1992].

7 Ο "περιθωριακός" χαρακτήρας των ανωτέρω εξεταζόμενων περιπτώσεων υπογραμμίζεται από το γεγονός, ότι μήτρες τεχνικών συντελεστών που είναι είτε μη διασπώμενες είτε διασπώμενες με το μέγιστο ποσοστό κέρδους του βασικού υποσυστήματος μικρότερο από το μέγιστο ποσοστό κέρδους του μη βασικού υποσυστήματος ή των μη βασικών υποσυστημάτων ονομάζονται "Sraffa matrices". Βλ. Krause [1981, σσ. 177-178]. Με τη σειρά της η έννοια της "Sraffa matrix" αποτελεί γενίκευση της έννοιας της "quasi-irreducible matrix". Βλ. Bowles and Gintis [1977, σσ. 188].

- Οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων εξαρτώνται στην γενική περίπτωση, ακόμα και χωρίς να λάβουμε υπόψη μας την τυποποίηση (normalisation) των τιμών,[8] από τις συνθήκες παραγωγής όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων και, κατά συνέπεια, από τις συνθήκες παραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων.
- Οι σχέσεις μεταξύ των ονομαστικών τιμών ισορροπίας ή τιμών κόστους για ένα τυχαίο, εξωγενώς καθορισμένο μέτρο των τιμών είναι στην γενική περίπτωση διαφορετικές από τις αντίστοιχες σχέσεις μεταξύ των τιμών ισορροπίας που είναι ήδη προσδιορισμένες πριν την προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης και, κατά συνέπεια, πριν τον καθορισμό του μέτρου των τιμών. Επιπλέον, διαφοροποιούνται ανάλογα με την μορφή της τυποποίησης των τιμών. Με άλλα λόγια, οι σχέσεις μεταξύ των ονομαστικών τιμών ισορροπίας εξαρτώνται στην γενική περίπτωση από το μέτρο των τιμών, δηλαδή σε τελική ανάλυση από τις συνθήκες παραγωγής του.

Στο Μέρος (ΙΙ) εξετάζονται οι σχέσεις των τιμών δύο τεχνικών παραγωγής, έστω (α) και (β), που διαφέρουν σε μια μέθοδο παραγωγής, έστω του εμπορεύματος ω, ανεξάρτητα του μέτρου των τιμών στο οποίο εκφράζονται.

Προκειμένου να μελετηθούν οι σχέσεις των τιμών των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) με την μεγαλύτερη δυνατή πληρότητα επιχειρείται μια πλήρη ταξινόμηση των δυνατών ζευγών τεχνικών (α) και (β), η οποία λαμβάνει υπόψη της όλα τα γενικά, ουσιαστικά κριτήρια με βάση τα οποία διαφοροποιούνται δύο τεχνικές.[9] Κατά αυτόν

---

[8] Η τυποποίηση των τιμών πραγματοποιείται με την εισαγωγή μιας εξίσωσης, την οποία ονομάζουμε εξίσωση τυποποίησης των τιμών (normalisation equation).. Εξίσωση τυποποίησης των τιμών ορίζεται η εξίσωση, μέσω της οποίας η τιμή ενός περιγραφόμενου από την τεχνική παραγωγής εμπορεύματος, το οποίο ονομάζεται τυπικό εμπόρευμα, εξισώνεται αυθαίρετα με μια σταθερή ποσότητα ενός ομογενούς, εκτατικού και διαιρετού αγαθού που λειτουργεί ως "χρήμα". Για μια εκτενή ανάλυση της εξίσωσης τυποποίησης βλ. Σταμάτης [1990, σελ. 91-114].

[9] Ως τέτοια κριτήρια αναφέρονται: η δομή της κανονικής μορφής των μητρών τεχνικών συντελεστών, η διάταξη των μέγιστων ιδιοτιμών των υπομητρών της κύριας διαγωνίου και ο βασικός ή μη βασικός

τον τρόπο συγκροτείται το αναλυτικό πλαίσιο που θα αποτελέσει τη βάση συζήτησης όλων των θεμάτων που θα εξετασθούν στη συνέχεια.[10] Το ιδιαίτερο, γενικό χαρακτηριστικό των θεωρούμενων ζευγών τεχνικών (α) και (β) είναι ότι αναφέρονται μόνο στις ειδικές περιπτώσεις που οι τεχνικές παραγωγής περιγράφουν είτε την παραγωγή μόνο βασικών εμπορευμάτων είτε την παραγωγή βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων και τα μη βασικά εμπορεύματα είτε δεν εισέρχονται στην παραγωγή των μη βασικών εμπορευμάτων είτε *κάθε* μη βασικό εμπόρευμα εισέρχεται - άμεσα ή έμμεσα - στην παραγωγή *όλων* των μη βασικών εμπορευμάτων.

Αρχικά εξετάζονται οι σχέσεις των τιμών δύο τεχνικών παραγωγής σε κάθε ημιθετική τιμή του ποσοστού κέρδους που είναι μικρότερη από την ελάχιστη μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους των δύο τεχνικών. Στο ανωτέρω διάστημα τιμών του ποσοστού κέρδους συζητείται το περίφημο "Θεώρημα της Μη Υποκατάστασης" (Non Substitution Theorem), για το οποίο προτείνονται δύο εναλλακτικές αποδείξεις, κάθε μια από τις οποίες το διαφωτίζει από μια τελείως διαφορετική οπτική γωνία, οι οποίες προστίθενται στην ήδη μακριά σειρά των αποδείξεων που αναφέρονται στην βιβλιογραφία.[11, 12]

Στον αντίποδα του "Θεωρήματος της Μη Υποκατάστασης", στο πλαίσιο του οποίου οι τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων εκφράζονται σε όρους της εργασιακής δύναμης, εξετάζονται στη συνέχεια οι αντίστοιχες σχέσεις των ονομαστικών τιμών δύο τεχνικών παραγωγής, εκφρασμένων σε όρους ενός τυχαίου, παραγόμενου εμπορεύματος. Στο πλαίσιο αυτό καταδεικνύεται ότι:

χαρακτήρας του εμπορεύματος, ως προς την μέθοδο παραγωγής του οποίου διαφοροποιούνται οι τεχνικές.

[10] Βλ. Μέρος ΙΙ., Προκαταρκτικό Κεφάλαιο.

[11] Βλ. τα τμήματα (ΙΙ.1.2.α) και (ΙΙ.1.2.β).

[12] Στην βιβλιογραφία συναντώνται γενικές αποδείξεις, οι οποίες αναφέρονται είτε σε τεχνικές παραγωγής που περιγράφουν την παραγωγή μόνο βασικών εμπορευμάτων είτε σε τεχνικές παραγωγής που περιγράφουν την παραγωγή βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων γενικά.

- Οι ονομαστικές τιμές δύο τεχνικών παραγωγής, εκφρασμένων σε όρους ενός τυχαίου παραγόμενου εμπορεύματος, δεν είναι στην γενική περίπτωση *ολικά διατεταγμένες (totally ordered)* και

- Υπάρχουν ειδικές μορφές εξισώσεων τυποποίησης που εξασφαλίζουν την ολική διάταξη των αντίστοιχων ονομαστικών τιμών, καίτοι η κατάταξη ως προς το μέγεθός τους είναι ακριβώς αντίθετη από την κατάταξη μεγέθους των διανυσμάτων τιμών, που εκφράζονται σε όρους της εργασιακής δύναμης.[13]

Στη συνέχεια θεωρούνται όλα τα ζεύγη εναλλακτικών τεχνικών παραγωγής (α) και (β), των οποίων το μέγιστο ποσοστό κέρδους είναι ίσο και μελετώνται - για πρώτη φορά από όσο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε - για κάθε ζεύγος χωριστά οι σχέσεις των αντίστοιχων σχετικών και ονομαστικών τιμών, εκφρασμένων σε όρους ενός τυχαίου παραγόμενου εμπορεύματος, στην κοινή μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους.[14] Τα θεμελιώδους σημασίας αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν φωτίζουν πλήρως τις σχέσεις των τιμών των τεχνικών (α) και (β) σε κάθε κοινή, εφικτή, οικονομικά σημαντική τιμή του ποσοστού κέρδους.[15] Επιπλέον, καθιστούν δυνατή τη σύγκριση των τιμών κόστους των εναλλακτικών μεθόδων παραγωγής του εμπορεύματος ω σε κάθε κοινή οικονομικά σημαντική τιμή του ποσοστού κέρδους, ανεξάρτητα της τεχνικής με της οποίας το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών ισορροπίας αποτιμώνται οι τιμές κόστους.[16] Κατά αυτόν τον τρόπο, σε κάθε κοινή, οικονομικά σημαντική τιμή του ποσοστού κέρδους επιτρέπεται η μελέτη της κατάταξης των

---

[13] Βλ. το τμήμα (II.2.3).

[14] Βλ. το τμήμα(II.1.3).

[15] Η έννοια του οικονομικά σημαντικού διαστήματος τιμών του ποσοστού κέρδους μιας τεχνικής εξετάζεται στην παράγραφο (I.1.4.III).

[16] Δεδομένου ότι η σύγκριση δύο τυχαίων τεχνικών παραγωγής μπορεί να αναχθεί πάντα σε μια επαναληπτική διαδικασία σύγκρισης τεχνικών παραγωγής που διαφέρουν σε μια μέθοδο παραγωγής, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στον πυρήνα του προβλήματος, δηλαδή στη σύγκριση τεχνικών παραγωγής που διαφέρουν σε μια μέθοδο παραγωγής ή, ισοδύναμα, στις μεθόδους παραγωγής ενός μόνο εμπορεύματος.

τεχνικών παραγωγής (α) και (β) ως προς την κερδοφορία τους, σύμφωνα με το ερμηνευτικό σχήμα του αλγόριθμου της αγοράς που βασίζεται στην επιλογή της τεχνικής που ελαχιστοποιεί την τιμή κόστους. Από την μαθηματική διερεύνηση της σχέσης που συνδέει την τιμή ισορροπίας του εμπορεύματος ω με την τιμή κόστους που αντιστοιχεί στην εναλλακτική μέθοδο παραγωγής του σε κάθε κοινή, οικονομικά σημαντική τιμή του ποσοστού κέρδους προκύπτει - για κάθε τυποποίηση των τιμών - ένα σύνολο ισοδύναμων ως προς αυτήν συνθηκών που αφορούν τις τιμιακές σχέσεις των συγκρινόμενων τεχνικών. Κάθε μια από τις ανωτέρω ισοδύναμες συνθήκες αποτελεί ένα επαρκές κριτήριο κατάταξης των τεχνικών παραγωγής ως προς την κερδοφορία τους.

Με βάση τα ανωτέρω κριτήρια σε κάθε κοινή, οικονομικά σημαντική τιμή του ποσοστού κέρδους η σύγκριση των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) ως προς την κερδοφορία, σύμφωνα με το ερμηνευτικό σχήμα του αλγόριθμου της αγοράς, παρουσιάζει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Οι τιμές κόστους των διαδοχικών περιόδων παραγωγής, που ακολουθούν την αλλαγή της μεθόδου παραγωγής ενός εμπορεύματος, *δε συγκλίνουν πάντοτε* στις αντίστοιχες τιμές ισορροπίας μιας στατικής οικονομίας (steady state economy) που χρησιμοποιεί την τελική τεχνική. Επομένως, η επιλογή της πλέον κερδοφόρας τεχνικής, όπως θεωρείται μέσα από το σχήμα του "αλγόριθμου της αγοράς",[17] δεν οδηγεί *πάντοτε* σε μια ευσταθή ισορροπία.
- Η σύγκριση των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) ως προς την κερδοφορία τους είναι *δυνατή αποκλειστικά μόνο* για κάθε τυποποίηση των τιμών που *επιτρέπει* τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων. Επιπλέον, αν για μια *επιτρεπτή* τυποποίηση των τιμών οι τεχνικές (α) και (β) είναι κατατάξιμες ως

[17] Τον "αλγόριθμο της αγοράς" αρχικά περιέγραψε ο Levhari [1965] και κατόπιν συστηματοποίησαν οι Garegnani [1970], Schefold [1978], Garegnani [1984], Bidard [1990a], Bidard [1990b] και Bidard [1991].

προς την κερδοφορία, τότε η κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία είναι *δυνατή* για κάθε *επιτρεπτή* τυποποίηση των τιμών κι *ανεξάρτητη* από αυτήν.

- Οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) ενδέχεται να *είναι μη κατατάξιμες* ως προς την κερδοφορία τους για κάθε τυποποίηση των τιμών. Επομένως, η κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία *δεν είναι πάντοτε δυνατή.*

Επίσης, με βάση τα ανωτέρω κριτήρια είμαστε σε θέση να εξετάσουμε την εσωτερική συνάφεια των προταθέντων στην βιβλιογραφία εναλλακτικών κριτηρίων κατάταξης των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) ως προς την κερδοφορία τους σε κάθε κοινή, οικονομικά σημαντική τιμή του ποσοστού κέρδους. Από τη συγκριτική εξέταση προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, το κριτήριο του αλγόριθμου της αγοράς για την κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία δεν είναι γενικά ούτε εννοιολογικά ούτε μαθηματικά ισοδύναμο με το κριτήριο της μεγιστοποίησης του ονομαστικού ωρομισθίου W.[18]

- Αν ισχύει $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$, τότε στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η μέθοδος του αλγόριθμου της αγοράς επιτρέπει τη σύγκριση των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) ως προς την κερδοφορία τους και, κατά συνέπεια, διαμορφώνει ένα ορθολογικό πλαίσιο συζήτησης του προβλήματος της επιλογής τεχνικής. Αντίθετα, η σύγκριση των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) ως προς την κερδοφορία τους σύμφωνα με τα κριτήρια της μεγιστοποίησης του ονομαστικού ωρομισθίου W ή το

---

[18] Βλ. το τμήμα (ΙΙ.2.3).

κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, είναι *αδύνατη*.[19]

Τέλος, τα συμπεράσματα στα οποία έχουμε ήδη αναφερθεί έχουν σημαντικές επιπτώσεις στην μελέτη του φαινομένου της εναλλαγής των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) (reswitching of techniques) στην κλίμακα κερδοφορίας και, πιο συγκεκριμένα, στην επανατοποθέτηση του προβλήματος που αφορά τον προσδιορισμό του μέγιστου αριθμού των σημείων εναλλαγής των τεχνικών παραγωγής (α) και (β). Όπως είναι γνωστό, η διαπίστωση του φαινομένου της εναλλαγής των τεχνικών παραγωγής στην κλίμακα κερδοφορίας και οι συναφείς "παραδοξότητες" [20] που εμφανίζονται κατά την επιλογή τεχνικής σε πολυτομεακά, γραμμικά υποδείγματα παραγωγής αποτέλεσαν το επίκεντρο της διαμάχης που σημάδεψε την θεωρία του κεφαλαίου κατά την διάρκεια των τεσσάρων τελευταίων δεκαετιών. Θα δείξουμε ότι ο μέγιστος αριθμός των τιμών ισοκερδοφορίας του ποσοστού κέρδους μεταξύ των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) είτε για το διάστημα τιμών $\left[0, R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους, στην περίπτωση που ισχύει $R^* \prec R$, είτε για το διάστημα τιμών $[0, R]$ του ποσοστού κέρδους, στην περίπτωση που ισχύει $R^* = R$, εξαρτάται από το συνολικό αριθμό s των διακριτών εμπορευμάτων που εισέρχονται άμεσα ή έμμεσα στην παραγωγή των υλικών εισροών, των οποίων οι ποσότητες διαφοροποιούνται μεταξύ των μητρών $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$.[21] Επιπλέον, θα περιγράψουμε μια ικανή συνθήκη που ακυρώνει την δυνατότητα εναλλαγής των τεχνικών (α) και (β) είτε για το διάστημα τιμών $\left[0, R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους,

---

[19] Βλ. το τμήμα (II.2.3).

[20] Στην βιβλιογραφία οι "παραδοξότητες" αυτές αναφέρονται συχνά με όρους όπως "paradox consumption behaviour" ή "negative real Wicksell effect" κλπ.

[21] Βλ. το τμήμα (II.3.2).

στην περίπτωση που ισχύει $R^* \prec R$, είτε για το διάστημα τιμών $\left[0,R\right]$ του ποσοστού κέρδους, στην περίπτωση που ισχύει $R^* = R$.[22]

[22] Βλ. το τμήμα (II.3.3).

ΜΕΡΟΣ Ι.

ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΣΕ ΜΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΤΕΧΝΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.

Ο ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρόν κεφάλαιο μελετάται ο προσδιορισμός των τιμών παραγωγής μιας γραμμικής τεχνικής για εξωγενώς καθορισμένη "κατανομή του προϊόντος".[1]

Ειδικότερα, στο τμήμα (2) διατυπώνονται οι αναλυτικές υποθέσεις που περιγράφουν την θεωρούμενη τεχνική παραγωγής. Εν συνεχεία, στο τμήμα (3) αναπτύσσονται οι μαθηματικές προτάσεις που θα επιτρέψουν την διερεύνηση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών.

Η μελέτη του συστήματος προσδιορισμού των τιμών της τεχνικής θα αποτελέσει το αντικείμενο του τμήματος (4). Από την διερεύνηση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών αποδεικνύεται, ότι, στη γενική περίπτωση, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων εξαρτώνται από τις συνθήκες αναπαραγωγής του συνόλου των παραγόμενων εμπορευμάτων και, επομένως, από τις συνθήκες αναπαραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων.

Τέλος, στο τμήμα (5) εξετάζεται το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών της τεχνικής ή, με άλλα λόγια, οι επιπτώσεις που ενέχει ο καθορισμός του μέτρου των τιμών, δηλαδή του "χρήματος", μέσω της εξίσωσης τυποποίησης των τιμών Πιο συγκεκριμένα, για κάθε δυνατή τυποποίηση των τιμών, συγκρίνονται οι

---

[1] Στην πραγματικότητα, εξωγενώς καθορισμένη δεν είναι η "κατανομή του προϊόντος", αλλά είτε η τιμή του ποσοστού κέρδους r είτε η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου W. Για το θέμα αυτό βλέπε Σταμάτης [1989, σσ. 160].

σχέσεις των αντίστοιχων ονομαστικών τιμών, δηλαδή οι σχετικές τιμές που εμφανίζονται μετά την τυποποίηση, με τις σχετικές τιμές που είναι δεδομένες, όπως έχουμε ήδη αποδείξει, ήδη πριν από την προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης και τον καθορισμό του "χρήματος". Κατά αυτόν τον τρόπο αποδεικνύεται, ότι η εξίσωση τυποποίησης δεν προσδιορίζει απλώς το ύψος ή το επίπεδο του ήδη προσδιορισμένου διανύσματος σχετικών τιμών της τεχνικής, όπως είναι κοινά παραδεκτό.[2] Αντίθετα, η ουσιαστική της σημασία συνίσταται στην διαμόρφωση ενός διανύσματος σχετικών τιμών, που, στην γενική περίπτωση, διαφέρει από το ήδη προσδιορισμένο διάνυσμα σχετικών τιμών της τεχνικής.[3]

Η φαινομενικά παράδοξη αυτή διαπίστωση έχει, εντούτοις, μια απλή ερμηνεία: Οι ονομαστικές τιμές που συνεπάγεται η εξίσωση τυποποίησης υπαγορεύονται από την απαίτηση η εξίσωση τυποποίησης να είναι *δυνατή*, δηλαδή η τιμή του τυπικού εμπορεύματος να είναι *προσδιορισμένη*[4] και *διάφορη* του μηδενός. Αντίθετα, ο προσδιορισμός των σχετικών τιμών, πριν την τυποποίηση των τιμών, υπαγορεύεται από την απαίτηση οι τιμές *όλων* των παραγόμενων εμπορευμάτων να είναι *προσδιορισμένες* και οικονομικά σημαντικές, δηλαδή *ημιθετικές*. Στην γενική περίπτωση, τα ανωτέρω κριτήρια ενέχουν διαφορετικές προϋποθέσεις και συνέπειες.

Προφανώς, οι επιπτώσεις της ανωτέρω θέσης είναι ευρύτερες, εφόσον κατατείνουν στην ανατροπή του ισχυρισμού περί ουδετερότητας του "χρήματος" στα γραμμικά μοντέλα παραγωγής και συνακόλουθα συμβάλλουν στην αναίρεση της κλασικής διχοτόμησης, που διασχίζει την οικονομική θεωρία, μεταξύ πραγματικών (real) και ονομαστικών (nominal) μεγεθών.

---

[2] Κατά συνέπεια, για την ισχύουσα αντίληψη ο ρόλος της εξίσωσης τυποποίησης είναι τετριμμένος.

[3] Την ανωτέρω θέση διατύπωσε για πρώτη φορά ο Σταμάτης σε μια σειρά από εργασίες του, από τις οποίες η πρώτη είναι Σταμάτης [1992].

[4] Αυτό σημαίνει, ότι οι τιμές όλων των εμπορευμάτων, που μετέχουν στη σύνθεση του τυπικού εμπορεύματος, είναι *προσδιορισμένες*.

2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε μια τεχνική παραγωγής $[A,l]^T$. Η ημιθετική μήτρα A, $A=\left[a_{ij}\right]\geq 0$, $i,j=1,2,\ldots,n$, συμβολίζει την τετραγωνική μήτρα, τάξης $n\times n$, των τεχνικών συντελεστών. Ως γνωστόν, το στοιχείο a_{ij} της μήτρας A παριστάνει την αναγκαία ποσότητα του εμπορεύματος i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας του εμπορεύματος j. Το διάνυσμα l, $l=\left[l_j\right]\succ 0$, $j=1,2,\ldots,n$, συμβολίζει το διάνυσμα-γραμμή των εισροών σε άμεση, ομοιογενή εργασία. Η συνιστώσα l_j του διανύσματος l παριστάνει την αναγκαία ποσότητα άμεσης εργασίας που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας του εμπορεύματος j.

Εφοδιάζουμε το υπόδειγμά μας με τις ακόλουθες υποθέσεις:

1. Κάθε διαδικασία παραγωγής παράγει ένα μόνο τέλεια διαιρετό απλό εμπόρευμα ("No Joint Production Case").[5]
2. Όλες οι διαδικασίες παραγωγής είναι τέλεια διαιρετές.
3. Κάθε εμπόρευμα παράγεται από μια και μόνο διαδικασία παραγωγής.[6]
4. Η τεχνική παραγωγής $[A,l]^T$ είναι *γραμμική*, δηλαδή υπόκειται σε σταθερές αποδόσεις κλίμακας.
5. Υπάρχει μια μόνο *πρωταρχική* εισροή (primary input): η εργασία.[7]

---

[5] Αυτό σημαίνει ότι καμία διαδικασία παραγωγής δεν παράγει ένα σύνθετο εμπόρευμα. Με τον όρο σύνθετο εμπόρευμα εννοούμε κάθε συνδυασμό *απλών* εμπορευμάτων, δηλαδή κάθε "καλάθι" *απλών* εμπορευμάτων.

[6] Από τις υποθέσεις (1) και (3) συνεπάγεται, ότι ο αριθμός των διαδικασιών παραγωγής του συστήματος είναι ίσος με τον αριθμό των παραγόμενων εμπορευμάτων. Τεχνικές παραγωγής με την ανωτέρω ιδιότητα ονομάζονται "τετραγωνικές".

[7] Εκτός της εργασίας, κάθε άλλη εισροή περιγράφεται από την τεχνική παραγωγής ως παραγόμενο εμπόρευμα.

6. Η εργασία είναι απαραίτητη για την παραγωγή όλων των εμπορευμάτων $(l \succ 0)$.[8]

7. Σε κάθε διαδικασία παραγωγής εισέρχεται τουλάχιστον μια παραγόμενη εισροή.

8. Όλα τα μέσα παραγωγής φθείρονται ολοκληρωτικά κατά τη διάρκεια της περιόδου παραγωγής.

9. Η περίοδος παραγωγής είναι ίδια για όλα τα εμπορεύματα (η ενιαία περίοδος παραγωγής θα θεωρείται ως χρονική μονάδα).

10. Η ανταλλαγή των εμπορευμάτων πραγματοποιείται στο τέλος κάθε περιόδου παραγωγής σε τέλεια ανταγωνιστικές αγορές (το ονομαστικό ωρομίσθιο W, το ποσοστό κέρδους r και η τιμή p_j του εμπορεύματος $j, j=1,2,\ldots,n$, είναι ενιαία).

11. Οι μισθοί καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου παραγωγής.[9]

12. Η τεχνική παραγωγής $[A,l]^T$ είναι *παραγωγική*. Μια τεχνική παραγωγής $[A,l]^T$ ονομάζεται παραγωγική, αν χρησιμοποιώντας την μπορούμε να παράγουμε οποιοδήποτε μη αρνητικό διάνυσμα καθαρού προϊόντος. Αυτό συμβαίνει, αν και μόνο αν η μέγιστη ιδιοτιμή λ_m^A της μη αρνητικής, τετραγωνικής μήτρας A είναι μικρότερη της μονάδας $\left(\lambda_m^A \prec 1\right)$.[10]

---

[8] Αυτό σημαίνει ότι καμία από τις διαδικασίες παραγωγής, που περιγράφει η τεχνική παραγωγής, δεν είναι πλήρως αυτοματοποιημένη.

[9] Την ίδια υπόθεση κάνει κι ο Sraffa, βλ. Sraffa [1985, § 9, σελ. 35]. Κατ' αυτόν τον τρόπο η συνολική αξία των μισθών δεν αποτελεί μέρος του προκαταβλημένου κεφαλαίου. Έτσι, το ποσοστό κέρδους θα ορίζεται ως ο λόγος του κέρδους ανά περίοδο παραγωγής προς την ονομαστική αξία των υλικών εισροών της περιόδου.

[10] Εφόσον η παραγωγικότητα μιας τεχνικής εξαρτάται μόνο από την μήτρα των τεχνικών συντελεστών, μπορούμε εναλλακτικά να μιλάμε για παραγωγική μήτρα τεχνικών συντελεστών, αντί για παραγωγική τεχνική. Ισοδύναμα μπορούμε να ορίσουμε την παραγωγική μήτρα τεχνικών συντελεστών ως εξής: Μια μήτρα τεχνικών συντελεστών A, με $A \geq 0$, ονομάζεται παραγωγική, αν υπάρχει ένα ημιθετικό διάνυσμα ακαθάριστου προϊόντος X, με $X \geq 0$, το οποίο όταν παράγεται με την μήτρα τεχνικών συντελεστών A,

13. Η τεχνική παραγωγής $\left[A,l\right]^T$ παράγει -εκτός από βασικά- και μη βασικά εμπορεύματα, καθένα εκ των οποίων εισέρχεται άμεσα ή έμμεσα στην παραγωγή όλων των μη βασικών εμπορευμάτων. Κατά συνέπεια, η μήτρα A είναι μια διασπώμενη μήτρα, η οποία ύστερα από κατάλληλες αλληλοαντικαταστάσεις μεταξύ των γραμμών και των αντίστοιχων στηλών της διαμερίζεται ως εξής:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Οι μήτρες A_{11} και A_{22} είναι μη διασπώμενες μήτρες, τάξης $k\times k$ και $\left(n-k\right)\times\left(n-k\right)$ αντίστοιχα. Τέλος, η A_{12} είναι μια μήτρα, τάξης $k\times\left(n-k\right)$, με ένα τουλάχιστον θετικό στοιχείο, διότι στην αντίθετη περίπτωση που είχαμε:

$$A_{12}=0,$$

η τεχνική $\left[A,l\right]^T$ θα διασπόταν σε δύο ανεξάρτητες υποτεχνικές.[11] Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε, ότι τα πρώτα k εμπορεύματα είναι βασικά και τα υπόλοιπα $n-k$ μη βασικά.

παράγεται ταυτόχρονα ένα θετικό καθαρό προϊόν y, δηλαδή τέτοιο ώστε $y=x-Ax\succ 0$. Στην ειδική περίπτωση που η μήτρα A είναι μη διασπώμενη, η παραγωγική μήτρα τεχνικών συντελεστών A ορίζεται ως εξής: Η μη διασπώμενη μήτρα τεχνικών συντελεστών A ονομάζεται παραγωγική, αν υπάρχει ένα ημιθετικό διάνυσμα ακαθάριστου προϊόντος x, με $x\geq 0$, το οποίο όταν παράγεται με την μήτρα τεχνικών συντελεστών A, παράγεται ταυτόχρονα ένα ημιθετικό καθαρό προϊόν y, δηλαδή τέτοιο ώστε $y=x-Ax\geq 0$. Για τους ανωτέρω εναλλακτικούς ορισμούς βλ. μεταξύ άλλων Krause [1982, σσ. 143-147], Debreu and Herstein [1953, σσ. 601-602], Abraham-Frois et Berrebi [1976, σελ. 372] και Nikaido [1968, σελ. 102].

[11] Με άλλα λόγια υποθέτουμε, ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα βασικό εμπόρευμα. Την ίδια υπόθεση κάνει κι ο Sraffa, βλ. Sraffa [1985, § 6, σελ. 32].

14. Η μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_m^{A_{11}}$ της υπομήτρας A_{11} είναι μικρότερη ή ίση της μέγιστης ιδιοτιμής $\lambda_m^{A_{22}}$ της υπομήτρας A_{22}. Δηλαδή ισχύει:

$$\lambda_m^{A_{11}} \leq \lambda_m^{A_{22}} = \lambda_m^{A} \tag{2}$$

3. ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Για να διευκολύνουμε την ανάλυση που θα ακολουθήσει, θα διατυπώσουμε τις ακόλουθες μαθηματικές προτάσεις:

Ορισμός 1. Η ιδιοτιμή λ_ν^A, $\nu = 1,2,\ldots,s\,(s \leq n)$,[12] της μήτρας A ονομάζεται *ημι-απλή* (*semi-simple*) ή *ημι-απλή* ρίζα του χαρακτηριστικού της πολυώνυμου, αν η γεωμετρική της πολλαπλότητα[13] είναι ίση με την μονάδα.[14]

Προφανώς, κάθε απλή ρίζα είναι και ημι-απλή, χωρίς όμως να ισχύει υποχρεωτικά το αντίθετο.[15]

---

[12] Με s, όπου $s \leq n$, συμβολίζουμε το πλήθος των διακριτών ιδιοτιμών της μήτρας A.

[13] Γεωμετρική πολλαπλότητα $\sigma(\lambda_\nu^A)$ της ιδιοτιμής λ_ν^A, $\nu = 1,2,\ldots,s$, με $s \leq n$, της μήτρας A ονομάζουμε τον αριθμό των χαρακτηριστικών διευθύνσεων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_ν^A. Άρα, η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_ν^A είναι ίση με την πτώση της μήτρας A ως προς την ιδιοτιμή της λ_ν^A ή ίση με την τάξη του θεμελειώδους συστήματος λύσεων του χαρακτηριστικού συστήματος της μήτρας A ως προς την ιδιοτιμή της λ_ν^A. Δηλαδή ισχύει:

$$\sigma(\lambda_\nu^A) = n - \operatorname{rank}\left[\lambda_\nu^A I - A\right]$$

Για το θέμα αυτό βλ. Δασκαλόπουλος, σελ. 200.

[14] Σύμφωνα με όσα είδαμε παραπάνω, στην ημι-απλή ιδιοτιμή λ_ν^A της μήτρας A αντιστοιχεί ένα γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα ή, ισοδύναμα, ένα μοναδιαίας τάξεως θεμελειώδες σύστημα λύσεων του χαρακτηριστικού συστήματος της μήτρας A. Επιπλέον, ο βαθμός της χαρακτηριστικής μήτρας $\left[\lambda_\nu^A I - A\right]$ της A είναι ίσος με $n-1$ και για την ιδιοτιμή λ_ν^A η πτώση της μήτρας A είναι ίση με την μονάδα. Η έννοια της ημι-απλής ρίζας αναφέρεται στην οικονομική βιβλιογραφία για πρώτη φορά στον Schefold [1976, σελ. 22]. Στη θέση του όρου ημι-απλή, ο Antoine d' Autume [1985, σελ. 40] προτείνει την χρησιμοποίηση του όρου *οιονεί-απλή (quasi-simple)*, επειδή, όπως ισχυρίζεται, σε συναφή θεωρητικά πεδία ο όρος ημι-απλή προσδιορίζεται με διαφορετικό νόημα.

[15] Η γεωμετρική πολλαπλότητα $\sigma(\lambda_\nu^A)$ της μήτρας A για την ιδιοτιμή λ_ν^A είναι μικρότερη ή ίση της αλγεβρικής της πολλαπλότητας και μεγαλύτερη ή ίση της μονάδας. Για την απόδειξη βλ. Δασκαλόπουλος, σελ. 207 και Stoer and Bulrisch [1980, σελ. 319].

Λήμμα 1. Έστω η τυχαία, μη ημι-απλή ιδιοτιμή λ_ν^A, $\nu = 1,2,\ldots,s\left(s \le n\right)$, με $s \le n$, της μη αρνητικής, τετραγωνικής μήτρας A, τάξης $n \times n$. Για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα x, τάξης $1 \times n$, υπάρχει ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα $\overline{q}_\nu$ και ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα $\overline{p}_\nu$, τάξης $n \times 1$ και $1 \times n$ αντίστοιχα, της A, που συνδέονται με την ιδιοτιμή της λ_ν^A, για τα οποία ισχύει:

$$x\overline{q}_\nu = 0$$

και

$$\overline{p}_\nu x^T = 0$$

Απόδειξη: Εφόσον η ιδιοτιμή λ_ν^A δεν είναι ημι-απλή, θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο γραμμικά ανεξάρτητα δεξιά ιδιοδιανύσματα, έστω $q_{\nu,1}$ και $q_{\nu,2}$, τάξης $n \times 1$, της A, που συνδέονται με την ιδιοτιμή λ_ν^A. Κάθε γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω ιδιοδιανυσμάτων αποτελεί ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα της A, συνδεδεμένο με την ιδιοτιμή λ_ν^A. Θεωρώντας την γενική περίπτωση, υποθέτουμε ότι ισχύει:

$$xq_{\nu,i} \neq 0,\ i = 1,2$$

Σύμφωνα με την ανωτέρω σχέση και την μέθοδο ορθογωνιοποίησης Gram-Schmidt κατασκευάζουμε το δεξιό ιδιοδιάνυσμα:

$$\overline{q}_\nu = q_{\nu,1} - \frac{xq_{\nu,1}}{xq_{\nu,2}} q_{\nu,2},\ \text{όπου}\ xq_{\nu,2} \neq 0,$$

για το οποίο ισχύει:

$$x\overline{q}_\nu = x\left(q_{\nu,1} - \frac{xq_{\nu,1}}{xq_{\nu,2}} q_{\nu,2}\right) \Rightarrow$$

$$x\bar{q}_v = x\left(q_{v,1} - \frac{xq_{v,1}}{xq_{v,2}} q_{v,2}\right) \Rightarrow$$

$$x\bar{q}_v = xq_{v,1} - xq_{v,2}\frac{xq_{v,1}}{xq_{v,2}} \Rightarrow$$

$$x\bar{q}_v = xq_{v,1} - xq_{v,1} \Rightarrow$$

$$x\bar{q}_v = 0$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε, ότι, αν ιδιοτιμή λ_v^A δεν είναι ημι-απλή, τότε για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα x υπάρχει ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα $\bar{p}_v$, τάξης $1 \times n$, της A, που συνδέεται με την ιδιοτιμή λ_v^A, για το οποίο ισχύει:

$$\bar{p}_v x^T = 0$$

Λήμμα 2. Θεωρούμε τις τετραγωνικές μήτρες $B_v = \left[\beta_{ij}^{(v)}\right] \hat{=} \left[\lambda_v^A I - A\right]$ και $C_v = \left[c_{ij}^{(v)}\right] \hat{=} \left[\operatorname{adj} B_v\right]$, με $i, j = 1,2,\ldots,n$, που αντιστοιχούν στην τυχαία ιδιοτιμή λ_v^A, $v = 1,2,\ldots,s$, με $s \leq n$, της μήτρας A. Η μήτρα C_v είναι μη μηδενική $(C_v \neq 0)$, αν και μόνο αν η ιδιοτιμή λ_v^A είναι ημι-απλή.

Απόδειξη: Θα αναλύσουμε την αποδεικτική διαδικασία στα ακόλουθα στάδια:

a) Ικανή: Υποθέτουμε ότι η ιδιοτιμή λ_v^A είναι ημι-απλή. Αν συμβολίσουμε με $B_{ij}^{(v)}$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του $\beta_{ij}^{(v)}$ στοιχείου της B_v, τότε προφανώς ισχύει:

$$c_{ij}^{(v)} = B_{ji}^{(v)}$$

Αν ίσχυε:

$$C_v = 0,$$

τότε το αλγεβρικό συμπλήρωμα κάθε στοιχείου της B_v θα ήταν ίσο με το μηδέν $\left(B_{ij}^{(v)}=0, \forall\, i,j=1,2,\ldots,n\right)$. Αυτό σημαίνει, ότι όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης $(n-1)\times(n-1)$ της B_v θα ήταν ίσες με το μηδέν κι επομένως θα είχαμε:

$$\operatorname{rank} B_v \leq n-2$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού η υπόθεση μας ότι η ιδιοτιμή λ_v^A είναι ημι-απλή είναι ισοδύναμη με την σχέση:

$$\operatorname{rank} B_v = n-1$$

b) Αναγκαία: Υποθέτουμε ότι για τη μήτρα C_v ισχύει:

$$C_v \neq 0$$

Έστω ότι η ιδιοτιμή λ_v^A δεν είναι ημι-απλή ρίζα. Τότε, εξ ορισμού ισχύει:

$$\operatorname{rank} B_v \leq n-2$$

Επομένως, όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης $(n-1)\times(n-1)$ της B_v είναι ίσες με το μηδέν κι έτσι το αλγεβρικό συμπλήρωμα κάθε στοιχείου της μήτρας B_v είναι ίσο με το μηδέν. Με άλλα λόγια ισχύει:

$$C_v = 0$$

Αυτό όμως είναι άτοπο.

Λήμμα 3. Αν η τυχαία ιδιοτιμή λ_v^A, $v=1,2,\ldots,s$, με $s \leq n$, της μη αρνητικής, τετραγωνικής μήτρας A, τάξης $n \times n$, είναι ημι-απλή, τότε κάθε μη μηδενική γραμμή ή στήλη της μήτρας C_v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της A που συνδέεται από αριστερά ή δεξιά αντίστοιχα με την ιδιοτιμή της λ_v^A.[16]

Απόδειξη: Έστω $\Delta(\lambda)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της A. Γενικά ισχύει:

$$(\lambda I - A)\ adj(\lambda I - A) = \Delta(\lambda) I$$

Αν θέσουμε όπου λ την τιμή λ_v^A η ανωτέρω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\left(\lambda_v^A I - A\right)\ adj\left(\lambda_v^A I - A\right) = \Delta(\lambda_v^A) I \Rightarrow$$

$$\left(\lambda_v^A I - A\right)\ adj\left(\lambda_v^A I - A\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\lambda_v^A I - A\right) C_v = 0$$

Από την ανωτέρω σχέση προκύπτει, ότι κάθε μη μηδενική στήλη της μήτρας

[16] Οι Berman and Plemmons [1979, σελ. 31] αποδεικνύουν την ίδια πρόταση στην ειδική περίπτωση που η ημι-απλή ιδιοτιμή λ_v^A είναι η μέγιστη ιδιοτιμή λ_m^A. Από την άλλη μεριά, ο Gantmacher [1959, σελ. 85] δείχνει να πιστεύει, ότι οι ιδιότητες:

$$C_v \neq 0$$

και

"Κάθε μη μηδενική γραμμή ή στήλη της μήτρας C_v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της A που συνδέεται από αριστερά ή δεξιά αντίστοιχα με την ιδιοτιμή της λ_v^A"

ισχύουν, ανεξάρτητα αν η ιδιοτιμή λ_v^A είναι ημι-απλή ή όχι: "let us assume that $C_v \neq 0$... Therefore every non zero column of C_v determines a characteristic vector corresponding to the characteristic value λ_v^A... If to the characteristic value λ_v^A there correspond $\sigma(\lambda_v^A)$ linearly independent vectors ($n-\sigma(\lambda_v^A)$ is the rank of $\left[\lambda_v^A I - A\right]$), then the rank of C_v does not exceed $\sigma(\lambda_v^A)$. In particular, if only one characteristic direction corresponds to λ_v^A, then in C_v the elements of any two columns are proportional."

C_v είναι ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα της A που συνδέεται με την ιδιοτιμή της λ_v^A. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε, ότι κάθε μη μηδενική γραμμή της μήτρας C_v είναι ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα της A που συνδέεται με την ιδιοτιμή της λ_v^A.

Πόρισμα 1. Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:

a) $\operatorname{rank} C_v = 1$

b) Κάθε μη μηδενική γραμμή ή στήλη της μήτρας C_v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της A που συνδέεται από αριστερά ή δεξιά αντίστοιχα με την ιδιοτιμή της λ_v^A.

c) $C_v \neq 0$

d) Η ιδιοτιμή λ_v^A της μήτρας A είναι ημι-απλή.

Απόδειξη: Στο Λήμμα (2) είδαμε ότι οι συνθήκες (c) και (d) είναι ισοδύναμες. Έστω ότι η ιδιοτιμή λ_v^A της μήτρας A είναι ημι-απλή, δηλαδή ισχύει η συνθήκη (d). Με βάση το Λήμμα (3) συνεπάγεται η συνθήκη (b). Όπως είναι γνωστό, στην ημι-απλή ιδιοτιμή λ_v^A αντιστοιχεί ένα γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα της A. Κατά συνέπεια, όλες οι μη μηδενικές γραμμές ή στήλες της μήτρας C_v θα είναι γραμμικά εξαρτημένες. Έτσι θα έχουμε:

$$\operatorname{rank} C_v = 1$$

Από την άλλη μεριά, αν υποθέσουμε ότι ισχύει:

$$\operatorname{rank} C_v = 1,$$

τότε προφανώς θα έχουμε:

$$C_v \neq 0$$ [17]

[17] Πράγματι, αν είχαμε:

Με βάση την ανωτέρω σχέση και το Λήμμα (2) συνεπάγεται η συνθήκη (d), από την οποία, όπως δείξαμε παραπάνω, προκύπτει η συνθήκη (b).

Πρόταση 1. Έστω η τυχαία ιδιοτιμή λ_v^A, $v=1,2,\ldots,s$, με $s \leq n$, της μη αρνητικής, τετραγωνικής μήτρας A, τάξης $n \times n$. Για ένα διάνυσμα x, τάξης $1 \times n$, θα ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[\lambda_v^A I - A, x\right]^T = n$$

ή

$$\operatorname{rank}\left[\lambda_v^A I - A, x^T\right] = n,$$

αν και μόνο αν για κάθε δεξιό ιδιοδιάνυσμα q και αριστερό ιδιοδιάνυσμα p, τάξης $n \times 1$ και $1 \times n$ αντίστοιχα, της A, που συνδέεται με την ιδιοτιμή της λ_v^A, ισχύει αντίστοιχα:

$$xq_v \neq 0$$

ή

$$p_v x^T \neq 0$$

Απόδειξη: Θα αναλύσουμε την αποδεικτική διαδικασία στα ακόλουθα στάδια:

$$C_v = 0,$$

τότε θα συνεπάγετο:

$$\operatorname{rank} C_v = 0,$$

εφόσον ο βαθμός κάθε μηδενικής μήτρας ορίζεται ίσος με το μηδέν. Για το θέμα αυτό βλ. Δασκαλόπουλος, σελ. 140. Αυτό όμως, σύμφωνα με την υπόθεσή μας:

$$\operatorname{rank} C_v = 1,$$

είναι άτοπο.

α) Ικανή συνθήκη: Υποθέτουμε ότι για κάθε τυχαίο δεξιό ιδιοδιάνυσμα q_ν της A, που συνδέεται με την ιδιοτιμή της λ_ν^A, ισχύει:

$$x q_\nu \neq 0,$$

Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα (1), η ιδιοτιμή λ_ν^A είναι ημι-απλή. Ως εκ τούτου ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[\lambda_\nu^A I - A\right] = n-1$$

Αν συμβολίσουμε με $B_{ij}^{(\nu)}$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του $\beta_{ij}^{(\nu)}$ στοιχείου της B_ν, τότε προφανώς ισχύει:

$$c_{ij}^{(\nu)} = B_{ji}^{(\nu)}$$

Έστω η ορίζουσα D_κ, τάξης $n \times n$, της μήτρας που προκύπτει από την μήτρα $[B_\nu, x]^T$, αν διαγράψουμε την κ, $\kappa = 1,2,\ldots,n$, γραμμή της μήτρας B_ν. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα D_κ ως προς την γραμμή της x έχουμε:

$$D_\kappa = \sum_{j=1}^{n} x_j \, B_{\kappa j}^{(\nu)}$$

$$D_\kappa = \sum_{j=1}^{n} x_j \, c_{j\kappa}^{(\nu)} \Rightarrow$$

$$D_\kappa = x \, C_\nu \, s_\kappa^T, \ \kappa = 1,2,\ldots,n, \tag{3}$$

όπου με s_κ^T συμβολίζουμε το στοιχειώδες διάνυσμα-στήλη (elementary vector) του οποίου η κ συνιστώσα είναι ίση με την μονάδα, ενώ όλες οι άλλες συνιστώσες είναι ίσες με το μηδέν. Σύμφωνα με το Λήμμα (2), θα υπάρχει μια τουλάχιστον μη μηδενική στήλη της μήτρας C_ν. Επίσης, σύμφωνα με το Λήμμα (3), κάθε μη μηδενική στήλη της μήτρας C_v αποτελεί ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα q_v της A, συνδεδεμένο με την ιδιοτιμή της λ_v^A, το οποίο, εξ υποθέσεως, δεν είναι κάθετο στο διάνυσμα x $\left(xq_v \neq 0\right)$. Επομένως, με βάση τη σχέση (3) καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ορίζουσα D_κ, $\kappa = 1,2,\ldots,n$, της μήτρας $\left[B_v, x\right]^T$ η οποία είναι διάφορη του μηδενός. Έτσι, αποδείξαμε ότι ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[\lambda_v^A I - A, x\right]^T = n$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε, ότι από τη σχέση:

$$p_v x^T \neq 0$$

συνεπάγεται:

$$\operatorname{rank}\left[\lambda_v^A - A, x^T\right] = n$$

b) Αναγκαία συνθήκη: Υποθέτουμε ότι ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[\lambda_v^A I - A, x\right]^T = n$$

Επομένως, θα υπάρχει τουλάχιστον μια ορίζουσα D_κ, $\kappa = 1,2,\ldots,n$, της μήτρας $\left[\lambda_v^A I - A, x\right]^T$, με την μορφή που περιγράψαμε παραπάνω, η οποία είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή ισχύει:

$\exists D_\kappa$, $\kappa = 1,2,\ldots,n$, τέτοιο ώστε: $D_\kappa \neq 0$ [18]

Από την υπόθεσή μας θα έχουμε:

---

[18] Εφόσον ισχύει:

$$\det\left[\lambda_v^A I - A\right] = 0$$

$$\text{rank}\left[\lambda_\nu^A I - A, x\right]^T = n \Longrightarrow$$

$$\text{rank}\left[\lambda_\nu^A I - A\right] = n - 1$$

Άρα, η ιδιοτιμή λ_ν^A της A είναι ημι-απλή. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα D_κ ως προς την γραμμή της x θα έχουμε:

$$D_\kappa \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \, B_{\kappa j}^{(\nu)} \neq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \, c_{j\kappa}^{(\nu)} \neq 0$$

$$x \, C_\nu \, s_\kappa^T \neq 0 \tag{4}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα (3) και τη σχέση (4), η στήλη κ της μήτρας A αποτελεί ένα δεξιό ιδιοδιάνυσμα q_ν της μήτρας A, συνδεμένο με την ιδιοτιμή της λ_ν^A, για το οποίο ισχύει:

$$xq_\nu \neq 0$$

Εφόσον η ιδιοτιμή λ_ν^A της μήτρας A είναι ημι-απλή, η ανωτέρω σχέση θα ισχύει γενικά για κάθε ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A, που συνδέεται με την ιδιοτιμή της λ_ν^A.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε, ότι από τη σχέση:

$$\text{rank}\left[\lambda_\nu^A - A, x^T\right] = n$$

συνεπάγεται:

$$p_\nu \, x^T \neq 0$$

Πόρισμα 2. Έστω λ_m^A η μέγιστη ιδιοτιμή της μη αρνητικής και μη διασπώμενης τετραγωνικής μήτρας A, τάξης $n \times n$. Αν θεωρήσουμε ένα τυχαίο μη μηδενικό διάνυσμα z, τάξης $1 \times n$, του οποίου όλες οι μη μηδενικές συνιστώσες είναι ομόσημες, θα ισχύει:

$$rank\left[\lambda_m^A I - A, z\right]^T = n \succ rank\left[\lambda_m^A I - A\right] = n - 1$$

και

$$rank\left[\lambda_m^A I - A, z^T\right] = n \succ rank\left[\lambda_m^A I - A\right] = n - 1$$ [19]

Απόδειξη: Σύμφωνα με το θεώρημα του Frobenius, στην μέγιστη ιδιοτιμή λ_m^A της μη αρνητικής και μη διασπώμενης μήτρας A, που είναι μια πραγματική, θετική και απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυώνυμου της A, συνδέεται ένα γραμμικά ανεξάρτητο, θετικό ιδιοδιάνυσμα (ακριβέστερα: ένα ιδιοδιάνυσμα του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι ομόσημες).[20] Έστω p_m και q_m τα θετικά ιδιοδιανύσματα της μήτρας A που συνδέονται από αριστερά και δεξιά αντίστοιχα με την μέγιστη ιδιοτιμή της λ_m^A. Προφανώς ισχύει:

- είτε $p_m z \succ 0$
- είτε $p_m z \prec 0$

Σε κάθε περίπτωση έχουμε:

$$p_m z \neq 0$$

---

[19] Από το Πόρισμα (2) συνεπάγεται, ότι, αν στη χαρακτηριστική μήτρα $\left[\lambda_m^A I - A\right]$ της μήτρας A ως προς την μέγιστη ιδιοτιμή της λ_m^A αντικαταστήσουμε μια οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη της με ένα ημιθετικό ή ημιαρνητικό διάνυσμα, ή προκύπτουσα μήτρα είναι ομαλή.

[20] Για την απόδειξη του θεωρήματος του Frobenius, βλ. Gantmacher [1966, σσ. 49-58].

Επομένως, από την ανωτέρω σχέση και την Πρόταση (1) συνεπάγεται:

$$rank\left[\lambda_m^A I - A, z\right]^T = n \succ rank\left[\lambda_m^A I - A\right] = n-1$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι:

$$rank\left[\lambda_m^A I - A, z^T\right] = n \succ rank\left[\lambda_m^A I - A\right] = n-1$$

4. ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Από την μορφή του υποδείγματος[21] προκύπτει, ότι το διάνυσμα τιμών p, τάξης $1\times n$, των n παραγόμενων εμπορευμάτων της τεχνικής $\left[A,l\right]^T$ προσδιορίζεται από το σύστημα εξισώσεων:

$$p = pA\left(1+r\right)+wl \tag{1}$$

Από το σύστημα (1) προκύπτει:

$$p\left[I-\left(1+r\right)A\right]=wl \tag{2}$$

Η μήτρα A είναι εξ υποθέσεως διασπώμενη.[22] Διαμερίζουμε το διάνυσμα άμεσης εργασίας l ως εξής:

$$l=\left(l_1,l_2\right),$$

όπου l_1 το υποδιάνυσμα, τάξης $1\times k$, των άμεσων εργασιών που εισέρχονται στην παραγωγή των βασικών εμπορευμάτων και l_2 το υποδιάνυσμα, τάξης $1\times\left(n-k\right)$, των άμεσων εργασιών που εισέρχονται στην παραγωγή των μη βασικών εμπορευμάτων. Ανάλογα προς το διάνυσμα l, διαμερίζουμε το διάνυσμα p των τιμών των n παραγόμενων εμπορευμάτων ως εξής:

$$p=\left(p_1,p_2\right),$$

όπου p_1 το υποδιάνυσμα, τάξης $1\times k$, των τιμών των βασικών εμπορευμάτων και p_2 το υποδιάνυσμα τάξης, $1\times\left(n-k\right)$, των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων.

---

[21] Βλ. τις υποθέσεις (2.1) - (2.14).

[22] Βλ. την υπόθεση (2.13).

Αν λάβουμε υπόψη μας τον διαμερισμό των διανυσμάτων l και p και την κανονική μορφή της μήτρας A, που περιγράφει η σχέση (2.1), τότε το σύστημα εξισώσεων (2) αναλύεται στα επιμέρους υποσυστήματα:

$$p_1\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]=wl_1 \text{ [23]} \tag{3}$$

και

$$p_2\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]=p_1A_{12}(1+r)+wl_2 \text{ [24]} \tag{4}$$

Στη συνέχεια θα διερευνήσουμε διαδοχικά τα συστήματα προσδιορισμού των τιμών (3) και (4), των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων αντίστοιχα, για τις μη αρνητικές τιμές των μεταβλητών τους, δηλαδή του διανύσματος τιμών p_1, του διανύσματος τιμών p_2, του ονομαστικού ωρομισθίου w και του ποσοστού κέρδους r. Για λόγους πληρότητας, θα θεωρήσουμε εναλλακτικά την τιμή του ποσοστού κέρδους r και του ονομαστικού ωρομισθίου w ως την ανεξάρτητη μεταβλητή της κατανομής του εισοδήματος που καθορίζεται εξωγενώς. Έτσι έχουμε:

I. Η εξωγενώς καθορισμένη μεταβλητή της κατανομής είναι η τιμή r του ποσοστού κέρδους

Αρχικά, θα θεωρήσουμε το ποσοστό κέρδους r ως την ανεξάρτητη μεταβλητή της κατανομής του εισοδήματος, της οποίας η τιμή καθορίζεται εξωγενώς.[25] Θα διαχωρίσουμε τις μη αρνητικές, δηλαδή τις οικονομικά σημαντικές, τιμές του ποσοστού κέρδους στα ακόλουθα επιμέρους διαστήματα μη αρνητικών τιμών.

---

[23] Με I_1 θα συμβολίζουμε την μοναδιαία μήτρα τάξης $k\times k$.

[24] Με I_2 θα συμβολίζουμε την μοναδιαία μήτρα τάξης $(n-k)\times(n-k)$.

[25] Βλέπε Sraffa [1985, § 44, σελ. 65].

1. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους ανήκει στο διάστημα $0 \leq r \prec R$[26]

Θα συζητήσουμε ξεχωριστά τον προσδιορισμό των τιμών των βασικών εμπορευμάτων από τον προσδιορισμό των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων.

1.a. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων

Για κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $0 \leq r \prec R$ η μήτρα $\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]$ είναι μια μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα.[27] Επομένως, επιλύοντας το σύστημα (3) ως προς p_1 προκύπτει:

---

[26] Ορίζουμε την τιμή R του ποσοστού κέρδους ως εξής:

$$R = \min(R_1, R_2),$$

όπου:

$$R_1 = \frac{1-\lambda_m^{A_{11}}}{\lambda_m^{A_{11}}}$$

και

$$R_2 = \frac{1-\lambda_m^{A_{22}}}{\lambda_m^{A_{22}}}$$

Με βάση τη σχέση (2.2) θα έχουμε:

$$R = \frac{1-\lambda_m^{A}}{\lambda_m^{A}} = \frac{1-\lambda_m^{A_{22}}}{\lambda_m^{A_{22}}} = R_2 \leq R_1 = \frac{1-\lambda_m^{A_{11}}}{\lambda_m^{A_{11}}} \qquad (5)$$

[27] Θεωρούμε το σύνολο μητρών $Z^{n\times n}$, όπου:

$$Z^{n\times n} = \left\{M = (m_{ij}) \in R^{n\times n} : a_{ij} \leq 0, i \neq j\right\}$$

Προφανώς, κάθε μήτρα M της μορφής:

$$M = sI - A, \text{ με } s \succ 0 \text{ και } A \geq 0,$$

ανήκει στο σύνολο $Z^{n\times n}$.

Ορισμός: Κάθε μήτρα M, όπου $M \in Z^{n\times n}$, για την οποία ισχύει $s \geq \lambda_m^A$, ονομάζεται Μ-μήτρα. Ειδικότερα, αν ισχύει:

$$s \succ \lambda_m^A,$$

η μήτρα M είναι μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα. Βλ. Berman and Plemmons [1979, σσ. 132-133]. Για μια ιστορική αναδρομή πάνω στην έννοια της Μ-μήτρας βλ. Berman and Plemmons [1979, σελ. 161]. Έτσι, σύμφωνα με

$$p_1 = wl_1\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]^{-1} \qquad (6)$$

Γνωρίζουμε ότι η αντίστροφη μιας μη ιδιάζουσας, μη διασπώμενης Μ-μήτρας είναι θετική.[28] Κατά συνέπεια, το διάνυσμα τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων είναι:

- είτε ομόσημο με την τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου, όταν η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι διάφορη του μηδενός
- είτε ίσο με το μηδέν, όταν η τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με μηδέν.

Το σύστημα (6) αποτελείται από k εξισώσεις και περιέχει $k+1$ αγνώστους: τις k τιμές του διανύσματος τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων και την τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου. Έτσι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, που περιέχεται στο διάστημα τιμών $0 \leq r \prec R$, αντιστοιχεί το επαυξημένο διάνυσμα τιμών (p_1, w) που περιέχει τις τιμές των k βασικών, παραγόμενων εμπορευμάτων και την τιμή του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης. Αντίστοιχα, το επαυξημένο διάνυσμα τιμών (p_1, w) θα είναι:

- είτε ένα μονοσήμαντα προσδιορισμένο, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), θετικό διάνυσμα (p_1, w), με $(p_1, w) \succ 0$ *(μη τετριμμένη λύση)*
- είτε το μηδενικό διάνυσμα (p_1, w), με $(p_1, w) = 0$ *(τετριμμένη λύση).* [29]

τον ανωτέρω ορισμό, η μήτρα $\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]$ είναι μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα αν και μόνο αν ισχύει:

$$\frac{1}{1+r} \succ \lambda_m^{A_{11}}$$

ή

$$-1 \prec r \prec R_1 .$$

[28] Βλ. Berman and Plemmons [1979, σελ. 141].

[29] Θεωρούμε μόνο τις ανωτέρω λύσεις, επειδή προφανώς μόνο αυτές έχουν οικονομικό ενδιαφέρον.

1.b. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων

Για κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $0 \leq r \prec R$, η μήτρα $\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]$ είναι μια μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα.[30] Επομένως, επιλύοντας το σύστημα (4) ως προς p_2 προκύπτει:

$$p_2=\left[p_1A_{12}(1+r)+wl_2\right]\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]^{-1} \tag{7}$$

Προφανώς, η επίλυση του συστήματος (7) ως προς το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων εξαρτάται από το επαυξημένο διάνυσμα τιμών (p_1,w), το οποίο προσδιορίζεται από την επίλυση του συστήματος (6).

Εφόσον η μήτρα $\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]^{-1}$ είναι θετική, το διάνυσμα τιμών p_2 των $n-k$ μη βασικών, παραγόμενων εμπορευμάτων θα είναι αντίστοιχα:

- είτε ένα μονοσήμαντα προσδιορισμένο, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), θετικό διάνυσμα p_2, με $p_2 \succ 0$ *(μη τετριμμένη λύση)*[31]
- είτε το μηδενικό διάνυσμα p_2, με $p_2=0$ *(τετριμμένη λύση).*[32]

---

[30] Η μήτρα $\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]$ είναι μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα, αν και μόνο αν η μήτρα A_{22} είναι μια μη διασπώμενη μήτρα κι επιπλέον ισχύει:

$$\frac{1}{1+r} \succ \lambda_m^{A_{22}}$$

ή

$$-1 \prec r \prec R_2$$

Με βάση τη σχέση (5), η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$-1 \prec r \prec R$$

[31] Η ανωτέρω λύση αντιστοιχεί στην *μη τετριμμένη* λύση του συστήματος (6) προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων.

[32] Η ανωτέρω λύση αντιστοιχεί στην *τετριμμένη* λύση του συστήματος (6) προσδιορισμού των τιμών των

1.c. Συμπέρασμα: Οι οικονομικά σημαντικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου στο διάστημα $0 \leq r \prec R$ του ποσοστού κέρδους r

Από την διερεύνηση των συστημάτων προσδιορισμού των τιμών των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων που προηγήθηκε συμπεραίνουμε, ότι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $0 \leq r \prec R$, υπάρχει μια μοναδική, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), μη μηδενική λύση για το επαυξημένο διάνυσμα (p, w) των τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης. Η λύση αυτή είναι οικονομικά σημαντική, δηλαδή ημιθετική,[33] και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$p \succ 0$$

και

$$w \succ 0$$ [34]

βασικών εμπορευμάτων.

[33] Προκειμένου για τις τιμές του ποσοστού κέρδους r και του ονομαστικού ωρομισθίου w οι οικονομικά σημαντικές λύσεις είναι απλώς μη αρνητικές. Για μια συζήτηση πάνω στο θέμα αυτό κι ειδικότερα πάνω στην δυνατότητα η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w να είναι ίση με το μηδέν βλέπε Sraffa [1985, § 8, σσ. 33-34 και Παράρτημα Δ, § 2, σελ. 140]. Από την άλλη μεριά, οικονομικά σημαντικές λύσεις για τις τιμές p των n παραγόμενων εμπορευμάτων θα πρέπει να θεωρηθούν οι ημιθετικές τιμές. Για το λόγο αυτό απορρίπτουμε την τετριμμένη λύση, δηλαδή την μηδενική λύση $(p, w) = 0$.

[34] Προφανώς, η μοναδική οικονομικά σημαντική λύση είναι όχι απλώς ημιθετική, αλλά θετική.

2. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους είναι ίση με R

Θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

2.1. Η τιμή R του ποσοστού κέρδους είναι μικρότερη της τιμής R_1 $(R \prec R_1)$[35]

Θα συζητήσουμε ξεχωριστά τον προσδιορισμό των τιμών των βασικών εμπορευμάτων από τον προσδιορισμό των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων.

2.1.a. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων

Αντικαθιστώντας την τιμή R του ποσοστού κέρδους στο σύστημα (3) προκύπτει το σύστημα:

$$p_1\left[I_1-(1+R)A_{11}\right]=wl_1 \tag{8}$$

Για την τιμή R του ποσοστού κέρδους η μήτρα $\left[I_1-(1+R)A_{11}\right]$ είναι μια μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα.[36] Επομένως, αν επιλύσουμε το σύστημα (8) ως προς το διάνυσμα τιμών p_1 θα έχουμε:

$$p_1=wl_1\left[I_1-(1+R)A_{11}\right]^{-1} \tag{9}$$

Γνωρίζουμε ότι η αντίστροφη μιας μη ιδιάζουσας, μη διασπώμενης Μ-μήτρας είναι θετική. Κατά συνέπεια, το διάνυσμα τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων είναι:

---

[35] Από τη σχέση (5) προκύπτει, ότι η ανωτέρω περίπτωση είναι ισοδύναμη με την υπόθεση:

$$\lambda_m^{A_{11}} \prec \lambda_m^{A_{22}} = \lambda_m^{A}$$

[36] Η απόδειξη είναι απλούστατη, αν λάβουμε υπόψη μας ότι:

$$R=\frac{1-\lambda_m^A}{\lambda_m^A}$$

και

$$\lambda_m^{A_{11}} \prec \lambda_m^{A}.$$

- είτε ομόσημο με την τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου, όταν η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι διάφορη του μηδενός
- είτε ίσο με το μηδέν, όταν η τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με μηδέν.

Το σύστημα (9) αποτελείται από k εξισώσεις και περιέχει $k+1$ αγνώστους: τις k τιμές του διανύσματος τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων και την τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου. Έτσι, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους αντιστοιχεί το επαυξημένο διάνυσμα τιμών (p_1, w) που περιέχει τις τιμές των k βασικών, παραγόμενων εμπορευμάτων και την τιμή του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης. Αντίστοιχα, το επαυξημένο διάνυσμα τιμών (p_1, w) θα είναι:

- είτε ένα μονοσήμαντα προσδιορισμένο, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), θετικό διάνυσμα (p_1, w), με $(p_1, w) \succ 0$ *(μη τετριμμένη λύση)*
- είτε το μηδενικό διάνυσμα (p_1, w), με $(p_1, w) = 0$ *(τετριμμένη λύση)*.[37]

2.1.b. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων

Αν στο σύστημα (4) αντικαταστήσουμε την τιμή r του ποσοστού κέρδους με την τιμή R, θα έχουμε:

$$p_2\left[I_2 - (1+R)A_{22}\right] = p_1 A_{12}(1+R) + wl_2 \tag{10}$$

Στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η επίλυση του συστήματος (10) ως προς το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων εξαρτάται από το επαυξημένο διάνυσμα τιμών (p_1, w), το οποίο προσδιορίζεται από την επίλυση του συστήματος (9). Η μήτρα $\left[I_2 - (1+R)A_{22}\right]$ είναι μια ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα.

[37] Θεωρούμε μόνο τις ανωτέρω λύσεις, επειδή προφανώς μόνο αυτές έχουν οικονομικό ενδιαφέρον.

Εφαρμόζοντας την *μη τετριμμένη* λύση του συστήματος (9)[38] στο σύστημα (10) θα έχουμε:

$$\operatorname{rank}\left[I_2-(1+R)A_{22},\ p_1A_{12}(1+R)+wl_2\right]^T=n\succ\operatorname{rank}\left[I_2-(1+R)A_{22}\right]=n-1$$ [39]

Επομένως, το σύστημα (10) είναι *ασυμβίβαστο*.[40]

Αν όμως στο σύστημα (10) εφαρμόσουμε την *τετριμμένη* λύση του συστήματος (9)[41], το σύστημα (10) λαμβάνει την μορφή:

$$p_2\left[I_2-(1+R)A_{22}\right]=0 \tag{11}$$

Οι δυνατές μορφές του διανύσματος p_2 των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων που αποτελούν λύσεις του συστήματος (11) είναι οι εξής:

- Η *μη τετριμμένη* λύση p_2, όπου το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων είναι το θετικό, προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to

---

38 Βλέπε την παράγραφο (2.1.a).

39 Εφόσον η μήτρα A_{22} αποτελεί μια μη αρνητική και μη διασπώμενη τετραγωνική μήτρα και ισχύει:

$$R=\frac{1-\lambda_m^A}{\lambda_m^A},$$

$$\lambda_m^A=\lambda_m^{A_{22}}$$

και

$$p_1A_{12}(1+R)+wl_2\succ 0,$$

η απόδειξη αποτελεί απλή εφαρμογή του Πορίσματος (3.2).

40 Βλ. Δασκαλόπουλος, σσ. 168-170. Από οικονομική άποψη αυτό σημαίνει, ότι αν οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι θετικές $(p_1\succ 0)$ και ισχύει $R=R_2\prec R_1$, η τεχνική παραγωγής δεν επιτρέπει την συνύπαρξη ενός ενιαίου ποσοστού κέρδους ίσου με R και ενός θετικού ονομαστικού ωρομισθίου $(w\succ 0)$.

41 Βλέπε την παράγραφο (2.1.a).

scalar multiplication), ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{22}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{22}}\left(=\frac{1}{1+R_2}\right)$[42] και

- Η *τετριμμένη* λύση p_2, με $p_2=0$.

2.1.c. Συμπέρασμα: Οι οικονομικά σημαντικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου στην τιμή R του ποσοστού κέρδους $r\left(R\prec R_1\right)$

Από την εξέταση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων που προηγήθηκε συμπεραίνουμε, ότι, στην τιμή R, με $R\prec R_1$, του ποσοστού κέρδους, οι μη αρνητικές λύσεις για το επαυξημένο διάνυσμα $\left(p_1,w\right)$ των τιμών p_1 των k παραγόμενων, βασικών εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης, είναι οι εξής:

- Το μονοσήμαντα προσδιορισμένο, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), θετικό διάνυσμα $\left(p_1,w\right)$, με $\left(p_1,w\right)\succ 0$ *(μη τετριμμένη λύση)* και
- Το μηδενικό διάνυσμα $\left(p_1,w\right)$, με $\left(p_1,w\right)=0$ *(τετριμμένη λύση).*

Αν εφαρμόσουμε την *μη τετριμμένη* λύση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων στο σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, το ανωτέρω σύστημα είναι *ασυμβίβαστο.* Αν, όμως, εφαρμόσουμε την *τετριμμένη* λύση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων στο σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών

---

[42] Βλέπε το σχετικό θεώρημα του Frobenius. Επειδή, σύμφωνα με το θεώρημα του Frobenius, η μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_m^{A_{22}}$ της μη διασπώμενης υπομήτρας A_{22} είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού της πολυώνυμου, το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων είναι προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού. Βλ. Gantmacher [1966, σελ. 49].

εμπορευμάτων, τότε το ανωτέρω σύστημα λαμβάνει την μορφή του *επιλυόμενου θετικά* ιδιοσυστήματος (11).

Επομένως, από την διερεύνηση των συστημάτων προσδιορισμού των τιμών των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων που προηγήθηκε συμπεραίνουμε, ότι, στην τιμή R, με $R \prec R_1$, του ποσοστού κέρδους αντιστοιχεί μια μοναδική, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), μη μηδενική λύση για το επαυξημένο διάνυσμα (p, w) των τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης. Επιπλέον, η ανωτέρω μοναδική, μη μηδενική λύση είναι οικονομικά σημαντική, δηλαδή ημιθετική, και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$w = 0$$

$$p_1 = 0$$

και

$$\mathrm{p}_2 \succ 0$$ [43]

[43] Υπενθυμίζουμε, ότι με το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων συμβολίζουμε το προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication) θετικό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{22}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{22}} \left(= \lambda_m^{A}\right)$.

Ακολουθώντας μια ανάλογη αποδεικτική διαδικασία αποδεικνύουμε, ότι στην μήτρα τεχνικών συντελεστών A αντιστοιχεί ένα πρότυπο εμπόρευμα, που αποτελείται από θετικές ποσότητες όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων.

2.2. Η τιμή R του ποσοστού κέρδους είναι ίση με την τιμή R_1 $\left(R = R_1\right)$[44]

Θα συζητήσουμε ξεχωριστά τον προσδιορισμό των τιμών των βασικών εμπορευμάτων από τον προσδιορισμό των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων.

2.2.a. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων

Η μήτρα $\left[I_1 - \left(1+R\right)A_{11}\right]$ είναι μια ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα. Αν στην τιμή R του ποσοστού κέρδους αντιστοιχούσε μια θετική τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου $\left(w \succ 0\right)$, τότε για το σύστημα (8) θα ίσχυε:

$$\operatorname{rank}\left[I_1 - \left(1+R\right)A_{11},\ wl_1\right]^T = n \succ \operatorname{rank}\left[I_1 - \left(1+R\right)A_{11}\right] = n-1$$ [45]

Επομένως, το σύστημα (8) θα ήταν *ασυμβίβαστο.*[46]

---

[44] Από τη σχέση (5) προκύπτει, ότι η ανωτέρω περίπτωση είναι ισοδύναμη με την υπόθεση:

$$\lambda_m^{A_{11}} = \lambda_m^{A_{22}} = \lambda_m^{A}$$

Ο προσδιορισμός των τιμών και της σύνθεσης του πρότυπου εμπορεύματος, στην περίπτωση γραμμικών τεχνικών παραγωγής που ισχύει η ανωτέρω σχέση, αποτέλεσε για πρώτη φορά αντικείμενο μελέτης στην βιβλιογραφία με την εργασία των Βουγιουκλάκη και Μαριόλη [1992].

[45] Εφόσον η μήτρα A_{11} αποτελεί μια μη αρνητική και μη διασπώμενη τετραγωνική μήτρα και ισχύει:

$$R = \frac{1-\lambda_m^A}{\lambda_m^A}$$

$$\lambda_m^A = \lambda_m^{A_{11}}$$

και

$$wl_1 \succ 0,$$

η απόδειξη αποτελεί απλή εφαρμογή του Πορίσματος (3.2).

[46] Από οικονομική άποψη αυτό σημαίνει, ότι αν ισχύει $R = R_1 = R_2$, η τεχνική παραγωγής δεν επιτρέπει την συνύπαρξη ενός ενιαίου ποσοστού κέρδους ίσου με R και ενός θετικού ονομαστικού ωρομισθίου $\left(w \succ 0\right)$.

Αντίθετα, αν υποθέσουμε ότι στην τιμή R του ποσοστού κέρδους αντιστοιχεί μια τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου ίση με μηδέν $(w=0)$, τότε από το σύστημα (8) θα έχουμε:

$$p_1\left[I_1-(1+R)A_{11}\right]=0 \tag{12}$$

Οι δυνατές μορφές του διανύσματος p_1 των τιμών των βασικών εμπορευμάτων που αποτελούν λύσεις του συστήματος (12) είναι οι εξής:

- Η *μη τετριμμένη* λύση p_1, όπου το διάνυσμα p_1 των τιμών των βασικών εμπορευμάτων είναι το θετικό, προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{11}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{11}}\left(=\dfrac{1}{1+R_1}\right)$[47] και
- Η *τετριμμένη λύση* $p_1=0$.

2.2.b. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων

Αν στο σύστημα (10) θέσουμε την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου ίση με μηδέν $(w=0)$ κι εφαρμόσουμε την *μη τετριμμένη* λύση του συστήματος (12), θα έχουμε:

$$p_2\left[I_2-(1+R)A_{22}\right]=\mathrm{p}_1A_{12}(1+R) \tag{13}$$

Η μήτρα $\left[I_2-(1+R)A_{22}\right]$ είναι μια ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα. Έτσι, για το σύστημα (13) θα ισχύει:

---

[47] Βλέπε το σχετικό θεώρημα του Frobenius. Επειδή, σύμφωνα με το θεώρημα του Frobenius, η μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_m^{A_{11}}$ της μη διασπώμενης μήτρας A_{11} είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού της πολυώνυμου, το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων είναι προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού. Βλ. Gantmacher [1966, σελ. 49].

$$\operatorname{rank}\left[I_2-(1+R)A_{22},\ p_1A_{12}(1+R)\right]^T = n \succ \operatorname{rank}\left[I_2-(1+R)A_{22}\right] = n-1$$ [48]

Επομένως, το σύστημα (13) είναι *ασυμβίβαστο*.[49]

Αν όμως στο σύστημα (10) θέσουμε την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου ίση με μηδέν $(w=0)$ κι εφαρμόσουμε την *τετριμμένη* λύση $(p_1=0)$ του συστήματος (12), τότε προκύπτει το σύστημα (11).

Όπως έχουμε δείξει, οι δυνατές μορφές του διανύσματος p_2 των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων που αποτελούν λύσεις του συστήματος (11) είναι οι εξής:

- Η *μη τετριμμένη* λύση p_2, όπου το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων είναι το θετικό, προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{22}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{22}}\left(=\dfrac{1}{1+R_2}\right)$[50] και
- Η *τετριμμένη* λύση $p_2=0$.

---

[48] Εφόσον η μήτρα A_{22} αποτελεί μια μη αρνητική και μη διασπώμενη τετραγωνική μήτρα και ισχύει:

$$R=\frac{1-\lambda_m^A}{\lambda_m^A},$$

$$\lambda_m^A=\lambda_m^{A_{22}}$$

και

$$p_1A_{12}(1+R)\succ 0$$

η απόδειξη αποτελεί απλή εφαρμογή του Πορίσματος (3.2).

[49] Βλ. Δασκαλόπουλος, σσ. 168-170. Από οικονομική άποψη αυτό σημαίνει, ότι αν οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι θετικές $(p_1\succ 0)$ και ισχύει $R=R_1=R_2$, η τεχνική παραγωγής δεν επιτρέπει την συνύπαρξη ενός ενιαίου ποσοστού κέρδους ίσου με R και ενός θετικού ονομαστικού ωρομισθίου $(w\succ 0)$.

[50] Βλέπε το σχετικό θεώρημα του Frobenius στον Gantmacher [1966, σελ. 49].

2.2.c. Συμπέρασμα: Οι οικονομικά σημαντικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου στην τιμή R του ποσοστού κέρδους $r\left(R=R_1\right)$

Από την εξέταση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων, που προηγήθηκε, συμπεραίνουμε, ότι, στην τιμή R, με $R=R_1$, του ποσοστού κέρδους, οι μη αρνητικές λύσεις για το επαυξημένο διάνυσμα $\left(p_1, w\right)$ των τιμών p_1 των k παραγόμενων, βασικών εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης, είναι οι εξής:

$$w=0$$

και

- *είτε η μη τετριμμένη* λύση $\mathbf{p}_1$, όπου το διάνυσμα $\mathbf{p}_1$ των τιμών των βασικών εμπορευμάτων είναι το θετικό, προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{11}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{11}}\left(=\dfrac{1}{1+R_1}\right)$
- είτε η *τετριμμένη* λύση $p_1=0$.

Αν εφαρμόσουμε την *μη τετριμμένη* λύση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων στο σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, το ανωτέρω σύστημα είναι *ασυμβίβαστο.* Αν, όμως, εφαρμόσουμε την *τετριμμένη* λύση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων στο σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, τότε το ανωτέρω σύστημα λαμβάνει την μορφή του *επιλυόμενου θετικά* ιδιοσυστήματος (11).

Επομένως, από την διερεύνηση των συστημάτων προσδιορισμού των τιμών των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων, που προηγήθηκε, συμπεραίνουμε, ότι, στην τιμή R, με $R = R_1$, του ποσοστού κέρδους αντιστοιχεί μια μοναδική, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), μη μηδενική λύση για το επαυξημένο διάνυσμα (p, w) των τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης. Επιπλέον, η ανωτέρω μοναδική, μη μηδενική λύση είναι οικονομικά σημαντική, δηλαδή ημιθετική, και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$w = 0$$

$$p_1 = 0$$

και

$$\mathrm{p}_2 \succ 0$$ [51, 52, 53]

3. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$[54]

Θα συζητήσουμε ξεχωριστά τον προσδιορισμό των τιμών των βασικών εμπορευμάτων από τον προσδιορισμό των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων.

---

[51] Υπενθυμίζουμε, ότι με το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων συμβολίζουμε το προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication) θετικό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{22}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{22}} \left(= \lambda_m^A\right)$.

[52] Εφόσον η ανωτέρω λύση είναι όχι απλώς η μοναδική ημιθετική, αλλά, όπως δείξαμε, η μοναδική μη μηδενική, προκύπτει το πρόσθετο συμπέρασμα, ότι η μέγιστη ιδιοτιμή λ_m^A της μήτρας A είναι, καίτοι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού της πολυώνυμου, ημι-απλή.

[53] Ακολουθώντας μια ανάλογη διαδικασία μπορούμε να δείξουμε, ότι το πρότυπο εμπόρευμα (standard commodity) στην περίπτωση γραμμικών τεχνικών παραγωγής με την ανωτέρω ιδιότητα είναι μονοσήμαντα καθορισμένο και περιλαμβάνει σε θετικές ποσότητες όλα τα βασικά εμπορεύματα, ενώ σε μηδενικές όλα τα μη βασικά.

[54] Από τη σχέση (5) προκύπτει, ότι η ανωτέρω περίπτωση είναι ισοδύναμη με την υπόθεση:

$$\lambda_m^{A_{11}} \prec \lambda_m^{A_{22}} = \lambda_m^A$$

3.a. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων

Στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$ του ποσοστού κέρδους η μήτρα $\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]$ είναι μια μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα. Επομένως, με βάση τη σχέση (6), συμπεραίνουμε, ότι, όσον αφορά τον προσδιορισμό των τιμών των βασικών εμπορευμάτων, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$ ισχύουν όσα είδαμε παραπάνω να ισχύουν στο διάστημα $0 \leq r \prec R$.[55] Έτσι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in (R, R_1)$, αντιστοιχεί το επαυξημένο διάνυσμα τιμών (p_1, w) που περιέχει τις τιμές των k βασικών, παραγόμενων εμπορευμάτων και την τιμή του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης. Το επαυξημένο διάνυσμα τιμών θα είναι:

- είτε ένα μονοσήμαντα προσδιορισμένο, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), θετικό διάνυσμα (p_1, w), με $(p_1, w) \succ 0$ *(μη τετριμμένη λύση)*
- είτε το μηδενικό διάνυσμα (p_1, w), με $(p_1, w) = 0$ *(τετριμμένη λύση)*.

3.b. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων

Στο διάστημα τιμών $R \prec r \prec R_1$ του ποσοστού κέρδους r περιέχονται το πολύ $n-k-1$ ρίζες της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = 0$ της μήτρας A_{22}.[56]

---

[55] Βλέπε την παράγραφο (1.a).

[56] Η "χαρακτηριστική" εξίσωση $\det\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = 0$ της μήτρας A_{22} είναι μια αλγεβρικά μετασχηματισμένη μορφή της χαρακτηριστικής της εξίσωσης $\det\left[\lambda I_2 - A_{22}\right] = 0$. Η μήτρα A_{22} είναι μια τετραγωνική μήτρα τάξης $(n-k) \times (n-k)$. Έτσι, σε κάθε ιδιοτιμή $\lambda_i^{A_{22}}$, $i = 1,2,\ldots,n-k$, της μήτρας A_{22} αντιστοιχεί μια τιμή $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} = \dfrac{1-\lambda_i^{A_{22}}}{\lambda_i^{A_{22}}}$, $i = 1,2,\ldots,n-k$, του ποσοστού κέρδους. Προφανώς, στη

Θα δείξουμε, ότι σε καμία τιμή r του ποσοστού κέρδους, όπου $r \in (R, R_1)$, δεν είναι δυνατή η διαμόρφωση ενός *ημιθετικού* διανύσματος τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων. Πράγματι, σε κάθε τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in (R, R_1)$, με την οποία συνδέεται είτε ένα θετικό είτε ένα ίσο με το μηδέν επαυξημένο διάνυσμα (p_1, w) των τιμών των βασικών εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου, θα αντιστοιχεί μια από τις παρακάτω επιμέρους περιπτώσεις:

Α. Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, όπου $r \in (R, R_1)$, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου είναι θετικές και προσδιορισμένες με ένα βαθμό ελευθερίας *(μη τετριμμένη λύση).*

Στην προκείμενη περίπτωση, το σύστημα (4) είναι μη αρνητικά επιλύσιμο ως προς το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων, αν και μόνο αν η μήτρα $[I_2 - (1+r)A_{22}]$ είναι μια μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα.[57] Αν θεωρήσουμε μόνο τις

θετική μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_m^{A_{22}}$ της μήτρας A_{22} αντιστοιχεί η ελάχιστη θετική, πραγματική ρίζα R_2, όπου $R_2 = \dfrac{1-\lambda_m^{A_{22}}}{\lambda_m^{A_{22}}}$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det[I_2 - (1+r)A_{22}] = 0$ της μήτρας A_{22}. Επομένως, στο διάστημα $R_2 \prec r \prec \infty$ του ποσοστού κέρδους υπάρχουν το πολύ $n-k-1$ πραγματικές ρίζες της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det[I_2 - (1+r)A_{22}] = 0$ της μήτρας A_{22}.

[57] Βλ. τις συνθήκες I_{27} και I_{28} στους Berman and Plemmons [1979, σελ. 136]. Επίσης, η ίδια πρόταση διατυπώνεται και αποδεικνύεται στον Nikaido [1968, σσ. 93-94], με την διαφορά, ότι ο Nikaido δεν αναφέρεται σε Μ-μήτρα αλλά σε μια μήτρα της οποίας ή όλες οι πρωτεύουσες ελάσσονες ορίζουσες (principal minors) ή όλες οι κύριες πρωτεύουσες ελάσσονες ορίζουσες (leading principal minors) είναι θετικές Οι ανωτέρω συνθήκες, από τις οποίες η πρώτη έγινε γνωστή στην οικονομική φιλολογία από τους Hawkins and Simon [1949] ως "Hawkins-Simon condition", είναι ισοδύναμες. Για την απόδειξη βλ. Nikaido [1968, σσ. 93-94]. Επιπλέον, ικανοποιούνται, αν και μόνο αν η θεωρούμενη μήτρα είναι Μ-μήτρα. Για την απόδειξη βλέπε τις συνθήκες A_1 και E_{17} στους Berman and Plemmons [1979, σσ. 134-135]. Τέλος, από τους Berman and Plemmons [1979, σσ. 161-162 και 252-253] μαθαίνουμε, ότι η επονομαζόμενη "Hawkins-Simon condition" διατυπώνεται για πρώτη φορά από τον Ostrowski [1937], ως ορισμός της μη ιδιάζουσας Μ-μήτρας.

οικονομικά σημαντικές, δηλαδή τις μη αρνητικές τιμές του ποσοστού κέρδους, η μήτρα $\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]$ είναι μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα, αν και μόνο αν το r ανήκει στο διάστημα $\left[0,R\right)$.[58] Επομένως, από τις σχέσεις (4) και (6) συνεπάγεται, ότι σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r\in(R,R_1)$, με την οποία συνδέεται μια θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου $(w\succ 0)$[59], ανεξάρτητα αν η τιμή r του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ή *δεν αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}, αντιστοιχεί - όταν φυσικά το σύστημα προσδιορισμού των μη βασικών εμπορευμάτων είναι συμβιβαστό[60] - ένα διάφορο του μηδενός διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων, το οποίο περιέχει αρνητικές συνιστώσες. Δηλαδή, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα μη βασικό εμπόρευμα, του οποίου η τιμή είναι αρνητική.

---

[58] Στην παράγραφο (1.b), όπου το ποσοστό κέρδους r λαμβάνει τιμές στο διάστημα $\left[0,R\right)$ κι ως εκ τούτου η μήτρα $\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]$ είναι μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα, δείξαμε ότι το σύστημα (4) είναι μη αρνητικά επιλύσιμο ως προς το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων (Ικανή συνθήκη).

[59] Άρα, και ένα θετικό διάνυσμα $wl\succ 0$, καθώς επίσης και ένα θετικό διάνυσμα τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων.

[60] Το σύστημα (4) είναι συμβιβαστό, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]=\operatorname{rank}\left[I_2-(1+r)A_{22},\ p_1A_{12}(1+r)+wl_2\right]^T\leq n$$

Προφανώς, το σύστημα (4) είναι πάντοτε συμβιβαστό, αν η τιμή r του ποσοστού κέρδους δεν αποτελεί ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}}=\dfrac{1-\lambda_i^{A_{22}}}{\lambda_i^{A_{22}}}$, $i=1,2,\dots,n-k-1$ και $R_i^{A_{22}}\neq R_2$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]=0$ της μήτρας A_{22}. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]=\operatorname{rank}\left[I_2-(1+r)A_{22},\ p_1A_{12}(1+r)+wl_2\right]^T=n$$

B. Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in (R, R_1)$ και $r = R_i^{A_{22}}$, όπου η τιμή $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ και $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, *αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίσες με το μηδέν *(τετριμμένη λύση)*.

Το σύστημα (4) γράφεται ως εξής:

$$p_2\left[I_2 - \left(1 + R_i^{A_{22}}\right)A_{22}\right] = 0,\ i = 1,2,\ldots,n-k-1 \tag{14}$$

Οι δυνατές μορφές του διανύσματος p_2 των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, που αποτελούν λύσεις του συστήματος (14), είναι οι εξής:

- Η *μη τετριμμένη* λύση $\mathrm{p}_i^{A_2}$, όπου το διάνυσμα τιμών $\mathrm{p}_i^{A_2}$, με $i = 1,2,\ldots,n-k-1$ και $\mathrm{p}_i^{A_{22}} \neq \mathrm{p}_2$, είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{22}, που συνδέεται με την ιδιοτιμή της $\lambda_i^{A_{22}}\left(= \dfrac{1}{1+R_i^{A_{22}}}\right)$, όπου $\dfrac{1}{1+R_1} \prec \lambda_i^{A_{22}} \prec \lambda_{\mathrm{m}}^{\mathrm{A}_{22}}$, $i = 1,2,\ldots,n-k-1$ και περιέχει υποχρεωτικά κι αποκλειστικά θετικές κι αρνητικές συνιστώσες [61] και
- Η *τετριμμένη* λύση $p_2 = 0$.

C. Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in (R, R_1)$ και $r \neq R_i^{A_{22}}$, όπου η τιμή $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ και $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, *αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίσες με το μηδέν *(τετριμμένη λύση)*.

---

[61] Κάθε ιδιοδιάνυσμα της μη διασπώμενης μήτρας A_{22}, που συνδέεται με μια ιδιοτιμή της που είναι διάφορη της μέγιστης, περιέχει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα. Επιπλέον, κανένα ιδιοδιάνυσμα μιας μη διασπώμενης μήτρας δεν περιέχει μηδενική συνιστώσα. Για το θέμα αυτό βλέπε Berman and Plemmons [1979, σελ. 27].

Το σύστημα (4) είναι ισοδύναμο με το σύστημα:

$$p_2\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]=0 \tag{15}$$

Η μήτρα $\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]$ είναι μια μη ιδιάζουσα μήτρα. Επομένως, η μοναδική λύση του συστήματος (15) είναι το μηδενικό διάνυσμα:

$$p_2=0$$

3.c. Συμπέρασμα: Οι οικονομικά σημαντικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$ του ποσοστού κέρδους r

Από την εξέταση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων, που προηγήθηκε, συμπεραίνουμε, ότι, σε κάθε τιμή r που ανήκει στο διάστημα τιμών $R \prec r \prec R_1$ του ποσοστού κέρδους, οι μη αρνητικές λύσεις για το επαυξημένο διάνυσμα (p_1,w) των τιμών p_1 των k παραγόμενων, βασικών εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης, είναι οι εξής:

- Το μονοσήμαντα προσδιορισμένο, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), θετικό διάνυσμα (p_1,w), με $(p_1,w)\succ 0$ *(μη τετριμμένη λύση)* και
- Το μηδενικό διάνυσμα (p_1,w), με $(p_1,w)=0$ *(τετριμμένη λύση)*.

Αν εφαρμόσουμε την *μη τετριμμένη* λύση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων στο σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, τότε προκύπτουν τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *μη επιλύσιμο*
- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι επιλύσιμο και η τιμή ενός τουλάχιστον μη βασικού εμπορεύματος είναι αρνητική.

Αν, όμως, εφαρμόσουμε την *τετριμμένη* λύση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων στο σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, τότε προκύπτουν τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *επιλύσιμο* και έχει την μηδενική λύση: $p_2 = 0$
- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *επιλύσιμο* και η τιμή ενός τουλάχιστον μη βασικού εμπορεύματος είναι αρνητική.

Επομένως, από την διερεύνηση των συστημάτων προσδιορισμού των τιμών των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων, που προηγήθηκε, συμπεραίνουμε, ότι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $R \prec r \prec R_1$, η μοναδική μη αρνητική λύση για το επαυξημένο διάνυσμα (p, w) των τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης, είναι η ακόλουθη:

$$w = 0$$

και

$$p = 0$$

Προφανώς όμως η ανωτέρω λύση είναι οικονομικά μη σημαντική κι έτσι πρέπει να απορριφθεί.[62]

---

[62] Επομένως, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $R \prec r \prec R_1$ αντιστοιχούν περισσότερες από μια λύσεις για το επαυξημένο διάνυσμα (p, w) των τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης. Καμία όμως από αυτές δεν είναι οικονομικά σημαντική.

4. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους είναι ίση με R_1[63]

Θα συζητήσουμε ξεχωριστά τον προσδιορισμό των τιμών των βασικών εμπορευμάτων από τον προσδιορισμό των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων.

4.a. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων

Στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους η μήτρα $\left[I_1-\left(1+R_1\right)A_{11}\right]$ είναι μια ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα. Επομένως, με βάση τη σχέση (12) συμπεραίνουμε, ότι στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους για τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων ισχύουν όσα είδαμε παραπάνω να ισχύουν στην τιμή R του ποσοστού κέρδους στην περίπτωση που έχουμε $R=R_1$.[64] Έτσι, σύμφωνα με το σύστημα (8), στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους, στην οποία αντιστοιχεί μια τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου ίση με μηδέν $\left(w=0\right)$, θα έχουμε:

$$p_1\left[I_1-\left(1+R_1\right)A_{11}\right]=0 \tag{16}$$

Οι δυνατές μορφές του διανύσματος p_1 των τιμών των βασικών εμπορευμάτων που αποτελούν λύσεις του συστήματος (16) είναι οι εξής:

- Η *μη τετριμμένη* λύση p_1, όπου το διάνυσμα p_1 των τιμών των βασικών εμπορευμάτων είναι το θετικό, προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{11}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{11}}\left(=\dfrac{1}{1+R_1}\right)$[65] και
- Η *τετριμμένη* λύση $p_1=0$.

---

[63] Εννοείται φυσικά ότι $R\prec R_1$.

[64] Βλέπε την παράγραφο (2.2.a).

[65] Βλέπε το σχετικό θεώρημα του Frobenius.

4.b. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων

Αν στο σύστημα (4) θέσουμε την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου ίση με μηδέν $(w=0)$ κι αντικαταστήσουμε την τιμή r του ποσοστού κέρδους με την τιμή R, θα έχουμε:

$$p_2\left[I_2-\left(1+R_1\right)A_{22}\right]=p_1A_{12}\left(1+R_1\right) \tag{17}$$

Στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους η επίλυση του συστήματος (17) ως προς το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων εξαρτάται από το διάνυσμα τιμών p_1, το οποίο καθορίζεται από την λύση του συστήματος (16). Θα δείξουμε, ότι, ανεξάρτητα από την λύση του συστήματος (16), στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους δεν είναι δυνατή η διαμόρφωση ενός *ημιθετικού* διανύσματος τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων.

Για τον σκοπό αυτό θα διακρίνουμε τις ακόλουθες δυνατές περιπτώσεις:

Α. Η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της υπομήτρας A_{22}.[66] Στην τιμή R_1 οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων προσδιορίζονται από την *μη τετριμμένη* λύση p_1.

Στην προκείμενη περίπτωση, η μήτρα $\left[I_2-\left(1+R_1\right)A_{22}\right]$ είναι ιδιάζουσα. Έτσι, αν στο σύστημα (17) εφαρμόσουμε την *μη τετριμμένη* λύση του συστήματος (16), θα έχουμε:

$$p_2\left[I_2-\left(1+R_1\right)A_{22}\right]=\mathrm{p}_1A_{12}\left(1+R_1\right) \tag{18}$$

---

[66] Αυτό σημαίνει ότι η ιδιοτιμή $\lambda_m^{A_{11}}$ της υπομήτρας A_{11} *περιλαμβάνεται* στο φάσμα των χαρακτηριστικών τιμών της υπομήτρας A_{22}.

Από την επίλυση του συστήματος (18) ως προς το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων - όταν αυτό είναι επιλύσιμο[67] - θα προκύπτουν υποχρεωτικά αρνητικές συνιστώσες.[68]

B. Η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της υπομήτρας A_{22}. Στην τιμή R_1 οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων προσδιορίζονται από την *τετριμμένη* λύση $p_1 = 0$.

Αν στο σύστημα (17) εφαρμόσουμε την *τετριμμένη* λύση $(p_1 = 0)$ του συστήματος (16), τότε θα έχουμε:

$$p_2\left[I_2 - \left(1 + R_1\right)A_{22}\right] = 0 \tag{19}$$

Οι δυνατές μορφές του διανύσματος p_2 των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων που αποτελούν λύσεις του συστήματος (19) είναι οι εξής:

---

[67] Δεδομένου ότι ισχύει:

$$rank\left[I_2 - \left(1 + R_1\right)A_{22}\right] \leq n - 1,$$

το σύστημα (18) είναι επιλύσιμο, αν και μόνο αν ισχύει:

$$rank\left[I_2 - \left(1 + R_1\right)A_{22}\right] = rank\left[I_2 - \left(1 + R_1\right)A_{22},\ \mathrm{p}_1 A_{12}\left(1 + R_1\right)\right] \leq n - 1$$

[68] Στην περίπτωση που ισχύει:

$$rank\left[I_2 - \left(1 + R_1\right)A_{22}\right] = rank\left[I_2 - \left(1 + R_1\right)A_{22},\ \mathrm{p}_1 A_{12}\left(1 + R_1\right)\right] \leq n - 1,$$

το επιλύσιμο σύστημα (18) θα περιέχει υποχρεωτικά αρνητικές συνιστώσες, εφόσον η ιδιάζουσα μήτρα:

$$\left[I_2 - \left(1 + R_1\right)A_{22}\right]$$

δεν είναι Μ-μήτρα. Για το θέμα αυτό βλέπε τις συνθήκες I_{27} και I_{28} στους Berman and Plemmons [1979, σελ. 136] και Nikaido [1968, σσ. 93-94].

- Η *μη τετριμμένη* λύση $\mathrm{p}_{\lambda_m^{A_{11}}}^{A_{22}}$, όπου το διάνυσμα τιμών $\mathrm{p}_{\lambda_m^{A_{11}}}^{A_{22}}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{22}, που συνδέεται με την ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{11}}\left(=\dfrac{1}{1+R_1}\right)$, όπου $\lambda_m^{A_{11}} \prec \lambda_m^{A_{22}}$ και περιέχει υποχρεωτικά κι αποκλειστικά θετικές κι αρνητικές συνιστώσες και
- Το μηδενικό διάνυσμα $p_2 = 0$ *(τετριμμένη* λύση).

C. Η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *δεν αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της υπομήτρας A_{22}.[69] Στην τιμή R_1 οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων προσδιορίζονται από την *μη τετριμμένη* λύση p_1.

Στην προκείμενη περίπτωση, η μήτρα $\left[I_2-\left(1+R_1\right)A_{22}\right]$ είναι μη ιδιάζουσα. Έτσι, από την επίλυση του συστήματος (18) ως προς το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων -που είναι πάντοτε δυνατή[70]- θα προκύπτουν υποχρεωτικά αρνητικές συνιστώσες.[71]

---

[69] Αυτό σημαίνει ότι η ιδιοτιμή $\lambda_m^{A_{11}}$ της υπομήτρας A_{11} *δεν περιλαμβάνεται* στο φάσμα των χαρακτηριστικών τιμών της υπομήτρας A_{22}.

[70] Δεδομένου ότι ισχύει:

$$rank\left[I_2-\left(1+R_1\right)A_{22}\right]=n,$$

το σύστημα (18) είναι πάντοτε επιλύσιμο, εφόσον ισχύει:

$$rank\left[I_2-\left(1+R_1\right)A_{22}\right]=rank\left[I_2-\left(1+R_1\right)A_{22},\ \mathrm{p}_1A_{12}\left(1+R_1\right)\right]=n$$

Η πάντοτε δυνατή λύση του συστήματος (18) έχει την ακόλουθη μορφή:

$$p_2=\mathrm{p}_1A_{12}\left(1+R_1\right)\left[I_2-\left(1+R_1\right)A_{22}\right]^{-1}$$

[71] Δεδομένου ότι ισχύει:

D. Η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *δεν αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της υπομήτρας A_{22}. Στην τιμή R_1 οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων προσδιορίζονται από την *τετριμμένη* λύση $p_1 = 0$.

Από την επίλυση του συστήματος (19) ως προς το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων -που είναι πάντοτε δυνατή[72] - προκύπτει, ως μοναδική λύση, το μηδενικό διάνυσμα:

$$p_2 = 0$$

4.c. Συμπέρασμα: Οι οικονομικά σημαντικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους $r\left(R \prec R_1\right)$

Από την εξέταση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων, που προηγήθηκε, συμπεραίνουμε, ότι, στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους, οι μη αρνητικές λύσεις για το επαυξημένο διάνυσμα $\left(p_1, w\right)$ των τιμών p_1 των k παραγόμενων, βασικών εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης, είναι οι εξής:

$$rank\left[I_2 - \left(1+R_1\right)A_{22}\right] = rank\left[I_2 - \left(1+R_1\right)A_{22},\ p_1 A_{12}\left(1+R_1\right)\right] = n,$$

η λύση του επιλύσιμου συστήματος (18) θα περιέχει υποχρεωτικά αρνητικές συνιστώσες, εφόσον η μη ιδιάζουσα μήτρα:

$$\left[I_2 - \left(1+R_1\right)A_{22}\right]$$

δεν είναι Μ-μήτρα. Για το θέμα αυτό βλέπε τις συνθήκες I_{27} και I_{28} στους Berman and Plemmons [1979, σελ. 136] και Nikaido [1968, σσ. 93-94].

[72] Εφόσον η μήτρα:

$$\left[I_2 - \left(1+R_1\right)A_{22}\right]$$

είναι μη ιδιάζουσα

$$w = 0$$

και

- *είτε η μη τετριμμένη* λύση $\mathbf{p}_1$, όπου το διάνυσμα $\mathbf{p}_1$ των τιμών των βασικών εμπορευμάτων είναι το θετικό, προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{11}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{11}} \left(= \frac{1}{1+R_1} \right)$
- είτε η *τετριμμένη* λύση $p_1 = 0$.

Αν εφαρμόσουμε την *μη τετριμμένη* λύση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων στο σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, τότε προκύπτουν τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *μη επιλύσιμο*
- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι επιλύσιμο και η τιμή ενός τουλάχιστον μη βασικού εμπορεύματος είναι αρνητική.

Αν, όμως, εφαρμόσουμε την *τετριμμένη* λύση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων στο σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, τότε προκύπτουν τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι επιλύσιμο και ισχύει: $p_2 = 0$
- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι επιλύσιμο και η τιμή ενός τουλάχιστον μη βασικού εμπορεύματος είναι αρνητική.

Επομένως, από την διερεύνηση των συστημάτων προσδιορισμού των τιμών των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων, που προηγήθηκε, συμπεραίνουμε, ότι, στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους, η μοναδική μη αρνητική λύση για το επαυξημένο διάνυσμα (p,w) των τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης, είναι η ακόλουθη:

$$w=0$$

και

$$p=0$$

Προφανώς όμως η ανωτέρω λύση είναι οικονομικά μη σημαντική κι έτσι πρέπει να απορριφθεί.[73]

5. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους ανήκει στο διάστημα $R_1 \prec r \prec \infty$

Θα συζητήσουμε ξεχωριστά τον προσδιορισμό των τιμών των βασικών εμπορευμάτων από τον προσδιορισμό των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων.

5.a. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων

Στο διάστημα τιμών $R_1 \prec r \prec \infty$ του ποσοστού κέρδους r περιέχονται το πολύ $k-1$ ρίζες της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{11}.[74]

---

[73] Επομένως, στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους αντιστοιχούν περισσότερες από μια λύσεις για το διάνυσμα των τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων. Καμία όμως από αυτές δεν είναι οικονομικά σημαντική.

[74] Η "χαρακτηριστική" εξίσωση $\det\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]=0$ της μήτρας A_{11} είναι μια αλγεβρικά μετασχηματισμένη μορφή της χαρακτηριστικής της εξίσωσης $\det\left[\lambda I_1 - A_{11}\right]=0$. Η μήτρα A_{11} είναι μια τετραγωνική, μη διασπώμενη μήτρα τάξης $k\times k$. Έτσι, σε κάθε ιδιοτιμή $\lambda_i^{A_{11}}$, $i=1,2,\dots,k$, της μήτρας A_{11} αντιστοιχεί μια τιμή $R_i^{A_{11}}$, με $R_i^{A_{11}}=\dfrac{1-\lambda_i^{A_{11}}}{\lambda_i^{A_{11}}}$, $i=1,2,\dots,k$, του ποσοστού κέρδους. Προφανώς, στην θετική μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_m^{A_{11}}$ της μήτρας A_{11} αντιστοιχεί η ελάχιστη θετική, πραγματική ρίζα R_1, όπου

Θα δείξουμε ότι σε καμία τιμή r του ποσοστού κέρδους, όπου $r \in (R_1, \infty)$, δεν είναι δυνατή η διαμόρφωση ενός *ημιθετικού* διανύσματος τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων. Πράγματι, σε κάθε τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in (R_1, \infty)$, με την οποία συνδέεται είτε μια θετική είτε μια ίση με το μηδέν τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w, θα αντιστοιχεί μια από τις παρακάτω επιμέρους περιπτώσεις:

Α. Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in (R_1, \infty)$, αντιστοιχεί μια θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου $(w \succ 0)$.

Όπως έχουμε αναφέρει, για κάθε θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου $(w \succ 0)$[75] το σύστημα (3) είναι επιλύσιμο μη αρνητικά ως προς το διάνυσμα τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων, αν και μόνο αν η μήτρα $\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]$ είναι μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα.[76] Αν θεωρήσουμε μόνο τις οικονομικά σημαντικές, δηλαδή τις μη αρνητικές τιμές του ποσοστού κέρδους, η μήτρα $\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]$ είναι μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα, αν και μόνο αν το r ανήκει στο διάστημα $[0, R_1)$.[77] Επομένως,

---

$R_1 = \dfrac{1-\lambda_m^{A_{11}}}{\lambda_m^{A_{11}}}$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right] = 0$ της μήτρας A_{11}. Επομένως, στο διάστημα $R_1 \prec r \prec \infty$ του ποσοστού κέρδους υπάρχουν το πολύ $k-1$ πραγματικές ρίζες της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right] = 0$ της μήτρας A_{11}.

[75] Επομένως και για κάθε θετικό διάνυσμα $wl \succ 0$.

[76] Βλέπε τις συνθήκες I_{27} και I_{28} στους Berman and Plemmons [1979, *σελ.* 136] και Nikaido [1968, *σσ.* 93-94].

[77] Στην παράγραφο (1.a), όπου το ποσοστό κέρδους r λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0, R)$ κι ως εκ τούτου η μήτρα $\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]$ είναι μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα, δείξαμε ότι το σύστημα (3) είναι επιλύσιμο μη αρνητικά ως προς το διάνυσμα τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων (Ικανή

από τη σχέση (3) συνεπάγεται, ότι σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in (R_1, \infty)$, με την οποία συνδέεται μια θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου, ανεξάρτητα αν η τιμή r του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ή *δεν αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{11}, αντιστοιχεί - όταν φυσικά το σύστημα προσδιορισμού των βασικών εμπορευμάτων είναι συμβιβαστό[78]- ένα διάφορο του μηδενός διάνυσμα τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων, το οποίο περιέχει αρνητικές συνιστώσες. *Δηλαδή, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα βασικό εμπόρευμα, του οποίου η τιμή είναι αρνητική.*

Β. Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in (R_1, \infty)$ και $r \neq R_i^{A_{11}}$, όπου η τιμή $R_i^{A_{11}}$, $i = 1,2,\ldots,k-1$, *αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{11}, η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με το μηδέν $(w = 0)$.

Για κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $R_1 \prec r \prec \infty$, με $r \neq R_i^{A_{11}}$, όπου $i = 1,2,\ldots,k-1$, η μήτρα $\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]$ είναι μια μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα. Επιλύοντας το σύστημα (3) ως προς το διάνυσμα p_1 των βασικών εμπορευμάτων προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα (6).

συνθήκη).

[78] Το σύστημα (3) είναι συμβιβαστό, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right] = \operatorname{rank}\left[I_1 - (1+r)A_{11},\ wl_1\right]^T \leq n$$

Προφανώς, το σύστημα (3) είναι πάντοτε συμβιβαστό, αν η τιμή r του ποσοστού κέρδους δεν αποτελεί ρίζα $R_i^{A_{11}}$, με $R_i^{A_{11}} = \dfrac{1-\lambda_i^{A_{11}}}{\lambda_i^{A_{11}}}$, $i = 1,2,\ldots,k-1$ και $R_i^{A_{11}} \neq R_1$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right] = 0$ της μήτρας A_{11}. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right] = \operatorname{rank}\left[I_1 - (1+r)A_{11},\ wl_1\right]^T = n$$

Επομένως, για την μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου $\left(w=0\right)$, η μοναδική λύση του συστήματος (6) είναι το μηδενικό διάνυσμα:

$$p_1 = 0$$

C. Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left(R_1, \infty\right)$ και $r = R_i^{A_{11}}$, όπου η τιμή $R_i^{A_{11}}$, $i = 1,2,\ldots,k-1$, *αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{11}, η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με το μηδέν $\left(w=0\right)$.

Το σύστημα (3) γράφεται ως εξής:

$$p_1\left[I_1 - \left(1+R_i^{A_{11}}\right)A_{11}\right] = 0,\ i = 1,2,\ldots,k-1 \tag{20}$$

Οι δυνατές μορφές του διανύσματος p_1 των τιμών των βασικών εμπορευμάτων που αποτελούν λύσεις του συστήματος (20) είναι οι εξής:

- Η *μη τετριμμένη* λύση $\mathrm{p}_i^{A_1}$, όπου το διάνυσμα τιμών $\mathrm{p}_i^{A_1}$, με $i = 1,2,\ldots,k-1$ και $\mathrm{p}_i^{A_{11}} \neq \mathrm{p}_1$, είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{11}, που συνδέεται με την ιδιοτιμή της $\lambda_i^{A_{11}}\left(=\dfrac{1}{1+R_i^{A_{11}}}\right)$, όπου $0 \prec \lambda_i^{A_{11}} \prec \lambda_{\mathrm{m}}^{A_1}$, $i = 1,2,\ldots,k-1$ και περιέχει υποχρεωτικά κι αποκλειστικά θετικές κι αρνητικές συνιστώσες [79] και
- Το μηδενικό διάνυσμα $p_1 = 0$ (*τετριμμένη* λύση).

---

[79] Κάθε ιδιοδιάνυσμα της μη διασπώμενης μήτρας A_{11}, που συνδέεται με μια ιδιοτιμή της που είναι διάφορη της μέγιστης, περιέχει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα. Επιπλέον, κανένα ιδιοδιάνυσμα μιας μη διασπώμενης μήτρας δεν περιέχει μηδενική συνιστώσα. Για το θέμα αυτό βλέπε Berman and Plemmons [1979, σελ. 27].

5.b. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων

Γενικά, σε κάθε μη αρνητική τιμή r του ποσοστού κέρδους, η διερεύνηση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών αποβλέπει στην εύρεση των οικονομικά σημαντικών τιμών του ονομαστικού ωρομισθίου και του διανύσματος τιμών p των παραγόμενων εμπορευμάτων. Έτσι, για την διερεύνηση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων, αρκεί να εξετάσουμε μόνο την περίπτωση, που στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in (R_1, \infty)$, αντιστοιχεί η μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου $(w = 0)$ και η μηδενική λύση για το διάνυσμα p_1 των τιμών των βασικών εμπορευμάτων.[80]

Επομένως, αν στο σύστημα (4) θέσουμε:

$$w = 0$$

και

$$p_1 = 0,$$

τότε θα έχουμε τη σχέση (15). Σε κάθε τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in (R_1, \infty)$, θα διακρίνουμε τις ακόλουθες δυνατές περιπτώσεις:

A. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in (R_1, \infty)$ και $r = R_i^{A_{22}}$, *αποτελεί* μια ρίζα $R_i^{A_{22}}$, όπου $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}.[81]

---

[80] Εφόσον, σε κάθε περίπτωση, το διάνυσμα τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων - όταν ορίζεται - περιέχει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα, είτε με την τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in (R_1, \infty)$, συνδέεται μια θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου $(w \succ 0)$ είτε συνδέεται μια τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου ίση με μηδέν $(w = 0)$ και το διάνυσμα p_1 των τιμών των βασικών εμπορευμάτων αποτελεί ένα ιδιοδιάνυσμα της μήτρας. A_{11}. Για το θέμα αυτό βλέπε την παράγραφο (5.a).

[81] Ανεξάρτητα αν η τιμή $R_i^{A_{22}}$ του ποσοστού κέρδους αποτελεί, εκτός από μια ρίζα της "χαρακτηριστικής"

Το σύστημα (15) λαμβάνει την μορφή του συστήματος (14). Οι δυνατές μορφές του διανύσματος p_2 των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, που αποτελούν λύσεις του συστήματος (14), είναι οι εξής:

- Η *μη τετριμμένη* λύση $\mathrm{p}_i^{A_2}$, όπου το διάνυσμα τιμών $\mathrm{p}_i^{A_2}$, με $i=1,2,\ldots,n-k-1$ και $\mathrm{p}_i^{A_{22}} \neq \mathrm{p}_2$, είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{22}, που συνδέεται με την ιδιοτιμή της $\lambda_i^{A_{22}}\left(=\dfrac{1}{1+R_i^{A_{22}}}\right)$, όπου $\lambda_i^{A_{22}} \prec \dfrac{1}{1+R_1} \prec \lambda_{\mathrm{m}}^{A_2}$, $i=1,2,\ldots,n-k-1$ και περιέχει υποχρεωτικά κι αποκλειστικά θετικές κι αρνητικές συνιστώσες και
- Το μηδενικό διάνυσμα $p_2=0$ (*τετριμμένη* λύση)

B. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left(R_1, \infty\right)$ και $r \neq R_i^{A_{22}}$, *δεν αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, όπου $i=1,2,\ldots,n-k-1$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}.[82]

Στην προκείμενη περίπτωση, η μήτρα $\left[I_2-\left(1+r\right)A_{22}\right]$ είναι μια μη ιδιάζουσα μήτρα. Επομένως, η μοναδική λύση του συστήματος (15) είναι το μηδενικό διάνυσμα:

$$p_2=0$$

5.c. Συμπέρασμα: Οι οικονομικά σημαντικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου στο διάστημα $R_1 \prec r \prec \infty$ του ποσοστού κέρδους r

---

εξίσωσης της μήτρας A_{22} και μια ρίζα $R_i^{A_{11}}$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{11}.

[82] Ανεξάρτητα αν η τιμή r του ποσοστού κέρδους αποτελεί ή όχι μια ρίζα $R_i^{A_{11}}$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{11}.

Από την εξέταση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων, που προηγήθηκε, συμπεραίνουμε, ότι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $R_1 \prec r \prec \infty$ η μοναδική μη αρνητική λύση για το επαυξημένο διάνυσμα (p_1, w) των τιμών p_1 των k παραγόμενων, βασικών εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης, είναι η εξής:

$$w = 0$$

και

$$p_1 = 0$$

Αν εφαρμόσουμε την ανωτέρω *τετριμμένη* λύση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων στο σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, τότε προκύπτουν τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι επιλύσιμο και ισχύει: $p_2 = 0$
- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι επιλύσιμο και η τιμή ενός τουλάχιστον μη βασικού εμπορεύματος είναι αρνητική.

Επομένως, από την διερεύνηση των συστημάτων προσδιορισμού των τιμών των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων, που προηγήθηκε, συμπεραίνουμε, ότι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $R_1 \prec r \prec \infty$ η μοναδική μη αρνητική λύση για το επαυξημένο διάνυσμα (p, w) των τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης, είναι η ακόλουθη:

$$w = 0$$

και

$$p=0$$

Προφανώς όμως η ανωτέρω λύση είναι οικονομικά μη σημαντική κι έτσι πρέπει να απορριφθεί.[83]

II. Η εξωγενώς καθορισμένη μεταβλητή της κατανομής είναι η τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου

Θα διαχωρίσουμε τις μη αρνητικές, δηλαδή τις οικονομικά σημαντικές, τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου w ως εξής:

1. Η τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με το μηδέν $(w=0)$

Θα συζητήσουμε ξεχωριστά τον προσδιορισμό των τιμών των βασικών εμπορευμάτων από τον προσδιορισμό των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων.

1.a. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων

Στην προκείμενη περίπτωση το σύστημα (3) γράφεται ως εξής:

$$p_1\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]=0 \tag{21}$$

Σε κάθε τυχαία, οικονομικά σημαντική τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r\in[0,\infty)$, θα διακρίνουμε τις ακόλουθες δυνατές περιπτώσεις:

A. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r\in[0,\infty)$ και $r\neq R_i^{A_{11}}$, *δεν αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{11}}$, με $i=1,2,\ldots,k$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{11}.

Στην προκείμενη περίπτωση, η μήτρα $\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]$ είναι μια μη ιδιάζουσα μήτρα. Επομένως, η μοναδική λύση του συστήματος (21) είναι το μηδενικό διάνυσμα:

---

[83] Επομένως, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $R_1 \prec r \prec \infty$ αντιστοιχούν περισσότερες από μια λύσεις για το διάνυσμα των τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων. Καμία όμως από αυτές δεν είναι οικονομικά σημαντική.

$$p_1 = 0$$

B. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r = R_1$, *αποτελεί* την ελάχιστη θετική ρίζα R_1 της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{11}. Η ανωτέρω ρίζα αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{11}}$.

Στην προκείμενη περίπτωση, οι δυνατές *μη αρνητικές* μορφές του διανύσματος p_1 των τιμών των βασικών εμπορευμάτων, που αποτελούν λύσεις του συστήματος (21), είναι οι εξής:

- Η *μη τετριμμένη* λύση $\mathbf{p}_1$, όπου το διάνυσμα $\mathbf{p}_1$ των τιμών των βασικών εμπορευμάτων είναι το προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication) θετικό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{11}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{11}}$ ή, ισοδύναμα, με την τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους και
- Η *τετριμμένη* λύση $p_1 = 0$.[84]

C. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in [0, \infty)$, $r = R_i^{A_{11}}$ και $r \neq R_1$, *αποτελεί* μια ρίζα $R_i^{A_{11}}$, όπου $i = 1,2,\ldots,k-1$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{11}, η οποία αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή της $\lambda_i^{A_{11}}$, με $i = 1,2,\ldots k-1$ και $\lambda_i^{A_{11}} \neq \lambda_m^{A_{11}}$.

Στην προκείμενη περίπτωση, οι δυνατές *μη αρνητικές* μορφές του διανύσματος p_1 των τιμών των βασικών εμπορευμάτων, που αποτελούν λύσεις του συστήματος (21), είναι οι εξής:

- Η *μη τετριμμένη* λύση $\mathbf{p}_i^{A_1}$, όπου το διάνυσμα τιμών $\mathbf{p}_i^{A_1}$, με $i = 1,2,\ldots,k-1$ και $\mathbf{p}_i^{A_{11}} \neq \mathbf{p}_1$, είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{11}, που συνδέεται με την ιδιοτιμή της

---

[84] Βλέπε στην παράγραφο (I.4.a) το σύστημα (16).

$\lambda_i^{A_{11}}\left(=\dfrac{1}{1+R_i^{A_{11}}}\right)$, όπου $0 \prec \lambda_i^{A_{11}} \prec \lambda_m^{A_1}$ και $i=1,2,\ldots,k-1$ και περιέχει υποχρεωτικά κι αποκλειστικά θετικές κι αρνητικές συνιστώσες και

- Η *τετριμμένη* λύση $p_1 = 0$.[85]

1.b. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων

Αν στο σύστημα (4) θέσουμε την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου ίση με το μηδέν $(w=0)$, τότε λαμβάνουμε το σύστημα:

$$p_2\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]=p_1A_{12}(1+r) \tag{22}$$

Έτσι, στην μηδενική τιμή $(w=0)$ του ονομαστικού ωρομισθίου η επίλυση του συστήματος (22) ως προς το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων εξαρτάται από την αντίστοιχη τιμή του ποσοστού κέρδους r και του διανύσματος τιμών p_1 των τιμών των βασικών εμπορευμάτων, το οποίο προσδιορίζεται από την επίλυση του συστήματος (21). Επομένως, η διερεύνηση του συστήματος (22) αποτελεί μια σύνθετη διαδικασία, για την ανάλυση της οποίας θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:[86]

A. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in [0, \infty)$ και $r \neq R_i^{A_{11}}$, *δεν αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{11}}$, με $i=1,2,\ldots,k$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{11}.

---

[85] Βλέπε στην παράγραφο (I.5.a.C) το σύστημα (20).

[86] Είναι περιττό να λάβουμε υπόψη μας την περίπτωση που η τιμή r του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* μια ρίζα $R_i^{A_{11}}$, με $i=1,2,\ldots,k$ -1 και $R_i^{A_{11}} \neq R_1$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{11} και επιπλέον στο διάνυσμα τιμών των βασικών εμπορευμάτων αντιστοιχεί η *μη τετριμμένη* λύση $p_i^{A_{11}}$, $p_i^{A_{11}} \neq p_1$ και $i=1,2,\ldots,k$ -1 του συστήματος (21), εφόσον η ανωτέρω λύση περιέχει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα κι επομένως είναι οικονομικά μη σημαντική και θα πρέπει να απορριφθεί.

Θέτοντας την μοναδική, μηδενική λύση του διανύσματος τιμών των βασικών εμπορευμάτων $(p_1 = 0)$ του συστήματος (21) στο σύστημα (22) θα έχουμε:

$$p_2\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = 0 \qquad (23)$$

Η διερεύνηση του συστήματος (23) ως προς τις δυνατές, *μη αρνητικές* μορφές του διανύσματος p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων και των τιμών r του ποσοστού κέρδους μας επιβάλλει να διακρίνουμε τις ακόλουθες λύσεις:

- Η *μη τετριμμένη* λύση p_2, όπου το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων είναι το προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication) θετικό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{22}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{22}}$ ή με την αντίστοιχη τιμή R_2 του ποσοστού κέρδους [87] και
- Η *τετριμμένη* λύση $p_2 = 0$, που ισχύει για κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους.

B. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r = R_1$, *αποτελεί* την ελάχιστη θετική ρίζα R_1 της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{11}, η οποία αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{11}}$.[88] Στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους αντιστοιχεί η *μη τετριμμένη* λύση p_1 των τιμών των βασικών εμπορευμάτων.[89]

---

[87] Στην προκείμενη περίπτωση το σύστημα (23) λαμβάνει την μορφή του συστήματος (11) της παραγράφου (I.2.1.b).

[88] Στην προκείμενη περίπτωση το σύστημα (21) λαμβάνει την μορφή του συστήματος (16) της παραγράφου (I.4.a).

[89] Ανεξάρτητα αν ισχύει:

$$R = R_2 \prec R_1$$

ή

$$R = R_1 = R_2$$

Αν στο σύστημα (22) θέσουμε την τιμή του ποσοστού κέρδους ίση με την τιμή R_1 και το διάνυσμα τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων ίσο με την *μη τετριμμένη* λύση p_1 του συστήματος (16), τότε λαμβάνουμε το σύστημα (18).[90] Από την επίλυση του συστήματος (18) ως προς το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων - όταν αυτό είναι επιλύσιμο[91] - προκύπτουν υποχρεωτικά αρνητικές συνιστώσες.[92]

C. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in [0, \infty)$ και $r = R_i^{A_{11}}$, *αποτελεί* μια ρίζα $R_i^{A_{11}}$, όπου $i = 1,2,\dots,k$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{11}, η οποία αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή της $\lambda_i^{A_{11}}$, με $i = 1,2,\dots k$.[93] Στην τιμή $R_i^{A_{11}}$ του ποσοστού

---

[90] Βλέπε την παράγραφο (I.4.b.A).

[91] Το σύστημα (18) είναι επιλύσιμο, αν και μόνο αν ισχύει:

$$rank\left[I_2 - (1+R_1)A_{22}\right] = rank\left[I_2 - (1+R_1)A_{22},\ \mathrm{p}_1 A_{12}(1+R_1)\right] \leq n$$

Προφανώς, στην περίπτωση που η ιδιοτιμή $\lambda_m^{A_{11}}$ της υπομήτρας A_{11} *δεν περιλαμβάνεται* στο φάσμα των χαρακτηριστικών τιμών της υπομήτρας A_{22} θα έχουμε:

$$rank\left[I_2 - (1+R_1)A_{22}\right] = n,$$

Επομένως, το σύστημα (18) είναι πάντοτε επιλύσιμο, εφόσον ισχύει:

$$rank\left[I_2 - (1+R_1)A_{22}\right] = rank\left[I_2 - (1+R_1)A_{22},\ \mathrm{p}_1 A_{12}(1+R_1)\right] = n$$

[92] Στην περίπτωση που ισχύει:

$$rank\left[I_2 - (1+R_1)A_{22}\right] = rank\left[I_2 - (1+R_1)A_{22},\ \mathrm{p}_1 A_{12}(1+R_1)\right] \leq n,$$

το επιλύσιμο σύστημα (18) θα περιέχει υποχρεωτικά αρνητικές συνιστώσες, εφόσον η μήτρα:

$$\left[I_2 - (1+R_1)A_{22}\right]$$

δεν είναι Μ-μήτρα. Για το θέμα αυτό βλέπε τις συνθήκες I_{27} και I_{28} στους Berman and Plemmons [1979, σελ. 136] και Nikaido [1968, σσ. 93-94].

[93] Ανεξάρτητα αν ισχύει:

$$R = R_2 \prec R_1$$

κέρδους αντιστοιχεί η *τετριμμένη* λύση $\left(p_1 = 0\right)$ των τιμών των βασικών εμπορευμάτων.

Αν στο σύστημα (22) θέσουμε την τιμή του ποσοστού κέρδους r ίση με την τιμή $R_i^{A_{11}}$, $i = 1,2,\ldots k$ και το διάνυσμα τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων ίσο με την *τετριμμένη* λύση $\left(p_1 = 0\right)$ του συστήματος (21), τότε θα έχουμε:

$$p_2\left[I_2 - \left(1 + R_i^{A_{11}}\right)A_{22}\right] = 0 \tag{24}$$

ή

$R = R_1 = R_2$

Η διερεύνηση του συστήματος (24) ως προς τις δυνατές, *μη αρνητικές* μορφές του διανύσματος p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων και των τιμών $R_i^{A_{11}}$, $i=1,2,\ldots k$, του ποσοστού κέρδους μας επιβάλλει να διακρίνουμε τις ακόλουθες λύσεις:

- Η τιμή r του ποσοστού κέρδους είναι ίση με την τιμή R_1 και επιπλέον ισχύει:

  $$R=R_1=R_2$$ [94]

  Με την τιμή R του ποσοστού κέρδους συνδέεται η *μη τετριμμένη* λύση p_2 του συστήματος (24), όπου το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων είναι το προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication) θετικό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{22}, που συνδέεται με την *κοινή* μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_m^A\left(=\lambda_m^{A_{11}}=\lambda_m^{A_{22}}\right)$ των υπομητρών A_{11} και A_{22}.[95]

- Η τιμή r του ποσοστού κέρδους είναι ίση με την τιμή R_1 και επιπλέον ισχύει:

  $$R=R_1=R_2$$

  Με την τιμή R του ποσοστού κέρδους συνδέεται η *τετριμμένη* λύση $\left(p_2=0\right)$ του συστήματος (24).[96]

- Η τιμή r του ποσοστού κέρδους είναι ίση με την τιμή $R_i^{A_{22}}$, με $i=1,2,\ldots,\min\left(k,n-k-1\right)$ και $R_i^{A_{11}}\neq R_2$. Επομένως, ισχύει:

  $$R_i^{A_{11}}=R_i^{A_{22}},\ \text{με}\ i=1,2,\ldots,\min\left(k,n-k-1\right)\ \text{και}\ R_i^{A_{11}}\neq R_2.$$

---

[94] Υπενθυμίζουμε, ότι, σύμφωνα με τη σχέση (2.2), ισχύει:

$$R=R_2\leq R_1$$

[95] Βλέπε στην παράγραφο (I.2.1.b) το σύστημα (11).

[96] Βλέπε στην παράγραφο (I.2.1.b) το σύστημα (11).

Με την τιμή $R_i^{A_{11}}$ του ποσοστού κέρδους συνδέεται η *μη τετριμμένη* λύση $\mathrm{p}_i^{A_2}$ του συστήματος (24), όπου το διάνυσμα τιμών $\mathrm{p}_i^{A_2}$, $i=1,2,\ldots,\min(k,n-k-1)$ και $\mathrm{p}_i^{A_{22}} \neq \mathrm{p}_2$, είναι ιδιοδιάνυσμα της μη διασπώμενης μήτρας A_{22}, που συνδέεται με την κοινή ιδιοτιμή $\lambda_i^{A_{11}}\left(=\dfrac{1}{1+R_i^{A_{11}}}\right)$ των υπομητρών A_{11} και A_{22}, $\lambda_i^{A_{11}} \leq \dfrac{1}{1+R_1} \prec \lambda_{\mathrm{m}}^{A_{22}}$ και $i=1,2,\ldots,\min(k,n-k-1)$. Το ιδιοδιάνυσμα $\mathrm{p}_i^{A_2}$ περιέχει υποχρεωτικά κι αποκλειστικά θετικές κι αρνητικές συνιστώσες.[97]

- Η τιμή r του ποσοστού κέρδους είναι ίση με την τιμή $R_i^{A_{22}}$, με $i=1,2,\ldots,\min(k,n-k-1)$ και $R_i^{A_{11}} \neq R_2$. Επομένως, ισχύει:

$$R_i^{A_{11}} = R_i^{A_{22}}, \text{ με } i=1,2,\ldots,\min(k,n-k-1) \text{ και } R_i^{A_{11}} \neq R_2 .$$

Με την τιμή $R_i^{A_{11}}$ του ποσοστού κέρδους συνδέεται η *τετριμμένη* λύση $(p_2=0)$ του συστήματος (24)[98] και

- Η *τετριμμένη* λύση $p_2=0$, που ισχύει για κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους.

1.c. Συμπέρασμα: Οι οικονομικά σημαντικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και του ποσοστού κέρδους r στην μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w $(w=0)$

Από την εξέταση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων, που προηγήθηκε, συμπεραίνουμε, ότι, στην μηδενική τιμή του

---

[97] Βλέπε στην παράγραφο (I.5.b.A) το σύστημα (14).

[98] Βλέπε στην παράγραφο (I.5.b.A) το σύστημα (14).

ονομαστικού ωρομισθίου w $(w=0)$, οι δυνατές μη αρνητικές λύσεις για το διάνυσμα τιμών p_1 των k βασικών παραγόμενων εμπορευμάτων είναι οι εξής:

- Η μη *τετριμμένη* λύση $\mathbf{p}_1$, όπου το διάνυσμα $\mathbf{p}_1$ των τιμών των βασικών εμπορευμάτων είναι το προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication) θετικό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{11}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{11}}$ ή, ισοδύναμα, με την τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους[99] και
- Η *τετριμμένη* λύση $p_1 = 0$, που ισχύει για κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους.

Αν εφαρμόσουμε την ανωτέρω *μη τετριμμένη* λύση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων στο σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, τότε προκύπτουν τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *μη επιλύσιμο*
- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι επιλύσιμο και η τιμή ενός τουλάχιστον μη βασικού εμπορεύματος είναι αρνητική.[100]

---

[99] Ανεξάρτητα αν ισχύει:

$$R = R_2 \prec R_1$$

ή

$$R = R_1 = R_2$$

[100] Ανεξάρτητα αν ισχύει:

$$R = R_2 \prec R_1$$

ή

$$R = R_1 = R_2$$

Αν, όμως, εφαρμόσουμε την *τετριμμένη* λύση του συστήματος προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων στο σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, τότε προκύπτουν τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι επιλύσιμο και λαμβάνει την μορφή του *επιλυόμενου θετικά* ιδιοσυστήματος (11)[101]
- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι επιλύσιμο και ισχύει: $p_2 = 0$
- είτε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι επιλύσιμο και η τιμή ενός τουλάχιστον μη βασικού εμπορεύματος είναι αρνητική.[102]

Κατά συνέπεια, αποδεικνύεται, ότι στην μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w $(w = 0)$, η μοναδική, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), οικονομικά σημαντική λύση για το διάνυσμα τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων και την τιμή r του ποσοστού κέρδους είναι η ακόλουθη:

$$p_1 = 0$$

---

[101] Στην προκείμενη περίπτωση οι τιμές των μη βασικών εμπορευμάτων εκφράζονται από το θετικό διάνυσμα p_2, όπου με p_2 συμβολίζουμε το προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication) θετικό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{22}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{22}} \left(= \lambda_m^A\right)$.

[102] Τα ανωτέρω ενδεχόμενα ισχύουν, ανεξάρτητα αν ισχύει:

$$R = R_2 \prec R_1$$

ή

$$R = R_1 = R_2$$

$$p_2 \succ 0$$

και

$$r = R$$[103, 104]

2. Η τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου είναι θετική $(w \succ 0)$

Θα συζητήσουμε ξεχωριστά τον προσδιορισμό των τιμών των βασικών εμπορευμάτων από τον προσδιορισμό των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων.

2.a. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων

Όπως έχουμε δείξει, για μια τυχαία, θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w $(w \succ 0)$[105] το σύστημα (3) είναι επιλύσιμο ημιθετικά ως προς το διάνυσμα τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων, αν και μόνο αν η μήτρα $\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]$ είναι μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα. Αν θεωρήσουμε μόνο τις οικονομικά σημαντικές, δηλαδή τις μη αρνητικές τιμές του ποσοστού κέρδους, η μήτρα $\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]$ είναι μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα, αν και μόνο αν το r ανήκει στο διάστημα $\left[0, R_1\right)$.[106]

---

[103] Ανεξάρτητα αν ισχύει:

$$R = R_2 \prec R_1$$

ή

$$R = R_1 = R_2$$

[104] Επομένως, στην μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w αντιστοιχούν περισσότερες από μια λύσεις για το διάνυσμα των τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων και των τιμών του ποσοστού κέρδους r. Όμως, μόνο μια όμως από αυτές είναι οικονομικά σημαντική.

[105] Επομένως και για ένα τυχαίο θετικό διάνυσμα $wl \succ 0$.

[106] Βλ. παράγραφο (I.5.a.A).

2.b. Το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων

Εφόσον σε κάθε θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w $(w \succ 0)$ το διάνυσμα τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων είναι ημιθετικό, αν και μόνο αν το ποσοστό κέρδους r ανήκει στο διάστημα $[0, R_1)$, σε κάθε τιμή του ποσοστού κέρδους r που ανήκει στο διάστημα $[0, R_1)$ θα ισχύει:

$$p_1 A_{12}(1+r) + w l_2 \succ 0$$

Έτσι, με βάση την ανωτέρω σχέση, το σύστημα (4) είναι επιλύσιμο ημιθετικά ως προς το διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων, αν και μόνο αν η μήτρα $\left[I_1 - (1+r)A_{22}\right]$ είναι μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα, δηλαδή, αν και μόνο αν το ποσοστό κέρδους r ανήκει στο διάστημα $[0, R_2)$.

2.c. Συμπέρασμα: Οι οικονομικά σημαντικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και του ποσοστού κέρδους r σε μια θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w $(w \succ 0)$

Από την εξέταση των συστημάτων προσδιορισμού των τιμών των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων, που προηγήθηκε, συμπεραίνουμε, ότι, σε μια θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w $(w \succ 0)$, το διάνυσμα τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων είναι οικονομικά σημαντικό, αν και μόνο αν το ποσοστό κέρδους r ανήκει στο διάστημα $[0, R)$, όπου $R = \min(R_1, R_2)$.[107]

---

[107] Κατά συνέπεια, ο εξωγενής καθορισμός της τιμής του ονομαστικού ωρομισθίου αποτελεί επαρκή συνθήκη για τον προσδιορισμό των οικονομικά σημαντικών τιμών των n παραγόμενων εμπορευμάτων, αν και μόνο αν η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με το μηδέν. Η αιτία είναι απλή: Αν απαιτήσουμε οι τιμές των n παραγόμενων εμπορευμάτων να είναι οικονομικά σημαντικές, τότε μόνο στην περίπτωση που η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με το μηδέν, η εξωγενώς καθορισμένη τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου συνεπάγεται τον μονοσήμαντο προσδιορισμό του ποσοστού κέρδους.

III. Γενικό συμπέρασμα: Οι οικονομικά σημαντικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων, του ονομαστικού ωρομισθίου και του ποσοστού κέρδους r στο σύστημα προσδιορισμού των τιμών.

Η επίλυση των συστημάτων προσδιορισμού των τιμών των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων, που εξετάσαμε προηγουμένως, για μη αρνητικές τιμές του ποσοστού κέρδους r, του ονομαστικού ωρομισθίου W, των βασικών εμπορευμάτων p_1 και των μη βασικών εμπορευμάτων p_2, καθώς και για ημιθετικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων p μας οδηγεί στην διατύπωση των ακόλουθων συμπερασμάτων:

1. Σε κάθε παραγωγική, γραμμική, διασπώμενη τεχνική παραγωγής[108] υπάρχει μια θετική τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους, τέτοια ώστε:

- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο συνεχές, θετικό διάστημα τιμών $[0,R_1)$ αντιστοιχεί ένα μονοσήμαντα προσδιορισμένο, με εξαίρεση ενός βαθμωτού, θετικό διάνυσμα p_1 των τιμών των k βασικών εμπορευμάτων και ένα θετικό ονομαστικό ωρομίσθιο W.[109]

---

[108] Αναφερόμαστε σε παραγωγικές, γραμμικές, διασπώμενες τεχνικές παραγωγής της μορφής που περιγράφουν οι σχέσεις (2.1) και (2.2).

[109] Προφανώς, η ανωτέρω λύση δεν είναι η μοναδική μη αρνητική, εφόσον σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $[0,R_1)$ η μηδενική λύση για το διάνυσμα τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων και την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου W είναι επίσης επιτρεπτή. Είναι όμως η μοναδική οικονομικά σημαντική, στον βαθμό που επικεντρώνουμε την προσοχή μας στο βασικό υποσύστημα και παραβλέπουμε τους όρους αναπαραγωγής του μη βασικού υποσυστήματος. Όμως, όπως ήδη δείξαμε στις παραγράφους (I.2.1.c) και (II.1.c) και θα χρειαστεί να υπενθυμίσουμε παρακάτω, αν επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο σύστημα παραγωγής στο σύνολό του και επομένως καταστεί απαραίτητο να λάβουμε υπόψη μας τους όρους αναπαραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων, τότε στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R=R_2 \prec R_1$, η οποία περιέχεται στο διάστημα $[0,R_1)$, η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου W είναι ίση με το μηδέν και το αντίστοιχο οικονομικά σημαντικό διάνυσμα τιμών p των παραγόμενων εμπορευμάτων είναι ημιθετικό, τέτοιο ώστε οι τιμές των μη βασικών εμπορευμάτων p_2 είναι θετικές και οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων p_1 είναι ίσες με το μηδέν. Αυτό

- Στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με το μηδέν $(w=0)$.
- Στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους αντιστοιχεί ένα μονοσήμαντα προσδιορισμένο, με εξαίρεση ενός βαθμωτού, θετικό διάνυσμα $\mathbf{p}_1$ των τιμών των βασικών εμπορευμάτων: το ιδιοδιάνυσμα της υπομήτρας A_{11} των τεχνικών

μπορεί να φανεί ακόμη καθαρότερα, αν στην τιμή R του ποσοστού κέρδους συγκρίνουμε τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων μιας διασπώμενης τεχνικής, που περιγράφεται από τη σχέση (2.1) και για την οποία ισχύει:

$$R = R_2 \prec R_1,$$

- υπό την προϋπόθεση, φυσικά, ότι θεωρούμε το σύστημα παραγωγής στο σύνολό του - με μια μη διασπώμενη τεχνική, που είναι *ίδια* με την βασική υποτεχνική της διασπώμενης μήτρας, ούτως ώστε οι συνθήκες παραγωγής των βασικών εμπορευμάτων να είναι *ίδιες*. Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν, όπως ήδη δείξαμε στις παραγράφους (I.3.c) και (I.4.c), σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $R \prec r \le R_1$ και *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με ${}_i^{A_{22}} = \dfrac{1-\lambda_i^{A_{22}}}{\lambda_i^{A_{22}}}$, $i = 1,2,\ldots,n-k-1$ και $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = 0$ της μήτρας A_{22}, με την μόνη διαφορά ότι οι τιμές των μη βασικών εμπορευμάτων περιέχουν αρνητικές συνιστώσες. Σε κάθε περίπτωση, διαπιστώνουμε, ότι, αντίθετα με την αρχική αντίληψη του Sraffa που στη συνέχεια θεωρήθηκε οιονεί "αυτονόητη", σύμφωνα με την οποία οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι ανεξάρτητες από τις συνθήκες παραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων εξαρτώνται από τους όρους αναπαραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων, καίτοι στην παραγωγή των βασικών εμπορευμάτων δεν εισέρχονται, άμεσα ή έμμεσα, μη βασικά εμπορεύματα. Ο πρώτος που αμφισβήτησε ρητά το ανωτέρω δόγμα της νεορικαρντιανής θεωρίας, καίτοι αναφερόμενος σε ένα διαφορετικό χώρο: το χώρο των ονομαστικών μεγεθών, που ορίζεται από την εξίσωση τυποποίησης και μόνο για την περίπτωση που η μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής είναι μικρότερη της μέγιστης τιμής του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής είναι - σε μια σειρά εργασιών του - ο Σταμάτης, η πρώτη από τις οποίες είναι Σταμάτης [1992].

συντελεστών παραγωγής των βασικών εμπορευμάτων, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της[110] και

- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο συνεχές, θετικό διάστημα τιμών (R_1, ∞), είτε η τιμή ενός τουλάχιστον βασικού εμπορεύματος είναι αρνητική είτε οι τιμές όλων των βασικών εμπορευμάτων είναι μηδενικές είτε το σύστημα προσδιορισμού των βασικών εμπορευμάτων είναι ασυμβίβαστο.[111]

---

[110] Προφανώς, η ανωτέρω λύση δεν είναι η μοναδική μη αρνητική, εφόσον στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους η μηδενική λύση για το διάνυσμα τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων είναι επίσης επιτρεπτή. Είναι όμως η μοναδική οικονομικά σημαντική, στον βαθμό που επικεντρώνουμε την προσοχή μας στο βασικό υποσύστημα και παραβλέπουμε τους όρους αναπαραγωγής του μη βασικού υποσυστήματος. Όμως, όπως ήδη δείξαμε στις παραγράφους (I.2.2.c) και (II.1.c) και θα χρειαστεί να υπενθυμίσουμε παρακάτω, αν επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο σύστημα παραγωγής στο σύνολό του και επομένως καταστεί απαραίτητο να λάβουμε υπόψη μας τους όρους αναπαραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων, τότε στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R = R_1 = R_2$, το αντίστοιχο οικονομικά σημαντικό διάνυσμα τιμών $\mathbf{p}$ των παραγόμενων εμπορευμάτων είναι ημιθετικό, τέτοιο ώστε οι τιμές των μη βασικών εμπορευμάτων $\mathbf{p}_2$ είναι θετικές και οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων p_1 είναι ίσες με το μηδέν. Αυτό μπορεί να φανεί ακόμη καθαρότερα, αν στην τιμή R του ποσοστού κέρδους συγκρίνουμε τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων μιας διασπώμενης τεχνικής, που περιγράφεται από τη σχέση (2.1) και για την οποία ισχύει:

$$R = R_1 = R_2,$$

- υπό την προϋπόθεση, φυσικά, ότι θεωρούμε το σύστημα παραγωγής στο σύνολό του - με μια μη διασπώμενη τεχνική, που είναι *ίδια* με την βασική υποτεχνική της διασπώμενης μήτρας, ούτως ώστε οι συνθήκες παραγωγής των βασικών εμπορευμάτων να είναι *ίδιες*. Σε κάθε περίπτωση, διαπιστώνουμε κι εδώ, ότι, αντίθετα με την αρχική αντίληψη του Sraffa, σύμφωνα με την οποία οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι ανεξάρτητες από τις συνθήκες παραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων εξαρτώνται από τους όρους αναπαραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων, καίτοι στην παραγωγή των βασικών εμπορευμάτων δεν εισέρχονται, άμεσα ή έμμεσα, μη βασικά εμπορεύματα.

[111] Για τους ανωτέρω λόγους ορίζουμε την τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους ως την μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής. Αποκλειστικό κριτήριο του ανωτέρω ορισμού είναι το εξής: Στο διάστημα τιμών $[0, R_1]$ του ποσοστού κέρδους και μόνο σε αυτό είναι δυνατές θετικές τιμές των βασικών εμπορευμάτων $(p_1 \succ 0)$ και ημιθετικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου $(w \geq 0)$.

Αντίθετα, ο συνήθης ορισμός που συναντάται στην βιβλιογραφία είναι ο εξής: Η μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής είναι η τιμή του ποσοστού κέρδους, στην οποία αντιστοιχεί μια τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου ίση με το μηδέν. Όμως, ο ανωτέρω ορισμός της μέγιστης τιμής του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής παρουσιάζει τα ακόλουθα μειονεκτήματα:

- Είναι ελλιπής, αφού δεν λαμβάνει υπόψη της παρά μόνο το διάστημα $\left[0, R_1\right]$ της $w-r$ σχέσης. Με άλλα λόγια παραγνωρίζει ότι η $w-r$ σχέση είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, η οποία έχει περισσότερα από ένα σημεία τομής με τον άξονα του ποσοστού κέρδους και, κατά συνέπεια, περισσότερα από ένα ημιθετικά διαστήματα τιμών του ονομαστικού ωρομισθίου.

- Προϋποθέτει την ύπαρξη μιας $w-r$ σχέσης, της οποίας η κλίση στο διάστημα $\left[0, R_1\right]$ είναι αρνητική, διότι μόνο τότε στην ελάχιστη τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου $\left(w=0\right)$ αντιστοιχεί η μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους R_1.

Μια δεύτερη, ελαφρά τροποποιημένη εκδοχή του ανωτέρω ορισμού, που επίσης συναντάται στην βιβλιογραφία είναι η εξής: Η μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής είναι η *ελάχιστη* τιμή του ποσοστού κέρδους, στην οποία αντιστοιχεί μια τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου ίση με το μηδέν. Ανάλογα προς ότι είδαμε παραπάνω, ο ανωτέρω ορισμός της μέγιστης τιμής του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής παρουσιάζει τα ακόλουθα μειονεκτήματα:

- Είναι ελλιπής, αφού από τα διαστήματα τιμών του ποσοστού κέρδους στα οποία αντιστοιχούν θετικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου δεν λαμβάνει υπόψη της παρά μόνο το διάστημα $\left[0, R_1\right)$ της $w-r$ σχέσης. Με άλλα λόγια παραγνωρίζει επίσης, ότι η $w-r$ σχέση είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, η οποία έχει περισσότερα από ένα σημεία τομής με τον άξονα του ποσοστού κέρδους και, κατά συνέπεια, περισσότερα από ένα θετικά διαστήματα τιμών του ονομαστικού ωρομισθίου.

- Προϋποθέτει την ύπαρξη μιας $w-r$ σχέσης, της οποίας η κλίση στο διάστημα $\left[0, R_1\right]$ είναι αρνητική, διότι μόνο τότε στην ελάχιστη τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου $\left(w=0\right)$ αντιστοιχεί η μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους R_1.

Ουσιαστικά, η ανωτέρω τροποποιημένη εκδοχή διαφέρει, ως προς την πρώτη, μόνο κατά το εξής: Προϋποθέτει ρητά το κριτήριο της θετικότητας των τιμών - έστω και σε περιορισμένη έκταση, αναφερόμενη, δηλαδή, μόνο στις ρίζες της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_1-\left(1+r\right)A_{11}\right]=0$ της υπομήτρας A_{11} - εφόσον μόνο στην ελάχιστη τιμή του ποσοστού κέρδους που αντιστοιχεί στην μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου αντιστοιχούν θετικές τιμές των βασικών εμπορευμάτων.

Συνοψίζοντας, οι ορισμοί της μέγιστης τιμής R_1 του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής, που συναντώνται στην βιβλιογραφία, παρουσιάζουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

2. Σε κάθε παραγωγική, γραμμική, διασπώμενη τεχνική παραγωγής υπάρχει μια θετική τιμή R_2 του ποσοστού κέρδους, τέτοια ώστε:

- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο συνεχές, θετικό διάστημα τιμών $\left[0, R_2\right)$ αντιστοιχεί ένα μονοσήμαντα προσδιορισμένο, με εξαίρεση ενός βαθμωτού, θετικό διάνυσμα p_2 των τιμών των $n-k$ μη βασικών εμπορευμάτων και ένα θετικό ονομαστικό ωρομίσθιο w.
- Στην τιμή R_2 του ποσοστού κέρδους η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με το μηδέν $(w=0)$.
- Στην τιμή R_2 του ποσοστού κέρδους *αντιστοιχεί* ένα μονοσήμαντα προσδιορισμένο, με εξαίρεση ενός βαθμωτού, θετικό διάνυσμα p_2 των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων: το ιδιοδιάνυσμα της υπομήτρας A_{22} των τεχνικών συντελεστών παραγωγής, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της και
- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο συνεχές, θετικό διάστημα τιμών $\left(R_2, \infty\right)$, είτε η τιμή ενός τουλάχιστον μη βασικού εμπορεύματος είναι

- Είναι ελλιπείς.
- Αναφέρονται επιλεκτικά - όταν αναφέρονται - στην αξίωση οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων να είναι θετικές και
- Προϋποθέτουν την τυποποίηση των τιμών, εφόσον ο σχηματισμός της $w-r$ σχέσης, της οποίας η κλίση στο διάστημα $\left[0, R_1\right]$ είναι αρνητική, συνεπάγεται από την τυποποίηση των τιμών.

Αντίστοιχα προς τη μέγιστη τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής ορίζουμε το οικονομικά σημαντικό διάστημα $\left[0, R_1\right]$ του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής.

αρνητική είτε οι τιμές όλων των μη βασικών εμπορευμάτων είναι μηδενικές είτε το σύστημα προσδιορισμού των μη βασικών εμπορευμάτων είναι ασυμβίβαστο.[112]

3. Σε κάθε παραγωγική, γραμμική, διασπώμενη τεχνική παραγωγής υπάρχει μια θετική τιμή R του ποσοστού κέρδους, όπου $R = \min(R_1, R_2)$, τέτοια ώστε:

- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο συνεχές, θετικό διάστημα τιμών $[0, R)$ *αντιστοιχεί* ένα μονοσήμαντα προσδιορισμένο, με εξαίρεση ενός βαθμωτού, θετικό διάνυσμα p των τιμών των n παραγόμενων εμπορευμάτων και ένα θετικό ονομαστικό ωρομίσθιο w.
- Στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με το μηδέν $(w = 0)$.
- Στην τιμή R του ποσοστού κέρδους αντιστοιχεί ένα μονοσήμαντα προσδιορισμένο, με εξαίρεση ενός βαθμωτού, ημιθετικό διάνυσμα p των τιμών

---

[112] Για τους ανωτέρω λόγους ορίζουμε την τιμή R_2 του ποσοστού κέρδους ως την μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής. Αποκλειστικό κριτήριο του ανωτέρω ορισμού είναι το εξής: Στο διάστημα τιμών $[0, R_2]$ του ποσοστού κέρδους και μόνο σε αυτό είναι δυνατές θετικές τιμές των μη βασικών εμπορευμάτων $(p_2 \succ 0)$ και ημιθετικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου $(w \geq 0)$.

Αντίθετα, ο συνήθης ορισμός που συναντάται στην βιβλιογραφία είναι ο εξής: Η μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής είναι η τιμή του ποσοστού κέρδους, στην οποία αντιστοιχούν τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου και των βασικών εμπορευμάτων ίσες με το μηδέν.

Ανάλογα συμπεράσματα με αυτά στα οποία καταλήξαμε παραπάνω, κατά την εξέταση των εναλλακτικών ορισμών της μέγιστης τιμής του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής, ισχύουν και για την μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής.

Αντίστοιχα προς τη μέγιστη τιμή R_2 του ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής ορίζουμε το οικονομικά σημαντικό διάστημα $[0, R_2]$ του ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής.

των παραγόμενων εμπορευμάτων: το ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A των τεχνικών συντελεστών παραγωγής, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της [113] και

- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο συνεχές, θετικό διάστημα τιμών (R,∞), είτε η τιμή ενός τουλάχιστον παραγόμενου εμπορεύματος είναι αρνητική είτε οι τιμές όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων είναι μηδενικές είτε το σύστημα προσδιορισμού των παραγόμενων εμπορευμάτων είναι ασυμβίβαστο.[114]

---

[113] Οι τιμές p_1 των βασικών εμπορευμάτων που περιλαμβάνει το ημιθετικό διάνυσμα $\mathbf{p}$ των παραγόμενων εμπορευμάτων είναι ίσες με το μηδέν, ενώ οι τιμές των μη βασικών εμπορευμάτων $\mathbf{p}_2$ είναι θετικές. Επιπλέον, η μορφή του διανύσματος $\mathbf{p}$ των παραγόμενων εμπορευμάτων, που μόλις περιγράψαμε είναι ανεξάρτητη από το αν ισχύει:

$$R = R_2 \prec R_1$$

ή

$$R = R_1 = R_2$$

[114] Για τους ανωτέρω λόγους ορίζουμε την τιμή R του ποσοστού κέρδους ως την μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της τεχνικής. Αποκλειστικό κριτήριο του ανωτέρω ορισμού είναι το εξής: Στο διάστημα τιμών $[0,R]$ του ποσοστού κέρδους και μόνο σε αυτό είναι δυνατές ημιθετικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων $(p \geq 0)$ και ημιθετικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου $(w \geq 0)$.

Αντίθετα, ο συνήθης ορισμός που συναντάται στην βιβλιογραφία είναι ο εξής: Η μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της τεχνικής είναι η τιμή του ποσοστού κέρδους, στην οποία αντιστοιχεί η μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου.

Ανάλογα συμπεράσματα με αυτά στα οποία καταλήξαμε παραπάνω, κατά την εξέταση των εναλλακτικών ορισμών της μέγιστης τιμής του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής, ισχύουν και για την μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της τεχνικής.

Αντίστοιχα προς τη μέγιστη τιμή R του ποσοστού κέρδους της τεχνικής ορίζουμε το οικονομικά σημαντικό διάστημα $[0,R]$ του ποσοστού κέρδους της τεχνικής.

4. Σε κάθε παραγωγική, γραμμική, διασπώμενη τεχνική παραγωγής της μορφής που περιγράφουν οι σχέσεις (2.1) και (2.2), οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων εξαρτώνται από τις συνθήκες παραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων, καίτοι στην παραγωγή των βασικών εμπορευμάτων δεν εισέρχονται μη βασικά εμπορεύματα. Οι συνθήκες παραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων εκφράζονται μέσα από το διάστημα των οικονομικά σημαντικών τιμών του ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής. Επομένως, η εξάρτηση των τιμών των βασικών εμπορευμάτων από τις συνθήκες παραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων εμφανίζεται μόνο όταν η μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής είναι μικρότερη ή ίση της μέγιστης τιμής του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής. Αντίθετα, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι *τότε μόνο* ανεξάρτητες από τις συνθήκες παραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων, αν το μέγιστο ποσοστό κέρδους της τεχνικής είναι

- Ίσο με το μέγιστο ποσοστό κέρδους του βασικού υποσυστήματος και
- Μικρότερο από το μέγιστο ποσοστό κέρδους του μη βασικού υποσυστήματος.

5. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

Από την εξέταση των συστημάτων προσδιορισμού των τιμών των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων που προηγήθηκε συμπεραίνουμε, ότι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $0 \leq r \leq R$, η τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου και το διάνυσμα p των τιμών των n παραγόμενων εμπορευμάτων, που αντιστοιχούν στην οικονομικά σημαντική λύση, είναι προσδιορισμένα με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication). Επιπλέον δείξαμε, ότι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $0 \leq r \leq R_1$, υπάρχει μια μοναδική, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), οικονομικά σημαντική λύση για την τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου και το διάνυσμα p_1 των τιμών των k βασικών, παραγόμενων εμπορευμάτων.

Ο βαθμός ελευθερίας στις ανωτέρω λύσεις[115] αίρεται με την προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης. Σύμφωνα με την εξίσωση τυποποίησης, η τιμή ενός απλού ή σύνθετου εμπορεύματος, το οποίο θα ονομάζουμε τυπικό εμπόρευμα,[116] εξισώνεται:

- είτε με μια σταθερά ποσότητα του ίδιου, που στην προκείμενη περίπτωση λειτουργεί ως μέτρο των τιμών, δηλαδή ως "χρήμα" [117]

---

[115] Ο μοναδικός βαθμός ελευθερίας είναι απόρροια του γεγονότος, ότι στα συστήματα (4.3) και (4.4) δεν υπάρχει απόφανση όσον αφορά το εμπόρευμα, σε όρους του οποίου εκφράζονται οι τιμές. Έτσι, κάθε περιγραφόμενο από την τεχνική παραγωγής εμπόρευμα κάνει χρήση του δυνητικού του δικαιώματος να λειτουργεί ως μέτρο των τιμών.

[116] Το τυπικό εμπόρευμα, το οποίο θα συμβολίζουμε με u, παριστάνεται με ένα ημιθετικό διάνυσμα στήλη, τάξης $n \times 1$. Αναλυτικά μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$u = (u_1, u_2)^T,$$

όπου με u_1 συμβολίζουμε τό διάνυσμα στήλη, τάξης $k \times 1$, των βασικών εμπορευμάτων του τυπικού εμπορεύματος και με u_2 συμβολίζουμε το διάνυσμα στήλη, τάξης $(n-k) \times 1$, των μη βασικών εμπορευμάτων του τυπικού εμπορεύματος.

- είτε με μια σταθερά ποσότητα ενός ομογενούς, διαιρετού κι εκτατικού αγαθού, που δεν περιγράφεται από την τεχνική παραγωγής ως εμπόρευμα αλλά λειτουργεί ως μέτρο των τιμών, δηλαδή ως "χρήμα". [118, 119]

Στη συνέχεια, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα τιμών $\left[0, R_1\right]$, θα διερευνήσουμε το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών, που προκύπτει από την προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης στα συστήματα (4.3) και (4.4).[120]

---

[117] Στην προκείμενη περίπτωση, η εξίσωση τυποποίησης έχει την ακόλουθη μορφή:

$$pu = c,$$

όπου με c συμβολίζουμε τη σταθερά της τυποποίησης, η οποία παριστάνεται με ένα καθαρό βαθμωτό.

[118] Στην προκείμενη περίπτωση, η εξίσωση τυποποίησης έχει την ακόλουθη μορφή:

$$pu = c,$$

όπου με c συμβολίζουμε τη σταθερά της τυποποίησης, δηλαδή ένα βαθμωτό του οποίου η διάσταση είναι: μονάδες του λειτουργούντος ως "χρήμα" αγαθού ανά μονάδα τυπικού εμπορεύματος.

[119] Σε κάθε περίπτωση, μέσω της εξίσωσης τυποποίησης οι τιμές όλων των περιγραφόμενων από την τεχνική παραγωγής εμπορευμάτων εκφράζονται, άμεσα ή έμμεσα αντίστοιχα, σε όρους του τυπικού εμπορεύματος. Για το λόγο αυτό, η προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης οδηγεί στην άρση του μοναδικού βαθμού ελευθερίας των συστημάτων (4.3) και (4.4).

[120] Με άλλα λόγια, θα διερευνήσουμε το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών για μια εξωγενώς καθορισμένη τιμή r του ποσοστού κέρδους. Περιορίζουμε σκόπιμα την ανάλυση μας στο διάστημα τιμών $\left[0, R_1\right]$ του ποσοστού κέρδους r, επειδή, όπως δείξαμε στο τμήμα (4), μόνο στο ανωτέρω διάστημα μπορούν να εντοπιστούν - για ημιθετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου - ημιθετικές τιμές είτε όλων των βασικών εμπορευμάτων είτε όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων.

I. Το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών του ονομαστικού ωρομισθίου και των παραγόμενων εμπορευμάτων στις οικονομικά σημαντικές τιμές του ποσοστού κέρδους r.

Θα διαχωρίσουμε τις τιμές του ποσοστού κέρδους r στα ακόλουθα επιμέρους διαστήματα τιμών.

1. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους ανήκει στο διάστημα $0 \leq r \prec R$

Θα μελετήσουμε το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών που αντιστοιχεί σε κάθε μια από τις ακόλουθες μορφές εξισώσεων τυποποίησης:

1.a. Η εξίσωση τυποποίησης έχει την μορφή:

$$pu = 1, \text{ με } u = (u_1, u_2) \text{ και } u_2 \geq 0 \quad (1)$$ [121]

Από τις σχέσεις (4.6), (4.7) και την εξίσωση τυποποίησης (1) θα έχουμε:

$$pu = 1 \Leftrightarrow$$

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$wl_1 \left[I_1 - (1+r) A_{11} \right]^{-1} u_1 + \left[p_1 A_{12} (1+r) + wl_2 \right] \left[I_2 - (1+r) A_{22} \right]^{-1} u_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$wl_1 \left[I_1 - (1+r) A_{11} \right]^{-1} u_1 + \left\{ wl_1 \left[I_1 - (1+r) A_{11} \right]^{-1} A_{12} (1+r) + wl_2 \right\} \left[I_2 - (1+r) A_{22} \right]^{-1} u_2 = 1$$

$$wl_1 \left[I_1 - (1+r) A_{11} \right]^{-1} u_1 + w \left\{ l_1 \left[I_1 - (1+r) A_{11} \right]^{-1} A_{12} (1+r) + l_2 \right\} \left[I_2 - (1+r) A_{22} \right]^{-1} u_2 = 1 \Leftrightarrow$$

[121] Απλοποιούμε την εξίσωση τυποποίησης διαιρώντας και τα δύο μέλη της με τη σταθερά της τυποποίησης. Το τυπικό εμπόρευμα της εξίσωσης τυποποίησης (1), το οποίο χάριν απλοποίησης λειτουργεί και ως "χρήμα", περιέχει τουλάχιστον ένα μη βασικό εμπόρευμα σε θετική ποσότητα.

$$w\left\{l_1\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]^{-1}u_1+\left\{l_1\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]^{-1}A_{12}(1+r)+l_2\right\}\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]^{-1}u_2\right\}=1\Leftrightarrow$$

$$w=\frac{1}{l_1\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]^{-1}u_1+\left\{l_1\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]^{-1}A_{12}(1+r)+l_2\right\}\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]^{-1}u_2}$$ [122]

Από την ανωτέρω εξίσωση συνεπάγεται, ότι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα τιμών $0\leq r\prec R$, η εξίσωση τυποποίησης (1) έχει νόημα, αν και μόνο αν η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή, αν και μόνο αν είναι θετική.[123] Επομένως, η γενική ισχύς της εξίσωσης τυποποίησης (1) στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $0\leq r\prec R$, επιβάλλει την εφαρμογή της *μη τετριμμένης* λύσης των συστημάτων (4.6) και (4.7) για την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου και τις τιμές των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων.[124]

---

[122] Η ανωτέρω σχέση αποτελεί την $w-r$ σχέση στο διάστημα τιμών $0\leq r\prec R$ του ποσοστού κέρδους, που αντιστοιχεί στην εξίσωση τυποποίησης (1).

[123] Στο διάστημα $0\leq r\prec R$ του ποσοστού κέρδους r οι μήτρες

$$\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]$$

και

$$\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]$$

είναι μη ιδιάζουσες και μη διασπώμενες μήτρες. Επομένως, θα ισχύει:

$$\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]^{-1}\succ 0$$

και

$$\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]^{-1}\succ 0$$

[124] Κατά συνέπεια, από την εξίσωση τυποποίησης (1) προκύπτει, ότι στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $0\leq r\prec R$, η *τετριμμένη* λύση των συστημάτων (4.6) και (4.7) για την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου και τις τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων είναι *μη επιτρεπτή*.

Εφαρμόζοντας την ανωτέρω θετική λύση του ονομαστικού ωρομισθίου w στις εξισώσεις (4.6) και (4.7), προσδιορίζουμε τις θετικές ονομαστικές τιμές $\tilde{p}_1$ και $\tilde{p}_2$ των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων αντίστοιχα. Έτσι, η προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης (1) στα συστήματα (4.6) και (4.7) οδηγεί στον προσδιορισμό μιας θετικής λύσης για την τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου και το διάνυσμα $\tilde{p}$ των ονομαστικών τιμών των n παραγόμενων εμπορευμάτων. Προφανώς, η ανωτέρω θετική λύση είναι συγγραμμική με την μοναδική, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), θετική λύση για το επαυξημένο διάνυσμα (p,w) των τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης, που προκύπτει από τα συστήματα εξισώσεων (4.6) και (4.7).

1.b. Η εξίσωση τυποποίησης έχει την μορφή:

$$p_1 u_1 = 1 \tag{2}$$ [125]

Από τη σχέση (4.6) και την εξίσωση τυποποίησης (2) θα έχουμε:

$$p_1 u_1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$w l_1 \left[I_1 - (1+r) A_{11} \right]^{-1} u_1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$w = \frac{1}{l_1 \left[I_1 - (1+r) A_{11} \right]^{-1} u_1}$$ [126]

---

125 Απλοποιούμε την εξίσωση τυποποίησης διαιρώντας και τα δύο μέλη της με τη σταθερά της τυποποίησης. Σύμφωνα με την εξίσωση τυποποίησης (2), θα ισχύει:

$$u_2 = 0$$

Επομένως, το τυπικό εμπόρευμα της εξίσωσης τυποποίησης (2), το οποίο χάριν απλοποίησης λειτουργεί και ως "χρήμα", αποτελείται από ένα απλό ή σύνθετο βασικό εμπόρευμα.

126 Η ανωτέρω σχέση αποτελεί την $w-r$ σχέση στο διάστημα τιμών $0 \leq r \prec R$ του ποσοστού κέρδους, που αντιστοιχεί στην εξίσωση τυποποίησης (2).

Από την ανωτέρω εξίσωση συνεπάγεται, ότι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $0 \leq r \prec R$, η εξίσωση τυποποίησης (2) έχει νόημα, αν και μόνο αν η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή, αν και μόνο αν είναι θετική.[127] Επομένως, η γενική ισχύς της εξίσωσης τυποποίησης (2) σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $0 \leq r \prec R$, επιβάλλει την εφαρμογή της *μη τετριμμένης* λύσης του συστήματος (4.6) για την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w και τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων.[128]

Εφαρμόζοντας την ανωτέρω θετική λύση του ονομαστικού ωρομισθίου w στις εξισώσεων (4.6) και (4.7), προσδιορίζουμε τις θετικές ονομαστικές τιμές $\tilde{p}_1$ και $\tilde{p}_2$ των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων αντίστοιχα. Έτσι, η προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης (2) στα συστήματα (4.6) και (4.7) οδηγεί στον προσδιορισμό μιας θετικής λύσης για την τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου και το διάνυσμα $\tilde{p}$ των ονομαστικών τιμών των n παραγόμενων εμπορευμάτων. Προφανώς, η ανωτέρω θετική λύση είναι συγγραμμική με την μοναδική, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), θετική λύση για το επαυξημένο διάνυσμα (p, w) των τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης, που προκύπτει από τα συστήματα εξισώσεων (4.6) και (4.7).

---

127 Όπως είδαμε παραπάνω, στο διάστημα $0 \leq r \prec R$ του ποσοστού κέρδους r η μήτρα:

$$\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]$$

είναι μη ιδιάζουσα και μη διασπώμενη μήτρα. Επομένως, θα ισχύει:

$$\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]^{-1} \succ 0$$

128 Κατά συνέπεια, από την εξίσωση τυποποίησης (2) προκύπτει, ότι στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $0 \leq r \prec R$, η *τετριμμένη* λύση του συστήματος (4.6) για την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου και τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι *μη επιτρεπτή*.

1.c. Συμπέρασμα: Οι ονομαστικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου στο διάστημα $0 \leq r \prec R$ του ποσοστού κέρδους r

Από την διερεύνηση των συστημάτων προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων που προηγήθηκε συμπεραίνουμε, ότι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $0 \leq r \prec R$, οι σχέσεις μεταξύ των ονομαστικών τιμών είναι αφενός μεν ίδιες για κάθε τυποποίηση των τιμών, αφετέρου ίδιες με τις σχέσεις μεταξύ των αντίστοιχων, προσδιορισμένων με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), οικονομικά σημαντικών τιμών της τεχνικής.

2. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους είναι ίση με R

Θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

2.1. Η τιμή R του ποσοστού κέρδους είναι μικρότερη της τιμής R_1 $(R \prec R_1)$

Θα μελετήσουμε το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών που αντιστοιχεί σε κάθε μια από τις ακόλουθες μορφές εξισώσεων τυποποίησης:

2.1.a. Η εξίσωση τυποποίησης έχει την μορφή:

$$pu = 1, \text{ με } u = (u_1, u_2) \text{ και } u_2 \geq 0 \tag{1}$$

Αναλυτικότερα, η εξίσωση τυποποίησης (1) γράφεται ως εξής:

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 = 1 \tag{3}$$

Από τη σχέση (3) συνεπάγεται, ότι, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R \prec R_1$, η εξίσωση τυποποίησης (1) έχει νόημα, αν και μόνο αν οι τιμές των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων είναι προσδιορισμένες[129] και μη μηδενικές. Όμως,

---

[129] Στην παράγραφο (4.I.2.1.a) δείξαμε, ότι στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R \prec R_1$, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι πάντοτε προσδιορισμένες. Επομένως, σύμφωνα με την εξίσωση τυποποίησης

όπως δείξαμε στην παράγραφο (4.I.2.1.c), στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R \prec R_1$, υπάρχει μια μοναδική, μη μηδενική λύση του διανύσματος τιμών. Η λύση αυτή είναι ημιθετική και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$w = 0$$

$$p_1 = 0$$

και

$$p_2 \succ 0$$

Επομένως, η ισχύς της εξίσωσης τυποποίησης (1) στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R \prec R_1$, επιβάλλει οι τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου να έχουν την μορφή της ανωτέρω λύσης.[130] Σύμφωνα με τις τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου που μόλις περιγράψαμε, η σχέση (3) γράφεται ως εξής:

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$p_2 u_2 = 1$$

---

(1), προσδιορισμένες θα είναι και οι τιμές των μη βασικών εμπορευμάτων. Σε κάθε άλλη περίπτωση η εξίσωση τυποποίησης (1) είναι αδύνατη.

[130] Δηλαδή, η ισχύς της εξίσωσης τυποποίησης (1) στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R \prec R_1$, επιβάλλει την εφαρμογή της *τετριμμένης* λύσης του συστήματος (4.9) για την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου και τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων. Κατά συνέπεια, η *μη τετριμμένη λύση του συστήματος (4.9) για την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου και τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι μη επιτρεπτή*. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να πούμε, επειδή φαίνεται ότι δεν έχει προσεχθεί καθόλου, ότι ο Sraffa [1985, Παράρτημα Β, σελ. 137], μελετώντας την περίπτωση που ισχύει:

$$R_2 \prec R_1$$

με την βοήθεια ενός απλού παραδείγματος μιας τεχνικής παραγωγής που παράγει ένα μόνο μη βασικό εμπόρευμα, το οποίο ονόμασε "φασόλια" (beans), επισήμανε, για πρώτη φορά, ότι η ονομαστική τιμή του βασικού εμπορεύματος είναι ίση με το μηδέν, όταν οι τιμές μετρηθούν με μέτρο το μη βασικό εμπόρευμα ("φασόλια").

Με βάση την ανωτέρω εξίσωση προσδιορίζουμε τις θετικές ονομαστικές τιμές $\tilde{\mathrm{p}}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων. Έτσι, η προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης (1) στα συστήματα (4.9), (4.10) και (4.11) οδηγεί στον προσδιορισμό της μηδενικής λύσης για την τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου και το διάνυσμα $\tilde{p}_1$ των ονομαστικών τιμών των k βασικών εμπορευμάτων και μιας θετικής λύσης για το διάνυσμα $\tilde{\mathrm{p}}_2$ των ονομαστικών τιμών των $n-k$ μη βασικών εμπορευμάτων. Με άλλα λόγια, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R \prec R_1$, η προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης (1) στα συστήματα (4.9), (4.10) και (4.11) συνεπάγεται την διαμόρφωση των ακόλουθων ονομαστικών τιμών:

$$w = 0$$

$$\tilde{p}_1 = 0$$

και

$$\tilde{\mathrm{p}}_2 \succ 0$$

Προφανώς, η ανωτέρω ημιθετική λύση είναι συγγραμμική με την μοναδική, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), ημιθετική λύση για το επαυξημένο διάνυσμα (p, w) των τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης, που προκύπτει από τα συστήματα εξισώσεων (4.9), (4.10) και (4.11).

2.1.b. Η εξίσωση τυποποίησης έχει την μορφή:

$$p_1 u_1 = 1 \tag{2}$$

Από τη σχέση (4.9) και την εξίσωση τυποποίησης (2) θα έχουμε:

$$wl_1\left[I_1 - (1+R)A_{11}\right]^{-1} u_1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$w = \frac{1}{l_1\left[I_1 - (1+R)A_{11}\right]^{-1} u_1}\text{[131]}$$

Από την ανωτέρω εξίσωση συνεπάγεται, ότι, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, η εξίσωση τυποποίησης (2) έχει νόημα, αν και μόνο αν η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή, αν και μόνο αν είναι θετική.[132] Εφαρμόζοντας την ανωτέρω θετική λύση του ονομαστικού ωρομισθίου w στην εξίσωση (4.9) προσδιορίζουμε τις θετικές ονομαστικές τιμές $\tilde{p}_1$ των βασικών εμπορευμάτων.[133] Προφανώς, η ανωτέρω θετική λύση είναι συγγραμμική με την μοναδική, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), *μη τετριμμένη,* θετική λύση για το διάνυσμα p_1 των τιμών των k βασικών, παραγόμενων

---

[131] Η ανωτέρω σχέση εκφράζει την τιμή που λαμβάνει το ονομαστικό ωρομίσθιο στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R \prec R_1$, σύμφωνα με την εξίσωση τυποποίησης (2).

[132] Στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R \prec R_1$, η μήτρα:

$$\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]$$

είναι μη ιδιάζουσα και μη διασπώμενη μήτρα. Επομένως, θα ισχύει:

$$\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]^{-1} \succ 0$$

[133] Επομένως, η ισχύς της εξίσωσης τυποποίησης (2) στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R \prec R_1$, επιβάλλει την εφαρμογή της *μη τετριμμένης* λύσης του συστήματος (4.9) για την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου και τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων. Κατά συνέπεια, η *τετριμμένη* λύση του συστήματος (4.9) για την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου και τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι *μη επιτρεπτή.*

εμπορευμάτων και την τιμή W του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης, που προκύπτει από το σύστημα εξισώσεων (4.9). Θέτοντας, στη συνέχεια, τις θετικές ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου W και των βασικών εμπορευμάτων $\tilde{p}_1$ στο σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων (4.10), το ανωτέρω σύστημα καθίσταται απροσδιόριστο.[134]

Έτσι, η προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης (2) στα συστήματα (4.9) και (4.10) οδηγεί στον προσδιορισμό μιας θετικής λύσης για την τιμή W του ονομαστικού ωρομισθίου και το διάνυσμα $\tilde{p}_1$ των ονομαστικών τιμών των k βασικών εμπορευμάτων, καθώς και σε ένα *αδύνατο* διάνυσμα τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων.

2.1.c. Συμπέρασμα: Οι ονομαστικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου στην τιμή R του ποσοστού κέρδους r $\left(R \prec R_1\right)$

Από την διερεύνηση των συστημάτων προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων που προηγήθηκε συμπεραίνουμε, ότι, στην τιμή R, με $R \prec R_1$, του ποσοστού κέρδους, για κάθε τυποποίηση των τιμών με ένα τυπικό εμπόρευμα που περιέχει στη σύνθεση του τουλάχιστον ένα μη βασικό εμπόρευμα, οι σχέσεις μεταξύ των ονομαστικών τιμών είναι ίδιες με τις σχέσεις μεταξύ των αντίστοιχων, προσδιορισμένων με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), οικονομικά σημαντικών τιμών της τεχνικής.

Στην εναλλακτική περίπτωση που οι τιμές έχουν τυποποιηθεί με μια εξίσωση τυποποίησης των τιμών της οποίας το τυπικό εμπόρευμα αποτελείται από ένα απλό ή σύνθετο βασικό εμπόρευμα, οι ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου W και των βασικών εμπορευμάτων $\tilde{p}_1$ είναι *θετικές*, ενώ ο προσδιορισμός των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *αδύνατος*.

---

[134] Βλέπε την παράγραφο (4.I.2.1.b).

2.2. Η τιμή R του ποσοστού κέρδους είναι ίση με την τιμή R_1 $\left(R=R_1\right)$

Θα μελετήσουμε το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών που αντιστοιχεί σε κάθε μια από τις ακόλουθες μορφές εξισώσεων τυποποίησης:

2.2.a. Η εξίσωση τυποποίησης έχει την μορφή:

$$pu=1, \text{ με } u=\left(u_1,u_2\right) \text{ και } u_2\geq 0 \tag{1}$$

Από τη σχέση (3) συνεπάγεται, ότι, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R=R_1$, η εξίσωση τυποποίησης (1) έχει νόημα, αν και μόνο αν οι τιμές των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων είναι προσδιορισμένες[135] και μη μηδενικές. Όμως, όπως δείξαμε στην παράγραφο (4.I.2.2.c), στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R=R_1$, υπάρχει μια μοναδική μη μηδενική λύση του διανύσματος τιμών. Η λύση αυτή είναι ημιθετική και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$w=0$$

$$p_1=0$$

και

$$p_2\succ 0$$

Επομένως, η ισχύς της εξίσωσης τυποποίησης (1) στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R=R_1$, επιβάλλει οι τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου να έχουν την μορφή της ανωτέρω λύσης.[136]

---

[135] Στην παράγραφο (4.I.2.2.a) δείξαμε, ότι στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R=R_1$, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι πάντοτε προσδιορισμένες. Επομένως, σύμφωνα με την εξίσωση τυποποίησης (1), προσδιορισμένες θα είναι και οι τιμές των μη βασικών εμπορευμάτων. Σε κάθε άλλη περίπτωση η εξίσωση τυποποίησης (1) είναι αδύνατη.

[136] Δηλαδή, η ισχύς της εξίσωσης τυποποίησης (1) στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R=R_1$, επιβάλλει αφενός μεν την μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου, αφετέρου την εφαρμογή της *τετριμμένης* λύσης του ιδιοσυστήματος (4.12) για τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων. Έτσι, σύμφωνα με την εξίσωση τυποποίησης (1), η θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου ή η *μη τετριμμένη* λύση του

Σύμφωνα με τις τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου που μόλις περιγράψαμε, η σχέση (3) γράφεται ως εξής:

$$p_1u_1 + p_2u_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$p_2u_2 = 1$$

Με βάση την ανωτέρω εξίσωση προσδιορίζουμε τις θετικές ονομαστικές τιμές $\tilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων. Έτσι, η προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης (1) στα συστήματα (4.11), (4.12) και (4.13) οδηγεί στον προσδιορισμό της μηδενικής λύσης για την τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου και το διάνυσμα $\tilde{p}_1$ των ονομαστικών τιμών των k βασικών εμπορευμάτων και μιας θετικής λύσης για το διάνυσμα $\tilde{p}_2$ των ονομαστικών τιμών των $n-k$ μη βασικών εμπορευμάτων. Με άλλα λόγια, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R = R_1$, η προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης (1) στα συστήματα (4.11), (4.12) και (4.13) συνεπάγεται την διαμόρφωση των ακόλουθων ονομαστικών τιμών:

$$w = 0$$

$$\tilde{p}_1 = 0$$

και

$$\tilde{p}_2 \succ 0$$

Προφανώς, η ανωτέρω ημιθετική λύση είναι συγγραμμική με την μοναδική, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), ημιθετική λύση για το επαυξημένο διάνυσμα (p,w) των τιμών p των n παραγόμενων εμπορευμάτων και της τιμής w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης, που προκύπτει από τα συστήματα εξισώσεων (4.11), (4.12) και (4.13).

ιδιοσυστήματος (4.12) για τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R = R_1$, μη επιτρεπτές δυνατότητες.

2.2.b. Η εξίσωση τυποποίησης έχει την μορφή:

$$p_1 u_1 = 1 \qquad (2)$$

Στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R = R_1$, η εξίσωση τυποποίησης (2) έχει νόημα, αν και μόνο αν οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι προσδιορισμένες και μη μηδενικές.[137] Σύμφωνα με τη σχέση (4.12), στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R = R_1$, υπάρχει μια μοναδική μη μηδενική λύση p_1 του διανύσματος τιμών των βασικών εμπορευμάτων.[138] Η λύση p_1 είναι θετική και προφανώς ισχύει, αν και μόνο αν η τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με το μηδέν $(w = 0)$.[139] Έτσι, η εξίσωση τυποποίησης (2) γράφεται ως εξής:

$$\mathrm{p}_1 u_1 = 1$$

Από την ανωτέρω σχέση προσδιορίζουμε τις θετικές ονομαστικές τιμές $\tilde{\mathrm{p}}_1$ των βασικών εμπορευμάτων. Επομένως, η προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης (2) στα συστήματα (4.8) και (4.12) οδηγεί στον προσδιορισμό της μηδενικής λύσης για την

---

[137] Σε κάθε άλλη περίπτωση η εξίσωση τυποποίησης (2) είναι αδύνατη.

[138] Υπενθυμίζουμε ότι με το διάνυσμα p_1 συμβολίζουμε το ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{11}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{11}}$.

[139] Επομένως, η ισχύς της εξίσωσης τυποποίησης (2) στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R = R_1$, επιβάλλει αφενός μεν την μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου, αφετέρου την εφαρμογή της *μη τετριμμένης* λύσης του ιδιοσυστήματος (4.12) για τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων. Έτσι, σύμφωνα με την εξίσωση τυποποίησης (2), η θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου ή η *τετριμμένη* λύση του ιδιοσυστήματος (4.12) για τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, με $R = R_1$, μη επιτρεπτές δυνατότητες.

τιμή W του ονομαστικού ωρομισθίου και της θετικής λύσης $\tilde{\mathrm{p}}_1$ για το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών των k βασικών εμπορευμάτων. Προφανώς, η ανωτέρω θετική λύση είναι συγγραμμική με την μοναδική, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), *μη τετριμμένη*, θετική λύση για το διάνυσμα p_1 των τιμών των k βασικών εμπορευμάτων της τεχνικής.

Θέτοντας, στη συνέχεια, την μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου W και τις θετικές ονομαστικές τιμές των βασικών εμπορευμάτων $\tilde{\mathrm{p}}_1$ στο σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων (4.13), το ανωτέρω σύστημα καθίσταται απροσδιόριστο.[140]

Έτσι, η προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης (2) στα συστήματα (4.8), (4.12) και (4.13) οδηγεί στον προσδιορισμό της μηδενικής λύσης για την τιμή W του ονομαστικού ωρομισθίου, της θετικής λύσης για το διάνυσμα $\tilde{\mathrm{p}}_1$ των ονομαστικών τιμών των k βασικών εμπορευμάτων, καθώς και σε ένα *αδύνατο* διάνυσμα τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων.

2.2.c. Συμπέρασμα: Οι ονομαστικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου στην τιμή R του ποσοστού κέρδους r $(R = R_1)$

Από την διερεύνηση των συστημάτων προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων που προηγήθηκε συμπεραίνουμε, ότι, στην τιμή R, με $R = R_1$, του ποσοστού κέρδους, για κάθε τυποποίηση των τιμών, η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με το μηδέν.

Επίσης, για κάθε τυποποίηση των τιμών με ένα τυπικό εμπόρευμα που περιέχει στη σύνθεση του τουλάχιστον ένα μη βασικό εμπόρευμα, οι σχέσεις μεταξύ των ονομαστικών τιμών είναι ίδιες με τις σχέσεις μεταξύ των αντίστοιχων,

---

[140] Βλέπε την παράγραφο (4.I.2.2.b).

προσδιορισμένων με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), οικονομικά σημαντικών τιμών της τεχνικής.

Στην εναλλακτική περίπτωση που οι τιμές έχουν τυποποιηθεί με μια εξίσωση τυποποίησης των τιμών της οποίας το τυπικό εμπόρευμα αποτελείται από ένα απλό ή σύνθετο βασικό εμπόρευμα, οι ονομαστικές τιμές των βασικών εμπορευμάτων $\tilde{p}_1$ είναι *θετικές*, ενώ ο προσδιορισμός των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *αδύνατος*.

3. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$

Θα μελετήσουμε το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών που αντιστοιχεί σε κάθε μια από τις ακόλουθες μορφές εξισώσεων τυποποίησης:

3.a. Η εξίσωση τυποποίησης έχει την μορφή:

$$pu = 1, \text{ με } u = (u_1, u_2) \text{ και } u_2 \geq 0 \tag{1}$$

Από τη σχέση (3) συνεπάγεται, ότι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$, η εξίσωση τυποποίησης (1) έχει νόημα, αν και μόνο αν οι τιμές των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων είναι προσδιορισμένες και διάφορες του μηδενός.[141]

Σύμφωνα με τα συστήματα σχέσεις (4.4), (4.6), (4.7) και (4.14), στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$, οι δυνατές μη μηδενικές λύσεις του επιλυόμενου συστήματος προσδιορισμού των τιμών είναι οι εξής: [142]

---

[141] Στην παράγραφο (4.1.3.a) δείξαμε, ότι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $R \prec r \prec R_1$, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι πάντοτε προσδιορισμένες. Επομένως, σύμφωνα με την εξίσωση τυποποίησης (1), προσδιορισμένες θα είναι και οι τιμές των μη βασικών εμπορευμάτων. Σε κάθε άλλη περίπτωση η εξίσωση τυποποίησης (1) είναι αδύνατη.

[142] Οι λύσεις που ακολουθούν προκύπτουν από την ανάλυση των αντίστοιχων παραγράφων (4.3.a) και (4.3.b).

- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$, οι προσδιορισμένες, με εξαίρεση ενός βαθμωτού, τιμές των βασικών εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου είναι θετικές. Το αντίστοιχο, διάφορο του μηδενός, διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων - εφόσον προσδιορίζεται[143] - θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα και
- Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$, με $r = R_i^{A_{22}}$, όπου η τιμή $R_i^{A_{22}}$, $i = 1,2,\dots,n-k-1$ και $R_i^{A_{22}} \neq R_2$, *αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίσες με το μηδέν. Το αντίστοιχο, διάφορο του μηδενός, διάνυσμα τιμών $\mathrm{p}_i^{A_2}$ των μη βασικών εμπορευμάτων θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.[144]

Με την προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης (1) στα συστήματα προσδιορισμού των τιμών σχέσεις (4.4), (4.6), (4.7) και (4.14) οι δυνατές, μη μηδενικές

---

143 Το αντίστοιχο σύστημα (4), για θετικές τιμές των βασικών εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου, είναι συμβιβαστό, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]=\operatorname{rank}\left[I_2-(1+r)A_{22},\ p_1A_{12}(1+r)+wl_2\right]^T \le n$$

144 Έτσι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $R \prec r \prec R_1$ και *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} = \dfrac{1-\lambda_i^{A_{22}}}{\lambda_i^{A_{22}}}$, $i = 1,2,\dots,n-k-1$ και $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]=0$ της μήτρας A_{22} αντιστοιχούν *το πολύ δύο* διανύσματα μη μηδενικών τιμών.

Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να ισχύουν οι παραπάνω λύσεις είναι:

$$\operatorname{rank}\left[I_2-\left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22}\right]=\operatorname{rank}\left[I_2-\left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22},\ p_1A_{12}\left(1+R_i^{A_{22}}\right)+wl_2\right]^T \le n-1$$

λύσεις του επιλυόμενου συστήματος προσδιορισμού των "ονομαστικών" τιμών[145] διαμορφώνονται αντίστοιχα ως εξής:

Α. Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$, με $r \neq R_i^{A_{22}}$, $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, οι ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου w και των βασικών εμπορευμάτων $\tilde{p}_1$ είναι είτε θετικές είτε αρνητικές. Σε κάθε περίπτωση, το αντίστοιχο, διάφορο του μηδενός, διάνυσμα ονομαστικών τιμών $\tilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.

Πράγματι, από τις σχέσεις (4.6), (4.7) και την εξίσωση τυποποίησης (1) θα έχουμε:

$$w = \frac{1}{l_1\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]^{-1}u_1+\left\{l_1\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]^{-1}A_{12}(1+r)+l_2\right\}\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]^{-1}u_2} \quad ^{146,\ 147}$$

---

[145] Μιλάμε για "ονομαστικές" τιμές, επειδή στην προκείμενη περίπτωση το αντίστοιχο σύστημα προσδιορισμού των εμπορευμάτων ενδέχεται να έχει περισσότερους από ένα βαθμούς ελευθερίας. Σε αυτήν την περίπτωση, η εισαγωγή της εξίσωσης τυποποίησης δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό των ονομαστικών τιμών.

[146] Η ανωτέρω σχέση, η οποία αποτελεί την $w-r$ σχέση του διαστήματος τιμών $R \prec r \prec R_1$ του ποσοστού κέρδους που αντιστοιχεί στην εξίσωση τυποποίησης (1), προκύπτει αναπτύσσοντας μια ανάλογη συλλογιστική με αυτήν που περιγράψαμε στην παράγραφο (1.a). Προφανώς, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $R \prec r \prec R_1$ και *δεν αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} = \dfrac{1-\lambda_i^{A_{22}}}{\lambda_i^{A_{22}}}$, $i = 1,2,\ldots,n-k-1$ και $R_i^{A_{22}} \neq R_2$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]=0$ της μήτρας A_{22} οι μήτρες:

$$\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]$$

και

$$\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]$$

Σύμφωνα με την ανωτέρω σχέση, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$, με $r \neq R_i^{A_{22}}$ και $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, οι ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου w και των βασικών εμπορευμάτων $\tilde{p}_1$ είναι είτε θετικές είτε αρνητικές.[148]

είναι μη ιδιάζουσες.

[147] Υπό την προϋπόθεση, φυσικά, ότι η εξίσωση τυποποίησης είναι *δυνατή*, δηλαδή σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$, ισχύει:

$$pu \neq 0$$

Στην αντίθετη περίπτωση, που σε μια ορισμένη τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$, ισχύει:

$$pu = 0,$$

η ανωτέρω $w - r$ σχέση, στην δεδομένη τιμή r του ποσοστού κέρδους, δεν θα ορίζεται.

[148] Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$ η μήτρα:

$$\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]$$

είναι μη ιδιάζουσα και μη διασπώμενη μήτρα. Επομένως, θα ισχύει:

$$\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]^{-1} \succ 0$$

Το ίδιο, όμως, δε συμβαίνει και με τη μήτρα:

$$\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right],$$

η οποία θα περιέχει υποχρεωτικά αρνητικά στοιχεία. Επομένως, το πρόσημο του ονομαστικού ωρομισθίου:

$$w = \frac{1}{l_1\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]^{-1}u_1 + \left\{l_1\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]^{-1}A_{12}(1+r) + l_2\right\}\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right]^{-1}u_2}$$

θα εξαρτάται από το πρόσημο του βαθμωτού:

$$l_1\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]^{-1}u_1 + \left\{l_1\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]^{-1}A_{12}(1+r) + l_2\right\}\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right]^{-1}u_2$$

Τέλος, σύμφωνα με τη σχέση (4.6), οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ομόσημες.

Εφαρμόζοντας τις προκύπτουσες ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου w και των βασικών εμπορευμάτων $\widetilde{p}_1$ στο σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων (4.4) ή (4.7), το οποίο υποθέσαμε ότι είναι συμβιβαστό, προκύπτει ένα πλήρως προσδιορισμένο διάνυσμα ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων,[149] το οποίο περιέχει υποχρεωτικά αρνητικές συνιστώσες.[150]

B. Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$, με $r = R_i^{A_{22}}$, $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, οι "ονομαστικές" τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου w και των βασικών εμπορευμάτων $\widetilde{p}_1$ είναι είτε θετικές είτε ίσες με το μηδέν. Σε κάθε περίπτωση, το προκύπτον διάνυσμα "ονομαστικών" τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, $\widetilde{p}_2$ ή $\widetilde{\mathrm{p}}_i^{A_{22}}$ αντίστοιχα, θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.

Σε μια τυχαία τιμή $R_i^{A_{22}}$, $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$, αντιστοιχίζουμε αυθαίρετα μια ορισμένη θετική τιμή

---

149 Αν η τιμή r του ποσοστού κέρδους *δεν αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} = \dfrac{1-\lambda_i^{A_{22}}}{\lambda_i^{A_{22}}}$, $i = 1,2,\ldots,n-k-1$ και $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = 0$ της μήτρας A_{22}, το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι πλήρως προσδιορισμένο, εφόσον ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = \operatorname{rank}\left[I_2 - (1+r)A_{22},\, \widetilde{p}_1 A_{12}(1+r) + wl_2\right]^T = n$$

150 Η απόδειξη αποτελεί απλή εφαρμογή της εξίσωσης τυποποίησης (1) και της σχέσης (4.4). Βλ. την παράγραφο (4.I.3.b.A).

του ονομαστικού ωρομισθίου w $(w \succ 0)$ και, επομένως, ένα ορισμένο θετικό διάνυσμα ονομαστικών τιμών $\tilde{p}_1$ των βασικών εμπορευμάτων $(\tilde{p}_1 \succ 0)$.[151] Αν ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2 - \left(1 + R_i^{A_{22}}\right)A_{22}\right] = \operatorname{rank}\left[I_2 - \left(1 + R_i^{A_{22}}\right)A_{22},\ \tilde{p}_1 A_{12}\left(1 + R_i^{A_{22}}\right) + w l_2\right]^T \leq n - 1,$$

τότε, προφανώς, για κάθε θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w το σύστημα προσδιορισμού των "ονομαστικών" τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι συμβιβαστό[152] **και από** την επίλυση του προκύπτουν υποχρεωτικά αρνητικές συνιστώσες,[153] ανεξάρτητα από τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του.[154]

---

[151] *Οι ανωτέρω θετικές ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου και των βασικών εμπορευμάτων* είναι "αυθαίρετες" κι επομένως δεν υπαγορεύονται από την εξίσωση τυποποίησης (1).

[152] Σε κάθε διαφορετική θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου αντιστοιχεί μια παράλληλη μετατόπιση του διανύσματος:

$$\tilde{p}_1 A_{12}\left(1 + R_i^{A_{22}}\right) + w l_2$$

[153] Η απόδειξη αποτελεί απλή εφαρμογή της εξίσωσης τυποποίησης (1) και της σχέσης (4.4). Βλ. την παράγραφο (4.I.3.b.A).

[154] Αν η τιμή r του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με ${}_{i}^{A_{22}} = \dfrac{1-\lambda_i^{A_{22}}}{\lambda_i^{A_{22}}}$, $i = 1,2,\ldots,n-k-1$ και $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = 0$ της μήτρας A_{22} και με την τιμή r συνδέονται θετικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου $(w \succ 0)$ και των τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων $(p_1 \succ 0)$, τότε το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, για την εξίσωση τυποποίησης (1), έχει *τουλάχιστον δύο* βαθμούς ελευθερίας. Προφανώς, ο ένας από αυτούς αναφέρεται στο σύστημα προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων. Θα έχει ακριβώς δύο βαθμούς ελευθερίας, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2 - \left(1 + R_i^{A_{22}}\right)A_{22}\right] = \operatorname{rank}\left[I_2 - \left(1 + R_i^{A_{22}}\right)A_{22},\ p_1 A_{12}\left(1 + R_i^{A_{22}}\right) + w l_2\right]^T = n - 1,$$

Αντίθετα, αν για μια αυθαίρετα ορισμένη θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w $(w \succ 0)$ και, επομένως, για το αντίστοιχα αυθαίρετα ορισμένο θετικό διάνυσμα ονομαστικών τιμών $\tilde{p}_1$ των βασικών εμπορευμάτων $(\tilde{p}_1 \succ 0)$ ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2-\left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22}\right] \prec \operatorname{rank}\left[I_2-\left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22},\ \tilde{p}_1 A_{12}\left(1+R_i^{A_{22}}\right)+wl_2\right]^T \leq n,$$

τότε, προφανώς, για κάθε θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w το σύστημα προσδιορισμού των "ονομαστικών" τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι ασυμβίβαστο.

Σε κάθε περίπτωση, ανεξάρτητα αν στην τιμή $R_i^{A_{22}}$ του ποσοστού κέρδους το σύστημα προσδιορισμού των "ονομαστικών" τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι συμβιβαστό ή ασυμβίβαστο, για θετικές ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου w $(w \succ 0)$ και των βασικών εμπορευμάτων $\tilde{p}_1$ $(\tilde{p}_1 \succ 0)$ το σύστημα προσδιορισμού των "ονομαστικών" τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι πάντοτε συμβιβαστό, αν οι ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου w και των βασικών εμπορευμάτων είναι ίσες με το μηδέν, δηλαδή έχουμε:

$$w = 0$$

και

$$\tilde{p}_1 = 0$$

αντίστοιχα.

δηλαδή, αν και μόνο αν η ρίζα $R_i^{A_{22}}$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]=0$ της μήτρας A_{22} είναι ημι-απλή. Αντίθετα, το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων θα έχει *περισσότερους από δύο* βαθμούς ελευθερίας, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2-\left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22}\right] = \operatorname{rank}\left[I_2-\left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22},\ p_1 A_{12}\left(1+R_i^{A_{22}}\right)+wl_2\right]^T \prec n-1$$

Σε κάθε περίπτωση, η εξίσωση τυποποίησης (1) δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό των ονομαστικών τιμών των εμπορευμάτων.

Τότε, σύμφωνα με τη σχέση (4.14), το αντίστοιχο, διάφορο του μηδενός, διάνυσμα "ονομαστικών" τιμών $\tilde{\mathrm{p}}_i^{A_{22}}$ των μη βασικών εμπορευμάτων θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα,[155] ανεξάρτητα αν είναι πλήρως προσδιορισμένο ή έχει ένα ή περισσότερους από ένα βαθμούς ελευθερίας.[156]

---

155 Η απόδειξη αποτελεί *απλή* εφαρμογή της εξίσωσης τυποποίησης (1) και της σχέσης (4.14). Βλ. την παράγραφο (4.I.3.b.B). Στην προκείμενη περίπτωση, η εξίσωση τυποποίησης (1) γράφεται ως εξής:

$$\mathrm{p}_i^{A_{22}} u_2 = 1$$

156 Αν η τιμή r του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με ${}_{i}^{A_{22}} = \dfrac{1-\lambda_i^{A_{22}}}{\lambda_i^{A_{22}}}$, $i = 1,2,\ldots,n-k-1$ και $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = 0$ της μήτρας A_{22} και με την τιμή r συνδέονται μηδενικές ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου $(w=0)$ και των τιμών $\tilde{p}_1$ των βασικών εμπορευμάτων $(\tilde{p}_1 = 0)$, τότε το ιδιοσύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών $\tilde{\mathrm{p}}_i^{A_{22}}$ των μη βασικών εμπορευμάτων θα είναι *πλήρως* προσδιορισμένο, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2 - \left(1 + R_i^{A_{22}}\right)A_{22}\right] = n-1,$$

δηλαδή, αν και μόνο αν η ρίζα $R_i^{A_{22}}$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = 0$ της μήτρας A_{22} είναι *ημι-απλή*. Στην προκείμενη περίπτωση, η εξίσωση τυποποίησης (1) επαρκεί για τον προσδιορισμό των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, υπό την προϋπόθεση, φυσικά, ότι δεν ισχύει:

$$\mathrm{p}_i^{A_{22}} \perp u_2$$

ή

$$\mathrm{p}_i^{A_{22}} u_2 = 0.$$

Αντίστοιχα, αν στην τιμή $R_i^{A_{22}}$ του ποσοστού κέρδους το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι συμβιβαστό για θετικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου $(w \succ 0)$ και των τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων $(p_1 \succ 0)$, η $w-r$ σχέση είναι *αόριστη* στην τιμή $R_i^{A_{22}}$ του ποσοστού κέρδους, εφόσον οποιαδήποτε *μη αρνητική* τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι αποδεκτή, Επομένως, από την εξίσωση τυποποίησης (1) και τις σχέσεις (4.4), (4.6), (4.7) και (4.14) συνεπάγεται, ότι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$, το διάνυσμα των "ονομαστικών" τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα, ανεξάρτητα αν με την τιμή r του ποσοστού κέρδους συνδέονται θετικές, αρνητικές ή ίσες με το μηδέν "ονομαστικές" τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου W και των βασικών εμπορευμάτων $\widetilde{p}_1$ και ανεξάρτητα αν το σύστημα προσδιορισμού των "ονομαστικών"

υπό την προϋπόθεση, φυσικά, ότι η εξίσωση τυποποίησης (1) είναι *δυνατή*, δηλαδή στην τιμή $R_i^{A_{22}}$ του ποσοστού κέρδους ισχύει:

$$pu \neq 0$$

Στην αντίθετη περίπτωση, που στην τιμή $R_i^{A_{22}}$ του ποσοστού κέρδους το σύστημα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι συμβιβαστό μόνο για μηδενικές ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου $(W=0)$ και των τιμών $\widetilde{p}_1$ των βασικών εμπορευμάτων $(\widetilde{p}_1=0)$, η $W-r$ σχέση ορίζεται μονοσήμαντα στην τιμή $R_i^{A_{22}}$ του ποσοστού κέρδους και το ονομαστικό ωρομισθίου λαμβάνει την μηδενική τιμή $(W=0)$, υπό την προϋπόθεση, φυσικά, ότι η εξίσωση τυποποίησης (1) είναι *δυνατή*, δηλαδή στην τιμή $R_i^{A_{22}}$ του ποσοστού κέρδους ισχύει:

$$\mathrm{p}_i^{A_{22}} u_2 \neq 0.$$

Προφανώς, αν δεν ισχύει η ανωτέρω συνθήκη, τότε η εξίσωση τυποποίησης (1) και *αδύνατη* και επομένως ο βαθμός ελευθερίας παραμένει. Στην προκείμενη περίπτωση, το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων θα έχει *ένα ή περισσότερους από ένα* βαθμούς ελευθερίας, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2-\left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22}\right] \prec n-1$$

Κατά συνέπεια, η εξίσωση τυποποίησης (1) δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων.

τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι πλήρως προσδιορισμένο ή έχει ένα ή περισσότερους από ένα βαθμούς ελευθερίας.

Επιπλέον δείξαμε, ότι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα τιμών $R \prec r \prec R_1$ και *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} = \dfrac{1-\lambda_i^{A_{22}}}{\lambda_i^{A_{22}}}$, $i = 1,2,\dots,n-k-1$ και $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22} θα αντιστοιχούν το πολύ δύο διανύσματα "ονομαστικών" τιμών.[157]

Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να αντιστοιχούν δύο διανύσματα "ονομαστικών" τιμών είναι:

$$\operatorname{rank}\left[I_2 - \left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22}\right] = \operatorname{rank}\left[I_2 - \left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22},\ \tilde{p}_1 A_{12}\left(1+R_i^{A_{22}}\right) + wl_2\right]^T \leq n-1$$

---

[157] Τα δύο ενδεχόμενα διανύσματα "ονομαστικών" τιμών περιγράφονται ως εξής:

- Οι "ονομαστικές" τιμές των βασικών εμπορευμάτων $\tilde{p}_1$ και του ονομαστικού ωρομισθίου W είναι θετικές. Το αντίστοιχο, διάφορο του μηδενός, διάνυσμα "ονομαστικών" τιμών $\tilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα και
- Οι ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου W και των βασικών εμπορευμάτων $\tilde{p}_1$ είναι ίσες με το μηδέν. Το αντίστοιχο, διάφορο του μηδενός, διάνυσμα "ονομαστικών" τιμών $\tilde{p}_i^{A_{22}}$ των μη βασικών εμπορευμάτων θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.

Σημειώνουμε ότι αναφερόμαστε σε διανύσματα "ονομαστικών" τιμών, δηλαδή σε διανύσματα τιμών, τα οποία ακόμα και μετά την εξίσωση τυποποίησης (1) δεν είναι πλήρως προσδιορισμένα. Στην αντίθετη περίπτωση, που αναφερόμασταν σε διανύσματα ονομαστικών τιμών, δηλαδή σε διανύσματα πλήρως προσδιορισμένων τιμών, ο ανωτέρω ισχυρισμός μας είναι αφενός μεν *αυτονόητος*, δηλαδή *τετριμμένος*, στον βαθμό που η εξίσωση τυποποίησης (1) δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό των ονομαστικών τιμών των εμπορευμάτων και επομένως θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο διανύσματα ονομαστικών τιμών, αφετέρου *ανακριβής*, εφόσον τελικά, αφού προσμετρήσουμε όλες τις παραμέτρους που περιγράψαμε παραπάνω, θα υπάρχουν τουλάχιστον τρία διανύσματα ονομαστικών τιμών.

Προφανώς, αν ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2-\left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22}\right]=n-1\prec\operatorname{rank}\left[I_2-\left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22},\ \tilde{p}_1A_{12}\left(1+R_i^{A_{22}}\right)+wl_2\right]^T=n\ ,$$

τότε, στις τιμές $R_i^{A_{22}}$ του ποσοστού κέρδους, το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων λαμβάνει την μορφή ενός πλήρως προσδιορισμένου ιδιοσυστήματος: του ιδιοσυστήματος που αντιστοιχεί σε μηδενικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου και των ονομαστικών τιμών των βασικών εμπορευμάτων.

Θα δείξουμε, ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η ανωτέρω σχέση είναι η εξής:

- Η τιμή $R_i^{A_{22}}$ είναι ημι-απλή ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A ή της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}. Δηλαδή ισχύει:

  $$\operatorname{rank}\left[I_2-\left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22}\right]=n-1 \text{ και}$$

- Το διάνυσμα άμεσης εργασίας l *δεν* είναι κάθετο στο δεξιό ιδιοδιάνυσμα $Q_i^{A_{22}}$ της μήτρας A που συνδέεται με την ημι-απλή ρίζα $R_i^{A_{22}}$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A ή της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}.[158]

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε, ότι οι σχέσεις:

$$lQ_i^{A_{22}}\neq 0$$

και

$$\operatorname{rank}\left[I_2-\left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22},\ \tilde{p}_1A_{12}\left(1+R_i^{A_{22}}\right)+wl_2\right]^T=n$$

---

[158] Η ανωτέρω συνθήκη, όταν αναφέρεται στο σύνολο των χαρακτηριστικών ριζών μιας μη διασπώμενης μήτρας, ορίζει τη λεγόμενη "κανονική οικονομία" (regular economy). Βλ. Schefold [1976, σελ. 22].

είναι ισοδύναμες.

Ορίζουμε:

$$Q_i^{A_{22}} = \left(q_{i,1}^{A_{22}},\ q_{i,2}^{A_{22}}\right)^T,$$

όπου με $q_{i,1}^{A_{22}}$ συμβολίζουμε το υποδιάνυσμα τάξης $k \times 1$ και με $q_{i,2}^{A_{22}}$ συμβολίζουμε το υποδιάνυσμα τάξης $(n-k)\times 1$.

Έτσι, θα έχουμε:

$$l Q_i^{A_{22}} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$l_1\, q_{i,1}^{A_{22}} + l_2\, q_{i,2}^{A_{22}} \neq 0\text{[159]} \Leftrightarrow$$

---

[159] Σύμφωνα με τη σχέση (2.1), το ιδιοδιάνυσμα $Q_i^{A_{22}} = \left(q_{i,1}^{A_{22}},\ q_{i,2}^{A_{22}}\right)^T$ της μήτρας A, ως προς τη "χαρακτηριστική" της ρίζας $R_i^{A_{22}}$, προσδιορίζεται ως εξής:

$$Q_i^{A_{22}} = A Q_i^{A_{22}}\left(1+R_i^{A_{22}}\right) \Rightarrow$$

$$\left(q_{i,1}^{A_{22}},\ q_{i,2}^{A_{22}}\right)^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\left(q_{i,1}^{A_{22}},\ q_{i,2}^{A_{22}}\right)^T\left(1+R_i^{A_{22}}\right),$$

με

$$q_{i,2}^{A_{22}} = A_{22}\, q_{i,2}^{A_{22}}\left(1+R_i^{A_{22}}\right)$$

και

$$q_{i,1}^{A_{22}} = A_{11}\, q_{i,1}^{A_{22}}\left(1+R_i^{A_{22}}\right) + A_{12}\, q_{i,2}^{A_{22}}\left(1+R_i^{A_{22}}\right) \Rightarrow$$

$$\left[I_1 - \left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{11}\right] q_{i,1}^{A_{22}} = A_{12}\, q_{i,2}^{A_{22}}\left(1+R_i^{A_{22}}\right) \Rightarrow$$

$$q_{i,1}^{A_{22}} = \left[I_1 - \left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{11}\right]^{-1} A_{12}\, q_{i,2}^{A_{22}}\left(1+R_i^{A_{22}}\right)$$

$$\left\{\left[I_1-\left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{11}\right]^{-1}A_{12}q_{i,2}^{A_{22}}\left(1+R_i^{A_{22}}\right)\right\}+l_2\, q_{i,2}^{A_{22}}\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{l_1\left[I_1-\left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{11}\right]^{-1}A_{12}\left(1+R_i^{A_{22}}\right)+l_2\right\}q_{i,2}^{A_{22}}\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\frac{\tilde{p}_1}{w}A_{12}\left(1+R_i^{A_{22}}\right)+l_2\right\}q_{i,2}^{A_{22}}\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\tilde{p}_1A_{12}\left(1+R_i^{A_{22}}\right)+wl_2\right\}q_{i,2}^{A_{22}}\neq 0$$

Δεδομένου ότι η τιμή $R_i^{A_{22}}$ είναι ημι-απλή ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}, η ανωτέρω σχέση θα ισχύει για κάθε δεξιό ιδιοδιάνυσμα $q_{i,2}^{A_{22}}$, τάξης $n\times 1$, της μήτρας A_{22}, που συνδέεται με την "χαρακτηριστική" της ρίζα $R_i^{A_{22}}$. Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση (2.1), η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\operatorname{rank}\left[I_2-\left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22},\ \tilde{p}_1A_{12}\left(1+R_i^{A_{22}}\right)+wl_2\right]^T=n$$

3.b. Η εξίσωση τυποποίησης έχει την μορφή:

$$p_1u_1=1 \tag{2}$$

Από τη σχέση (4.6) και την εξίσωση τυποποίησης (2) θα έχουμε:

$$wl_1\left[I_1-(1+r)A_{11}\right]^{-1}u_1=1 \Leftrightarrow$$

$$w = \frac{1}{l_1\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]^{-1} u_1}$$ [160]

Από την ανωτέρω εξίσωση συνεπάγεται, ότι, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$, η εξίσωση τυποποίησης (2) έχει νόημα, αν και μόνο αν η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή, αν και μόνο αν είναι θετική.[161]

Εφαρμόζοντας την ανωτέρω θετική λύση του ονομαστικού ωρομισθίου w στην εξίσωση (4.6) προσδιορίζουμε τις θετικές ονομαστικές τιμές $\tilde{p}_1$ των βασικών εμπορευμάτων.[162] Προφανώς, η ανωτέρω θετική λύση είναι συγγραμμική με την μοναδική, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), *μη τετριμμένη,* θετική λύση για το διάνυσμα p_1 των τιμών των k βασικών, παραγόμενων εμπορευμάτων και την τιμή w του μη παραγόμενου εμπορεύματος, της εργασιακής δύναμης, που προκύπτει από το σύστημα εξισώσεων (4.6).

---

[160] Η ανωτέρω σχέση αποτελεί την $w - r$ σχέση του διαστήματος τιμών $R \prec r \prec R_1$ του ποσοστού κέρδους, που αντιστοιχεί στην εξίσωση τυποποίησης (2).

[161] Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $R \prec r \prec R_1$, η μήτρα:

$$\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]$$

είναι μη ιδιάζουσα και μη διασπώμενη μήτρα. Επομένως, θα ισχύει:

$$\left[I_1 - (1+r)A_{11}\right]^{-1} \succ 0$$

[162] Επομένως, η ισχύς της εξίσωσης τυποποίησης (2) σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα τιμών $R \prec r \prec R_1$ επιβάλλει την εφαρμογή της *μη τετριμμένης* λύσης του συστήματος (4.6) για την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου και τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων. Κατά συνέπεια, η *τετριμμένη* λύση του συστήματος (4.6) για την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου και τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι *μη επιτρεπτή.*

Στη συνέχεια, θέτουμε τις θετικές ονομαστικές τιμές $\widetilde{p}_1$ των βασικών εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου w, που προσδιορίσαμε παραπάνω, στο σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων (4.4). Σε κάθε τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in (R, R_1)$, θα αντιστοιχεί μια από τις παρακάτω επιμέρους περιπτώσεις:

Α. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους *δεν αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ και $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}.

Στην προκείμενη περίπτωση, το σύστημα (4.4) είναι πάντοτε *επιλύσιμο*.[163] Από την επίλυση του προκύπτει ένα διάφορο του μηδενός, πλήρες προσδιορισμένο διάνυσμα των ονομαστικών τιμών $\widetilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων, το οποίο περιέχει αρνητικές συνιστώσες.[164] Δηλαδή, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα μη βασικό εμπόρευμα του οποίου η ονομαστική τιμή είναι αρνητική.

Β. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ και $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}.

Στην προκείμενη περίπτωση, παρουσιάζονται τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

- Το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *μη επιλύσιμο* [165] και

---

[163] Εφόσον ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = \operatorname{rank}\left[I_2 - (1+r)A_{22},\, \widetilde{p}_1 A_{12}(1+r) + wl_2\right]^T = n$$

[164] Η απόδειξη αποτελεί απλή εφαρμογή της εξίσωσης τυποποίησης (2) και της σχέσης (4.4). Βλ. την παράγραφο (4.I.3.b.A).

[165] Στην παράγραφο (3.a) συζητήσαμε εκτενώς την περίπτωση αυτή.

- Το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *επιλύσιμο* και η "ονομαστική" τιμή[166] ενός τουλάχιστον μη βασικού εμπορεύματος είναι αρνητική.[167]

Έτσι, η προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης (2) στα συστήματα (4.4) και (4.6) οδηγεί στον προσδιορισμό μιας θετικής λύσης για την τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου και το διάνυσμα $\widetilde{p}_1$ των ονομαστικών τιμών των k βασικών

---

[166] Στην προκείμενη περίπτωση, στην τιμή $R_i^{A_{22}}$ του ποσοστού κέρδους, με ${}_{i}^{A_{22}} = \dfrac{1-\lambda_i^{A_{22}}}{\lambda_i^{A_{22}}}$, $i = 1,2,\ldots,n-k-1$ και $R_i^{A_{22}} \neq R_2$, που *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = 0$ της μήτρας A_{22} και με την οποία συνδέονται θετικές ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου $(w \succ 0)$ και των τιμών $\widetilde{p}_1$ των βασικών εμπορευμάτων $(\widetilde{p}_1 \succ 0)$, το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών $\widetilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων, για την εξίσωση τυποποίησης (2), έχει *τουλάχιστον ένα* βαθμό ελευθερίας. Έχει ακριβώς ένα βαθμό ελευθερίας, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2 - \left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22}\right] = \operatorname{rank}\left[I_2 - \left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22},\, \widetilde{p}_1 A_{12}\left(1+R_i^{A_{22}}\right) + wl_2\right]^T = n-1,$$

δηλαδή, αν και μόνο αν η ρίζα $R_i^{A_{22}}$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = 0$ της μήτρας A_{22} είναι ημι-απλή. Αντίθετα, το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων θα έχει περισσότερους από ένα βαθμούς ελευθερίας, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2 - \left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22}\right] = \operatorname{rank}\left[I_2 - \left(1+R_i^{A_{22}}\right)A_{22},\, \widetilde{p}_1 A_{12}\left(1+R_i^{A_{22}}\right) + wl_2\right]^T \prec n-1$$

Σε κάθε περίπτωση, η εξίσωση τυποποίησης (2) δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό των ονομ τιμών $\widetilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων.

[167] Η απόδειξη αποτελεί απλή εφαρμογή της εξίσωσης τυποποίησης (2) και της ... παράγραφο (4.I.3.b.A). ... των

εμπορευμάτων, καθώς και σε ένα *αδύνατο ή επιλύσιμο με αρνητικές συνιστώσες* διάνυσμα "ονομαστικών" τιμών $\tilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων.

3.c. Συμπέρασμα: Οι ονομαστικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$ του ποσοστού κέρδους r

Από την διερεύνηση των συστημάτων προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων που προηγήθηκε προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

A. Για κάθε τυποποίηση των τιμών, στην τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$ και *δεν αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ και $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}, οι ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου w και των βασικών εμπορευμάτων $\tilde{p}_1$ είναι διάφορες του μηδενός.[168] Το αντίστοιχο, διάφορο του μηδενός, διάνυσμα ονομαστικών τιμών $\tilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων είναι πλήρες προσδιορισμένο και περιέχει υποχρεωτικά αρνητικές συνιστώσες.

B. Αν στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$ και *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ και $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}, το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών $\tilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *επιλύσιμο* για μια τυχαία θετική του ονομαστικού ωρομισθίου w και του αντίστοιχου διανύσματος ονομαστικών τιμών $\tilde{p}_1$ των βασικών εμπορευμάτων, τότε, κάθε τυποποίηση των τιμών, στην τιμή $R_i^{A_{22}}$ του ποσοστού κέρδους επιτρέπει θετικές "ονομαστικές" τιμές του ονομαστικού

---

[168] Είτε θετικές είτε αρνητικές για την εξίσωση τυποποίησης (1) και θετικές για την εξίσωση τυποποίησης (2).

ωρομισθίου w και των βασικών εμπορευμάτων $\widetilde{p}_1$, καθώς και ένα διάφορο του μηδενός, διάνυσμα "ονομαστικών" τιμών $\widetilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων, το οποίο περιέχει υποχρεωτικά αρνητικές συνιστώσες.

Επιπλέον, η τυποποίηση των τιμών με ένα τυπικό εμπόρευμα που περιέχει τουλάχιστον ένα μη βασικό εμπόρευμα επιτρέπει μια *πρόσθετη* λύση: τη λύση του ιδιοσυστήματος προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών $\widetilde{\mathrm{p}}_i^{A_{22}}$ των μη βασικών εμπορευμάτων, που αντιστοιχεί σε μηδενικές ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου w και των βασικών εμπορευμάτων και είναι είτε πλήρως προσδιορισμένο είτε έχει ένα ή περισσότερους από ένα βαθμούς ελευθερίας.

C. Αν στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα $R \prec r \prec R_1$ και *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ και $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}, το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών $\widetilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *ασυμβίβαστο* για μια τυχαία θετική του ονομαστικού ωρομισθίου w και του αντίστοιχου διανύσματος ονομαστικών τιμών $\widetilde{p}_1$ των βασικών εμπορευμάτων, τότε η τυποποίηση των τιμών με ένα τυπικό εμπόρευμα που περιέχει τουλάχιστον ένα μη βασικό εμπόρευμα επιτρέπει μια *μοναδική* λύση: τη λύση του ιδιοσυστήματος προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών $\widetilde{\mathrm{p}}_i^{A_{22}}$ των μη βασικών εμπορευμάτων, που περιγράψαμε παραπάνω.

Αντίθετα, η τυποποίηση των τιμών με ένα τυπικό εμπόρευμα που περιέχει αποκλειστικά ένα απλό ή σύνθετο βασικό εμπόρευμα καθιστά το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών $\widetilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων *ασυμβίβαστο* και, επομένως, το διάνυσμα των "ονομαστικών" τιμών $\widetilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων *αδύνατο.*

4. Η τιμή r του ποσοστού κέρδους είναι ίση με R_1

Θα μελετήσουμε το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών που αντιστοιχεί σε κάθε μια από τις ακόλουθες μορφές εξισώσεων τυποποίησης:

4.a. Η εξίσωση τυποποίησης έχει την μορφή:

$$pu = 1, \text{ με } u = (u_1, u_2) \text{ και } u_2 \geq 0 \tag{1}$$

Από τη σχέση (3) συνεπάγεται, ότι, στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους, η εξίσωση τυποποίησης (1) έχει νόημα, αν και μόνο αν οι τιμές των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων είναι προσδιορισμένες και διάφορες του μηδενός.[169]

Σύμφωνα με τα συστήματα (4.12), (4.16), (4.17), (4.18) και (4.19), στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους οι δυνατές μη μηδενικές λύσεις του επιλυόμενου συστήματος προσδιορισμού των τιμών είναι οι εξής: [170]

- Η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της υπομήτρας A_{22}.[171] Στην τιμή R_1 η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με μηδέν και οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων προσδιορίζονται από την *μη τετριμμένη* λύση p_1. Το αντίστοιχο, διάφορο του μηδενός, διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων -εφόσον προσδιορίζεται[172]- θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.

---

[169] Στην παράγραφο (4.I.4.a) δείξαμε, ότι, στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι πάντοτε προσδιορισμένες. Επομένως, σύμφωνα με την εξίσωση τυποποίησης (1), προσδιορισμένες θα είναι και οι τιμές των μη βασικών εμπορευμάτων. Σε κάθε άλλη περίπτωση η εξίσωση τυποποίησης (1) είναι αδύνατη.

[170] Οι λύσεις, που ακολουθούν, προκύπτουν από την ανάλυση των αντίστοιχων παραγράφων (4.4.a) και (4.4.b).

[171] Αυτό σημαίνει ότι η ιδιοτιμή $\lambda_m^{A_{11}}$ της υπομήτρας A_{11} *περιλαμβάνεται* στο φάσμα των χαρακτηριστικών τιμών της υπομήτρας A_{22}.

[172] Το αντίστοιχο σύστημα (4.18) είναι συμβιβαστό, αν και μόνο αν ισχύει:

- Η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της υπομήτρας A_{22}. Στην τιμή R_1 η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με μηδέν και οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων προσδιορίζονται από την *τετριμμένη* λύση $p_1 = 0$. Το αντίστοιχο, διάφορο του μηδενός, διάνυσμα τιμών $\mathrm{p}^{A_{22}}_{\lambda^{A_{11}}_m}$ των μη βασικών εμπορευμάτων θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα[173] και

- Η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *δεν αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της υπομήτρας A_{22}.[174] Στην τιμή R_1 η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με μηδέν και οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων προσδιορίζονται από την *μη τετριμμένη* λύση p_1. Το αντίστοιχο, διάφορο του μηδενός, διάνυσμα τιμών p_2 των μη βασικών εμπορευμάτων θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.

$$rank\left[I_2 - (1+R_1)A_{22}\right] = rank\left[I_2 - (1+R_1)A_{22},\ \mathrm{p}_1 A_{12}(1+R_1)\right] \leq n-1$$

[173] Έτσι, στην τιμή R_1 του ποσοστού, κέρδους που *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} = \dfrac{1-\lambda_i^{A_{22}}}{\lambda_i^{A_{22}}}$, $i = 1,2,\dots,n-k-1$ και $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = 0$ της μήτρας A_{22} αντιστοιχούν *το πολύ δύο* διανύσματα μη μηδενικών τιμών.

Προφανώς, αναγκαία και ικανή συνθήκη για να ισχύουν οι παραπάνω λύσεις είναι:

$$\mathrm{rank}\left[I_2 - (1+R_1)A_{22}\right] = \mathrm{rank}\left[I_2 - (1+R_1)A_{22},\ \mathrm{p}_1 A_{12}(1+R_1)\right]^T \leq n-1,$$

δηλαδή το σύστημα (4.18) να είναι συμβιβαστό.

[174] Αυτό σημαίνει ότι η ιδιοτιμή $\lambda_m^{A_{11}}$ της υπομήτρας A_{11} *δεν περιλαμβάνεται* στο φάσμα των χαρακτηριστικών τιμών της υπομήτρας A_{22}.

Με την προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης (1) στα συστήματα προσδιορισμού των τιμών (4.12), (4.16), (4.17), (4.18) και (4.19), οι δυνατές, μη μηδενικές λύσεις του επιλυόμενου συστήματος προσδιορισμού των "ονομαστικών" τιμών διαμορφώνονται αντίστοιχα ως εξής:

A. Η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της υπομήτρας A_{22}. Στην τιμή R_1 η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με μηδέν και οι "ονομαστικές" τιμές των βασικών εμπορευμάτων προσδιορίζονται από την *μη τετριμμένη* λύση $\tilde{p}_1$. Το αντίστοιχο διάνυσμα "ονομαστικών" τιμών $\tilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.

Από την υπόθεση μας ότι το σύστημα προσδιορισμού των "ονομαστικών" τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι συμβιβαστό, θα ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2-(1+R_1)A_{22}\right]=\operatorname{rank}\left[I_2-(1+R_1)A_{22},\ \tilde{p}_1A_{12}(1+R_1)\right]^T\leq n-1$$

Επιλύοντας το ανωτέρω σύστημα προκύπτουν υποχρεωτικά αρνητικές συνιστώσες,[175] ανεξάρτητα από τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του.[176]

---

175 Η απόδειξη αποτελεί απλή εφαρμογή της εξίσωσης τυποποίησης (1) και της σχέσης (4.18). Στην προκείμενη περίπτωση, η εξίσωση τυποποίησης (1) γράφεται ως εξής:

$$p_1u_1+p_2u_2=1$$

176 Αν η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}}=\dfrac{1-\lambda_i^{A_{22}}}{\lambda_i^{A_{22}}}$, $i=1,2,\ldots,n-k-1$ και $R_i^{A_{22}}\neq R_2$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]=0$ της μήτρας A_{22} και με την τιμή R_1 συνδέονται η μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου $(w=0)$ και η μη τετριμμένη λύση των τιμών p_1 των βασικών εμπορευμάτων $(p_1\succ 0)$, τότε το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, για την εξίσωση τυποποίησης (1), έχει *τουλάχιστον δύο* βαθμούς ελευθερίας. Προφανώς, ο ένας από αυτούς αναφέρεται στο ιδιοσύστημα προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων. Θα έχει ακριβώς *δύο* βαθμούς ελευθερίας, αν και μόνο αν ισχύει:

B. Η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της υπομήτρας A_{22}. Στην τιμή R_1 η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με μηδέν και οι ονομαστικές τιμές των βασικών εμπορευμάτων προσδιορίζονται από την *τετριμμένη* λύση $\tilde{p}_1 = 0$. Το αντίστοιχο διάνυσμα "ονομαστικών" τιμών $\tilde{\mathrm{p}}^{A_{22}}_{\lambda^{A_{11}}_m}$ των μη βασικών εμπορευμάτων θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.

Πράγματι, σύμφωνα με τη σχέση (4.19) και την εξίσωση τυποποίησης (1),[177] το αντίστοιχο, διάφορο του μηδενός, διάνυσμα "ονομαστικών" τιμών $\tilde{\mathrm{p}}^{A_{22}}_{\lambda^{A_{11}}_m}$ των μη βασικών εμπορευμάτων θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα, ανεξάρτητα αν είναι πλήρως προσδιορισμένο ή έχει ένα ή περισσότερους από ένα βαθμούς ελευθερίας.[178]

$$\mathrm{rank}\left[I_2 - (1+R_1)A_{22}\right] = \mathrm{rank}\left[I_2 - (1+R_1)A_{22},\ \mathrm{p}_1 A_{12}(1+R_1)\right]^T = n-1,$$

δηλαδή, αν και μόνο αν η ρίζα R_1 της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = 0$ της μήτρας A_{22} είναι *ημι-απλή*. Αντίθετα, το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων θα έχει περισσότερους από δύο βαθμούς ελευθερίας, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\mathrm{rank}\left[I_2 - (1+R_1)A_{22}\right] = \mathrm{rank}\left[I_2 - (1+R_1)A_{22},\ \mathrm{p}_1 A_{12}(1+R_1)\right]^T \prec n-1$$

Σε κάθε περίπτωση, η εξίσωση τυποποίησης (1) δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό των ονομαστικών τιμών των εμπορευμάτων.

177 Στην προκείμενη περίπτωση η εξίσωση τυποποίησης (1) γράφεται ως εξής:

$$\mathrm{p}^{A_{22}}_{\lambda^{A_{11}}_m} u_2 = 1$$

178 Αν η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} = \dfrac{1-\lambda_i^{A_{22}}}{\lambda_i^{A_{22}}}$, $i = 1,2,\ldots,n-k-1$ και $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = 0$ της μήτρας A_{22} και με την τιμή R_1 συνδέονται μηδενικές ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου $(w = 0)$ και των τιμών $\tilde{p}_1$ των

C. Η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *δεν αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της υπομήτρας A_{22}. Στην τιμή R_1 η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με μηδέν και οι ονομαστικές τιμές των βασικών εμπορευμάτων προσδιορίζονται από την *μη τετριμμένη* λύση $\tilde{\mathrm{p}}_1$. Το αντίστοιχο διάνυσμα ονομαστικών τιμών $\tilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.

βασικών εμπορευμάτων $\left(\tilde{p}_1 = 0\right)$, τότε το ιδιοσύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών $\tilde{\mathrm{p}}_i^{A_{22}}$ των μη βασικών εμπορευμάτων θα είναι *πλήρως* προσδιορισμένο, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2 - \left(1 + R_1\right)A_{22}\right] = n - 1,$$

δηλαδή, αν και μόνο αν η ρίζα R_1 της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2 - \left(1 + r\right)A_{22}\right] = 0$ της μήτρας A_{22} είναι *ημι-απλή*. Στην προκείμενη περίπτωση, η εξίσωση τυποποίησης (1) λαμβάνει την μορφή:

$$\mathrm{p}_i^{A_{22}} u_2 = 1$$

Η ανωτέρω εξίσωση τυποποίησης επαρκεί για τον προσδιορισμό των ονομαστικών τιμών $\tilde{\mathrm{p}}_i^{A_{22}}$ των μη βασικών εμπορευμάτων, υπό την προϋπόθεση, φυσικά, ότι δεν ισχύει:

$$\mathrm{p}_i^{A_{22}} \perp u_2$$

ή

$$\mathrm{p}_i^{A_{22}} u_2 = 0.$$

Προφανώς, αν ισχύει η ανωτέρω συνθήκη, τότε η εξίσωση τυποποίησης (1) και *αδύνατη* και επομένως ο βαθμός ελευθερίας παραμένει.

Αντίθετα, το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων θα έχει *ένα ή περισσότερους από ένα* βαθμούς ελευθερίας, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\operatorname{rank}\left[I_2 - \left(1 + R_1\right)A_{22}\right] \prec n - 1$$

Στην προκείμενη περίπτωση, η εξίσωση τυποποίησης (1) δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων.

Πράγματι, σύμφωνα με τη σχέση (4.18) και την εξίσωση τυποποίησης (1),[179] προκύπτει ένα διάφορο του μηδενός, πλήρως προσδιορισμένο διάνυσμα ονομαστικών τιμών $\widetilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων,[180] το οποίο περιέχει υποχρεωτικά αρνητικές συνιστώσες.[181]

4.b. Η εξίσωση τυποποίησης έχει την μορφή:

$$p_1 u_1 = 1 \qquad (2)$$

Στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους η εξίσωση τυποποίησης (2) έχει νόημα, αν και μόνο αν οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι προσδιορισμένες και μη μηδενικές.[182] Σύμφωνα με τη σχέση (4.16), στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους υπάρχει μια μοναδική μη μηδενική λύση p_1 του διανύσματος τιμών των βασικών εμπορευμάτων.[183] Η λύση p_1 είναι θετική και προφανώς ισχύει, αν και μόνο αν η τιμή W του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με το μηδέν $\left(W=0\right)$.[184] Έτσι, η εξίσωση τυποποίησης (2) γράφεται ως εξής:

---

[179] Στην προκείμενη περίπτωση η εξίσωση τυποποίησης (1) γράφεται ως εξής:

$$\mathrm{p}_1 u_1 + p_2 u_2 = 1$$

[180] Η ανωτέρω εξίσωση τυποποίησης επαρκεί για τον προσδιορισμό των ονομαστικών τιμών $\widetilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων, υπό την προϋπόθεση, φυσικά, ότι είναι *δυνατή*, δηλαδή ότι δεν ισχύει:

$$pu = 0$$

[181] Η απόδειξη αποτελεί απλή εφαρμογή της εξίσωσης τυποποίησης (1) και της σχέσης (4.18). Βλ. την παράγραφο (4.I.4.b.C).

[182] Σε κάθε άλλη περίπτωση η εξίσωση τυποποίησης (2) είναι αδύνατη.

[183] Υπενθυμίζουμε ότι με το διάνυσμα p_1 συμβολίζουμε το ιδιοδιάνυσμα της μη διασπώμενης μήτρας A_{11}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{11}}$.

[184] Επομένως, η ισχύς της εξίσωσης τυποποίησης (2) στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους επιβάλλει αφενός μεν την μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου, αφετέρου την εφαρμογή της *μη τετριμμένης* λύσης του ιδιοσυστήματος (4.16) για τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων. Έτσι, σύμφωνα με την εξίσωση

$$p_1 u_1 = 1$$

Από την ανωτέρω σχέση προσδιορίζουμε τις θετικές ονομαστικές τιμές $\tilde{p}_1$ των βασικών εμπορευμάτων. Επομένως, η προσθήκη της εξίσωσης τυποποίησης (2) στα συστήματα (4.3) και (4.16) οδηγεί στον προσδιορισμό της μηδενικής λύσης για την τιμή w του ονομαστικού ωρομισθίου και της θετικής λύσης $\tilde{p}_1$ για το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών των k βασικών εμπορευμάτων. Προφανώς, η ανωτέρω θετική λύση είναι συγγραμμική με την μοναδική, με εξαίρεση ενός βαθμωτού (up to scalar multiplication), *μη τετριμμένη*, θετική λύση για το διάνυσμα p_1 των τιμών των k βασικών εμπορευμάτων της τεχνικής.

Αν στη συνέχεια θέσουμε την μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w και τις θετικές ονομαστικές τιμές των βασικών εμπορευμάτων $\tilde{p}_1$ στο σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων (4.18), προκύπτουν οι ακόλουθες ενδεχόμενες λύσεις:

Α. Η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της υπομήτρας A_{22}. Το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών $\tilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων είναι ασυμβίβαστο.

Δεδομένου ότι ισχύει:

$$rank\left[I_2 - (1+R_1)A_{22}\right] \leq n-1,$$

το σύστημα (4.18) είναι ασυμβίβαστο, αν και μόνο αν ισχύει:

$$rank\left[I_2 - (1+R_1)A_{22}\right] \leq n-1 \prec rank\left[I_2 - (1+R_1)A_{22},\ \tilde{p}_1 A_{12}(1+R_1)\right] \leq n$$

τυποποίησης (2), η θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου στο σύστημα (4.3) ή η *τετριμμένη* λύση του ιδιοσυστήματος (4.16) για τις τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι, στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους, μη επιτρεπτές δυνατότητες.

B. Η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της υπομήτρας A_{22}. Το αντίστοιχο, μη μηδενικό, διάνυσμα "ονομαστικών" τιμών $\widetilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.

Από την υπόθεση μας ότι το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι συμβιβαστό, θα ισχύει:

$$\mathrm{rank}\left[I_2-\left(1+R_1\right)A_{22}\right]=\mathrm{rank}\left[I_2-\left(1+R_1\right)A_{22},\ \widetilde{\mathrm{p}}_1 A_{12}\left(1+R_1\right)\right]^T \leq n-1$$

Έτσι, επιλύοντας το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων προκύπτουν υποχρεωτικά αρνητικές συνιστώσες,[185] ανεξάρτητα αν έχει ένα ή περισσότερους από ένα βαθμούς ελευθερίας.[186]

---

[185] Η απόδειξη αποτελεί απλή εφαρμογή της εξίσωσης τυποποίησης (2) και της σχέσης (4.18).

[186] Αν η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}}=\dfrac{1-\lambda_i^{A_{22}}}{\lambda_i^{A_{22}}}$, $i=1,2,\ldots,n-k-1$ και $R_i^{A_{22}}\neq R_2$ της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2-\left(1+r\right)A_{22}\right]=0$ της μήτρας A_{22} και με την τιμή R_1 συνδέονται η μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου $\left(w=0\right)$ και θετικές ονομαστικές τιμές $\widetilde{\mathrm{p}}_1$ των βασικών εμπορευμάτων $\left(\widetilde{\mathrm{p}}_1\succ 0\right)$, τότε το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, για την εξίσωση τυποποίησης (2), έχει *τουλάχιστον ένα* βαθμό ελευθερίας. Θα έχει ακριβώς *ένα* βαθμό ελευθερίας, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\mathrm{rank}\left[I_2-\left(1+R_1\right)A_{22}\right]=\mathrm{rank}\left[I_2-\left(1+R_1\right)A_{22},\ \widetilde{\mathrm{p}}_1 A_{12}\left(1+R_1\right)\right]^T=n-1,$$

δηλαδή, αν και μόνο αν η ρίζα R_1 της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2-\left(1+r\right)A_{22}\right]=0$ της μήτρας A_{22} είναι *ημι-απλή*. Αντίθετα, το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων θα έχει *περισσότερους από ένα* βαθμούς ελευθερίας, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\mathrm{rank}\left[I_2-\left(1+R_1\right)A_{22}\right]=\mathrm{rank}\left[I_2-\left(1+R_1\right)A_{22},\ \widetilde{\mathrm{p}}_1 A_{12}\left(1+R_1\right)\right]^T\prec n-1$$

Στην περίπτωση που ισχύει η ανωτέρω σχέση, η εξίσωση τυποποίησης (2) δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων.

C. Η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *δεν αποτελεί* ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της υπομήτρας A_{22}. Το αντίστοιχο, μη μηδενικό, διάνυσμα ονομαστικών τιμών $\tilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.

Στην προκείμενη περίπτωση, το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι συμβιβαστό, δηλαδή ισχύει:

$$rank\left[I_2 - \left(1 + R_1\right)A_{22}\right] = rank\left[I_2 - \left(1 + R_1\right)A_{22},\ \tilde{\mathrm{p}}_1 A_{12}\left(1 + R_1\right)\right] = n$$

Έτσι, επιλύοντας το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων προκύπτει ένα πλήρως προσδιορισμένο διάνυσμα ονομαστικών τιμών $\tilde{p}_2$, το οποίο περιέχει υποχρεωτικά αρνητικές συνιστώσες.[187]

[187] Η απόδειξη αποτελεί απλή εφαρμογή της εξίσωσης τυποποίησης (2) και της σχέσης (4.18).

4.c. Συμπέρασμα: Οι ονομαστικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και του ονομαστικού ωρομισθίου στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους r

Από την διερεύνηση των συστημάτων προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων, που προηγήθηκε, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

A. Για κάθε τυποποίηση των τιμών, στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w **είναι** ίση με το μηδέν.

B. Αν στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους, που *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ και $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}, οι τιμές τυποποιηθούν με ένα τυπικό εμπόρευμα, που περιέχει τουλάχιστον ένα μη βασικό εμπόρευμα, τότε θα έχουμε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Το διάνυσμα των "ονομαστικών" τιμών $\tilde{p}$ των παραγόμενων εμπορευμάτων αποτελείται από το διάνυσμα των "ονομαστικών" τιμών $\tilde{p}_1$ των βασικών εμπορευμάτων και το διάνυσμα των "ονομαστικών" τιμών $\tilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων, το οποίο περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.
- Το διάνυσμα των "ονομαστικών" τιμών $\tilde{p}$ των παραγόμενων εμπορευμάτων αποτελείται από το μηδενικό διάνυσμα ονομαστικών τιμών των βασικών εμπορευμάτων και το ιδιάνυσμα των "ονομαστικών" τιμών $\tilde{p}^{A_{22}}_{\lambda_m^{A_{11}}}$ των μη βασικών εμπορευμάτων, το οποίο περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.

Αν όμως οι τιμές τυποποιηθούν με ένα τυπικό εμπόρευμα, που περιέχει αποκλειστικά ένα απλό ή σύνθετο βασικό εμπόρευμα, τότε θα έχουμε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Το διάνυσμα των "ονομαστικών" τιμών $\tilde{p}$ των παραγόμενων εμπορευμάτων αποτελείται από το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών $\tilde{p}_1$ των βασικών εμπορευμάτων και το διάνυσμα των "ονομαστικών" τιμών $\widetilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων, το οποίο περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.

- Το διάνυσμα των "ονομαστικών" τιμών $\widetilde{\mathrm{p}}$ των παραγόμενων εμπορευμάτων αποτελείται από το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών $\widetilde{\mathrm{p}}_1$ των βασικών εμπορευμάτων, ενώ το διάνυσμα των "ονομαστικών" τιμών $\widetilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων είναι απροσδιόριστο.

C. Στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους, που *δεν αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ και $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}, *για κάθε τυποποίηση των τιμών,* θα έχουμε: Το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών $\widetilde{\mathrm{p}}$ των παραγόμενων εμπορευμάτων αποτελείται από το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών $\widetilde{\mathrm{p}}_1$ των βασικών εμπορευμάτων και το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών $\widetilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων, το οποίο περιλαμβάνει τουλάχιστον μια αρνητική συνιστώσα.

Συνοψίζοντας θα λέγαμε, ότι αν η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους *αποτελεί* ρίζα $R_i^{A_{22}}$, με $R_i^{A_{22}} \neq R_2$ και $i = 1,2,\ldots,n-k-1$, της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης της μήτρας A_{22}, **τότε** *για κάθε τυποποίηση των τιμών,* στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους:

- Αντιστοιχούν δύο διανύσματα "ονομαστικών" τιμών των παραγόμενων εμπορευμάτων[188] και
- Σε διαφορετικές μορφές τυποποίησης είναι δυνατές διαφορετικές σχέσεις των "ονομαστικών" τιμών των παραγόμενων εμπορευμάτων.

---

188 Με την ευρύτερη έννοια του όρου, ούτως ώστε να περιλαμβάνεται και η περίπτωση που το διάνυσμα των "ονομαστικών" τιμών $\widetilde{p}_2$ των μη βασικών εμπορευμάτων είναι απροσδιόριστο.

II. Γενικό συμπέρασμα: Οι ονομαστικές τιμές του ονομαστικού ωρομισθίου και των παραγόμενων εμπορευμάτων στις οικονομικά σημαντικές τιμές του ποσοστού κέρδους r.

Η επίλυση των συστημάτων προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών του ονομαστικού ωρομισθίου, των βασικών και των μη βασικών εμπορευμάτων, που εξετάσαμε προηγουμένως, για τις οικονομικά σημαντικές τιμές του ποσοστού κέρδους r, μας οδηγεί στην διατύπωση των ακόλουθων συμπερασμάτων:

1. Για κάθε τυποποίηση των τιμών μιας παραγωγικής, γραμμικής, διασπώμενης τεχνικής παραγωγής[189] με ένα τυπικό εμπόρευμα, που περιέχει τουλάχιστον ένα μη βασικό εμπόρευμα, υπάρχει μια θετική τιμή R_2 του ποσοστού κέρδους,[190] τέτοια ώστε:

- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο συνεχές, θετικό διάστημα τιμών $\left[0, R_2\right)$, αντιστοιχεί το μονοσήμαντα και πλήρως προσδιορισμένο θετικό διάνυσμα ονομαστικών τιμών $\tilde{p}$ των παραγόμενων εμπορευμάτων $\left(\tilde{p} \succ 0\right)$ και ένα θετικό ονομαστικό ωρομίσθιο w $\left(w \succ 0\right)$.
- Στην τιμή R_2 του ποσοστού κέρδους η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με το μηδέν $\left(w = 0\right)$.
- Στην τιμή R_2 του ποσοστού κέρδους αντιστοιχεί το μονοσήμαντα και πλήρως προσδιορισμένο θετικό διάνυσμα $\tilde{\mathrm{p}}$ των τιμών των παραγόμενων εμπορευμάτων,

---

[189] Αναφερόμαστε σε παραγωγικές, γραμμικές, διασπώμενες τεχνικές παραγωγής της μορφής που περιγράφουν οι σχέσεις (2.1) και (2.2).

[190] Η τιμή R_2 του ποσοστού κέρδους είναι η μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής, η οποία στην προκείμενη περίπτωση είναι ίση με την μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους της τεχνικής.

δηλαδή το ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A των τεχνικών συντελεστών παραγωγής, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της και

- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο συνεχές, θετικό διάστημα τιμών (R_2,∞), η ονομαστική τιμή ενός τουλάχιστον παραγόμενου εμπορεύματος είναι αρνητική.[191]

2. Για κάθε τυποποίηση των τιμών μιας παραγωγικής, γραμμικής, διασπώμενης τεχνικής παραγωγής[192] με ένα τυπικό εμπόρευμα που περιέχει αποκλειστικά ένα - απλό ή σύνθετο - βασικό εμπόρευμα, υπάρχει μια θετική τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους,[193] τέτοια ώστε:

- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο συνεχές, θετικό διάστημα τιμών $[0,R_1)$, αντιστοιχεί το μονοσήμαντα και πλήρως προσδιορισμένο θετικό διάνυσμα ονομαστικών τιμών $\tilde{p}_1$ των k βασικών εμπορευμάτων $(\tilde{p}_1 \succ 0)$ και ένα θετικό ονομαστικό ωρομίσθιο w $(w \succ 0)$.
- Στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με το μηδέν $(w=0)$.
- Στην τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους αντιστοιχεί το μονοσήμαντα και πλήρως προσδιορισμένο θετικό διάνυσμα $\tilde{p}_1$ των τιμών των βασικών εμπορευμάτων,

---

[191] Για τους ανωτέρω λόγους η μέγιστη τιμή R_2 του ποσοστού κέρδους της τεχνικής είναι ίση με την μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους που αντιστοιχεί στην εξίσωση τυποποίησης (1), δηλαδή στην τυποποίηση των τιμών με ένα τυπικό εμπόρευμα που περιέχει τουλάχιστον ένα μη βασικό εμπόρευμα.

[192] Αναφερόμαστε σε παραγωγικές, γραμμικές, διασπώμενες τεχνικές παραγωγής της μορφής που περιγράφουν οι σχέσεις (2.1) και (2.2).

[193] Η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους είναι η μέγιστη τιμή της βασικής υποτεχνικής.

δηλαδή το ιδιοδιάνυσμα της υπομήτρας A_{11} των τεχνικών συντελεστών παραγωγής των βασικών εμπορευμάτων, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της.

- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο συνεχές, θετικό διάστημα τιμών $[0, R_2)$ αντιστοιχεί το μονοσήμαντα και πλήρως προσδιορισμένο θετικό διάνυσμα ονομαστικών τιμών $\tilde{p}_2$ των $n-k$ μη βασικών εμπορευμάτων $(\tilde{p}_2 \succ 0)$.
- Στην τιμή R_2 του ποσοστού κέρδους το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι ασυμβίβαστο κι επομένως το αντίστοιχο διάνυσμα των ονομαστικών τιμών $\tilde{p}_2$ είναι απροσδιόριστο.[194]
- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο συνεχές, θετικό διάστημα τιμών $(R_2, R_1]$ είτε η ονομαστική τιμή ενός τουλάχιστον μη βασικού εμπορεύματος

---

[194] Ανεξάρτητα αν ισχύει:

$$R_2 \prec R_1$$

ή

$$R_1 = R_2 = R$$

O Sraffa [1985, Παράρτημα B], μελετώντας το απλό παράδειγμα μιας τεχνικής, που παράγει ένα μη βασικό εμπόρευμα, το οποίο ονόμασε "φασόλια" (beans) και ισχύει:

$$R_2 \prec R_1$$

επισήμανε, για πρώτη φορά, ότι η τιμή του μη βασικού εμπορεύματος είναι απροσδιόριστη στην τιμή R_2 του ποσοστού κέρδους, όταν οι τιμές μετρηθούν με μέτρο ένα βασικό εμπόρευμα. Από την άποψη αυτή, η παράγραφος (I.2.1.b) αποτελεί γενίκευση του υποδείγματος του Sraffa. Έκτοτε, το παράδειγμα των "φασολιών" πολύ λίγο απασχόλησε τη σχετική βιβλιογραφία και έτσι πέρασε στη λήθη. Φωτεινή εξαίρεση ανάδειξης του προβλήματος που επισήμανε ο Sraffa και εξέτασης των θεωρητικών του συνεπειών αποτελεί το έργο του Σταμάτη, το οποίο μνημονεύσαμε ήδη παραπάνω.

είναι αρνητική είτε το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι ασυμβίβαστο[195] και

- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο συνεχές, θετικό διάστημα τιμών (R_1, ∞), είτε η ονομαστική τιμή ενός τουλάχιστον παραγόμενου εμπορεύματος είναι αρνητική είτε οι ονομαστικές τιμές όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων είναι μηδενικές είτε το σύστημα προσδιορισμού των ονομαστικών τιμών των παραγόμενων εμπορευμάτων είναι ασυμβίβαστο.[196, 197]

---

[195] Επειδή ο Sraffa [1985, Παράρτημα Β] στο παράδειγμα των "φασολιών" υπέθεσε την ύπαρξη ενός μόνο μη βασικού εμπορεύματος, δεν αντιλήφθηκε, ότι το φάσμα των κρίσιμων τιμών του ποσοστού κέρδους, που ανήκουν στο διάστημα $[R_2, R_1)$, στις οποίες το διάνυσμα των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *απροσδιόριστο*, όταν οι τιμές μετρηθούν με μέτρο ένα βασικό εμπόρευμα, περιλαμβάνει, στην γενική περίπτωση, και άλλες τιμές, εκτός της μέγιστης τιμής R_2 του ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής.

[196] Επειδή ο Sraffa [1985, Παράρτημα Β] στο παράδειγμα των "φασολιών" υπέθεσε την ύπαρξη ενός μόνο μη βασικού εμπορεύματος, δεν αντιλήφθηκε, ότι η τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους ενδέχεται να αποτελεί ρίζα της "χαρακτηριστικής" εξίσωσης $\det\left[I_2 - (1+r)A_{22}\right] = 0$ της μήτρας A_{22} και, κατά συνέπεια, στην τιμή R_1 το διάνυσμα των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων να είναι απροσδιόριστο, όταν οι τιμές μετρηθούν με μέτρο ένα βασικό εμπόρευμα.

[197] Για τους ανωτέρω λόγους η μέγιστη τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής είναι ίση με την μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους που αντιστοιχεί στην εξίσωση τυποποίησης (2), δηλαδή στην τυποποίηση των τιμών με ένα τυπικό εμπόρευμα που αποτελείται από ένα - απλό ή σύνθετο - βασικό εμπόρευμα.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ.

Η ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. ΓΕΝΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο Μέρος (Ι) υποθέσαμε, ότι η μέθοδος παραγωγής κάθε απλού εμπορεύματος είναι μοναδική. Η υπόθεση αυτή αίρεται στο Μέρος (ΙΙ), στο οποίο θα θεωρήσουμε την ρεαλιστικότερη περίπτωση, κατά την οποία, για κάθε εμπόρευμα υπάρχει μια πληθώρα διαθέσιμων μεθόδων παραγωγής.

Με τον όρο *τεχνολογία* ορίζουμε το σύνολο όλων των εναλλακτικών μεθόδων παραγωγής όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων που είναι τεχνικά εφικτές σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Με βάση την διαθέσιμη τεχνολογία, δηλαδή το φάσμα των τεχνολογικών δυνατοτήτων που συνθέτουν οι εναλλακτικές μέθοδοι παραγωγής του συνόλου των εμπορευμάτων, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τις διαθέσιμες μεθόδους παραγωγής, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματιστεί ένα σύνολο εναλλακτικών τεχνικών, κάθε μια από τις οποίες αντιπροσωπεύεται από μια μήτρα τεχνικών συντελεστών και από ένα διάνυσμα συντελεστών άμεσης εργασίας.[1]

Υπό αυτήν την έννοια, η θεώρηση της τεχνολογίας μας φέρνει υποχρεωτικά αντιμέτωπους με το πρόβλημα της επιλογής - για κάθε εμπόρευμα - της κατάλληλης μεθόδου παραγωγής του, δηλαδή, τελικά, της επιλογής της κατάλληλης τεχνικής. Εφόσον η επιλογή τεχνικής προϋποθέτει τη σύγκριση των τεχνικών και η σύγκριση των διαθέσιμων τεχνικών εμφανίζεται ως σύγκριση δύο κάθε φορά διαφορετικών τεχνικών, θα περιοριστούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, στην εξέταση δύο μόνο εναλλακτικών

---

[1] Αν για το εμπόρευμα i, $i = 1,2,\dots,n$, υπάρχουν k_i εναλλακτικές μέθοδοι παραγωγής, σχηματίζονται συνολικά $\prod_{i=1}^{n} k_i$ εναλλακτικές τεχνικές παραγωγής.

τεχνικών, που θα συμβολίζουμε με (α) και (β).[2]

2. ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

Την τεχνική (α) θα παριστάνουμε με την μήτρα τεχνικών συντελεστών $A^{(\alpha)}$ και το διάνυσμα άμεσης εργασίας $l^{(\alpha)}$, ενώ την τεχνική (β) θα παριστάνουμε με την μήτρα τεχνικών συντελεστών $A^{(\beta)}$ και το διάνυσμα άμεσης εργασίας $l^{(\beta)}$. Για κάθε μια από τις τεχνικές παραγωγής (α) και (β) υποθέτουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις (1.2.1) - (1.2.12) του Μέρους (Ι). Επιπλέον, θα διατυπώσουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

1. Οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) παράγουν τα ίδια, ποιοτικώς, n εμπορεύματα.[3] Αυτό σημαίνει ότι ικανοποιούν τις ίδιες ακριβώς κοινωνικές ανάγκες χρησιμοποιώντας απλώς διαφορετικές τεχνικές μεθόδους.
2. Οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν μόνο ως προς την μέθοδο παραγωγής του εμπορεύματος ω.[4] Αναλυτικά, αυτό εκφράζεται με τις ακόλουθες

---

[2] Σε όλη την βιβλιογραφία που αναφέρεται στην νεορικαρντιανή θεωρία επιλογής τεχνικής και γενικότερα στην νεορικαρντιανή κριτική της νεοκλασικής θεωρίας του κεφαλαίου, για τη σύγκριση των τεχνικών χρησιμοποιείται το ανωτέρω αναλυτικό πλαίσιο. Βλέπε παρακάτω την υποσημείωση (4).

[3] Η περίπτωση που οι τεχνικές (α) και (β) παράγουν ορισμένα διαφορετικά, από ποιοτική άποψη, εμπορεύματα εξετάζεται στο Sraffa [1985, □ 93-94, σσ. 126-130], Bharadwaj [1970], Pertz and Teplitz [1979], Pertz [1980], Robinson and Naqvi [1967], Laibman and Nell [1977] κ.α. Αξίζει ασφαλώς να παρατηρήσουμε, ότι αυτή ακριβώς η περίπτωση χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα στην βιβλιογραφία, υπό την απλή μορφή του επονομαζόμενου "canonical model". Το "canonical model" περιγράφεται ως εξής: Έστω δύο τεχνικές παραγωγής, κάθε μία εκ των οποίων παράγει δύο εμπορεύματα. Ένα καταναλωτικό εμπόρευμα (που είναι το ίδιο στις δύο τεχνικές και για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται ως numeraire) και ένα κεφαλαιουχικό εμπόρευμα (που διαφέρει στις δύο τεχνικές). Βλέπε, για παράδειγμα, Samuelson [1962], Hicks [1965, σσ. 148-159], Morishima [1965], Morishima [1969, σσ. 22-26], Bruno, Burmeister and Sheshinski [1966, σελ. 531-538] κ.α.

[4] "The discussion of switching possibilities between two production systems has been usually conducted under

σχέσεις:

$$A^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T - A^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T = 0,\ j=1,2,\ldots,n,\ \text{με}\ j \neq \omega^{5} \tag{1}$$

$$A^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T - A^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T = d, \qquad \text{με} \qquad d \in \Re^n$$

(2)

$$I^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T - I^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T = 0,\ j=1,2,\ldots,n\ \text{με}\ j \neq \omega \tag{3}$$

$$I^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T - I^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T = d_0,\ \text{με}\ d_0 \in \Re \tag{4}$$

και

$$D = \left(d, d_0\right)^T \neq 0,\ \text{με}\ D \in \Re^{n+1} \tag{5}$$

3. Η "κανονική μορφή" ("normal form") των μητρών $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι ίδια. Η

---

the assumption that the two systems under consideration may differ in the methods of production for more than one (and up to all) of the commodities common to them. This has been described as the most general model; but, far from being a general case this would be a very exceptional one...Analytically there is no loss of generality involved in a procedure of successive considerations of production systems using a different method of production for only one of the commodities common to them as, given all possible systems of production, it could not lead to any different outermost boundary of wage-profit curves..." στο Bharadwaj [1970, σελ. 415]. Για το ίδιο θέμα βλέπε επίσης Pasinetti [1991, σσ. 179-180]. Η θεώρηση αυτή επαληθεύεται όταν εξετάζουμε ένα switching point δύο τεχνικών, εφόσον "Adjacent techniques on two sides of a switching point will usually differ from each other only with respect to one activity. Techniques in general may differ with respect to m activities $\left(n \geq m \succ 1\right)$ only if certain m independent $n-$th degree polynomials happen to have a common root at that switching point.", στο Bruno, Burmeister and Sheshinski [1966, σελ. 542]. Βλέπε επίσης, μεταξύ άλλων, Herrero, Jimenez-Raneda and Villar [1980, σελ. 168].

[5] Γενικά, με e_j^n, $j=1,2,\ldots,n$, συμβολίζουμε το στοιχειώδες διάνυσμα (elementary vector) τάξης $1\times n$, του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι ίσες με το μηδέν, εκτός της συνιστώσας του j που είναι ίση με την μονάδα. Κατά τρόπον ανάλογο θα ορίζουμε το διάνυσμα $(e_j^n)^T$, δηλαδή το ανάστροφο του διανύσματος e_j^n.

υπόθεση αυτή, σε συνδυασμό με την υπόθεση (1), ενέχει τις ακόλουθες συνέπειες:

- Αν η τεχνική παραγωγής (α) είναι μη διασπώμενη, τότε κι η τεχνική παραγωγής (β) είναι μη διασπώμενη,
- Αν η τεχνική παραγωγής (α) είναι διασπώμενη, τότε κι η τεχνική παραγωγής (β) είναι διασπώμενη,
- Κάθε βασικό εμπόρευμα της τεχνικής παραγωγής (α) είναι βασικό εμπόρευμα στην τεχνική παραγωγής (β) και
- Κάθε μη βασικό εμπόρευμα της τεχνικής παραγωγής (α) είναι μη βασικό εμπόρευμα στην τεχνική παραγωγής (β).

4. Υπάρχει *τουλάχιστον ένα* βασικό εμπόρευμα σε κάθε μια από τις τεχνικές παραγωγής (α) και (β).
5. Τα μη βασικά εμπορεύματα (αν υπάρχουν) είτε δεν εισέρχονται στην παραγωγή των μη βασικών εμπορευμάτων είτε εισέρχονται άμεσα ή έμμεσα στην παραγωγή όλων των μη βασικών εμπορευμάτων.
6. Αν στην μήτρα τεχνικών συντελεστών $A^{(\alpha)}$ η μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_m^{A_{11}^{(\alpha)}}$ της υπομήτρας $A_{11}^{(\alpha)}$ είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη της μέγιστης ιδιοτιμής $\lambda_m^{A_{22}^{(\alpha)}}$ της υπομήτρας $A_{22}^{(\alpha)}$, τότε στην μήτρα τεχνικών συντελεστών $A^{(\beta)}$, που προκύπτει από την μεταβολή της μεθόδου παραγωγής του εμπορεύματος ω, η μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_m^{A_{11}^{(\beta)}}$ της υπομήτρας $A_{11}^{(\beta)}$ είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη αντίστοιχα της μέγιστης ιδιοτιμής $\lambda_m^{A_{22}^{(\beta)}}$ της υπομήτρας $A_{22}^{(\beta)}$.

Συνολικά, τα ζεύγη μητρών $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$, που πληρούν τις ανωτέρω υποθέσεις, μπορούμε να τα κατατάξουμε σε δέκα κατηγορίες. Γενικά, κάθε κατηγορία διακρίνεται από ένα χαρακτηριστικό ή ένα σύνολο επιμέρους χαρακτηριστικών. Έτσι, έχουμε τις ακόλουθες κατηγορίες:

- Η κατηγορία $\mathcal{A}$.

Μοναδικό χαρακτηριστικό της κατηγορίας $\mathcal{A}$ είναι το εξής: Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι μη διασπώμενες.

- Η κατηγορία $\mathcal{B}$.

Η κατηγορία $\mathcal{B}$ αναλύεται στα εξής χαρακτηριστικά:

$\mathcal{B}_1$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι διασπώμενες.

$\mathcal{B}_2$. Σε κάθε τεχνική το μέγιστο ποσοστό κέρδους της βασικής υποτεχνικής είναι μικρότερο του μέγιστου ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής (αν αυτό υπάρχει).[6]

$\mathcal{B}_3$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ διαφέρουν ως προς την μέθοδο παραγωγής του βασικού εμπορεύματος ω.[7]

---

[6] Συμπεριλαμβάνεται δηλαδή η περίπτωση που η κανονική μορφή της μήτρας $A^{(\cdot)}$ έχει ως εξής:

$$A^{(\cdot)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(\cdot)} & A_{12}^{(\cdot)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ (\cdot) = (\alpha), (\beta).$$

[7] Αν κατ' αντιστοιχία με την διάκριση των εμπορευμάτων σε βασικά και μη βασικά εμπορεύματα γράψουμε:

$$d = \left(d_1, d_2\right)^T,$$

τότε η συνθήκη $\mathcal{B}_3$ ενέχει τις παρακάτω συνέπειες:

$$d = (d_1, d_2)^T, \text{ με } d_1 \neq 0,\ d_2 = 0$$

και

- Η κατηγορία $\mathcal{T}$.

Η κατηγορία $\mathcal{T}$ αναλύεται στα εξής χαρακτηριστικά:

$\mathcal{T}_1$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι διασπώμενες.

$\mathcal{T}_2$. Σε κάθε τεχνική το μέγιστο ποσοστό κέρδους της βασικής υποτεχνικής είναι μικρότερο του μέγιστου ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής (αν αυτό υπάρχει).

$\mathcal{T}_3$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ διαφέρουν ως προς τις εισροές των βασικών εμπορευμάτων που απαιτούνται για την παραγωγή του μη βασικού εμπορεύματος ω.[8]

- Η κατηγορία $\mathcal{D}$.

Η κατηγορία $\mathcal{D}$ αναλύεται στα εξής χαρακτηριστικά:

$\mathcal{D}_1$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι διασπώμενες.

$\mathcal{D}_2$. Σε κάθε τεχνική το μέγιστο ποσοστό κέρδους της βασικής υποτεχνικής είναι μικρότερο του μέγιστου ποσοστού κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής.

$\mathcal{D}_3$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ διαφέρουν *τουλάχιστον* ως προς τις εισροές των μη βασικών εμπορευμάτων που απαιτούνται για την παραγωγή του μη βασικού εμπορεύματος ω.[9]

$$1 \le \omega \le k$$

[8] Η συνθήκη $\mathcal{T}_3$ ενέχει τις παρακάτω συνέπειες:

$$d = (d_1, d_2)^T, \text{ με } d_1 \neq 0,\ d_2 = 0$$

και

$$k < \omega \le n$$

[9] Η συνθήκη $\mathcal{D}_3$ ενέχει τις παρακάτω συνέπειες:

- Η κατηγορία $\mathcal{E}$.

Η κατηγορία $\mathcal{E}$ αναλύεται στα εξής χαρακτηριστικά:

$\mathcal{E}_1$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι διασπώμενες.

$\mathcal{E}_2$. Σε κάθε τεχνική το μέγιστο ποσοστό κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής είναι μικρότερο του μέγιστου ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής.

$\mathcal{E}_3$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ διαφέρουν ως προς την μέθοδο παραγωγής του βασικού εμπορεύματος ω.[10]

- Η κατηγορία $\mathcal{LT}$.

Η κατηγορία $\mathcal{LT}$ αναλύεται στα εξής χαρακτηριστικά:

$\mathcal{LT}_1$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι διασπώμενες.

$\mathcal{LT}_2$. Σε κάθε τεχνική το μέγιστο ποσοστό κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής είναι μικρότερο του μέγιστου ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής.

$\mathcal{LT}_3$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ διαφέρουν ως προς τις εισροές των βασικών εμπορευμάτων που απαιτούνται για την παραγωγή του μη βασικού εμπορεύματος ω.[11]

$$d=(d_1,d_2)^T,\ \text{με}\ d_2\neq 0,\ \text{είτε}\ d_1=0\ \text{είτε}\ d_1\neq 0.$$

και

$$k<\omega\leq n$$

[10] Η συνδήκη $\mathcal{E}_3$ ενέχει τις παρακάτω συνέπειες:

$$d=(d_1,d_2)^T,\ \text{με}\ d_1\neq 0,\ d_2=0$$

και

$$1\leq\omega\leq k$$

[11] Η συνδήκη $\mathcal{LT}_3$ ενέχει τις παρακάτω συνέπειες:

- Η κατηγορία $\mathscr{Z}$.

Η κατηγορία $\mathscr{Z}$ αναλύεται στα εξής χαρακτηριστικά:

$\mathscr{Z}_1$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι διασπώμενες.

$\mathscr{Z}_2$. Σε κάθε τεχνική το μέγιστο ποσοστό κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής είναι μικρότερο του μέγιστου ποσοστού κέρδους της βασικής υποτεχνικής.

$\mathscr{Z}_3$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ διαφέρουν *τουλάχιστον* ως προς τις εισροές των μη βασικών εμπορευμάτων που απαιτούνται για την παραγωγή του μη βασικού εμπορεύματος ω.[12]

- Η κατηγορία $\mathscr{H}$.

Η κατηγορία $\mathscr{H}$ αναλύεται στα εξής χαρακτηριστικά:

$\mathscr{H}_1$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι διασπώμενες.

$\mathscr{H}_2$. Το μέγιστο ποσοστό κέρδους της βασικής υποτεχνικής της τεχνικής (α) είναι ίσο με το μέγιστο ποσοστό κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής της.

$\mathscr{H}_3$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ διαφέρουν ως προς την μέθοδο παραγωγής του βασικού

$$d=(d_1,d_2)^T,\ \text{με}\ d_1 \neq 0,\ \ d_2=0$$

και

$$k<\omega\leq n$$

[12] Η συνθήκη $\mathscr{Z}_3$ ενέχει τις παρακάτω συνέπειες:

$$d=(d_1,d_2)^T,\ \text{με}\ d_2 \neq 0,\ \text{είτε}\ d_1=0\ \ \text{είτε}\ \ d_1 \neq 0.$$

και

$$k<\omega\leq n$$

εμπορεύματος ω.[13]

- Η κατηγορία $\boldsymbol{\Theta}$.

Η κατηγορία $\boldsymbol{\Theta}$ αναλύεται στα εξής χαρακτηριστικά:

$\boldsymbol{\Theta}_1$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι διασπώμενες.

$\boldsymbol{\Theta}_2$. Το μέγιστο ποσοστό κέρδους της βασικής υποτεχνικής της τεχνικής (α) είναι ίσο με το μέγιστο ποσοστό κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής της.

$\boldsymbol{\Theta}_3$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ διαφέρουν ως προς τις εισροές των βασικών εμπορευμάτων που απαιτούνται για την παραγωγή του μη βασικού εμπορεύματος ω.[14]

- Η κατηγορία $\mathcal{I}$.

Η κατηγορία $\mathcal{I}$ αναλύεται στα εξής χαρακτηριστικά:

$\mathcal{I}_1$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι διασπώμενες.

$\mathcal{I}_2$. Το μέγιστο ποσοστό κέρδους της βασικής υποτεχνικής της τεχνικής (α) είναι ίσο με το μέγιστο ποσοστό κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής της.

---

[13] Η συνθήκη $\mathcal{H}_3$ ενέχει τις παρακάτω συνέπειες

$$d=(d_1,d_2)^T,\ \text{με}\ d_1\neq 0,\ \ d_2=0$$

και

$$1\leq\omega\leq k$$

[14] Η συνθήκη $\boldsymbol{\Theta}_3$ ενέχει τις παρακάτω συνέπειες

$$d=(d_1,d_2)^T,\ \text{με}\ d_1\neq 0,\ \ d_2=0$$

και

$$k<\omega\leq n$$

$\mathcal{J}_3$. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ διαφέρουν *τουλάχιστον* ως προς τις εισροές των μη βασικών εμπορευμάτων που απαιτούνται για την παραγωγή του μη βασικού εμπορεύματος ω.[15]

---

[15] Η συνθήκη $\mathcal{J}_3$ ενέχει τις παρακάτω συνέπειες:

$$d=(d_1,d_2)^T,\ \text{με}\ d_2 \neq 0,\ \text{είτε}\ d_1=0\ \text{είτε}\ d_1 \neq 0.$$

και

$$k<\omega \leq n$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.

ΟΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΔΥΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα θεωρήματα που προέκυψαν από την μελέτη των γραμμικών υποδειγμάτων είναι το "Θεώρημα της Μη Υποκατάστασης" (Non Substitution Theorem),, το οποίο θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε ως εξής:

Θεώρημα της Μη Υποκατάστασης: Σε κάθε *γραμμική* τεχνική *απλών* εμπορευμάτων με *μια* μόνο *πρωταρχική* εισροή,[1] την ομογενή εργασία,[2] οι αντίστοιχες τιμές όλων των εμπορευμάτων είναι *ανεξάρτητες* από τη σύνθεση της ζήτησης ή του ακαθάριστου προϊόντος. Αντίθετα, είναι *μονοσήμαντα προσδιορισμένες*,[3] αν η τιμή του ποσοστού κέρδους καθοριστεί εξωγενώς και ανήκει στο διάστημα των οικονομικά σημαντικών τιμών του ποσοστού κέρδους της θεωρούμενης τεχνικής.[4] Επιπλέον, σε κάθε εφικτή τιμή του ποσοστού κέρδους που είναι μικρότερη της ελάχιστης των μέγιστων τιμών του ποσοστού κέρδους των διαθέσιμων τεχνικών,[5] υπάρχει μια τεχνική (ή ένας γραμμικός συνδυασμός τεχνικών)

---

[1] Πρωταρχική εισροή ονομάζουμε κάθε μη παραγόμενη εισροή.

[2] Κατά συνέπεια, όλες οι υπόλοιπες εισροές, εκτός της εργασίας, περιγράφονται από την τεχνική παραγωγής ως παραγόμενες.

[3] Βεβαίως, όχι πλήρως προσδιορισμένες, αλλά με εξαίρεση ενός βαθμωτού.

[4] Κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, που ανήκει στο διάστημα των οικονομικά σημαντικών τιμών της θεωρούμενης τεχνικής, ονομάζεται *εφικτή (feasible)*.

[5] Δηλαδή σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα:

$$r \in \left[0,\ R^{*}\right),\ \text{με}\ R^{*} = \min\left(R^{(\cdot)}\right)\ \text{και}\ (\cdot) = (\alpha), (\beta), \ldots,$$

όπου με $R^{(\alpha)}$ συμβολίζουμε το μέγιστο ποσοστό κέρδους της τεχνικής (α), με $R^{(\beta)}$ συμβολίζουμε το μέγιστο ποσοστό κέρδους της τεχνικής (β)...

η οποία *ελαχιστοποιεί* όλες τις τιμές σε όρους της εργασιακής δύναμης ή *μεγιστοποιεί* το ονομαστικό ωρομίσθιο σε όρους ενός οποιουδήποτε numeraire.[6, 7]

---

[6] Επομένως, η τεχνική που *ελαχιστοποιεί* όλες τις τιμές, σε όρους της εργασιακής δύναμης, ή *μεγιστοποιεί* το ονομαστικό ωρομίσθιο, σε όρους ενός οποιουδήποτε numeraire, προσδιορίζεται ανεξάρτητα από τη σύνθεση της τελικής ζήτησης ή του ακαθάριστου προϊόντος. Στο Τμήμα (2.3) θα δείξουμε, ότι η ανωτέρω πρόταση είναι αληθής, *αν και μόνο αν* για τις τεχνικές παραγωγής (α) και (β) ισχύει:

- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \succ \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \prec \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$

Βεβαίως, οι ανωτέρω συνθήκες πληρούνται πάντοτε, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, αν οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι *μη διασπώμενες.*

Όμως, για τις διασπώμενες τεχνικές παραγωγής (α) και (β) στην γενική περίπτωση, όπως θα δείξουμε αμέσως παρακάτω, ισχύει:

- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \geq \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$

Στο Τμήμα (2.3) θα αποδείξουμε, ότι σε κάθε τιμή r, $r \in \left[0, R^{*}\right)$, του ποσοστού κέρδους, στην οποία το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών της μιας τεχνικής είναι μεγαλύτερο ή ίσο του αντίστοιχου διανύσματος τιμών της άλλης και υπάρχει τουλάχιστον ένα εμπόρευμα του οποίου η τιμή είναι ίση στις δύο τεχνικές παραγωγής, ο προσδιορισμός της τεχνικής που μεγιστοποιεί το ονομαστικό ωρομίσθιο εξαρτάται, στην γενική περίπτωση, όχι μόνο από την τιμή του ποσοστού κέρδους, αλλά και από τη σύνθεση του τυπικού εμπορεύματος. Πιο συγκεκριμένα, εξαρτάται από το αν στη σύνθεση του τυπικού εμπορεύματος περιλαμβάνεται ένα τουλάχιστον μη βασικό εμπόρευμα.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε, ότι άμεση κριτική στο "Θεώρημα της Μη Υποκατάστασης", σύμφωνα με το οποίο η τεχνική που *μεγιστοποιεί* το ονομαστικό ωρομίσθιο, σε όρους ενός οποιουδήποτε numeraire, προσδιορίζεται ανεξάρτητα από τη σύνθεση της τελικής ζήτησης ή του ακαθάριστου προϊόντος, έχει ασκήσει ο Bidard [1991, σσ. 83-85]. Σύμφωνα με τον Bidard, σε διασπώμενες τεχνικές παραγωγής ο προσδιορισμός της τεχνικής που μεγιστοποιεί το ονομαστικό ωρομίσθιο εξαρτάται όχι μόνο από την τιμή του ποσοστού κέρδους, αλλά, στην γενική περίπτωση, και από τη σύνθεση της τελικής ζήτησης ή του ακαθάριστου προϊόντος. Πιο συγκεκριμένα, εξαρτάται από το αν στη σύνθεση του ακαθάριστου προϊόντος περιλαμβάνεται ένα τουλάχιστον μη βασικό εμπόρευμα.

Στο Μέρος (I) αποδείχτηκε, ότι σε κάθε εφικτή τιμή r του ποσοστού κέρδους - που είναι μικρότερη της μέγιστης τιμής R - μιας τεχνικής που πληρεί τις ανωτέρω προϋποθέσεις, αντιστοιχεί πράγματι ένα μοναδικό διάνυσμα σχετικών τιμών. Εντούτοις, ο ισχυρισμός που διατυπώθηκε στο "Θεώρημα της μη Υποκατάστασης", σύμφωνα με τον οποίο για κάθε τεχνική[8] ο εξωγενής καθορισμός μιας εφικτής τιμής του ποσοστού κέρδους αποτελεί επαρκή συνθήκη για τον μονοσήμαντο προσδιορισμό των τιμών των εμπορευμάτων, είναι στην γενική περίπτωση λανθασμένος. Για να γίνει αυτό αντιληπτό αρκεί να θεωρηθεί η περίπτωση εκείνη, που η τεχνική παραγωγής έχει την μορφή που περιγράφουν οι σχέσεις (I.1.2.1) και (I.1.2.2) και οι τιμές τυποποιηθούν με ένα τυπικό εμπόρευμα που περιέχει στη σύνθεση του ένα - απλό ή σύνθετο - βασικό εμπόρευμα. Τότε, σε μια ορισμένη εφικτή τιμή του ποσοστού κέρδους, την μέγιστη τιμή R των τεχνικών (α) και (β), αντιστοιχούν δύο διαφορετικά διανύσματα σχετικών τιμών: Το διάνυσμα σχετικών τιμών που είναι προσδιορισμένο ήδη πριν την τυποποίηση των τιμών και το διάνυσμα σχετικών τιμών που σχηματίζεται μετά την τυποποίηση των τιμών.

Στο Κεφάλαιο (1) θα εξεταστούν οι σχέσεις των τιμών παραγωγής των τεχνικών (α) και (β) σε κάθε κοινή εφικτή τιμή του ποσοστού κέρδους r. Πιο

---

[7] Το "Θεώρημα της Μη Υποκατάστασης" διατυπώθηκε αρχικά από τον Samuelson [1951] και αναφερόταν στην ειδική περίπτωση που η τιμή του ποσοστού κέρδους είναι ίση με το μηδέν. Στην μορφή του αυτή ονομάστηκε "Θεώρημα της Υποκατάστασης" (Substitution Theorem). Το "Θεώρημα της Υποκατάστασης" συζητήθηκε επίσης από τους Koopmans [1951], Georgescu-Roegen [1951] και Arrow [1951]. Στη συνέχεια ο Samuelson [1961] επαναδιατύπωσε το θεώρημα, αναφερόμενος στην γενικότερη περίπτωση που η τιμή του ποσοστού κέρδους είναι θετική. Έτσι, στην νεότερη εκδοχή του το ονόμασε "Θεώρημα της Μη Υποκατάστασης" (Non Substitution Theorem). Τέλος, το ανωτέρω θεώρημα - στην νεότερη εκδοχή του - ο Mirrlees [1969] προτίμησε να το ονομάσει " Δυναμικό Θεώρημα της Μη Υποκατάστασης" (Dynamic Non Substitution Theorem). Η πρώτη αυστηρή απόδειξη του "Θεωρήματος της Μη Υποκατάστασης" υπό την "στενή" του έννοια, σύμφωνα με την οποία τα διανύσματα τιμών, που εκφράζονται σε όρους της εργασιακής δύναμης, δύο τεχνικών που διαφέρουν ως προς την μέθοδο παραγωγής ενός εμπορεύματος είναι *ολικά διατεταγμένα*, δόθηκε από τον Morishima [1964[. Έκτοτε, για το "Θεώρημα της Μη Υποκατάστασης" προτάθηκαν διάφορες εναλλακτικές αποδείξεις. Επιπλέον, συζητήθηκε η εφαρμογή του σε κάθε δυνατή παραλλαγή των αρχικών του προϋποθέσεων (σύνθετη παραγωγή, πληθώρα πρωταρχικών εισροών, νεοκλασική τεχνική κλπ). Όμως, παρόλη την προσοχή που δόθηκε στο "Θεώρημα της Μη Υποκατάστασης", μόνο στον Pasinetti [1977] θα βρούμε μια συνολική κριτική του περιεχομένου τηε έννοιας "Υποκατάσταση", που υπονοεί το θεώρημα.

[8] Εννοείται φυσικά ότι πληρεί τις προϋποθέσεις του "Θεωρήματος της Μη Υποκατάστασης".

συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο (1) η συζήτηση θα περιστραφεί γύρω από τα ακόλουθα ζητήματα:

- Στο Τμήμα (2) θα αποδειχτεί με δύο εναλλακτικούς τρόπους,[9] ότι σε κάθε εφικτή τιμή του ποσοστού κέρδους, που είναι μικρότερη της ελάχιστης των μέγιστων τιμών του ποσοστού κέρδους των τεχνικών (α) και (β),[10] μια από τις ανωτέρω τεχνικές *ελαχιστοποιεί* όλες τις τιμές σε όρους της εργασιακής δύναμης. Το ιδιαίτερο, κοινό χαρακτηριστικό των ανωτέρω αποδείξεων είναι ότι αναφέρονται είτε στην ειδική περίπτωση που οι τεχνικές παραγωγής είναι μη διασπώμενες είτε στην ειδική περίπτωση που οι τεχνικές παραγωγής περιγράφουν την παραγωγή βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων και τα μη βασικά εμπορεύματα είτε δεν εισέρχονται στην παραγωγή των μη βασικών εμπορευμάτων είτε κάθε μη βασικό εμπόρευμα εισέρχεται - άμεσα ή έμμεσα - στην παραγωγή όλων των μη βασικών εμπορευμάτων.
- Στο Τμήμα (3) θα θεωρηθεί η περίπτωση που η μέγιστη τιμή R του ποσοστού κέρδους των τεχνικών (α) και (β) είναι ίση και θα εξεταστεί η σχέση των ονομαστικών τιμών των τεχνικών (α) και (β) στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, για *κάθε τυποποίηση* που *επιτρέπει* τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων.[11]

---

[9] Οι ανωτέρω αποδείξεις αναπτύσσονται στα υποτμήματα (2.α) και (2.β) αντίστοιχα. Κάθε μια από τις αποδείξεις αυτές προσεγγίζει το "Θεώρημα της Μη Υποκατάστασης" από μια διαφορετική οπτική γωνία.

[10] Δηλαδή σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα:

$$r \in \left[0, R^*\right) \text{ με } R^* = \min\left(R^{(\alpha)}, R^{(\beta)}\right)$$

[11] Μη *επιτρεπτή* τυποποίηση έχουμε όταν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις κατηγορίες:

$$\mathcal{E},\ \mathcal{LT},\ \mathcal{Z},\ \mathcal{H} \text{ και } \Theta$$

και ως τυπικό εμπόρευμα λειτουργεί ένα απλό ή σύνθετο βασικό εμπόρευμα. Πράγματι, σε κάθε τέτοια περίπτωση, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους ο προσδιορισμός των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *αδύνατος*. Το θέμα αυτό πραγματευτήκαμε στο Μέρος (Ι).

2. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΜΗ ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

2.α. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Ι.

Στο Τμήμα (2.α) θα αποδείξουμε το "Θεώρημα της μη Υποκατάστασης", αποδεικνύοντας, ότι για κάθε τεχνική $(.)$, $(.)=(\alpha)$, (β), οι συνδήκες:

- $\left[\hat{p}^{(.)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \left[\hat{p}^{(.)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$
- $\left[\hat{p}^{(.)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \left[\hat{p}^{(.)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$
- $\left[\hat{p}^{(.)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \left[\hat{p}^{(.)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$

είναι αντίστοιχα ισοδύναμες με τις συνδήκες:

- $\hat{p}^{(\beta)} \geq \hat{p}^{(\alpha)}$
- $\hat{p}^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}$[12]
- $\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$[13]

---

[12] Αυτό σημαίνει, ότι αν για το τυχαία επιλεγμένο διάνυσμα τιμών - είτε της τεχνικής (α) είτε της τεχνικής (β) - το κόστος παραγωγής του εμπορεύματος ω που αντιστοιχεί στην μέθοδο παραγωγής (β) είναι μεγαλύτερο (μικρότερο) του κόστους παραγωγής του ίδιου εμπορεύματος που αντιστοιχεί στην μέθοδο παραγωγής (α), τότε αφενός μεν για κάθε διάνυσμα τιμών το κόστος παραγωγής του εμπορεύματος ω που αντιστοιχεί στην μέθοδο παραγωγής (β) είναι μεγαλύτερο (μικρότερο) του κόστους παραγωγής του ίδιου εμπορεύματος που αντιστοιχεί στην μέθοδο παραγωγής (α), αφετέρου το διάνυσμα τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, της τεχνικής (β) είναι μεγαλύτερο (μικρότερο) - με την ευρεία έννοια - του αντίστοιχου διανύσματος τιμών της τεχνικής (α).

[13] Αυτό σημαίνει, ότι αν για το τυχαία επιλεγμένο διάνυσμα τιμών - είτε της τεχνικής (α) είτε της τεχνικής (β) - το κόστος παραγωγής του εμπορεύματος ω που αντιστοιχεί στην μέθοδο παραγωγής (α) είναι ίσο με το κόστος παραγωγής του ίδιου εμπορεύματος που αντιστοιχεί στην μέθοδο παραγωγής (β), τότε αφενός μεν για κάθε διάνυσμα τιμών το κόστος παραγωγής του εμπορεύματος ω που αντιστοιχεί στην μέθοδο παραγωγής (α) ίσο με το κόστος παραγωγής του ίδιου εμπορεύματος που αντιστοιχεί στην μέθοδο παραγωγής (β), αφετέρου το διάνυσμα τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, της τεχνικής (α) είναι ίσο με το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών της τεχνικής (β).

Θα συζητήσουμε ξεχωριστά την περίπτωση που οι τεχνικές παραγωγής είναι μη διασπώμενες[14] από την περίπτωση που οι τεχνικές παραγωγής είναι διασπώμενες. Επιπλέον, αν οι τεχνικές παραγωγής είναι διασπώμενες, θα εξετάσουμε ξεχωριστά την περίπτωση που το εμπόρευμα ω είναι βασικό[15] από την εναλλακτική περίπτωση που το εμπόρευμα ω είναι μη βασικό.[16]

Για να απλοποιήσουμε τις αποδείξεις που ακολουθούν θα θεωρήσουμε το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 1.[17] Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^*\right)$ και $R^* = \min\left(R^{(\alpha)}, R^{(\beta)}\right)$, για τα διανύσματα τιμών $\hat{p}^{(\alpha)}$ και $\hat{p}^{(\beta)}$ των τεχνικών (α) και (β) αντίστοιχα, τα οποία εκφράζονται σε όρους της εργασιακής δύναμης (labor commanded), ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} = \left\{\hat{p}^{(\beta)} - \left[\hat{p}^{(\beta)} A^{(\alpha)}(1+r) + l^{(\alpha)}\right]\right\}\left[I - (1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1} \tag{1}$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} = \left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r) + l^{(\beta)}\right] - \hat{p}^{(\alpha)}\right\}\left[I - (1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1} \tag{2}$$

Απόδειξη: Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, τα διανύσματα *σχετικών* τιμών $p^{(\alpha)}$ και $p^{(\beta)}$ των τεχνικών (α) και (β) αντίστοιχα, προσδιορίζονται από τα ακόλουθα συστήματα:

$$p^{(\alpha)} = p^{(\alpha)} A^{(\alpha)}(1+r) + w l^{(\alpha)}$$

και

$$p^{(\beta)} = p^{(\beta)} A^{(\beta)}(1+r) + w l^{(\beta)}$$

[14] Βλέπε την Παράγραφο (I) που ακολουθεί.

[15] Βλέπε την Παράγραφο (II) που ακολουθεί.

[16] Βλέπε τις Παραγράφους (III) και (IV) που ακολουθούν.

[17] Όπως θα φανεί από την απόδειξη που ακολουθεί, το Λήμμα (1) ισχύει γενικά, ανεξάρτητα αν οι τεχνικές (α) και (β) διαφέρουν σε μια ή περισσότερες μεθόδους παραγωγής.

Διαιρώντας αμφότερα τα μέλη των ανωτέρω συστημάτων με την θετική τιμή W του ονομαστικού ωρομισθίου $(w \succ 0)$,[18] προκύπτουν αντίστοιχα τα ακόλουθα συστήματα:

$$\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\alpha)} A^{(\alpha)} (1+r) + l^{(\alpha)} \tag{3}$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} = \hat{p}^{(\beta)} A^{(\beta)} (1+r) + l^{(\beta)} \tag{4}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} = \left[\hat{p}^{(\beta)} A^{(\beta)} (1+r) + l^{(\beta)}\right] - \left[\hat{p}^{(\alpha)} A^{(\alpha)} (1+r) + l^{(\alpha)}\right] \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} = \left(\hat{p}^{(\beta)} A^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} A^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(l^{(\beta)} - l^{(\alpha)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} = \left(\hat{p}^{(\beta)} A^{(\beta)} - \hat{p}^{(\beta)} A^{(\alpha)} + \hat{p}^{(\beta)} A^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\alpha)} A^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(l^{(\beta)} - l^{(\alpha)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} = \left[\hat{p}^{(\beta)}\left(A^{(\beta)} - A^{(\alpha)}\right) + \left(\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)}\right)A^{(\alpha)}\right](1+r) + \left(l^{(\beta)} - l^{(\alpha)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)}\right)\left[I - (1+r)A^{(\alpha)}\right] = \hat{p}^{(\beta)}\left(A^{(\beta)} - A^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(l^{(\beta)} - l^{(\alpha)}\right) \tag{5}$$

Η μήτρα $\left[I - (1+r)A^{(\alpha)}\right]$, $r \in \left[0, R^{*}\right)$, είναι μια μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα.[19] Έτσι έχουμε:

---

[18] Στο Μέρος (Ι) δείξαμε, ότι για την τεχνική $(.)$, $(.) = (\alpha), (\beta)$, στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^{(.)}\right)$ και $(.)$, $(.) = (\alpha), (\beta)$, θα ισχύει:

$$w \succ 0$$

Επομένως, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^{*}\right)$ και $R^{*} = \min\left(R^{(\alpha)}, R^{(\beta)}\right)$, θα ισχύει:

$$w \succ 0,$$

ανεξάρτητα αν πρόκειται για τον προσδιορισμό των τιμών της τεχνικής (α) ή της τεχνικής (β).

[19] Από την υπόθεσή μας ότι το ποσοστό κέρδους r ανήκει στο διάστημα $\left[0, R^{*}\right)$ προκύπτει:

$$r \prec R^{*} = \min\left(R^{(\alpha)}, R^{(\beta)}\right) \leq R^{(\alpha)}$$

$$\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1} \geq 0 \qquad (6)$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά τη σχέση (5) με την αντίστροφη της μήτρας $\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]$ και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (4) θα έχουμε:

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=\left[\hat{p}^{(\beta)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right)\right]\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=\left\{\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]\right\}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=\left\{\hat{p}^{(\beta)}-\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]\right\}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}$$

Τροποποιώντας ελαφρά την ανωτέρω απόδειξη έχουμε:

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]-\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right] \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=\left(\hat{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=\left(\hat{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}+\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)+\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)A^{(\beta)}\right](1+r)+\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]=\hat{p}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right) \qquad (7)$$

Η μήτρα $\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]$, $r\in\left[0,R^{*}\right)$, είναι μια μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα.[20] Έτσι έχουμε:

$$\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1} \geq 0 \qquad (8)$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά τη σχέση (7) με την αντίστροφη της μήτρας $\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]$ και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3) θα έχουμε:

---

[20] Από την υπόθεσή μας ότι το ποσοστό κέρδους r ανήκει στο διάστημα $\left[0,\ R^{*}\right)$ προκύπτει:

$$r \prec R^{*}=\min\left(R^{(\alpha)},R^{(\beta)}\right)\leq R^{(\beta)}$$

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right)\right]\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]-\left[\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]\right\}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]-\hat{p}^{(\alpha)}\right\}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}$$

Πρόταση 1. Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r\in\left[0,R^{*}\right)$ και $R^{*}=\min\left(R^{(\alpha)},R^{(\beta)}\right)$, για τα διανύσματα τιμών $\hat{p}^{(\alpha)}$ και $\hat{p}^{(\beta)}$ των τεχνικών (α) και (β) αντίστοιχα, τα οποία εκφράζονται σε όρους της εργασιακής δύναμης (labor commanded), θα έχουμε:

- είτε $\hat{p}^{(\beta)}\geq\hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\beta)}\leq\hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\beta)}$

Απόδειξη: Σύμφωνα με τις σχέσεις (1) και (4), σε κάθε τιμή r, $r\in\left[0,R^{*}\right)$, του ποσοστού κέρδους έχουμε:

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=\left\{\hat{p}^{(\beta)}-\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]\right\}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=\left\{\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]-\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]\right\}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}$$

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=\left[\hat{p}^{(\beta)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right)\right]\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1} \qquad (9)$$

Από τις σχέσεις (0.2.1), (0.2.2), (0.2.3), (0.2.4) και (0.2.5) [21] συνεπάγεται:

$$A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}=de_{\omega}^{n} \qquad (10)$$

και

$$l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}=d_0e_{\omega}^{n} \qquad (11)$$

[21] Οι σχέσεις (0.2.1), (0.2.2), (0.2.3), (0.2.4) και (0.2.5) συμβολίζουν τις σχέσεις (1), (2), (3), (4) και (5) αντίστοιχα του Τμήματος (2) του Προκαταρκτικού Κεφαλαίου.

Έτσι, από τις σχέσεις (9), (10) και (11) έχουμε:

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} = \left[\hat{p}^{(\beta)}\left(de_{\omega}^{n}\right)\left(1+r\right) + d_0 e_{\omega}^{n}\right]\left[I - \left(1+r\right)A^{(\alpha)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} = \left[\hat{p}^{(\beta)}d\left(1+r\right) + d_0\right]e_{\omega}^{n}\left[I - \left(1+r\right)A^{(\alpha)}\right]^{-1} \tag{12}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, εφαρμόζοντας τις σχέσεις (3), (10) και (11) στη σχέση (2) θα έχουμε:

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} = \left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}\left(1+r\right) + l^{(\beta)}\right] - \hat{p}^{(\alpha)}\right\}\left[I - \left(1+r\right)A^{(\beta)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} = \left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}\left(1+r\right) + l^{(\beta)}\right] - \left[\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}\left(1+r\right) + l^{(\alpha)}\right]\right\}\left[I - \left(1+r\right)A^{(\beta)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} = \left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)} - A^{(\alpha)}\right)\left(1+r\right) + \left(l^{(\beta)} - l^{(\alpha)}\right)\right]\left[I - \left(1+r\right)A^{(\beta)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} = \left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(de_{\omega}^{n}\right)\left(1+r\right) + d_0 e_{\omega}^{n}\right]\left[I - \left(1+r\right)A^{(\beta)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} = \left[\hat{p}^{(\alpha)}d\left(1+r\right) + d_0\right]e_{\omega}^{n}\left[I - \left(1+r\right)A^{(\beta)}\right]^{-1} \tag{13}$$

Έτσι, από τις σχέσεις (6), (8), (12) και (13) προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)}d\left(1+r\right) + d_0 \succ 0$$

$$\hat{p}^{(\beta)}d\left(1+r\right) + d_0 \succ 0$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} \geq \hat{p}^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)}d\left(1+r\right) + d_0 \prec 0$$

$$\hat{p}^{(\beta)}d\left(1+r\right) + d_0 \prec 0$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0=0$$

$$\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0=0$$

και

$$\hat{p}^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\beta)}$$ [22]

Δείξαμε ότι τα διανύσματα τιμών $\hat{p}^{(\alpha)}$ και $\hat{p}^{(\beta)}$ των τεχνικών (α) και (β) αντίστοιχα, που συνδέονται με μια ορισμένη τιμή r, $r \in \left[0,R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους είναι *ολικά διατεταγμένα (totally ordered)*. Στη συνέχεια, θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε τις προϋποθέσεις, υπό τις οποίες η απόλυτη τιμή της τυχαίας συνιστώσας του διανύσματος $\left(p^{(\beta)}-p^{(\alpha)}\right)$ είναι θετική ή μηδενική. Για τον σκοπό αυτό θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

---

[22] Η ανωτέρω ανάλυση μπορεί πολύ εύκολα να επεκταθεί - σε μια ασθενέστερη μορφή - και στην περίπτωση που οι τεχνικές (α) και (β) διαφέρουν σε περισσότερες από μια μεθόδους παραγωγής. Πράγματι, αν, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέσουμε ότι οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν στις m πρώτες μεθόδους παραγωγής και, επιπλέον, ότι ισχύει:

- είτε $\hat{p}^{(.)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right)\geq 0$, $(.)=(\alpha),(\beta)$
- είτε $\hat{p}^{(.)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right)\leq 0$, $(.)=(\alpha),(\beta)$
- είτε $\hat{p}^{(.)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right)=0$, $(.)=(\alpha),(\beta)$

τότε, αντίστοιχα, θα έχουμε:

- είτε $\hat{p}^{(\beta)}\geq\hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\beta)}\leq\hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\beta)}$

I. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{A}$.

Εφόσον οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι μη διασπώμενες, στο διάστημα $\left[0, R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους r οι μήτρες $\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]$ και $\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]$ είναι μη ιδιάζουσες και μη διασπώμενες Μ-μήτρες. Ως εκ τούτου έχουμε:

$$\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right] \succ 0 \tag{14}$$

και

$$\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right] \succ 0 \tag{15}$$

Με δεδομένες τις σχέσεις (14) και (15), από τις σχέσεις (12) και (13) προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r)+d_0 \succ 0$$

$$\hat{p}^{(\beta)} d(1+r)+d_0 \succ 0$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} \succ \hat{p}^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r)+d_0 \prec 0$$

$$\hat{p}^{(\beta)} d(1+r)+d_0 \prec 0$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} \prec \hat{p}^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r)+d_0 = 0$$

$$\hat{p}^{(\beta)} d(1+r)+d_0 = 0$$

και

$$\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$$ [23]

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το διάνυσμα $\left(p^{(\beta)} - p^{(\alpha)}\right)$, όταν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι διασπώμενες. Διαμερίζουμε το στοιχειώδες διάνυσμα e_{ω}^{n} ως εξής:

$$e_{\omega}^{n} = \left(e_{\omega}^{k}, e_{\omega-k}^{n-k}\right) \tag{16}$$

όπου e_{ω}^{k} είναι το υποδιάνυσμα διαστάσεων $1 \times k$ [24] και $e_{\omega-k}^{n-k}$ το υποδιάνυσμα διαστάσεων $1 \times (n-k)$.[25] Προφανώς, αν ισχύει $\omega \leq k$, η συνιστώσα ω του υποδιανύσματος e_{ω}^{k} είναι ίση με την μονάδα και για το υποδιάνυσμα $e_{\omega-k}^{n-k}$ θα ισχύει:

$$e_{\omega-k}^{n-k} = 0$$

Στην αντίθετη περίπτωση που ισχύει $\omega \succ k$, η συνιστώσα $\omega - k$ του υποδιανύσματος $e_{\omega-k}^{n-k}$ είναι ίση με την μονάδα και για το υποδιάνυσμα e_{ω}^{k} θα ισχύει:

---

[23] Η ανωτέρω ανάλυση μπορεί πολύ εύκολα να επεκταθεί, σε μια ασθενέστερη μορφή, και στην περίπτωση που οι τεχνικές (α) και (β) διαφέρουν σε περισσότερες από μια μεθόδους παραγωγής. Πράγματι, αν, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέσουμε ότι οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν στις m πρώτες μεθόδους παραγωγής και, επιπλέον, ότι ισχύει:

- είτε $\hat{p}^{(\cdot)}\left(A^{(\beta)} - A^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(l^{(\beta)} - l^{(\alpha)}\right) \geq 0$, $(\cdot) = (\alpha), (\beta)$
- είτε $\hat{p}^{(\cdot)}\left(A^{(\beta)} - A^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(l^{(\beta)} - l^{(\alpha)}\right) \leq 0$, $(\cdot) = (\alpha), (\beta)$
- είτε $\hat{p}^{(\cdot)}\left(A^{(\beta)} - A^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(l^{(\beta)} - l^{(\alpha)}\right) = 0$, $(\cdot) = (\alpha), (\beta)$

τότε, αντίστοιχα, θα έχουμε:

- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \succ \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \prec \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$

[24] Κατά τρόπον ανάλογο θα ορίζουμε το διάνυσμα $\left(e_{\omega}^{k}\right)^{T}$, δηλαδή το ανάστροφο του διανύσματος e_{ω}^{k}.

[25] Κατά τρόπον ανάλογο θα ορίζουμε το διάνυσμα $\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)^{T}$, δηλαδή το ανάστροφο του διανύσματος $e_{\omega-k}^{n-k}$.

$$e_{\omega}^{k}=0$$ [26]

Θα διαμερίσουμε τα διανύσματα τιμών $\hat{p}^{(\alpha)}$ και $\hat{p}^{(\beta)}$ κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να διακρίνονται τα υποδιανύσματα τιμών των βασικών εμπορευμάτων, $\hat{p}_1^{(\alpha)}$ και $\hat{p}_1^{(\beta)}$ αντίστοιχα, από τα υποδιανύσματα τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων, $\hat{p}_2^{(\alpha)}$ και $\hat{p}_2^{(\beta)}$ αντίστοιχα. Έτσι, λαμβάνουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\hat{p}^{(\alpha)}d=\hat{p}_1^{(\alpha)}d_1+\hat{p}_2^{(\alpha)}d_2 \tag{17}$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)}d=\hat{p}_1^{(\beta)}d_1+\hat{p}_2^{(\beta)}d_2 \tag{18}$$

Αντίστοιχα, θα διαμερίσουμε τις μήτρες $\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}$ και $\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}$. Έτσι, για την μήτρα $\left[I-(1+r)A^{(\cdot)}\right]^{-1}$, με $(\cdot)=(\alpha),(\beta)$, θα έχουμε:[27]

$$\left[I-(1+r)A^{(\cdot)}\right]^{-1}=\begin{bmatrix}\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\cdot)}\right]^{-1} & \left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\cdot)}\right]^{-1}A_{12}^{(\cdot)}(1+r)\left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\cdot)}\right]^{-1}\\ 0 & \left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\cdot)}\right]^{-1}\end{bmatrix} \tag{19}$$

Εφόσον οι μήτρες $A_{11}^{(\alpha)}$, $A_{11}^{(\beta)}$, $A_{22}^{(\alpha)}$ και $A_{22}^{(\beta)}$ είναι μη διασπώμενες, για κάθε τιμή r, $r\in\left[0,R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους οι μήτρες:

$$\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right],\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\beta)}\right],\left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\alpha)}\right]\text{και}\left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\beta)}\right]$$

είναι μη ιδιάζουσες, μη διασπώμενες Μ-μήτρες. Έτσι, έχουμε:

$$\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right]^{-1}\succ 0 \tag{20}$$

---

[26] Σε κάθε περίπτωση, ένα μόνο από τα υποδιανύσματα e_{ω}^{k} και $e_{\omega-k}^{n-k}$ θα είναι στοιχειώδες διάνυσμα, ενώ το άλλο θα είναι υποχρεωτικά μηδενικό διάνυσμα. Ο υποδείκτης του εκάστοτε στοιχειώδους διανύσματος θα συμβολίζει τη συνιστώσα του που είναι ίση με την μονάδα.

[27] Βλ. Δασκαλόπουλος, σελ. 112.

$$\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\beta)}\right]^{-1}\succ 0 \tag{21}$$

$$\left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}\succ 0 \tag{22}$$

και

$$\left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}\succ 0 \tag{23}$$

Έτσι, με βάση τις σχέσεις (16), (18) και (19) το σύστημα (12) διαμερίζεται ως εξής:

$$\hat{p}_1^{(\beta)}-\hat{p}_1^{(\alpha)}=\left[\left(\hat{p}_1^{(\beta)}d_1+\hat{p}_2^{(\beta)}d_2\right)(1+r)+d_0\right]e_{\omega}^{k}\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right]^{-1} \tag{24}$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)}-\hat{p}_2^{(\alpha)}=\left[\left(\hat{p}_1^{(\beta)}d_1+\hat{p}_2^{(\beta)}d_2\right)(1+r)+d_0\right]\left\{e_{\omega}^{k}\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right]^{-1}A_{12}^{(\alpha)}(1+r)\left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}+e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}\right\} \tag{25}$$

Κατά τρόπον ανάλογο, με βάση τις σχέσεις (16), (17) και (19) το σύστημα (13) διαμερίζεται ως εξής:

$$\hat{p}_1^{(\beta)}-\hat{p}_1^{(\alpha)}=\left[\left(\hat{p}_1^{(\alpha)}d_1+\hat{p}_2^{(\alpha)}d_2\right)(1+r)+d_0\right]e_{\omega}^{k}\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\beta)}\right]^{-1} \tag{26}$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)}-\hat{p}_2^{(\alpha)}=\left[\left(\hat{p}_1^{(\alpha)}d_1+\hat{p}_2^{(\alpha)}d_2\right)(1+r)+d_0\right]\left\{e_{\omega}^{k}\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\beta)}\right]^{-1}A_{12}^{(\beta)}(1+r)\left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}+e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}\right\} \tag{27}$$

Στο σημείο αυτό, αφού ολοκληρώσαμε τη διατύπωση των γενικών χαρακτηριστικών της μορφής του διανύσματος $p^{(\beta)}-p^{(\alpha)}$, που αντιστοιχεί στην περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι διασπώμενες, είναι απαραίτητο να εξετάσουμε τις ακόλουθες επιμέρους περιπτώσεις:

II. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{B}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{E}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{H}$.

Από τη συνθήκη $\mathcal{B}_3$ ή $\mathcal{E}_3$ ή $\mathcal{H}_3$ προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$A_{12}^{(\alpha)} = A_{12}^{(\beta)} = A_{12} \tag{28}$$

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} = A_{22} \tag{29}$$

$$d = \left(d_1, d_2\right)^T, \text{ με } d_1 \neq 0 \text{ και } d_2 = 0 \tag{30}$$

και

$$1 \leq \omega \leq k \tag{31}$$

Έτσι, από τη σχέση (31) συνεπάγεται:

$$e_{\omega-k}^{n-k} = 0 \tag{32}$$

Αν εφαρμόσουμε τις σχέσεις (28), (29), (30) και (32) στις σχέσεις (24) και (25) θα έχουμε:

$$\hat{p}_1^{(\beta)} - \hat{p}_1^{(\alpha)} = \left[\hat{p}_1^{(\beta)} d_1 \left(1+r\right) + d_0\right] e_\omega^k \left[I_1 - \left(1+r\right) A_{11}^{(\alpha)}\right]^{-1} \tag{33}$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)} - \hat{p}_2^{(\alpha)} = \left[\hat{p}_1^{(\beta)} d_1 \left(1+r\right) + d_0\right] e_\omega^k \left[I_1 - \left(1+r\right) A_{11}^{(\alpha)}\right]^{-1} A_{12}\left(1+r\right) \left[I_2 - \left(1+r\right) A_{22}\right]^{-1}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (33), η ανωτέρω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\hat{p}_2^{(\beta)} - \hat{p}_2^{(\alpha)} = \left(\hat{p}_1^{(\beta)} - \hat{p}_1^{(\alpha)}\right) A_{12}\left(1+r\right) \left[I_2 - \left(1+r\right) A_{22}\right]^{-1} \tag{34}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, αν εφαρμόσουμε τις σχέσεις (28), (29), (30) και (32) στις σχέσεις (26) και (27) θα έχουμε:

$$\hat{p}_1^{(\beta)} - \hat{p}_1^{(\alpha)} = \left[\hat{p}_1^{(\alpha)} d_1 \left(1+r\right) + d_0\right] e_\omega^k \left[I_1 - \left(1+r\right) A_{11}^{(\beta)}\right]^{-1} \tag{35}$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)} - \hat{p}_2^{(\alpha)} = \left[\hat{p}_1^{(\alpha)} d_1 \left(1+r\right) + d_0\right] e_\omega^k \left[I_1 - \left(1+r\right) A_{11}^{(\beta)}\right]^{-1} A_{12}\left(1+r\right) \left[I_2 - \left(1+r\right) A_{22}\right]^{-1}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (35), η ανωτέρω σχέση λαμβάνει την μορφή της σχέσης (34).

Με δεδομένες τις σχέσεις (17), (18), (20), (21), (22), (23), (29) και (30), από τις σχέσεις (33), (34) και (35) προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0 \succ 0$$

$$\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0 \succ 0$$

και

$$\hat{p}_1^{(\beta)} \succ \hat{p}_1^{(\alpha)}$$

Επιπλέον, αν ισχύει μια από τις ανωτέρω σχέσεις θα έχουμε:

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \succ \hat{p}_2^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0 \prec 0$$

$$\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0 \prec 0$$

και

$$\hat{p}_1^{(\beta)} \prec \hat{p}_1^{(\alpha)}$$

Επιπλέον, αν ισχύει μια από τις ανωτέρω σχέσεις θα έχουμε:

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \prec \hat{p}_2^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0 = 0$$

$$\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0 = 0$$

και

$$\hat{p}_1^{(\alpha)} = \hat{p}_1^{(\beta)}$$

Επιπλέον, αν ισχύει μια από τις ανωτέρω σχέσεις θα έχουμε:

$$\hat{p}_2^{(\alpha)} = \hat{p}_2^{(\beta)}$$ [28]

---

[28] Η ανωτέρω ανάλυση μπορεί πολύ εύκολα να επεκταθεί - σε μια ασθενέστερη μορφή - και στην περίπτωση που οι τεχνικές (α) και (β) διαφέρουν στις μεθόδους παραγωγής περισσότερων από ένα

III. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{LT}$ είτε στην κατηγορία Θ.

Από τη συνθήκη $\mathcal{T}_3$ ή $\mathcal{LT}_3$ ή Θ_3 προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$A_{11}^{(\alpha)} = A_{11}^{(\beta)} = A_{11} \tag{36}$$

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} = A_{22} \tag{37}$$

$$d = \left(d_1, d_2\right)^T, \text{ με } d_1 \neq 0 \text{ και } d_2 = 0 \tag{38}$$

και

$$k \prec \omega \leq n \tag{39}$$

Έτσι, από τη σχέση (39) συνεπάγεται:

$$e_{\omega}^{k} = 0 \tag{40}$$

Αν εφαρμόσουμε τις σχέσεις (36), (37), (38) και (40) στις σχέσεις (24) και (25) θα έχουμε:

$$\hat{p}_1^{(\alpha)} = \hat{p}_1^{(\beta)} = \hat{p}_1 \tag{41}$$

και

βασικών εμπορευμάτων. Πράγματι, αν, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέσουμε ότι οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν στις μεθόδους παραγωγής των m πρώτων βασικών εμπορευμάτων και, επιπλέον, ότι ισχύει:

- είτε $\hat{p}_1^{(.)}\left(A_{11}^{(\beta)} - A_{11}^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(l_1^{(\beta)} - l_1^{(\alpha)}\right) \geq 0$, $(.) = (\alpha), (\beta)$
- είτε $\hat{p}_1^{(.)}\left(A_{11}^{(\beta)} - A_{11}^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(l_1^{(\beta)} - l_1^{(\alpha)}\right) \leq 0$, $(.) = (\alpha), (\beta)$
- είτε $\hat{p}_1^{(.)}\left(A_{11}^{(\beta)} - A_{11}^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(l_1^{(\beta)} - l_1^{(\alpha)}\right) = 0$, $(.) = (\alpha), (\beta)$

τότε, αντίστοιχα, θα έχουμε:

- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \succ \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \prec \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$

$$\hat{p}_2^{(\beta)} - \hat{p}_2^{(\alpha)} = \left[\hat{p}_1^{(\beta)} d_1 (1+r) + d_0\right] e_{\omega-k}^{n-k} \left[I_2 - (1+r)A_{22}\right]^{-1}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (41), η ανωτέρω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\hat{p}_2^{(\beta)} - \hat{p}_2^{(\alpha)} = \left[\hat{p}_1 d_1 (1+r) + d_0\right] e_{\omega-k}^{n-k} \left[I_2 - (1+r)A_{22}\right]^{-1} \tag{42}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, αν εφαρμόσουμε τις σχέσεις (36), (37), (38) και (40) στις σχέσεις (26) και (27) λαμβάνουμε τις σχέσεις (41) και (42).

Με δεδομένες τις σχέσεις (17), (18), (22), (23), (37) και (38), από τις σχέσεις (41), και (42) προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0 \succ 0$$

$$\hat{p}^{(\beta)} d(1+r) + d_0 \succ 0$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \succ \hat{p}_2^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0 \prec 0$$

$$\hat{p}^{(\beta)} d(1+r) + d_0 \prec 0$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \prec \hat{p}_2^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0 = 0$$

$$\hat{p}^{(\beta)} d(1+r) + d_0 = 0$$

και

$$\hat{p}_2^{(\alpha)} = \hat{p}_2^{(\beta)}$$ [29, 30]

---

[29] Η ανωτέρω ανάλυση μπορεί πολύ εύκολα να επεκταθεί - σε μια ασθενέστερη μορφή - και στην

περίπτωση που οι τεχνικές (α) και (β) διαφέρουν στις μεθόδους παραγωγής περισσότερων από ένα μη βασικών εμπορευμάτων. Πράγματι, αν, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέσουμε ότι οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν στις μεθόδους παραγωγής των m πρώτων μη βασικών εμπορευμάτων και, επιπλέον, ότι ισχύει:

- είτε $\hat{p}_1^{(\cdot)}\left(A_{12}^{(\beta)} - A_{12}^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(I_2^{(\beta)} - I_2^{(\alpha)}\right) \geq 0$, $(\cdot) = (\alpha), (\beta)$
- είτε $\hat{p}_1^{(\cdot)}\left(A_{12}^{(\beta)} - A_{12}^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(I_2^{(\beta)} - I_2^{(\alpha)}\right) \leq 0$, $(\cdot) = (\alpha), (\beta)$
- είτε $\hat{p}_1^{(\cdot)}\left(A_{12}^{(\beta)} - A_{12}^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(I_2^{(\beta)} - I_2^{(\alpha)}\right) = 0$, $(\cdot) = (\alpha), (\beta)$

τότε, αντίστοιχα, θα έχουμε:

- είτε $\hat{p}_2^{(\beta)} \succ \hat{p}_2^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_2^{(\beta)} \prec \hat{p}_2^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_2^{(\alpha)} = \hat{p}_2^{(\beta)}$

30 Στην ειδική περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{T}$ και ισχύει:

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} = A_{22} = 0,$$

από τη σχέση (42) θα έχουμε:

$$\hat{p}_2^{(\beta)} - \hat{p}_2^{(\alpha)} = \left[\hat{p}_1 d_1(1+r) + d_0\right] e_{\omega-k}^{n-k} \left[I_2 - (1+r)A_{22}\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$\hat{p}_2^{(\beta)} - \hat{p}_2^{(\alpha)} = \left[\hat{p}_1 d_1(1+r) + d_0\right] e_{\omega-k}^{n-k}\, I_2$$

Από την ανωτέρω σχέση προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}_1 d_1(1+r) + d_0 \succ 0$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)^T \succ \hat{p}_2^{(\alpha)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)^T$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}_1 d_1(1+r) + d_0 \prec 0$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)^T \prec \hat{p}_2^{(\alpha)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)^T$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}_1 d_1(1+r)+d_0=0$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)^T = \hat{p}_2^{(\alpha)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)^T$$

Προφανώς, σε κάθε περίπτωση θα ισχύει:

$$\hat{p}_2^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T = \hat{p}_2^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T, j=1,2,\ldots,n-k \text{ με } j\neq\omega .$$

Η ανωτέρω ανάλυση μπορεί πολύ εύκολα να επεκταθεί - σε μια ασθενέστερη μορφή - και στην περίπτωση που οι τεχνικές (α) και (β) διαφέρουν στις μεθόδους παραγωγής περισσότερων από ένα μη βασικών εμπορευμάτων. Πράγματι, αν, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέσουμε ότι οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν στις μεθόδους παραγωγής των m πρώτων μη βασικών εμπορευμάτων και, επιπλέον, ότι ισχύει:

- είτε $\hat{p}_1^{(.)}\left(A_{12}^{(\beta)}-A_{12}^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(l_2^{(\beta)}-l_2^{(\alpha)}\right)\geq 0,\ (.)=(\alpha),(\beta)$
- είτε $\hat{p}_1^{(.)}\left(A_{12}^{(\beta)}-A_{12}^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(l_2^{(\beta)}-l_2^{(\alpha)}\right)\leq 0,\ (.)=(\alpha),(\beta)$
- είτε $\hat{p}_1^{(.)}\left(A_{12}^{(\beta)}-A_{12}^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(l_2^{(\beta)}-l_2^{(\alpha)}\right)=0,\ (.)=(\alpha),(\beta)$

τότε, αντίστοιχα, θα έχουμε:

- είτε $\hat{p}_2^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T \succ \hat{p}_2^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T, j=1,2,\ldots,m$
- είτε $\hat{p}_2^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T \prec \hat{p}_2^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T, j=1,2,\ldots,m$
- είτε $\hat{p}_2^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T = \hat{p}_2^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T, j=1,2,\ldots,m$

Προφανώς, σε κάθε περίπτωση θα ισχύει:

$$\hat{p}_2^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T = \hat{p}_2^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T, j=m+1,m+2,\ldots,n-k$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειώσουμε ότι μια διασπώμενη μήτρα τεχνικών συντελεστών A

Τέλος, σε κάθε περίπτωση θα ισχύει:

$$\hat{p}_1^{(\alpha)} = \hat{p}_1^{(\beta)} = \hat{p}_1$$

IV. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{Z}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{J}$.

Από τη συνθήκη $\mathcal{D}_3$ ή $\mathcal{Z}_3$ ή $\mathcal{J}_3$ προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$A_{11}^{(\alpha)} = A_{11}^{(\beta)} = A_{11} \tag{43}$$

$$A_{12}^{(\alpha)} = A_{12}^{(\beta)} = A_{12} \tag{44}$$

$$d = \left(d_1, d_2\right)^T, \text{ με } d_2 \neq 0, \text{ είτε } d_1 \neq 0 \text{ είτε } d_1 = 0 \tag{45}$$

και

$$k \prec \omega \leq n \tag{46}$$

Έτσι, από τη σχέση (46) συνεπάγεται:

$$e_\omega^k = 0 \tag{47}$$

Αν εφαρμόσουμε τις σχέσεις (43), (44), (45) και (47) στις σχέσεις (24) και (25) θα έχουμε:

$$\hat{p}_1^{(\alpha)} = \hat{p}_1^{(\beta)} = \hat{p}_1 \tag{48}$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)} - \hat{p}_2^{(\alpha)} = \left[\left(\hat{p}_1^{(\beta)} d_1 + \hat{p}_2^{(\beta)} d_2\right)\left(1 + r\right) + d_0\right] e_{\omega-k}^{n-k} \left[I_2 - \left(1 + r\right) A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (48), η ανωτέρω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\hat{p}_2^{(\beta)} - \hat{p}_2^{(\alpha)} = \left[\left(\hat{p}_1 d_1 + \hat{p}_2^{(\beta)} d_2\right)\left(1 + r\right) + d_0\right] e_{\omega-k}^{n-k} \left[I_2 - \left(1 + r\right) A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} \tag{49}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, αν εφαρμόσουμε τις σχέσεις (43), (44), (45) και (47) στις σχέσεις (26) και (27) λαμβάνουμε τη σχέση (48) και τη σχέση:

της μορφής (I.1.2.1), για την οποία ισχύει:

$$A_{22} = 0,$$

ονομάζεται οιονεί- μη διασπώμενη (quasi- irreducible). Βλ. Bowles and Gintis [1977, σελ. 188].

$$\hat{p}_2^{(\beta)} - \hat{p}_2^{(\alpha)} = \left[\left(\hat{p}_1^{(\alpha)} d_1 + \hat{p}_2^{(\alpha)} d_2\right)(1+r) + d_0\right] e_{\omega-k}^{n-k} \left[I_2 - (1+r) A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (48), η ανωτέρω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\hat{p}_2^{(\beta)} - \hat{p}_2^{(\alpha)} = \left[\left(\hat{p}_1 d_1 + \hat{p}_2^{(\alpha)} d_2\right)(1+r) + d_0\right] e_{\omega-k}^{n-k} \left[I_2 - (1+r) A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} \tag{50}$$

Με δεδομένες τις σχέσεις (17), (18), (22) και (23), από τις σχέσεις (48), (49) και (50) προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0 \succ 0$$

$$\hat{p}^{(\beta)} d(1+r) + d_0 \succ 0$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \succ \hat{p}_2^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0 \prec 0$$

$$\hat{p}^{(\beta)} d(1+r) + d_0 \prec 0$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \prec \hat{p}_2^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0 = 0$$

$$\hat{p}^{(\beta)} d(1+r) + d_0 = 0$$

και

$$\hat{p}_2^{(\alpha)} = \hat{p}_2^{(\beta)}$$ [31]

---

[31] Η ανωτέρω ανάλυση μπορεί πολύ εύκολα να επεκταθεί - σε μια ασθενέστερη μορφή - και στην περίπτωση που οι τεχνικές (α) και (β) διαφέρουν στις μεθόδους παραγωγής περισσότερων από ένα μη βασικών εμπορευμάτων. Πράγματι, αν, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέσουμε ότι οι τεχνικές

Τέλος, σε κάθε περίπτωση θα ισχύει:

$$\hat{p}_1^{(\alpha)} = \hat{p}_1^{(\beta)} = \hat{p}_1$$

Πόρισμα 1. Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^*\right)$ και $R^* = \min\left(R^{(\alpha)}, R^{(\beta)}\right)$, για τα διανύσματα τιμών $\hat{p}^{(\alpha)}$ και $\hat{p}^{(\beta)}$ των τεχνικών (α) και (β) αντίστοιχα, οι οποίες διαφέρουν ως προς το *βασικό* εμπόρευμα ω, θα έχουμε:

- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \succ \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \prec \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$

Απόδειξη: Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις (I) και (II), που μελετήσαμε παραπάνω, προκύπτει η απόδειξη του ανωτέρω Πορίσματος.

Πόρισμα 2. Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^*\right)$ και $R^* = \min\left(R^{(\alpha)}, R^{(\beta)}\right)$, για τα διανύσματα τιμών $\hat{p}^{(\alpha)}$ και $\hat{p}^{(\beta)}$ των τεχνικών (α) και (β) αντίστοιχα, οι οποίες διαφέρουν ως προς το *μη βασικό* εμπόρευμα ω, θα έχουμε:

παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν στις μεθόδους παραγωγής των m πρώτων μη βασικών εμπορευμάτων και, επιπλέον, ότι ισχύει:

- είτε $\hat{p}_2^{(.)}\left(A_{22}^{(\beta)} - A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(l_2^{(\beta)} - l_2^{(\alpha)}\right) \geq 0$, $(.) = (\alpha), (\beta)$
- είτε $\hat{p}_2^{(.)}\left(A_{22}^{(\beta)} - A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(l_2^{(\beta)} - l_2^{(\alpha)}\right) \leq 0$, $(.) = (\alpha), (\beta)$
- είτε $\hat{p}_2^{(.)}\left(A_{22}^{(\beta)} - A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(l_2^{(\beta)} - l_2^{(\alpha)}\right) = 0$, $(.) = (\alpha), (\beta)$

τότε, αντίστοιχα, θα έχουμε:

- είτε $\hat{p}_2^{(\beta)} \succ \hat{p}_2^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_2^{(\beta)} \prec \hat{p}_2^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_2^{(\alpha)} = \hat{p}_2^{(\beta)}$

$$\hat{p}_1^{(\alpha)} = \hat{p}_1^{(\beta)} = \hat{p}_1$$

και

- είτε $\hat{p}_2^{(\beta)} \succ \hat{p}_2^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_2^{(\beta)} \prec \hat{p}_2^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_2^{(\alpha)} = \hat{p}_2^{(\beta)}$

Απόδειξη: Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις (III) και (IV), που μελετήσαμε παραπάνω, προκύπτει η απόδειξη του ανωτέρω Πορίσματος.[32]

[32] Σε ανάλογα συμπεράσματα με αυτά που διατυπώσαμε στο Πόρισμα (1) και στο Πόρισμα (2) καταλήγει ο Bidard, όταν πραγματευόμενος τη σχέση των - εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης - διανυσμάτων τιμών δύο τεχνικών $(T_1$ και $T_2)$, που διαφέρουν σε μια μέθοδο παραγωγής (c_2), διατυπώνει την Πρόταση (Theorème 1.), σύμφωνα με την οποία: "Après insertion d' une méthode c_2 *profitable aux prix* $\hat{p}_1$ *de* T_1, *le nouveau vecteur* $\hat{p}_2$ des prix salariaux vérifie $\hat{p}_2 \leq \hat{p}_1$ avec inégalité stricte pour les composantes du bien consideré et de ceux dans lesquels il entre directement ou indirectement." Βλ. Bidard [1991, σελ. 80].

2.6. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΙΙ.

Στο Τμήμα (2.6) θα αποδείξουμε το "Θεώρημα της μη Υποκατάστασης", αποδεικνύοντας, ότι για κάθε τεχνική $(.)$, $(.)=(\alpha)$, (β), οι συνθήκες:

- $\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \left[\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$
- $\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \left[\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$
- $\left[\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$ [33]

είναι αντίστοιχα ισοδύναμες με τις συνθήκες:

- $\hat{p}^{(\beta)} \geq \hat{p}^{(\alpha)}$
- $\hat{p}^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}$ [34]
- $\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$ [35]

---

[33] Υπενθυμίζουμε ότι ισχύει:

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

και

$$\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \hat{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

[34] Αυτό σημαίνει, ότι αν η τιμή του εμπορεύματος ω που αντιστοιχεί στην τεχνική παραγωγής (β) είναι μεγαλύτερη (μικρότερη) της τιμής του ίδιου εμπορεύματος που αντιστοιχεί στην τεχνική παραγωγής (α), τότε το διάνυσμα τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, της τεχνικής (β) είναι μεγαλύτερο (μικρότερο) - με την ευρεία έννοια - του αντίστοιχου διανύσματος τιμών της τεχνικής (α).

[35] Αυτό σημαίνει, ότι αν η τιμή του εμπορεύματος ω που αντιστοιχεί στην τεχνική παραγωγής (α) είναι

Αρχικά, θα εξετάσουμε την γενικότερη περίπτωση που οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν ως προς τις μεθόδους παραγωγής m εμπορευμάτων, με $1 \leq m \leq n$. Θα υποθέσουμε, ότι οι εκφρασμένες σε όρους της εργασιακής δύναμης τιμές των εν λόγω m εμπορευμάτων της μιας τεχνικής είναι είτε μεγαλύτερες (με την ευρεία έννοια) είτε ίσες είτε μικρότερες (με την ευρεία έννοια) των αντίστοιχων τιμών της άλλης. Επιπλέον, θα συζητήσουμε ξεχωριστά την περίπτωση που οι τεχνικές παραγωγής είναι μη διασπώμενες[36] από την περίπτωση που οι τεχνικές παραγωγής είναι διασπώμενες. Τέλος, αν οι τεχνικές παραγωγής είναι διασπώμενες, θα εξετάσουμε ξεχωριστά την περίπτωση που τα m εμπορεύματα είναι βασικά[37] από την εναλλακτική περίπτωση που τα ανωτέρω εμπορεύματα είναι μη βασικά.[38, 39]

Με βάση το αναλυτικό πλαίσιο που μόλις περιγράψαμε αποδεικνύουμε τις Προτάσεις (1), (2) και (3) αντίστοιχα. Από τις ανωτέρω Προτάσεις απορρέουν τα Πορίσματα (1), (2) και (3) αντίστοιχα, τα οποία αναφέρονται στην ειδική περίπτωση που οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν μόνο ως προς την μέθοδο

ίση με την τιμή του ίδιου εμπορεύματος που αντιστοιχεί στην τεχνική παραγωγής (β), τότε το διάνυσμα τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, της τεχνικής (α) είναι ίσο με το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών της τεχνικής (β).

[36] Βλέπε Πρόταση (1).

[37] Βλέπε Πρόταση (2).

[38] Βλέπε Πρόταση (3).

[39] Μια παρόμοια αποδεικτική διαδικασία αναπτύσσεται από τους Herrero, Jimenez-Raneda, and Villar [1980, σσ. 159-160] με την διαφορά ότι η προσέγγιση τους παρουσιάζει τα ακόλουθες ελλείψεις:

- Περιορίζεται στην εξέταση μη διασπώμενων τεχνικών (Κατηγορία $\mathcal{A}$) και
- Θεωρεί μόνο την περίπτωση που οι οι εκφρασμένες σε όρους της εργασιακής δύναμης τιμές των εν λόγω m εμπορευμάτων της μιας τεχνικής είναι είτε μεγαλύτερες (με την αυστηρή έννοια) είτε ίσες είτε μικρότερες (με την αυστηρή έννοια) των αντίστοιχων τιμών της άλλης.

παραγωγής του εμπορεύματος ω.[40]

Πρόταση 1. Έστω δύο μη διασπώμενες τεχνικές παραγωγής (α) και (β) που διαφέρουν στις διαδικασίες παραγωγής των m πρώτων εμπορευμάτων $(m \leq n)$. Αν σε μια ορισμένη τιμή r, $r \in \left[0, R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους ισχύει:

- είτε $\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T \geq \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m$[41]
- είτε $\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T \leq \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m$[42]
- είτε $\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T = \hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m$,

τότε στην τιμή r του ποσοστού κέρδους θα έχουμε αντίστοιχα:

- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \geq \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$

Απόδειξη: Αν ισχύει $m = n$, η Πρόταση (1) είναι ταυτολογική. Έστω λοιπόν ότι $m \prec n$ και z, όπου $z = n - m \succ 0$, ο αριθμός των εμπορευμάτων των οποίων οι διαδικασίες παραγωγής είναι αδιαφοροποίητες στις τεχνικές παραγωγής (α) και (β).

---

[40] Ανάλογες αποδείξεις του "Θεωρήματος της Μη Υποκατάστασης" για μη διασπώμενες τεχνικές παραγωγής έχουν προταθεί από τους Schefold [1971], Schefold [1978, σσ. 38-39], Abraham-Frois, F. et Berrebi, E. [1976, σσ.269-272] και Berrebi, Z. M. [1981, σσ. 967-970].

[41] Με $\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T \neq \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m$

[42] Με $\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T \neq \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m$

Από την υπόθεση μας ότι οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν μόνο ως προς τις μεθόδους παραγωγής των m πρώτων εμπορευμάτων συμπεραίνουμε, ότι οι z τελευταίες στήλες των μητρών $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$, καθώς επίσης οι z τελευταίες συνιστώσες των διανυσμάτων $l^{(\alpha)}$ και $l^{(\beta)}$, είναι ίσες. Έτσι, μπορούμε να διαμερίσουμε τις μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ως εξής:

$$A^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} A_{mm}^{(\alpha)} & A_{mz} \\ A_{zm}^{(\alpha)} & A_{zz} \end{bmatrix}$$

και

$$A^{(\beta)} = \begin{bmatrix} A_{mm}^{(\beta)} & A_{mz} \\ A_{zm}^{(\beta)} & A_{zz} \end{bmatrix}$$

όπου με A_{ij} ή $A_{ij}^{(.)}$, $i,j = m,z$, συμβολίζουμε την υπομήτρα τεχνικών συντελεστών, τάξης $i \times j$, της τεχνικής $(.)$, $(.) = (\alpha), (\beta)$.

Αντίστοιχα, θα διαμερίσουμε τα διανύσματα άμεσης εργασίας $l^{(\alpha)}$ και $l^{(\beta)}$ ως εξής:

$$l^{(\alpha)} = \left(l_{\mathrm{m}}^{(\alpha)}, l_z\right)$$

και

$$l^{(\beta)} = \left(l_m^{(\beta)}, l_z\right)$$

όπου με l_j ή $l_j^{(.)}$, $j = m,z$, συμβολίζουμε το υποδιάνυσμα άμεσης εργασίας, τάξης $\times j$, της τεχνικής $(.)$, $(.) = (\alpha), (\beta)$, για την παραγωγή των j εμπορευμάτων.

Ανάλογα με τον διαμερισμό των διανυσμάτων $l^{(\alpha)}$ και $l^{(\beta)}$, θα διαμερίσουμε τα διανύσματα τιμών $\hat{p}^{(\alpha)}$ και $\hat{p}^{(\beta)}$ ως εξής:

$$\hat{p}^{(\alpha)} = \left(\hat{p}_m^{(\alpha)}, \hat{p}_z^{(\alpha)}\right)$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} = \left(\hat{p}_m^{(\beta)}, \hat{p}_z^{(\beta)}\right)$$

που με $\hat{p}_j^{(.)}, j = m,z$, συμβολίζουμε το υποδιάνυσμα τιμών, τάξης $1 \times j$, των j εμπορευμάτων που παράγει η τεχνική παραγωγής $(.)$, $(.) = (\alpha)$, (β).

Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, θα διαμερίσουμε τα συστήματα προσδιορισμού των τιμών των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\hat{p}_m^{(\alpha)} = \hat{p}_m^{(\alpha)} A_{mm}^{(\alpha)}(1+r) + \hat{p}_z^{(\alpha)} A_{zm}^{(\alpha)}(1+r) + l_m^{(\alpha)}$$

$$\hat{p}_z^{(\alpha)} = \hat{p}_m^{(\alpha)} A_{mz}(1+r) + \hat{p}_z^{(\alpha)} A_{zz}(1+r) + l_m \tag{1}$$

και

$$\hat{p}_m^{(\beta)} = \hat{p}_m^{(\beta)} A_{mm}^{(\beta)}(1+r) + \hat{p}_z^{(\beta)} A_{zm}^{(\beta)}(1+r) + l_m^{(\beta)}$$

$$\hat{p}_z^{(\beta)} = \hat{p}_m^{(\beta)} A_{mz}(1+r) + \hat{p}_z^{(\beta)} A_{zz}(1+r) + l_m \tag{2}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\hat{p}_z^{(\beta)} - \hat{p}_z^{(\alpha)} = \left(\hat{p}_m^{(\beta)} - \hat{p}_m^{(\alpha)}\right) A_{mz}(1+r) + \left(\hat{p}_z^{(\beta)} - \hat{p}_z^{(\alpha)}\right) A_{zz}(1+r) \Leftrightarrow$$

$$\left(\hat{p}_z^{(\beta)} - \hat{p}_z^{(\alpha)}\right)\left[I_z - (1+r)A_{zz}\right] = \left(\hat{p}_m^{(\beta)} - \hat{p}_m^{(\alpha)}\right)A_{mz}(1+r)^{43} \tag{3}$$

Προφανώς, η τετραγωνική υπομήτρα $\left[I_z - (1+r)A_{zz}\right]$, με $r \in \left[0, R^*\right)$, είναι μια μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα.[44] Έτσι, ισχύει:

$$\left[I_z - (1+r)A_{zz}\right]^{-1} \succ 0 \tag{4}$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά τη σχέση (3) με την αντίστροφη της μήτρας $\left[I_z - (1+r)A_{zz}\right]$ θα έχουμε:

$$\hat{p}_z^{(\beta)} - \hat{p}_z^{(\alpha)} = \left(\hat{p}_m^{(\beta)} - \hat{p}_m^{(\alpha)}\right)A_{mz}(1+r)\left[I_z - (1+r)A_{zz}\right]^{-1} \tag{5}$$

Από την υπόθεσή μας, σύμφωνα με την οποία ισχύει:

- είτε $\hat{p}_m^{(\beta)} \geq \hat{p}_m^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_m^{(\beta)} \leq \hat{p}_m^{(\alpha)}$

---

[43] Με I_z θα συμβολίζουμε την μοναδιαία μήτρα τάξης $z \times z$.

[44] Η υπομήτρα A_{zz} της μη διασπώμενης μήτρας $A^{(\cdot)}$ είναι μη διασπώμενη. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η μήτρα $\left[I_z - (1+r)A_{zz}\right]$, $r \in \left[0, R^*\right)$, είναι μια μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα, δηλαδή ότι:

$$r \prec \frac{1-\lambda_m^{A_{zz}}}{\lambda_m^{A_{zz}}} = R^{A_{zz}},$$

όπου $\lambda_m^{A_{zz}}$ η μέγιστη ιδιοτιμή της υπομήτρας A_{zz}. Πράγματι, για την υπομήτρα A_{zz} ισχύει: $\lambda_m^{A_{zz}} \prec \lambda_m^{A^{(\cdot)}}$ Βλ. Debreu and Herstein [1953, σελ. 599]. Έτσι, θα έχουμε:

$$r \prec R^* = \frac{1-\lambda_m^{A^{(\cdot)}}}{\lambda_m^{A^{(\cdot)}}} \prec \frac{1-\lambda_m^{A_{zz}}}{\lambda_m^{A_{zz}}}$$

- είτε $\hat{p}_m^{(\alpha)} = \hat{p}_m^{(\beta)}$ [45]

και τις σχέσεις (4) και (5), θα έχουμε αντίστοιχα:

- είτε:

$$\hat{p}_z^{(\beta)} \succ \hat{p}_z^{(\alpha)}$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} \geq \hat{p}^{(\alpha)}$$

- είτε:

$$\hat{p}_z^{(\beta)} \prec \hat{p}_z^{(\alpha)}$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}$$

---

[45] Εφόσον έχουμε ορίσει $\hat{p}^{(\cdot)} = \left(\hat{p}_m^{(\cdot)}, \hat{p}_z^{(\cdot)}\right)$, οι συνθήκες:

$$\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T \geq \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T, \text{ με } \hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T \neq \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T, j = 1,2,\dots,m$$

$$\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T \leq \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T, \text{ με } \hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T \neq \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T, j = 1,2,\dots,m$$

και

$$\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T = \hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T, \ j = 1,2,\dots,m,$$

είναι αντίστοιχα ισοδύναμες με τις συνθήκες

$$\hat{p}_m^{(\beta)} \geq \hat{p}_m^{(\alpha)}$$

$$\hat{p}_m^{(\beta)} \leq \hat{p}_m^{(\alpha)}$$

και

$$\hat{p}_m^{(\alpha)} = \hat{p}_m^{(\beta)}$$

• είτε:

$$\hat{p}_z^{(\alpha)} = \hat{p}_z^{(\beta)}$$

και

$$\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$$

Πόρισμα 1. Αν οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{A}$, τότε σε κάθε τιμή r, $r \in \left[0, R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους θα ισχύει:

• είτε $\hat{p}^{(\beta)} \succ \hat{p}^{(\alpha)}$

• είτε $\hat{p}^{(\beta)} \prec \hat{p}^{(\alpha)}$

• είτε $\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$

Απόδειξη: Στην προκείμενη περίπτωση θα έχουμε:

$$m = 1$$

και

$$z = n - 1 \succ 0$$

Έτσι, το διάνυσμα $\left(\hat{p}_m^{(\beta)} - \hat{p}_m^{(\alpha)}\right)$, τάξης $1 \times m$, εκφυλίζεται σε βαθμωτό. Αντίστοιχα, η μήτρα A_{mz} εκφυλίζεται σε διάνυσμα-γραμμή τάξης $1 \times (n-1)$. Κατά συνέπεια, από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

• Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}_m^{(\beta)} \succ \hat{p}_m^{(\alpha)}$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} \succ \hat{p}^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}_m^{(\beta)} \prec \hat{p}_m^{(\alpha)}$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} \prec \hat{p}^{(\alpha)}$$

Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}_m^{(\alpha)} = \hat{p}_m^{(\beta)}$$

και

$$\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$$ [46]

Πρόταση 2. Έστω δύο διασπώμενες τεχνικές παραγωγής (α) και (β) που διαφέρουν στις διαδικασίες παραγωγής των m πρώτων βασικών εμπορευμάτων $(m \leq k)$. Αν σε μια ορισμένη τιμή r, $r \in \left[0, R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους ισχύει:

- είτε $\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T \geq \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m$ [47]
- είτε $\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T \leq \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m$ [48]
- είτε $\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T = \hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m$,

τότε στην τιμή r του ποσοστού κέρδους θα έχουμε αντίστοιχα:

---

[46] Βλέπε επίσης Πόρισμα (2.α.1).

[47] Με $\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T \neq \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m$

[48] Με $\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T \neq \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m$

- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \geq \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$

Απόδειξη: Έστω z, με $z = k - m \geq 0$, ο αριθμός των βασικών εμπορευμάτων των οποίων οι μέθοδοι παραγωγής είναι αδιαφοροποίητες στις τεχνικές παραγωγής (α) και (β). Υποθέτουμε ότι οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ βρίσκονται στην κανονική τους μορφή. Από την υπόθεση μας ότι οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν μόνο ως προς τις μεθόδους παραγωγής των m πρώτων βασικών εμπορευμάτων συμπεραίνουμε, ότι οι μέθοδοι παραγωγής των z τελευταίων βασικών εμπορευμάτων, καθώς επίσης οι μέθοδοι παραγωγής των $n-k$ μη βασικών εμπορευμάτων είναι ίδιες. Επομένως, οι z τελευταίες στήλες των υπομητρών $A_{11}^{(\alpha)}$ και $A_{11}^{(\beta)}$, καθώς επίσης οι z τελευταίες συνιστώσες των υποδιανυσμάτων $l_1^{(\alpha)}$ και $l_1^{(\beta)}$ είναι ίσες. Επιπλέον, θα ισχύει:

$$A_{12}^{(\alpha)} = A_{12}^{(\beta)}$$

και

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)},$$

καθώς επίσης:

$$l_2^{(\alpha)} = l_2^{(\beta)}$$

Έτσι, με δεδομένη την κανονική μορφή των μητρών $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$, μπορούμε να τις διαμερίσουμε περαιτέρω ως εξής:

$$A^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} A_{mm}^{(\alpha)} & A_{mz} & A_{m,n-k} \\ A_{zm}^{(\alpha)} & A_{zz} & A_{z,n-k} \\ 0 & & A_{22} \end{bmatrix}$$

και

$$A^{(\beta)} = \begin{bmatrix} A_{mm}^{(\beta)} & A_{mz} & A_{m,n-k} \\ A_{zm}^{(\beta)} & A_{zz} & A_{z,n-k} \\ 0 & & A_{22} \end{bmatrix}$$

όπου με A_{ij} ή $A_{ij}^{(.)}, i,j = m,z$, συμβολίζουμε μια επιμέρους υπομήτρα, τάξης $i \times j$, της υπομήτρας $A_{11}^{(.)}$ της τεχνικής $(.), (.) = (\alpha), (\beta)$, και με $A_{i,n-k}$, $i = m,z$, συμβολίζουμε μια επιμέρους υπομήτρα, τάξης $i \times (n-k)$, της υπομήτρας A_{12} που είναι κοινή στις τεχνικές (α) και (β).

Αντίστοιχα, θα διαμερίσουμε τα διανύσματα άμεσης εργασίας $l^{(\alpha)}$ και $l^{(\beta)}$ ως εξής:

$$l^{(\alpha)} = \left(l_m^{(\alpha)}, l_z, l_2\right)$$

και

$$l^{(\beta)} = \left(l_m^{(\beta)}, l_z, l_2\right)$$

όπου με l_j ή $l_j^{(.)}, j = m,z$, συμβολίζουμε το επιμέρους υποδιάνυσμα, τάξης $1 \times j$, του υποδιανύσματος άμεσης εργασίας $l_1^{(.)}$ της τεχνικής $(.)$, $(.) = (\alpha), (\beta)$.

Ανάλογα με τον διαμερισμό των διανυσμάτων $l^{(\alpha)}$ και $l^{(\beta)}$ θα διαμερίσουμε τα διανύσματα τιμών $\hat{p}^{(\alpha)}$ και $\hat{p}^{(\beta)}$ ως εξής:

$$\hat{p}^{(\alpha)} = \left(\hat{p}_m^{(\alpha)}, \hat{p}_z^{(\alpha)}, \hat{p}_2^{(\alpha)}\right)$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} = \left(\hat{p}_m^{(\beta)}, \hat{p}_z^{(\beta)}, \hat{p}_2^{(\beta)}\right),$$

όπου με $\hat{p}_j^{(.)}, j = m, z$ συμβολίζουμε το υποδιάνυσμα τιμών, τάξης $1 \times j$, των j βασικών εμπορευμάτων που παράγει η τεχνική παραγωγής $(.)$, $(.) = (\alpha)$, (β).

Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, θα διαμερίσουμε τα συστήματα προσδιορισμού των τιμών των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\hat{p}_m^{(\alpha)} = \hat{p}_m^{(\alpha)} A_{mm}^{(\alpha)}(1+r) + \hat{p}_z^{(\alpha)} A_{zm}^{(\alpha)}(1+r) + l_m^{(\alpha)}$$

$$\hat{p}_z^{(\alpha)} = \hat{p}_m^{(\alpha)} A_{mz}(1+r) + \hat{p}_z^{(\alpha)} A_{zz}(1+r) + l_z \tag{6}$$

$$\hat{p}_2^{(\alpha)} = \hat{p}_m^{(\alpha)} A_{m,n-k}(1+r) + \hat{p}_z^{(\alpha)} A_{z,n-k}(1+r) + \hat{p}_2^{(\alpha)} A_{22}(1+r) + l_2 \tag{7}$$

και

$$\hat{p}_m^{(\beta)} = \hat{p}_m^{(\beta)} A_{mm}^{(\beta)}(1+r) + \hat{p}_z^{(\beta)} A_{zm}^{(\beta)}(1+r) + l_m^{(\beta)}$$

$$\hat{p}_z^{(\beta)} = \hat{p}_m^{(\beta)} A_{mz}(1+r) + \hat{p}_z^{(\beta)} A_{zz}(1+r) + l_z \tag{8}$$

$$\hat{p}_2^{(\beta)} = \hat{p}_m^{(\beta)} A_{m,n-k}(1+r) + \hat{p}_z^{(\beta)} A_{z,n-k}(1+r) + \hat{p}_2^{(\beta)} A_{22}(1+r) + l_2 \tag{9}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (6) και (8) θα έχουμε:

$$\hat{p}_z^{(\beta)} - \hat{p}_z^{(\alpha)} = \left(\hat{p}_m^{(\beta)} - \hat{p}_m^{(\alpha)}\right) A_{mz}(1+r) + \left(\hat{p}_z^{(\beta)} - \hat{p}_z^{(\alpha)}\right) A_{zz}(1+r) \Leftrightarrow$$

$$\left(\hat{p}_z^{(\beta)} - \hat{p}_z^{(\alpha)}\right)\left[I_z - (1+r) A_{zz}\right] = \left(\hat{p}_m^{(\beta)} - \hat{p}_m^{(\alpha)}\right) A_{mz}(1+r) \tag{10}$$

Προφανώς η τετραγωνική υπομήτρα $\left[I_z-(1+r)A_{zz}\right], r\in\left[0,\mathrm{R}^*\right)$, είναι μια μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα.[49] Έτσι ισχύει:

$$\left[I_z-(1+r)A_{zz}\right]^{-1}\succ 0 \tag{11}$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά τη σχέση (10) με την αντίστροφη της μήτρας $\left[I_z-(1+r)A_{zz}\right]$ θα έχουμε:

$$\hat{p}_z^{(\beta)}-\hat{p}_z^{(\alpha)}=\left(\hat{p}_m^{(\beta)}-\hat{p}_m^{(\alpha)}\right)A_{mz}(1+r)\left[I_z-(1+r)A_{zz}\right]^{-1} \tag{12}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (7) και (9) θα έχουμε:

$$\hat{p}_2^{(\beta)}-\hat{p}_2^{(\alpha)}=\left[\left(\hat{p}_m^{(\beta)}-\hat{p}_m^{(\alpha)}\right)A_{m,n-k}+\left(\hat{p}_z^{(\beta)}-\hat{p}_z^{(\alpha)}\right)A_{z,n-k}+\left(\hat{p}_2^{(\beta)}-\hat{p}_2^{(\alpha)}\right)A_{22}\right](1+r)\Leftrightarrow$$

$$\left(\hat{p}_2^{(\beta)}-\hat{p}_2^{(\alpha)}\right)\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]=\left[\left(\hat{p}_m^{(\beta)}-\hat{p}_m^{(\alpha)}\right)A_{m,n-k}+\left(\hat{p}_z^{(\beta)}-\hat{p}_z^{(\alpha)}\right)A_{z,n-k}\right](1+r) \tag{13}$$

Η τετραγωνική υπομήτρα $\left[I_2-(1+r)A_{22}\right], r\in\left[0,\mathrm{R}^*\right)$, είναι μια μη ιδιάζουσα, μη

---

[49] Η υπομήτρα A_{zz} της μη διασπώμενης μήτρας $A_{11}^{(\cdot)}$ είναι μη διασπώμενη. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η μήτρα $\left[I_z-(1+r)A_{zz}\right]$, $r\in\left[0,R^*\right)$, είναι μια μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα, δηλαδή ότι $r\prec\dfrac{1-\lambda_m^{A_{zz}}}{\lambda_m^{A_{zz}}}=R^{A_{zz}}$, όπου $\lambda_m^{A_{zz}}$ η μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A_{zz}. Γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\lambda_m^{A_{zz}}\prec\lambda_m^{A_{11}^{(\cdot)}}$$

και

$$\lambda_m^{A_{11}^{(\cdot)}}\le\lambda_m^{A^{(\cdot)}}$$

Βλ. Debreu and Herstein [1953, σσ. 599 και 600]. Έτσι, θα έχουμε:

$$r\prec R^*=\frac{1-\lambda_m^{A^{(\cdot)}}}{\lambda_m^{A^{(\cdot)}}}\le\frac{1-\lambda_m^{A_{11}^{(\cdot)}}}{\lambda_m^{A_{11}^{(\cdot)}}}\prec\frac{1-\lambda_m^{A_{zz}}}{\lambda_m^{A_{zz}}}$$

διασπώμενη Μ-μήτρα[50]. Έτσι, ισχύει:

$$\left[I_2-\left(1+r\right)A_{22}\right]^{-1}\succ 0 \tag{14}$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά τη σχέση (13) με την αντίστροφη της μήτρας $\left[I_2-(1+r)A_{22}\right]$ θα έχουμε:

$$\hat{p}_2^{(\beta)}-\hat{p}_2^{(\alpha)}=\left[\left(\hat{p}_m^{(\beta)}-\hat{p}_m^{(\alpha)}\right)A_{m,n-k}+\left(\hat{p}_z^{(\beta)}-\hat{p}_z^{(\alpha)}\right)A_{z,n-k}\right]\left(1+r\right)\left[I_2-\left(1+r\right)A_{22}\right]^{-1} \tag{15}$$

Από την υπόθεσή μας, σύμφωνα με την οποία ισχύει:

- είτε $\hat{p}_m^{(\beta)}\geq\hat{p}_m^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_m^{(\beta)}\leq\hat{p}_m^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_m^{(\alpha)}=\hat{p}_m^{(\beta)}$[51]

---

[50] Η υπομήτρα A_{22} της διασπώμενης μήτρας $A^{(\cdot)}$ είναι μη διασπώμενη. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η μήτρα $\left[I_2-\left(1+r\right)A_{22}\right]$, $r\in\left[0,R^{*}\right)$, είναι μια μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα, δηλαδή ότι $r\prec\frac{1-\lambda_m^{A_{22}}}{\lambda_m^{A_{22}}}=R^{A_{22}}$, όπου $\lambda_m^{A_{22}}$ η μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A_{22}. Πράγματι, για την υπομήτρα A_{22} ισχύει: $\lambda_m^{A_{22}}\leq\lambda_m^{A^{(\cdot)}}$. Βλ. Debreu and Herstein [1953, σελ. 600]. Έτσι, θα έχουμε:

$$r\prec R^{*}=\frac{1-\lambda_m^{A^{(\cdot)}}}{\lambda_m^{A^{(\cdot)}}}\leq\frac{1-\lambda_m^{A_{22}}}{\lambda_m^{A_{22}}}$$

[51] Εφόσον έχουμε ορίσει $\hat{p}^{(\cdot)}=\left(\hat{p}_m^{(\cdot)},\hat{p}_z^{(\cdot)},\hat{p}_2^{(\cdot)}\right)$, οι συνθήκες:

$$\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T\geq\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T,\text{ με }\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T\neq\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T,\ j=1,2,\ldots,m$$

$$\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T\leq\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T,\text{ με }\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T\neq\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T,\ j=1,2,\ldots,m$$

και

$$\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T=\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T,\ j=1,2,\ldots,m,$$

και τις σχέσεις (11), (12), (14) και (15) θα έχουμε αντίστοιχα:

- είτε:

$$\hat{p}_z^{(\beta)} \succ \hat{p}_z^{(\alpha)}$$

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \succ \hat{p}_2^{(\alpha)}$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} \geq \hat{p}^{(\alpha)}$$

- είτε:

$$\hat{p}_z^{(\beta)} \prec \hat{p}_z^{(\alpha)}$$

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \prec \hat{p}_2^{(\alpha)}$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}$$

- είτε:

$$\hat{p}_z^{(\alpha)} = \hat{p}_z^{(\beta)}$$

$$\hat{p}_2^{(\alpha)} = \hat{p}_2^{(\beta)}$$

και

είναι αντίστοιχα ισοδύναμες με τις συνθήκες:

$$\hat{p}_m^{(\beta)} \geq \hat{p}_m^{(\alpha)}$$

$$\hat{p}_m^{(\beta)} \leq \hat{p}_m^{(\alpha)}$$

και

$$\hat{p}_m^{(\alpha)} = \hat{p}_m^{(\beta)}$$

$$\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$$

Πόρισμα 2. Αν οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{B}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{E}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{H}$, τότε σε κάθε τιμή r, $r \in \left[0, R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους θα ισχύει:

- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \succ \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\beta)} \prec \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$

Απόδειξη: Στην προκείμενη περίπτωση θα έχουμε:

$m = 1$

και

$z = k - 1 \geq 0$

Έτσι, το διάνυσμα $\left(\hat{p}_m^{(\beta)} - \hat{p}_m^{(\alpha)}\right)$, τάξης $1 \times m$, εκφυλίζεται σε βαθμωτό. Επίσης, οι μήτρες A_{mz} και $A_{m,n-k}$ εκφυλίζονται σε διανύσματα-γραμμές, τάξης $1 \times (k-1)$ και $1 \times (n-k)$ αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, από τις σχέσεις (11), (12), (14) και (15) προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}_m^{(\beta)} \succ \hat{p}_m^{(\alpha)}$$

$$\hat{p}_z^{(\beta)} \succ \hat{p}_z^{(\alpha)}$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \succ \hat{p}_2^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}_m^{(\beta)} \prec \hat{p}_m^{(\alpha)}$$

$$\hat{p}_z^{(\beta)} \prec \hat{p}_z^{(\alpha)}$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \prec \hat{p}_2^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}_m^{(\alpha)} = \hat{p}_m^{(\beta)}$$

$$\hat{p}_z^{(\alpha)} = \hat{p}_z^{(\beta)}$$

και

$$\hat{p}_2^{(\alpha)} = \hat{p}_2^{(\beta)}$$ [52]

Πρόταση 3. Έστω δύο διασπώμενες τεχνικές παραγωγής (α) και (β) που διαφέρουν στις διαδικασίες παραγωγές των m πρώτων μη βασικών εμπορευμάτων $(m \leq n-k)$. Αν σε μια ορισμένη τιμή r, $r \in \left[0, R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους ισχύει:

- είτε $\hat{p}_2^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T \geq \hat{p}_2^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m,$ [53]
- είτε $\hat{p}_2^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T \leq \hat{p}_2^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m,$ [54]

---

[52] Βλέπε επίσης Πόρισμα (2.α.1).

[53] Με $\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T \neq \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m$

[54] Με $\hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T \neq \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m$

- είτε $\hat{p}_2^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T = \hat{p}_2^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,m$,

τότε στην τιμή r του ποσοστού κέρδους θα έχουμε αντίστοιχα:

$$\hat{p}_1^{(\alpha)} = \hat{p}_1^{(\beta)} = \hat{p}_1$$

και

- είτε $\hat{p}_2^{(\beta)} \geq \hat{p}_2^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_m^{(\beta)} \leq \hat{p}_m^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_2^{(\alpha)} = \hat{p}_2^{(\beta)}$

Απόδειξη: Εφόσον οι συνθήκες παραγωγής των βασικών εμπορευμάτων είναι ανεξάρτητες από τις συνθήκες παραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων, στο διάστημα $\left[0, R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι αδιάφορες ως προς την μεταβολή των διαδικασιών παραγωγής ορισμένων μη βασικών εμπορευμάτων. Έτσι ισχύει:

$$\hat{p}_1^{(\alpha)} = \hat{p}_1^{(\beta)} = \hat{p}_1 \tag{16}$$

Αν ισχύει $m = n - k$, η Πρόταση (3) είναι ταυτολογική. Έστω z, με $z = (n-k) - m \succ 0$, ο αριθμός των μη βασικών εμπορευμάτων των οποίων οι μέθοδοι παραγωγής είναι αδιαφοροποίητες στις τεχνικές παραγωγής (α) και (β).

Υποθέτουμε ότι οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ βρίσκονται στην κανονική τους μορφή. Από την υπόθεσή μας ότι οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν μόνο ως προς τις μεθόδους παραγωγής των m πρώτων μη βασικών εμπορευμάτων συμπεραίνουμε, ότι οι μέθοδοι παραγωγής των z τελευταίων μη βασικών εμπορευμάτων είναι ίδιες. Επομένως, οι z τελευταίες στήλες των υπομητρών $\begin{bmatrix} A_{12}^{(\alpha)} \\ A_{22}^{(\alpha)} \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} A_{12}^{(\beta)} \\ A_{22}^{(\beta)} \end{bmatrix}$, καθώς επίσης οι z τελευταίες συνιστώσες των υποδιανυσμάτων $l_2^{(\alpha)}$ και $l_2^{(\beta)}$ είναι ίσες. Επιπλέον, θα ισχύει:

$$A_{11}^{(\alpha)} = A_{11}^{(\beta)}$$

και

$$l_1^{(\alpha)} = l_1^{(\beta)}$$

Έτσι, με δεδομένη την κανονική μορφή των μητρών $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ μπορούμε να τις διαμερίσουμε περαιτέρω ως εξής:

$$A^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{km}^{(\alpha)} & A_{kz} \\ 0 & A_{mm}^{(\alpha)} & A_{mz} \\ & A_{zm}^{(\alpha)} & A_{zz} \end{bmatrix}$$

και

$$A^{(\beta)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{km}^{(\beta)} & A_{kz} \\ 0 & A_{mm}^{(\beta)} & A_{mz} \\ & A_{zm}^{(\beta)} & A_{zz} \end{bmatrix}$$

όπου με A_{kj} ή $A_{kj}^{(.)}, j = m, z$, συμβολίζουμε μια επιμέρους υπομήτρα, τάξης $k \times j$, της υπομήτρας $A_{12}^{(.)}$ της τεχνικής $(.)$ και με A_{ij} ή $A_{ij}^{(.)}, i, j = m, z$, συμβολίζουμε μια επιμέρους υπομήτρα, τάξης $i \times j$, της υπομήτρας $A_{22}^{(.)}$ της τεχνικής $(.)$, $(.) = (\alpha)$, (β).

Αντίστοιχα, θα διαμερίσουμε τα διανύσματα άμεσης εργασίας $l^{(\alpha)}$ και $l^{(\beta)}$ ως εξής:

$$l^{(\alpha)} = \left(l_1, l_m^{(\alpha)}, l_z\right)$$

και

$$l^{(\beta)} = \left(l_1, l_m^{(\beta)}, l_z\right)$$

όπου με l_j ή $l_j^{(\cdot)}, j = m, z$, συμβολίζουμε το επιμέρους υποδιάνυσμα, τάξης $1 \times j$, του υποδιανύσματος άμεσης εργασίας $l_2^{(\cdot)}$ της τεχνικής $(\cdot)$, $(\cdot) = (\alpha)$, (β).

Ανάλογα με τον διαμερισμό των διανυσμάτων $l^{(\alpha)}$ και $l^{(\beta)}$ θα διαμερίσουμε τα διανύσματα τιμών $\hat{p}^{(\alpha)}$ και $\hat{p}^{(\beta)}$ ως εξής:

$$\hat{p}^{(\alpha)} = \left(\hat{p}_1^{(\alpha)}, \hat{p}_m^{(\alpha)}, \hat{p}_z^{(\alpha)}\right)$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)} = \left(\hat{p}_1^{(\beta)}, \hat{p}_m^{(\beta)}, \hat{p}_z^{(\beta)}\right)$$

όπου με $\hat{p}_j^{(\cdot)}, j = m, z$, συμβολίζουμε το υποδιάνυσμα τιμών, τάξης $1 \times j$, των j μη βασικών εμπορευμάτων που παράγει η τεχνική παραγωγής $(\cdot)$, $(\cdot) = (\alpha)$, (β).

Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, θα διαμερίσουμε τα συστήματα προσδιορισμού των τιμών των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\hat{p}_1^{(\alpha)} = \hat{p}_1^{(\alpha)} A_{11}(1+r) + l_1$$

$$\hat{p}_m^{(\alpha)} = \hat{p}_1^{(\alpha)} A_{km}^{(\alpha)}(1+r) + \hat{p}_m^{(\alpha)} A_{mm}^{(\alpha)}(1+r) + \hat{p}_z\, A_{zm}^{(\alpha)}(1+r) + l_m^{(\alpha)}$$

$$\hat{p}_z^{(\alpha)} = \hat{p}_1^{(\alpha)} A_{kz}(1+r) + \hat{p}_m^{(\alpha)} A_{mz}(1+r) + \hat{p}_z^{(\alpha)}\, A_{zz}(1+r) + l_z \tag{17}$$

και

$$\hat{p}_1^{(\beta)} = \hat{p}_1^{(\beta)} A_{11}(1+r) + l_1$$

$$\hat{p}_m^{(\beta)} = \hat{p}_1^{(\beta)} A_{km}^{(\beta)}(1+r) + \hat{p}_m^{(\beta)} A_{mm}^{(\beta)}(1+r) + \hat{p}_z^{(\beta)} A_{zm}^{(\beta)}(1+r) + l_m^{(\beta)}$$

$$\hat{p}_z^{(\beta)} = \hat{p}_1^{(\beta)} A_{kz}(1+r) + \hat{p}_m^{(\beta)} A_{mz}(1+r) + \hat{p}_z^{(\beta)} A_{zz}(1+r) + l_z \tag{18}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (17) και (18) έχουμε:

$$\hat{p}_z^{(\beta)} - \hat{p}_z^{(\alpha)} = \left(\hat{p}_1^{(\beta)} - \hat{p}_1^{(\alpha)}\right) A_{kz}(1+r) + \left(\hat{p}_m^{(\beta)} - \hat{p}_m^{(\alpha)}\right) A_{mz}(1+r) + \left(\hat{p}_z^{(\beta)} - \hat{p}_z^{(\alpha)}\right) A_{zz}(1+r)$$

Με βάση τη σχέση (16), η ανωτέρω σχέση γράφεται ως εξής:

$$p_z^{(\beta)} - p_z^{(\alpha)} = \left(p_m^{(\beta)} - p_m^{(\alpha)}\right) A_{mz}(1+r) + \left(p_z^{(\beta)} - p_z^{(\alpha)}\right) A_{zz}(1+r) \Leftrightarrow$$

$$\left(p_z^{(\beta)} - p_z^{(\alpha)}\right)\left[I_z - (1+r)A_{zz}\right] = \left(p_m^{(\beta)} - p_m^{(\alpha)}\right) A_{mz}(1+r) \tag{19}$$

Η τετραγωνική υπομήτρα $\left[I_z - (1+r)A_{zz}\right]$, $r \in \left[0, R^*\right)$ είναι μια μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη μήτρα.[55] Έτσι, ισχύει:

---

[55] Η υπομήτρα A_{zz} της μη διασπώμενης μήτρας $A_{22}^{(\cdot)}$ είναι μη διασπώμενη. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η μήτρα $\left[I_z - (1+r)A_{zz}\right]$, $r \in \left[0, R^*\right)$, είναι μια μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα, δηλαδή ότι $r \prec \dfrac{1-\lambda_m^{A_{zz}}}{\lambda_m^{A_{zz}}} = R^{A_{zz}}$, όπου $\lambda_m^{A_{zz}}$ η μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A_{zz}. Γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\lambda_m^{A_{zz}} \prec \lambda_m^{A_{22}^{(\cdot)}}$$

και

$$\lambda_m^{A_{22}^{(\cdot)}} \leq \lambda_m^{A^{(\cdot)}}$$

Βλ. Debreu and Herstein [1953, σσ. 599 και 600]. Έτσι, θα έχουμε:

$$\left[I_z-(1+r)A_{zz}\right]^{-1}\succ 0 \tag{20}$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά τη σχέση (19) με την αντίστροφη της μήτρας $\left[I_z-(1+r)A_{zz}\right]$ θα έχουμε:

$$\hat{p}_z^{(\beta)}-\hat{p}_z^{(\alpha)}=\left(\hat{p}_m^{(\beta)}-\hat{p}_m^{(\alpha)}\right)A_{mz}(1+r)\left[I_z-(1+r)A_{zz}\right]^{-1} \tag{21}$$

Από την υπόθεσή μας, σύμφωνα με την οποία ισχύει:

- είτε $\hat{p}_m^{(\beta)}\geq\hat{p}_m^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_m^{(\beta)}\leq\hat{p}_m^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_m^{(\alpha)}=\hat{p}_m^{(\beta)}$[56]

$$r\prec R^{*}=\frac{1-\lambda_m^{A^{(\cdot)}}}{\lambda_m^{A^{(\cdot)}}}\leq\frac{1-\lambda_m^{A_{22}^{(\cdot)}}}{\lambda_m^{A_{22}^{(\cdot)}}}\prec\frac{1-\lambda_m^{A_{zz}}}{\lambda_m^{A_{zz}}}$$

[56] Εφόσον έχουμε ορίσει $\hat{p}^{(\cdot)}=\left(\hat{p}_1^{(\cdot)},\hat{p}_m^{(\cdot)},\hat{p}_z^{(\cdot)}\right)$, οι συνθήκες:

$$\hat{p}_2^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T\geq\hat{p}_2^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T,\ \text{με}\ \hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T\neq\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T,\ j=1,2,\dots,m$$

$$\hat{p}_2^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T\leq\hat{p}_2^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T,\ \text{με}\ \hat{p}^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T\neq\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T,\ j=1,2,\dots,m$$

και

$$\hat{p}_2^{(\alpha)}\left(e_j^{n-k}\right)^T=\hat{p}_2^{(\beta)}\left(e_j^{n-k}\right)^T,\ j=1,2,\dots,m,$$

είναι αντίστοιχα ισοδύναμες με τις συνθήκες:

$$\hat{p}_m^{(\beta)}\geq\hat{p}_m^{(\alpha)}$$

$$\hat{p}_m^{(\beta)}\leq\hat{p}_m^{(\alpha)}$$

και

και τις σχέσεις (20) και (21) θα έχουμε αντίστοιχα:

- είτε:

$$\hat{p}_z^{(\beta)} \succ \hat{p}_z^{(\alpha)}$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \geq \hat{p}_2^{(\alpha)}$$

- είτε:

$$\hat{p}_z^{(\beta)} \prec \hat{p}_z^{(\alpha)}$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \leq p_2^{(\alpha)}$$

- είτε:

$$\hat{p}_z^{(\alpha)} = \hat{p}_z^{(\beta)}$$

και

$$\hat{p}_2^{(\alpha)} = \hat{p}_2^{(\beta)}$$

Πόρισμα 3. Αν οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{LT}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{Z}$ είτε στην κατηγορία Θ είτε στην κατηγορία $\mathcal{J}$, τότε σε κάθε τιμή r, $r \in \left[0, R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους θα ισχύει:

$$\hat{p}_1^{(\alpha)} = \hat{p}_1^{(\beta)} = \hat{p}_1$$

και

- είτε $\hat{p}_2^{(\beta)} \succ \hat{p}_2^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_2^{(\beta)} \prec \hat{p}_2^{(\alpha)}$
- είτε $\hat{p}_2^{(\alpha)} = \hat{p}_2^{(\beta)}$

$$\hat{p}_m^{(\alpha)} = \hat{p}_m^{(\beta)}$$

Απόδειξη: Στην προκείμενη περίπτωση θα έχουμε:

$$m = 1$$

και

$$z = (n-k) - 1 \geq 0$$

Έτσι, το διάνυσμα $\left(\hat{p}_m^{(\beta)} - \hat{p}_m^{(\alpha)}\right)$, τάξης $1 \times m$, εκφυλίζεται σε βαθμωτό. Επίσης, η μήτρα A_{mz} εκφυλίζεται σε διάνυσμα-γραμμή, τάξης $1 \times (n-k-1)$ αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, από τις σχέσεις (20) και (21) προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}_m^{(\beta)} \succ \hat{p}_m^{(\alpha)}$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \succ \hat{p}_2^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}_m^{(\beta)} \prec \hat{p}_m^{(\alpha)}$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \prec \hat{p}_2^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\hat{p}_m^{(\alpha)} = \hat{p}_m^{(\beta)}$$

και

$$\hat{p}_2^{(\alpha)} = \hat{p}_2^{(\beta)}$$

Προφανώς, σε κάθε περίπτωση θα ισχύει:

$$\hat{p}_1^{(\alpha)} = \hat{p}_1^{(\beta)} = \hat{p}_1$$ [57]

---

[57] Βλέπε επίσης Πόρισμα (2.α.2).

3. Η ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΤΗΝ ΚΟΙΝΗ ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ R ΤΟΥ ΠΟΣΟΣΤΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ.[58, 59]

Λήμμα 1. Αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

$$\mathcal{T}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{LT} \text{ και } \Theta,$$

θα ισχύει:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

Απόδειξη: Θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

I. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$.

Από τη συνθήκη $\mathcal{T}_2$ ή $\mathcal{D}_2$ έχουμε:

$$R^{A_{11}^{(\alpha)}} = R^{(\alpha)} \prec R^{A_{22}^{(\alpha)}} \tag{1}$$

και

$$R^{A_{11}^{(\beta)}} = R^{(\beta)} \prec R^{A_{22}^{(\beta)}} \tag{2}$$

Επομένως, από τις ανωτέρω σχέσεις, καθώς και τις σχέσεις (2.a.36) και (2.a.43) συνεπάγεται:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

---

[58] Προφανώς, αν η μέγιστη τιμή R του ποσοστού κέρδους μιας τεχνικής, έστω της (α), ήταν μεγαλύτερη της μέγιστης τιμής $R^{(\beta)}$ του ποσοστού κέρδους της άλλης τεχνικής, δηλαδή της (β), τότε η σύγκριση των ονομαστικών τιμών στην τιμή R του ποσοστού κέρδους θα στερείτο οποιουδήποτε νοήματος, εφόσον στο διάστημα τιμών $\left[R^{(\beta)}, R\right]$ του ποσοστού κέρδους οι μόνες οικονομικά ισχύουσες τιμές είναι οι τιμές της τεχνικής (α).

[59] Θεωρούμε ότι στην ενιαία μέγιστη τιμή R του ποσοστού κέρδους των τεχνικών (α) και (β) οι τιμές είναι τυποποιημένες με *κάθε τυποποίηση των τιμών* που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων, ανεξάρτητα αν παράγονται με την τεχνική (α) ή (β).

II. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{E}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{LT}$.

Από τη συνθήκη $\mathcal{E}_2$ ή τη συνθήκη $\mathcal{LT}_2$ έχουμε:

$$R^{A_{22}^{(\alpha)}} = R^{(\alpha)} \prec R^{A_{11}^{(\alpha)}} \tag{3}$$

και

$$R^{A_{22}^{(\beta)}} = R^{(\beta)} \prec R^{A_{11}^{(\beta)}} \tag{4}$$

Επομένως, από τις ανωτέρω σχέσεις και τις σχέσεις (2.a.29) και (2.a.37) συνεπάγεται:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

III. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία Θ.

Από τη συνθήκη Θ_2 έχουμε:

$$R^{A_{11}^{(\alpha)}} = R^{A_{22}^{(\alpha)}} = R^{(\alpha)} \tag{5}$$

Επομένως, από την ανωτέρω σχέση και τις σχέσεις (2.a.36) και (2.a.37) συνεπάγεται:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

Πρόταση 1. Αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$[60] είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$, *για κάθε τυποποίηση των τιμών* στην ενιαία μέγιστη τιμή R του ποσοστού κέρδους[61] υπάρχει ένας αριθμός λ, όπου $\lambda \in \Re$ και $\lambda \succ 0$, τέτοιος ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:[62]

60 Εφόσον ισχύει:

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} \neq 0$$

61 Βλ. Λήμμα (1).

62 Με $\tilde{p}_1^{(\alpha)}$ και $\tilde{p}_1^{(\beta)}$ συμβολίζουμε τα τυποποιημένα, οικονομικώς σημαντικά, θετικά διανύσματα των τιμών των βασικών εμπορευμάτων που παράγονται από τις τεχνικές παραγωγής (α) και (β) αντίστοιχα, όταν η τιμή του ποσοστού κέρδους είναι ίση με R. Ομοίως, με $\tilde{p}_2^{(\alpha)}$ και $\tilde{p}_2^{(\beta)}$ συμβολίζουμε τα τυποποιημένα, οικονομικώς σημαντικά, θετικά διανύσματα των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων που παράγονται από τις τεχνικές παραγωγής (α) και (β) αντίστοιχα, όταν η τιμή του ποσοστού κέρδους είναι ίση με R.

$$\widetilde{p}_1^{(\beta)} - \widetilde{p}_1^{(\alpha)} = (\lambda - 1)\widetilde{p}_1^{(\alpha)}, \text{ με } \lambda \in \Re \text{ και } \lambda \succ 0 \tag{6}$$

$$\widetilde{p}_2^{(\beta)} - \widetilde{p}_2^{(\alpha)} = (\lambda - 1)\widetilde{p}_2^{(\alpha)} + \left[\widetilde{p}_2^{(\beta)} - \left(\widetilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\alpha)} + \widetilde{p}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} \tag{7}$$

$$\widetilde{p}_2^{(\beta)} - \widetilde{p}_2^{(\alpha)} = \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right)\widetilde{p}_2^{(\beta)} + \left[\left(\widetilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\beta)} + \widetilde{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \widetilde{p}_2^{(\alpha)}\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} \tag{8}$$

Απόδειξη: Κατ' αρχήν θα εξετάσουμε τα συστήματα προσδιορισμού των τιμών των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) στην μέγιστη τιμή R του ποσοστού κέρδους, όταν οι αντίστοιχες μήτρες τεχνικών συντελεστών $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$. Γενικά, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους τα συστήματα προσδιορισμού των τιμών των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) έχουν ως εξής:

$$p^{(\alpha)} = p^{(\alpha)} A^{(\alpha)}(1+r) + wl^{(\alpha)} \tag{9}$$

και

$$p^{(\beta)} = p^{(\beta)} A^{(\beta)}(1+r) + wl^{(\beta)} \tag{10}$$

Προφανώς, στην ενιαία μέγιστη τιμή R του ποσοστού κέρδους των τεχνικών (α) και (β) η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w είναι ίση με το μηδέν $(w = 0)$.[63]

---

[63] Στην αντίθετη περίπτωση, που στην μέγιστη τιμή R του ποσοστού κέρδους αντιστοιχούσε μια θετική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου $(w \succ 0)$, θα είχαμε:

$$p^{(\alpha)}\left[I - (1+R)A^{(\alpha)}\right] = wl^{(\alpha)}$$

και

$$p^{(\beta)}\left[I - (1+R)A^{(\beta)}\right] = wl^{(\beta)},$$

με

$$rank\left[I - (1+R)A^{(\alpha)}\right] = n - 1 \prec rank\left[I - (1+R)A^{(\alpha)},\ wl^{(\alpha)}\right] = n$$

και

$$rank\left[I - (1+R)A^{(\beta)}\right] = n - 1 \prec rank\left[I - (1+R)A^{(\beta)},\ wl^{(\beta)}\right] = n$$

Έτσι, αν στα συστήματα προσδιορισμού των τιμών (9) και (10) αντικαταστήσουμε την τιμή r του ποσοστού κέρδους με την μέγιστη τιμή του R και θέσουμε την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου W ίση με το μηδέν, τότε τα συστήματα προσδιορισμού των τιμών (9) και (10) λαμβάνουν αντίστοιχα την ακόλουθη μορφή:

$$\mathrm{p}^{(\alpha)} = \mathrm{p}^{(\alpha)} A^{(\alpha)} (1+R) \tag{11}$$

και

$$\mathrm{p}^{(\beta)} = \mathrm{p}^{(\beta)} A^{(\beta)} (1+R)^{64} \tag{12}$$

Τυποποιώντας τα διανύσματα $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ και $\mathrm{p}^{(\beta)}$ με μια τυχαία εξίσωση τυποποίησης των τιμών λαμβάνουμε τα διανύσματα των τυποποιημένων τιμών $\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}$ και $\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}$ αντίστοιχα, τα οποία ικανοποιούν τα ακόλουθα συστήματα προσδιορισμού των τυποποιημένων τιμών:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} = \tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} A^{(\alpha)} (1+R) \tag{13}$$

και

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} = \tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} A^{(\beta)} (1+R)^{65} \tag{14}$$

αντίστοιχα. Επομένως, τα συστήματα προσδιορισμού των τιμών (9) και (10) των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) αντίστοιχα θα ήταν *ασυμβίβαστα*.

[64] Γενικά, με $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ και $\mathrm{p}^{(\beta)}$ συμβολίζουμε τα οικονομικά σημαντικά διανύσματα των τιμών των εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές παραγωγής (α) και (β) αντίστοιχα, όταν η τιμή του ποσοστού κέρδους είναι ίση με R. Προφανώς, τα διανύσματα των τιμών $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ και $\mathrm{p}^{(\beta)}$, που προκύπτουν από την επίλυση των συστημάτων προσδιορισμού των τιμών (11) και (12), είναι τα ημιθετικά ιδιοδιανύσματα των μητρών $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ αντίστοιχα, που συνδέονται με την κοινή μέγιστη ιδιοτιμή τους, εφόσον στην αντίθετη περίπτωση, κατά την οποία από την επίλυση των συστημάτων (11) και (12) λαμβάναμε την τετριμμένη λύση:

$$p^{(\alpha)} = p^{(\beta)} = 0,$$

οι τιμές των εμπορευμάτων δεν θα είχαν οικονομικό περιεχόμενο. Επομένως, η περίπτωση αυτή απορρίπτεται.

[65] Γενικά, με $\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}$ και $\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}$ συμβολίζουμε τα τυποποιημένα, οικονομικά σημαντικά διανύσματα των τιμών των εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές παραγωγής (α) και (β) αντίστοιχα, όταν η τιμή

Αν, αφού λάβουμε υπόψη τις σχέσεις (2.a.36) και (2.a.43), διαμερίσουμε τα συστήματα (13) και (14), προκύπτουν αντίστοιχα τα ακόλουθα επιμέρους υποσυστήματα προσδιορισμού των τιμών των βασικών εμπορευμάτων:

$$\tilde{p}_1^{(\alpha)} = \tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{11}(1+R) \tag{15}$$

και

$$\tilde{p}_1^{(\beta)} = \tilde{p}_1^{(\beta)} A_{11}(1+R) \tag{16}$$

Οι δυνατές μορφές των διανυσμάτων $\tilde{p}_1^{(\alpha)}$ και $\tilde{p}_1^{(\beta)}$ των τιμών των βασικών εμπορευμάτων, που αποτελούν λύσεις των συστημάτων (15) και (16), είναι οι εξής:

- Η *μη τετριμμένη* λύση:

  $$\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} = \lambda \tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)}, \text{ με } \tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} \succ 0,\ \lambda \in \Re \text{ και } \lambda \succ 0,$$

  όπου το διάνυσμα $\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)}$ (αντίστοιχα: το $\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}$) των τιμών των βασικών εμπορευμάτων είναι το θετικό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{11} που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{11}}$ ή, ισοδύναμα, με την τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους και

- Η *τετριμμένη* λύση:

  $$\tilde{p}_1^{(\alpha)} = \tilde{p}_1^{(\beta)} = \tilde{p}_1 = 0$$

Αντίστοιχα, θα έχουμε τα ακόλουθα επιμέρους υποσυστήματα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων:

$$\tilde{p}_2^{(\alpha)} = \tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\alpha)}(1+R) + \tilde{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\alpha)}(1+R) \tag{17}$$

και

του ποσοστού κέρδους είναι ίση με R. Προφανώς, τα διανύσματα των τιμών $\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}$ και $\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}$, που προκύπτουν από την επίλυση των συστημάτων προσδιορισμού των τιμών (13) και (14), είναι τα ημιθετικά ιδιοδιανύσματα των μητρών $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ αντίστοιχα, που συνδέονται με την κοινή μέγιστη ιδιοτιμή τους, εφόσον στην αντίθετη περίπτωση, κατά την οποία από την επίλυση των συστημάτων (13) και (14) λαμβάναμε την τετριμμένη λύση:

$$\tilde{p}^{(\alpha)} = \tilde{p}^{(\beta)} = 0,$$

οι τιμές των εμπορευμάτων δεν θα είχαν οικονομικό περιεχόμενο. Επομένως, η περίπτωση αυτή απορρίπτεται.

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} = \tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)} (1+R) + \tilde{p}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\beta)} (1+R) \tag{18}$$

Επιλύοντας το σύστημα (17) ως προς το διάνυσμα τιμών $\tilde{p}_2^{(\alpha)}$ θα έχουμε:

$$\tilde{p}_2^{(\alpha)} = \tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\alpha)} (1+R) + \tilde{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\alpha)} (1+R) \Rightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\alpha)} \left[I_2 - (1+R) A_{22}^{(\alpha)} \right] = \tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\alpha)} (1+R) \tag{19}$$

Η μήτρα $\left[I_2 - (1+R) A_{22}^{(\alpha)} \right]$ είναι μια μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα.[66] Επομένως, θα έχουμε:

$$\left[I_2 - (1+R) A_{22}^{(\alpha)} \right]^{-1} \succ 0 \tag{20}$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά τη σχέση (19) με την αντίστροφη της μήτρας $\left[I_2 - (1+R) A_{22}^{(\alpha)} \right]$ θα έχουμε:

$$\tilde{p}_2^{(\alpha)} = \tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\alpha)} (1+R) \left[I_2 - (1+R) A_{22}^{(\alpha)} \right]^{-1} \tag{21}$$

Ομοίως, επιλύοντας το σύστημα (18) ως προς το διάνυσμα τιμών $\tilde{p}_2^{(\beta)}$ θα έχουμε:

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} = \tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)} (1+R) + \tilde{p}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\beta)} (1+R) \Rightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} \left[I_2 - (1+R) A_{22}^{(\beta)} \right] = \tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)} (1+R) \tag{22}$$

Η μήτρα $\left[I_2 - (1+R) A_{22}^{(\beta)} \right]$ είναι μια μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα.[67] Επομένως, θα έχουμε:

$$\left[I_2 - (1+R) A_{22}^{(\beta)} \right]^{-1} \succ 0 \tag{23}$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά τη σχέση (22) με την αντίστροφη της μήτρας $\left[I_2 - (1+R) A_{22}^{(\beta)} \right]$ θα έχουμε:

---

[66] Βλέπε τη σχέση (1).

[67] Βλέπε τη σχέση (2).

$$\widetilde{p}_2^{(\beta)} = \widetilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)} (1+R) \left[I_2 - (1+R) A_{22}^{(\beta)} \right]^{-1} \tag{24}$$

Αν στις σχέσεις (21) και (24) αντικαταστήσουμε την *τετριμμένη* λύση του διανύσματος των τιμών των βασικών εμπορευμάτων, θα έχουμε:

$$\widetilde{p}_2^{(\alpha)} = \widetilde{p}_2^{(\beta)} = 0$$

Δηλαδή τελικά θα ισχύει:

$$\widetilde{p}^{(\alpha)} = \widetilde{p}^{(\beta)} = 0 \text{ (άτοπο).}$$

Αντίθετα, αν στις σχέσεις (21) και (24) αντικαταστήσουμε την *μη τετριμμένη* λύση του διανύσματος των τιμών των βασικών εμπορευμάτων, προκύπτει η ακόλουθη οικονομικά σημαντική λύση:

$$\widetilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} = \lambda \widetilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)}, \text{ με } \widetilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} \succ 0,\ \lambda \in \Re \text{ και } \lambda \succ 0$$ [68]

$$\widetilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} = \widetilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\alpha)} (1+R) \left[I_2 - (1+R) A_{22}^{(\alpha)} \right]^{-1} \succ 0 \tag{21a}$$

και

$$\widetilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} = \widetilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)} (1+R) \left[I_2 - (1+R) A_{22}^{(\beta)} \right]^{-1} \succ 0 \tag{24a}$$

Προφανώς, η ανωτέρω οικονομικά σημαντική λύση είναι μοναδική.[69] Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (13) και (14) έχουμε:

---

[68] Προφανώς, η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση (6).

[69] Με βάση την ανωτέρω μοναδική, οικονομικά σημαντική λύση των συστημάτων προσδιορισμού των τιμών (13) και (14), τα υποσυστήματα προσδιορισμού των τιμών (15) και (16), καθώς και (17) και (18) των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων αντίστοιχα λαμβάνουν την ακόλουθη, οικονομικά σημαντική μορφή:

$$\widetilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} = \widetilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} A_{11} (1+R) \tag{15a}$$

και

$$\widetilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} = \widetilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} A_{11} (1+R) \tag{16a}$$

καθώς επίσης:

$$\widetilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} = \widetilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\alpha)} (1+R) + \widetilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\alpha)} (1+R) \tag{17a}$$

και

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}-\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}=\left(\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}A^{(\beta)}-\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}\right)(1+R)\Rightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}-\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}=\left(\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}A^{(\beta)}-\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}A^{(\alpha)}+\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}A^{(\alpha)}-\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}\right)(1+R)\Rightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}-\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}=\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)+\left(\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}-\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\right)A^{(\alpha)}\right](1+R)\Rightarrow$$

$$\left(\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}-\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\right)\left[I-(1+R)A^{(\alpha)}\right]=\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+R) \qquad (25)$$

Το σύστημα (25) αναλύεται στα ακόλουθα επιμέρους υποσυστήματα:

$$\left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}-\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)}\right)\left[I_1-(1+R)A_{11}^{(\alpha)}\right]=\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}\left(A_{11}^{(\beta)}-A_{11}^{(\alpha)}\right)(1+R) \qquad (26)$$

και

$$\left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}-\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)}\right)\left[-(1+R)A_{12}^{(\alpha)}\right]+\left(\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}-\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}\right)\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]=$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}\left(A_{12}^{(\beta)}-A_{12}^{(\alpha)}\right)+\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}\left(A_{22}^{(\beta)}-A_{22}^{(\alpha)}\right)\right](1+R) \qquad (27)$$

Έτσι, από τις σχέσεις (6), (18a), (20), (21a) και (27) προκύπτει:

$$\left(\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}-\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}\right)\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]=\left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}-\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)}\right)A_{12}^{(\alpha)}(1+R)+$$

$$\left[\left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}A_{12}^{(\beta)}+\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}A_{22}^{(\beta)}\right)-\left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}A_{12}^{(\alpha)}+\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}A_{12}^{(\alpha)}\right)\right](1+R)\Rightarrow$$

$$\left(\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}-\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}\right)\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]=(\lambda-1)\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\alpha)}(1+R)+$$

$$\left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}A_{12}^{(\beta)}+\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R)-\left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}A_{12}^{(\alpha)}+\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}A_{12}^{(\alpha)}\right)(1+R)\Rightarrow$$

$$\left(\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}-\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}\right)\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]=(\lambda-1)\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\alpha)}(1+R)+$$

$$\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}=\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}A_{12}^{(\beta)}(1+R)+\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}A_{22}^{(\beta)}(1+R) \qquad (18a)$$

Έτσι, στη συνέχεια, αντί για τα συστήματα (15), (16), (17) και (18), θα αναφερόμαστε στα συστήματα (15a), (16a), (17a) και (18a) αντίστοιχα κάθε φορά που θεωρούμε τα επιμέρους υποσυστήματα στα οποία διασπώνται τα συστήματα (13) και (14).

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} - \left(\tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\beta)} A_{12}^{(\alpha)}\right)(1+R) \Rightarrow$$

$$\left(\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right) = \left[(\lambda-1)\tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\alpha)}(1+R) + \tilde{p}_2^{(\beta)} - \left(\tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]$$

$$\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$\left(\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right) = (\lambda-1)\tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\alpha)}(1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} +$$

$$\left[\tilde{p}_2^{(\beta)} - \left(\tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$\left(\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right) = (\lambda-1)\tilde{p}_2^{(\alpha)} + \left[\tilde{p}_2^{(\beta)} - \left(\tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}$$

Τροποποιώντας ελαφρά την ανωτέρω απόδειξη, από τις σχέσεις (13) και (14) θα έχουμε:

$$\tilde{p}^{(\beta)} - \tilde{p}^{(\alpha)} = \left(\tilde{p}^{(\beta)} A^{(\beta)} - \tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\alpha)}\right)(1+R) \Rightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)} - \tilde{p}^{(\alpha)} = \left(\tilde{p}^{(\beta)} A^{(\beta)} - \tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)} + \tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)} - \tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\alpha)}\right)(1+R) \Rightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)} - \tilde{p}^{(\alpha)} = \left[\left(\tilde{p}^{(\beta)} - \tilde{p}^{(\alpha)}\right)A^{(\beta)} + \tilde{p}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)} - A^{(\alpha)}\right)\right](1+R) \Rightarrow$$

$$\left(\tilde{p}^{(\beta)} - \tilde{p}^{(\alpha)}\right)\left[I - (1+R)A^{(\beta)}\right] = \tilde{p}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)} - A^{(\alpha)}\right)(1+R) \tag{28}$$

Το σύστημα (28) αναλύεται στα ακόλουθα επιμέρους υποσυστήματα:

$$\left(\tilde{p}_1^{(\beta)} - \tilde{p}_1^{(\alpha)}\right)\left[I_1 - (1+R)A_{11}^{(\beta)}\right] = \tilde{p}_1^{(\alpha)}\left(A_{11}^{(\beta)} - A_{11}^{(\alpha)}\right)(1+R) \tag{29}$$

και

$$\left(\tilde{p}_1^{(\beta)} - \tilde{p}_1^{(\alpha)}\right)\left[-(1+R)A_{12}^{(\beta)}\right] + \left(\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right] =$$

$$\left[\tilde{p}_1^{(\alpha)}\left(A_{12}^{(\beta)} - A_{12}^{(\alpha)}\right) + \tilde{p}_2^{(\alpha)}\left(A_{22}^{(\beta)} - A_{22}^{(\alpha)}\right)\right](1+R) \tag{30}$$

Έτσι, από τις σχέσεις (6), (17a), (23), (24a) και (30) θα έχουμε:

$$\left(\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right] = \left(\tilde{p}_1^{(\beta)} - \tilde{p}_1^{(\alpha)}\right)A_{12}^{(\beta)}(1+R) +$$

$$\left[\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)}\right) - \left(\tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\alpha)}\right)\right](1+R) \Rightarrow$$

$$\left(\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right] = \left(\tilde{p}_1^{(\beta)} - \frac{1}{\lambda}\tilde{p}_1^{(\beta)}\right) A_{12}^{(\beta)}(1+R) +$$

$$\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \left(\tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R) \Rightarrow$$

$$\left(\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right] = \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)\tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)}(1+R) +$$

$$\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \tilde{p}_2^{(\alpha)} \Rightarrow$$

$$\left(\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right) = \left[\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)\tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)}(1+R) + \left(\tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right]$$

$$\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$\left(\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right) = \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)\tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)}(1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} +$$

$$\left[\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$\left(\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right) = \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)\tilde{p}_2^{(\beta)} + \left[\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}$$

Πόρισμα 1. Αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$ και το εμπόρευμα ω δεν εισέρχεται άμεσα ή έμμεσα στην παραγωγή του τυπικού εμπορεύματος, τότε *για κάθε τυποποίηση* των τιμών στην τιμή R του ποσοστού κέρδους θα ισχύει:

$$\tilde{p}_1^{(\alpha)} = \tilde{p}_1^{(\beta)} = \tilde{p}_1 \tag{31}$$

και

- είτε $\tilde{p}_2^{(\beta)} \succ \tilde{p}_2^{(\alpha)}$
- είτε $\tilde{p}_2^{(\beta)} \prec \tilde{p}_2^{(\alpha)}$
- είτε $\tilde{p}_2^{(\alpha)} = \tilde{p}_2^{(\beta)}$

- είτε $\widetilde{p}_2^{(\alpha)} = \widetilde{p}_2^{(\beta)}$

Απόδειξη: Οι υποθέσεις:

- Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$ και
- Το εμπόρευμα ω δεν εισέρχεται άμεσα ή έμμεσα στην παραγωγή του τυπικού εμπορεύματος,

είναι *συνεκτικές*, αν και μόνο αν πληρείται μια από τις ακόλουθες συνθήκες:

- Το τυπικό εμπόρευμα αποτελείται από ένα απλό ή σύνθετο βασικό εμπόρευμα[70] ή
- Τα μη βασικά εμπορεύματα δεν εισέρχονται στην παραγωγή μη βασικών εμπορευμάτων[71] κι επιπλέον στη σύνθεση του τυπικού εμπορεύματος - είτε περιλαμβάνονται και βασικά είτε αποκλειστικά μη βασικά εμπορεύματα - δεν περιλαμβάνεται το εμπόρευμα ω.[72]

Σε κάθε περίπτωση που οι τεχνικές (α) και (β) έχουν ενιαία μέγιστη τιμή R του

---

[70] Στην προκείμενη περίπτωση, θα ισχύει:

$$p^{(\alpha)}u = p_1^{(\alpha)}u_1 + p_2^{(\alpha)}u_2 = p_1^{(\alpha)}u_1, \ \forall r \in [0, R] \tag{32}$$

και

$$p^{(\beta)}u = p_1^{(\beta)}u_1 + p_2^{(\beta)}u_2 = p_1^{(\beta)}u_1, \ \forall r \in [0, R] \tag{33}$$

[71] Βεβαίως, αυτό είναι δυνατόν, μόνο αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν αποκλειστικά στην κατηγορία $\mathcal{T}$.

[72] Στην προκείμενη περίπτωση θα ισχύει:

$$p^{(\alpha)}u = p_1^{(\alpha)}u_1 + p_1^{(\alpha)}u_2, \ \forall r \in [0, R] \tag{34}$$

και

$$p^{(\beta)}u = p_1^{(\beta)}u_1 + p_1^{(\beta)}u_2, \ \forall r \in [0, R] \quad , \tag{35}$$

ποσοστού κέρδους, στην κοινή μέγιστη τιμή R του ποσοστού κέρδους η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου w είναι ίση με το μηδέν $(w=0)$.[73] Επομένως, τα αντίστοιχα διανύσματα των *σχετικών* τιμών $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ και $\mathrm{p}^{(\beta)}$ των τεχνικών (α) και (β) προσδιορίζονται από τις σχέσεις (11) και (12).[74] Ανάλογα με ότι είδαμε στο σύστημα (13), με βάση τις συνθήκες $\mathcal{T}_3$ και $\mathcal{D}_3$ ή, ισοδύναμα, τις σχέσεις (2.a.36) και (2.a.43) το σύστημα (11) διαμερίζεται στα ακόλουθα υποσυστήματα:

$$\mathrm{p}_1^{(\alpha)} = \mathrm{p}_1^{(\alpha)} A_{11}(1+R) \tag{36}$$

και

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha)} = \mathrm{p}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\alpha)}(1+R) + \mathrm{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\alpha)}(1+R)^{75} \tag{37}$$

Ομοίως, με βάση τις συνθήκες $\mathcal{T}_3$ και $\mathcal{D}_3$ ή, ισοδύναμα, τις σχέσεις (2.a.36) και (2.a.43) το σύστημα (12) διαμερίζεται στα ακόλουθα υποσυστήματα:

$$\mathrm{p}_1^{(\beta)} = \mathrm{p}_1^{(\beta)} A_{11}(1+R) \tag{38}$$

και

$$\mathrm{p}_2^{(\beta)} = \mathrm{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)}(1+R) + \mathrm{p}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\beta)}(1+R)^{76} \tag{39}$$

Από τα συστήματα (36) και (38) προκύπτει η ακόλουθη μοναδική, οικονομικά σημαντική λύση:

---

[73] Η απόδειξη είναι ίδια με αυτήν που είδαμε στην υποσημείωση (6) της Πρότασης (1), αναφερόμενοι στην ειδική περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$.

[74] Αυτό ισχύει, ανεξάρτητα από την υπόθεση μας ότι οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$.

[75] Σύγκρινε με το σύστημα (17a).

[76] Σύγκρινε με το σύστημα (18a).

$$\mathrm{p}_1^{(\alpha)} = \mathrm{p}_1^{(\beta)} = \mathrm{p}_1 \tag{40}$$

όπου το διάνυσμα p_1 των τιμών των βασικών εμπορευμάτων αντιπροσωπεύει το θετικό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A_{11}, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\lambda_m^{A_{11}}$ ή, ισοδύναμα, με την τιμή R_1 του ποσοστού κέρδους (*μη τετριμμένη* λύση).[77]

Με βάση τις σχέσεις (32), (33), (34), (35) και (40) αποδεικνύεται, ότι αν πληρείται μια από τις συνθήκες που αναφέραμε παραπάνω, τότε, ανεξάρτητα της τυποποίησης των τιμών, θα ισχύει:

$$p^{(\alpha)}u = p^{(\beta)}u,\ \forall r \in [0,\ R] \tag{41}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (40), (41) και την εξίσωση τυποποίησης των τιμών:

$$p^{(\cdot)}u = 1,\ \forall r \in [0,\ R],\ (\cdot) = (\alpha),\ (\beta)$$

προκύπτει η σχέση (31).

Έτσι, από τις σχέσεις (6) και (31) συνεπάγεται:

$$\lambda = 1 \tag{42}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (42) στη σχέση (7) θα έχουμε:

$$\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} - \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} = (\lambda - 1)\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} + \left[\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} - \left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} - \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} = \left[\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} - \left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} \tag{43}$$

Από τη συνθήκη $\mathcal{T}_3$ ή $\mathcal{D}_3$ συμπεραίνουμε ότι οι μήτρες:

$$\begin{bmatrix} A_{12}^{(\alpha)} \\ \\ A_{22}^{(\alpha)} \end{bmatrix}$$

---

[77] Σύγκρινε με τη *μη τετριμμένη* λύση των συστημάτων (15) και (16).

και

$$\begin{bmatrix} A_{12}^{(\beta)} \\ A_{22}^{(\beta)} \end{bmatrix},$$

τάξης $n \times (n-k)$, διαφέρουν ως προς τη στήλη $\omega - k$.

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$A_{12}^{(\beta)} - A_{12}^{(\alpha)} = d_1 e_{\omega-k}^{n-k} \tag{44}$$

και

$$A_{22}^{(\beta)} - A_{22}^{(\alpha)} = d_2 e_{\omega-k}^{n-k} \tag{45}$$

Με βάση τις σχέσεις (18a), (44) και (45), η σχέση (43) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)} = \left[\tilde{p}_2^{(\beta)} - \left(\tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)} = \left[\left(\tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\beta)}\right) - \left(\tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\alpha)}\right)\right](1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)} = \left[\tilde{p}_1^{(\beta)}\left(A_{12}^{(\beta)} - A_{12}^{(\alpha)}\right) + \tilde{p}_2^{(\beta)}\left(A_{22}^{(\beta)} - A_{22}^{(\alpha)}\right)\right](1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)} = \left[\tilde{p}_1^{(\beta)}\left(d_1 e_{\omega-k}^{n-k}\right) + \tilde{p}_2^{(\beta)}\left(d_2 e_{\omega-k}^{n-k}\right)\right](1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)} = \left(\tilde{p}_1^{(\beta)} d_1 + \tilde{p}_2^{(\beta)} d_2\right) e_{\omega-k}^{n-k}(1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)} = \left(\tilde{p}^{(\beta)} d\right)(1+R) e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} \tag{46}$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (17a), (42), (44) και (45) στη σχέση (8) κι ακολουθώντας μια ανάλογη διαδικασία λαμβάνουμε:

$$\tilde{p}_2^{(\beta)}-\tilde{p}_2^{(\alpha)}=\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)\tilde{p}_2^{(\beta)}+\left[\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\beta)}+\tilde{p}_2^{(\alpha)}A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R)-\tilde{p}_2^{(\alpha)}\right]\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)}-\tilde{p}_2^{(\alpha)}=\left[\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\beta)}+\tilde{p}_2^{(\alpha)}A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R)-\tilde{p}_2^{(\alpha)}\right]\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)}-\tilde{p}_2^{(\alpha)}=\left[\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\beta)}+\tilde{p}_2^{(\alpha)}A_{22}^{(\beta)}\right)-\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\alpha)}+\tilde{p}_2^{(\alpha)}A_{22}^{(\alpha)}\right)\right](1+R)\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)}-\tilde{p}_2^{(\alpha)}=\left[\tilde{p}_1^{(\alpha)}\left(A_{12}^{(\beta)}-A_{12}^{(\alpha)}\right)+\tilde{p}_2^{(\alpha)}\left(A_{22}^{(\beta)}-A_{22}^{(\alpha)}\right)\right](1+R)\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)}-\tilde{p}_2^{(\alpha)}=\left[\tilde{p}_1^{(\alpha)}\left(d_1e_{\omega-k}^{n-k}\right)+\tilde{p}_2^{(\alpha)}\left(d_2e_{\omega-k}^{n-k}\right)\right](1+R)\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)}-\tilde{p}_2^{(\alpha)}=\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}d_1+\tilde{p}_2^{(\alpha)}d_2\right)e_{\omega-k}^{n-k}(1+R)\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)}-\tilde{p}_2^{(\alpha)}=\left(\tilde{p}^{(\alpha)}d\right)(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} \tag{47}$$

Έτσι, από τη σχέση (46) ή τη σχέση (47) προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\tilde{p}^{(\alpha)}d\succ 0$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d\succ 0$$

και

$$\tilde{p}_2^{(\beta)}\succ\tilde{p}_2^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\tilde{p}^{(\alpha)}d\prec 0$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d\prec 0$$

και

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} \prec \tilde{p}_2^{(\alpha)}$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\tilde{p}^{(\alpha)} d = 0$$

$$\tilde{p}^{(\beta)} d = 0$$

και

$$\tilde{p}_2^{(\alpha)} = \tilde{p}_2^{(\beta)}$$

Πρόταση 2. Αν ισχύει $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$ και οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

$$\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{E},\ \mathcal{LT},\ \mathcal{Z},\ \mathcal{H} \text{ και } \Theta,$$

τότε για τα διανύσματα των *σχετικών* τιμών που αντιστοιχούν στην τιμή R του ποσοστού κέρδους θα ισχύει:

$$p^{(\alpha)} = p^{(\beta)} = p \tag{48}$$

Απόδειξη: Θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

I. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{A}$.

Όπως έχουμε δείξει στο Πόρισμα (1), τα αντίστοιχα διανύσματα τιμών $p^{(\alpha)}$ και $p^{(\beta)}$ προσδιορίζονται από τα συστήματα (11) και (12). Αφαιρώντας κατά μέλη τις ανωτέρω σχέσεις θα έχουμε:

$$p^{(\beta)} - p^{(\alpha)} = \left(p^{(\beta)} A^{(\beta)} - p^{(\alpha)} A^{(\alpha)}\right)(1+R) \Rightarrow$$

$$p^{(\beta)} - p^{(\alpha)} = \left(p^{(\beta)} A^{(\beta)} - p^{(\alpha)} A^{(\beta)} + p^{(\alpha)} A^{(\beta)} - p^{(\alpha)} A^{(\alpha)}\right)(1+R) \Rightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\beta)}-\mathrm{p}^{(\alpha)}=\left[\left(\mathrm{p}^{(\beta)}-\mathrm{p}^{(\alpha)}\right)A^{(\beta)}+\mathrm{p}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)\right](1+R)\Rightarrow$$

$$\left(\mathrm{p}^{(\beta)}-\mathrm{p}^{(\alpha)}\right)\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]=\mathrm{p}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+R) \tag{49}$$

Με βάση την υπόθεσή μας ότι οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ διαφέρουν μόνο ως προς τη στήλη ω και τις σχέσεις (2.a.10) και (49) θα έχουμε:

$$\left(\mathrm{p}^{(\beta)}-\mathrm{p}^{(\alpha)}\right)\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]=\mathrm{p}^{(\alpha)}\left(de_{\omega}^{n}\right)(1+R)\Rightarrow$$

$$\left(\mathrm{p}^{(\beta)}-\mathrm{p}^{(\alpha)}\right)\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]=\left(\mathrm{p}^{(\alpha)}d\right)(1+R)e_{\omega}^{n} \tag{50}$$

Εφόσον ισχύει:

- είτε $\mathrm{p}^{(\alpha)}d \succ 0$
- είτε $\mathrm{p}^{(\alpha)}d \prec 0$
- είτε $\mathrm{p}^{(\alpha)}d = 0$

συνεπάγεται αντίστοιχα ότι έχουμε:

- είτε $\left(\mathrm{p}^{(\alpha)}d\right)(1+R)e_{\omega}^{n} \geq 0$
- είτε $\left(\mathrm{p}^{(\alpha)}d\right)(1+R)e_{\omega}^{n} \leq 0$
- είτε $\left(\mathrm{p}^{(\alpha)}d\right)(1+R)e_{\omega}^{n} = 0$

Δεδομένου ότι η μήτρα $A^{(\beta)}$ είναι μη διασπώμενη, η μήτρα $\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]$ θα είναι μια ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα. Αποδεικνύεται, ότι μια ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα είναι *"σχεδόν μονότονη"* (*almost monotone*). Δηλαδή:

$$\exists x \in R^{n}:\ x\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]\geqq 0 \Rightarrow x\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]=0$$ [78]

[78] Έστω ότι υπάρχει $x \in R^{n}$ τέτοιο ώστε:

$$x\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]\geq 0$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση για τη σχέση (50) τελικά θα ισχύει:

$$\left(\mathrm{p}^{(\beta)}-\mathrm{p}^{(\alpha)}\right)\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]=0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\beta)}\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]-\mathrm{p}^{(\alpha)}\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]=0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\beta)}\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]=\mathrm{p}^{(\alpha)}\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right] \tag{51}$$

Από τις σχέσεις (12) και (51) συνεπάγεται:

$$\mathrm{p}^{(\alpha)}\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]=0$$

Από την ανωτέρω σχέση προκύπτει, ότι το θετικό ιδιοδιάνυσμα $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ της μήτρας $A^{(\alpha)}$, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της, είναι ταυτόχρονα ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $A^{(\beta)}$, συνδεδεμένο επίσης με την μέγιστη ιδιοτιμή της. Όμως σύμφωνα με τη σχέση (12), ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $A^{(\beta)}$, συνδεδεμένο με την μέγιστη ιδιοτιμή της, είναι το $\mathrm{p}^{(\beta)}$. Εφόσον η μέγιστη ιδιοτιμή της μη διασπώμενης μήτρας $A^{(\beta)}$ είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού της πολυωνύμου, η γεωμετρική της πολλαπλότητα είναι ίση με την μονάδα.[79] Επομένως, έχουμε:

Αφού η μήτρα $A^{(\beta)}$ είναι μη διασπώμενη και η τιμή R αποτελεί την ελάχιστη θετική τιμή του ποσοστού κέρδους για την οποία ισχύει $\det\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]=0$, θα υπάρχει ένα ιδιοδιάνυσμα $y \in R^n$, με $y \succ 0$, τέτοιο ώστε:

$$\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]y=0$$

Από τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτει:

$$\left\{x\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]\right\}y \succ 0$$

Όμως η ανωτέρω σχέση είναι *άτοπη*, διότι έχουμε:

$$\left\{x\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]\right\}y=x\left\{\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]y\right\}=x.0=0$$

Βλ. Berman and Plemmons [1979, σελ. 156].

[79] Η μέγιστη ιδιοτιμή μιας μη διασπώμενης μήτρας είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού της πολυωνύμου. Βλέπε, μεταξύ άλλων, Gantmacher [1966, σελ. 49] και Berman and Plemmons [1979, σελ. 27].

$$p^{(\alpha)} = p^{(\beta)} = p$$

II. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{B}$.

Από τη συνθήκη $\mathcal{B}_2$ έχουμε:

$$R^{A_{11}^{(\alpha)}} = R^{(\alpha)} \prec R^{A_{22}^{(\alpha)}} \tag{52}$$

και

$$R^{A_{11}^{(\beta)}} = R^{(\beta)} \prec R^{A_{22}^{(\beta)}} \tag{53}$$

Έτσι, από την υπόθεσή μας:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

και τις σχέσεις (52) και (53) συνεπάγεται:

$$R^{A_{11}^{(\alpha)}} = R^{A_{11}^{(\beta)}} = R \tag{54}$$

Με βάση τα συστήματα (11) και (12), καθώς και τις σχέσεις (2.a.28) και (2.a.29), στην τιμή R του ποσοστού κέρδους τα υποσυστήματα προσδιορισμού των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β) αντίστοιχα, είναι τα εξής:

$$p_1^{(\alpha)} = p_1^{(\alpha)} A_{11}^{(\alpha)} (1+R)$$

$$p_2^{(\alpha)} = p_1^{(\alpha)} A_{12} (1+R) + p_2^{(\alpha)} A_{22} (1+R)$$

$$p_1^{(\beta)} = p_1^{(\beta)} A_{11}^{(\beta)} (1+R)$$

και

$$p_2^{(\beta)} = p_1^{(\beta)} A_{12} (1+R) + p_2^{(\beta)} A_{22} (1+R)$$

Αν λάβουμε υπόψη μας τη σχέση (54), τότε από την επίλυση των ανωτέρω συστημάτων προκύπτει η μοναδική οικονομικά σημαντική λύση, σύμφωνα με την οποία τα διανύσματα τιμών $p_1^{(\alpha)}$ και $p_1^{(\beta)}$ των βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β), είναι ιδιοδιανύσματα των υπομητρών $A_{11}^{(\alpha)}$ και $A_{11}^{(\beta)}$ αντίστοιχα, που συνδέονται με την κοινή μέγιστη ιδιοτιμή τους. Εφόσον οι υπομήτρες $A_{11}^{(\alpha)}$ και $A_{11}^{(\beta)}$ είναι μη διασπώμενες, διαφέρουν μόνο ως προς τη στήλη τους ω[80] και έχουν ενιαίο μέγιστο ποσοστό κέρδους R, για τα διανύσματα τιμών $p_1^{(\alpha)}$ και $p_1^{(\beta)}$ των βασικών εμπορευμάτων θα ισχύει:

$$p_1^{(\alpha)} = p_1^{(\beta)} = p_1 \quad (55)$$

[81]

Με βάση τη σχέση (55), τα ανωτέρω συστήματα προσδιορισμού των διανυσμάτων τιμών $p_2^{(\alpha)}$ και $p_2^{(\beta)}$ των μη βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β) αντίστοιχα, μετασχηματίζονται ως εξής:

$$p_2^{(\alpha)} = p_1 A_{12}(1+R) + p_2^{(\alpha)} A_{22}(1+R)$$

και

$$p_2^{(\beta)} = p_1 A_{12}(1+R) + p_2^{(\beta)} A_{22}(1+R)$$

Επιλύοντας τα ανωτέρω συστήματα ως προς τα διανύσματα τιμών $p_2^{(\alpha)}$ και $p_2^{(\beta)}$ προκύπτει η μοναδική λύση:

$$p_2^{(\alpha)} = p_2^{(\beta)} = p_2 \quad (56)$$

[82]

---

[80] Βλ. τη σχέση (2.a.31).

[81] Η απόδειξη είναι ίδια με αυτήν που δώσαμε παραπάνω στην περίπτωση (Ι), όταν εξετάσαμε τα ιδιοδιανύσματα των τιμών δύο μη διασπώμενων μητρών, με ίσες μέγιστες τιμές του ποσοστού κέρδους, που διαφέρουν ως προς μια στήλη.

[82] Σύμφωνα με τις σχέσεις (2.a.29), (52) και (53), η μήτρα:

$$\left[I_2 - (1+R)A_{22}\right]$$

είναι μια μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα. Επομένως, θα ισχύει:

$$\left[I_2 - (1+R)A_{22}\right]^{-1} \succ 0$$

Με βάση την ανωτέρω σχέση, τα ανωτέρω συστήματα προσδιορισμού των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων γράφονται αντίστοιχα ως εξής:

$$p_2^{(\alpha)} = p_1 A_{12}(1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}\right]^{-1}$$

και

$$p_2^{(\beta)} = p_1 A_{12}(1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}\right]^{-1}$$

Έτσι, από τα ανωτέρω συστήματα προκύπτει:

Κατά συνέπεια, από τις σχέσεις (55) και (56) συνεπάγεται:

$$\mathrm{p}^{(\alpha)} = \mathrm{p}^{(\beta)} = \mathrm{p}$$

III. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{E}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{LT}$ είτε στην κατηγορία Θ.

Εφόσον οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις ανωτέρω κατηγορίες, θα ισχύει *πάντοτε:*

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$ [83]

Επίσης, σύμφωνα με τις συνθήκες $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{LT}_2$ και Θ_2, θα ισχύει:

$$R^{A_{22}^{(\alpha)}} = R^{(\alpha)} \leq R^{A_{11}^{(\alpha)}}$$

και

$$R^{A_{22}^{(\beta)}} = R^{(\beta)} \leq R^{A_{11}^{(\beta)}}$$

Έτσι, από τις ανωτέρω σχέσεις συνεπάγεται:

$$R^{A_{22}^{(\alpha)}} = R^{A_{22}^{(\beta)}} = R \tag{57}$$

Με βάση τα συστήματα (11) και (12), καθώς και τα κοινά χαρακτηριστικά των σχέσεων (2.a.28), (2.a.29), (2.a.36) και (2.a.37), στην τιμή R του ποσοστού κέρδους τα υποσυστήματα προσδιορισμού των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β) αντίστοιχα, είναι τα εξής:

$$p_1^{(\alpha)} = p_1^{(\alpha)} A_{11}^{(\alpha)}(1+R)$$

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha)} = p_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\alpha)}(1+R) + \mathrm{p}_2^{(\alpha)} A_{22}(1+R)$$

$$p_1^{(\beta)} = p_1^{(\beta)} A_{11}^{(\beta)}(1+R)$$

και

$$\mathrm{p}_2^{(\beta)} = p_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)}(1+R) + \mathrm{p}_2^{(\beta)} A_{22}(1+R)$$ [84]

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha)} = \mathrm{p}_2^{(\beta)} = \mathrm{p}_2$$

[83] Βλ. Λήμμα (1).

Αν λάβουμε υπόψη μας τη σχέση (57), τότε από την επίλυση των ανωτέρω συστημάτων προκύπτει, ότι, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, για τα διανύσματα τιμών $p_1^{(\alpha)}$ και $p_1^{(\beta)}$ των βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β) αντίστοιχα, η μοναδική οικονομικά σημαντική λύση είναι η *τετριμμένη* λύση:

$$p_1^{(\alpha)} = p_1^{(\beta)} = p_1 = 0 \quad (58)$$ [85]

Με βάση τη σχέση (58), τα ανωτέρω συστήματα προσδιορισμού των διανυσμάτων τιμών $\mathrm{p}_2^{(\alpha)}$ και $\mathrm{p}_2^{(\beta)}$ των μη βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β) αντίστοιχα, μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha)} = \mathrm{p}_2^{(\alpha)} A_{22}(1+R)$$

και

$$\mathrm{p}_2^{(\beta)} = \mathrm{p}_2^{(\beta)} A_{22}(1+R)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (57), από την επίλυση των ανωτέρω συστημάτων ως προς τα διανύσματα τιμών $\mathrm{p}_2^{(\alpha)}$ και $\mathrm{p}_2^{(\beta)}$ προκύπτει, ότι η μοναδική οικονομικά σημαντική λύση για τις τιμές των μη βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β), είναι αυτή, κατά την οποία τα ανωτέρα διανύσματα τιμών είναι ιδιοδιανύσματα της υπομήτρας A_{22}, συνδεδεμένα με την μέγιστη ιδιοτιμή της.[86] Εφόσον η μέγιστη ιδιοτιμή της μη διασπώμενης υπομήτρας A_{22} είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού της πολυωνύμου, η γεωμετρική της πολλαπλότητα είναι ίση με την μονάδα. Επομένως, θα ισχύει:

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha)} = \mathrm{p}_2^{(\beta)} = \mathrm{p}_2 \quad (59)$$

Κατά συνέπεια, από τις σχέσεις (58) και (59) συνεπάγεται:

$$\mathrm{p}^{(\alpha)} = \mathrm{p}^{(\beta)} = \mathrm{p}$$

---

[84] Ο χρησιμοποιούμενος συμβολισμός των τιμών των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων παραπέμπει στο συμβολισμό των οικονομικά σημαντικών λύσεων των ανωτέρω συστημάτων που μελετήσαμε στο Μέρος (I).

[85] Βλ. Μέρος (I).

[86] Βλ. Μέρος (I).

IV. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathscr{Z}$.

Από τη συνθήκη $\mathscr{Z}_2$ έχουμε:

$$R^{A_{22}^{(\alpha)}} = R^{(\alpha)} \prec R^{A_{11}^{(\alpha)}} \tag{60}$$

και

$$R^{A_{22}^{(\beta)}} = R^{(\beta)} \prec R^{A_{11}^{(\beta)}} \tag{61}$$

Έτσι, από την υπόθεσή μας:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

και τις σχέσεις (60) και (61) συνεπάγεται:

$$R^{A_{22}^{(\alpha)}} = R^{A_{22}^{(\beta)}} = R \tag{62}$$

Με βάση τα συστήματα (11) κσι (12), καθώς και τις σχέσεις (2.a.43) και (2.a.44), στην τιμή R του ποσοστού κέρδους τα υποσυστήματα προσδιορισμού των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β) αντίστοιχα, είναι τα εξής:

$$p_1^{(\alpha)} = p_1^{(\alpha)} A_{11}(1+R)$$

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha)} = p_1^{(\alpha)} A_{12}(1+R) + \mathrm{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\alpha)}(1+R)$$

$$p_1^{(\beta)} = p_1^{(\beta)} A_{11}(1+R)$$

και

$$\mathrm{p}_2^{(\beta)} = p_1^{(\beta)} A_{12}(1+R) + \mathrm{p}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\beta)}(1+R)$$ [87]

Αν λάβουμε υπόψη μας τη σχέση (62), τότε από την επίλυση των ανωτέρω συστημάτων προκύπτει, ότι, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, για τα διανύσματα τιμών $p_1^{(\alpha)}$ και $p_1^{(\beta)}$ των βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β) αντίστοιχα, η μοναδική οικονομικά σημαντική λύση είναι η *τετριμμένη*

[87] Ο χρησιμοποιούμενος συμβολισμός των τιμών των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων παραπέμπει στο συμβολισμό των οικονομικά σημαντικών λύσεων των ανωτέρω συστημάτων που μελετήσαμε στο Μέρος (Ι).

λύση (58).[88] Με βάση τη σχέση (58), τα ανωτέρω συστήματα προσδιορισμού των διανυσμάτων τιμών $p_2^{(\alpha)}$ και $p_2^{(\beta)}$ των μη βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β) αντίστοιχα, μετασχηματίζονται ως εξής:

$$p_2^{(\alpha)} = p_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\alpha)} (1+R)$$

και

$$p_2^{(\beta)} = p_2^{(\beta)} A_{22}^{(\beta)} (1+R)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (62), από την επίλυση των ανωτέρω συστημάτων ως προς τα διανύσματα τιμών $p_2^{(\alpha)}$ και $p_2^{(\beta)}$ προκύπτει, ότι η μοναδική οικονομικά σημαντική λύση για τις τιμές των μη βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β), είναι αυτή, κατά την οποία τα ανωτέρα διανύσματα τιμών είναι ιδιοδιανύσματα των υπομητρών $A_{22}^{(\alpha)}$ και $A_{22}^{(\beta)}$ αντίστοιχα, που συνδέονται με την κοινή μέγιστη ιδιοτιμή τους.[89] Εφόσον οι υπομήτρες $A_{22}^{(\alpha)}$ και $A_{22}^{(\beta)}$ είναι μη διασπώμενες, διαφέρουν μόνο ως προς τη στήλη $\omega - k$[90] και έχουν ενιαίο μέγιστο ποσοστό κέρδους R, για τα διανύσματα τιμών $p_2^{(\alpha)}$ και $p_2^{(\beta)}$ των μη βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β) αντίστοιχα, θα ισχύει η σχέση (59).[91]

Κατά συνέπεια, από τις σχέσεις (58) και (59) συνεπάγεται:

$$p^{(\alpha)} = p^{(\beta)} = p$$

[88] Βλ. Μέρος (I).

[89] Βλ. Μέρος (I).

[90] Βλ. σχέση (2.a.46).

[91] Η απόδειξη είναι ίδια με αυτήν που δώσαμε παραπάνω στην περίπτωση (I), όταν εξετάσαμε τα ιδιοδιανύσματα των τιμών δύο μη διασπώμενων μητρών, με ίσες μέγιστες τιμές του ποσοστού κέρδους, που διαφέρουν ως προς μια στήλη.

V. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{H}$.

Από τη συνθήκη $\mathcal{H}_2$ έχουμε:

$$R^{A_{11}^{(\alpha)}} = R^{A_{22}^{(\alpha)}} = R^{(\alpha)} \tag{63}$$

Επίσης, από τη συνθήκη $\mathcal{H}_3$ προκύπτει:

$$R^{A_{22}^{(\alpha)}} = R^{A_{22}^{(\beta)}} = R^{(\alpha)} \text{ [92]} \tag{64}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (63) και (64) συνεπάγεται, ότι η υπόθεση μας:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

ισχύει, αν και μόνο αν έχουμε:

$$R^{(\beta)} = R^{A_{22}^{(\beta)}} \leq R^{A_{11}^{(\beta)}} \text{ [93]} \tag{65}$$

Με βάση τα συστήματα (11) κσι (12), καθώς και τις σχέσεις (2.a.28) και (2.a.29), στην τιμή R του ποσοστού κέρδους τα υποσυστήματα προσδιορισμού των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β) αντίστοιχα, είναι τα εξής:

$$p_1^{(\alpha)} = p_1^{(\alpha)} A_{11}^{(\alpha)} (1+R)$$

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha)} = p_1^{(\alpha)} A_{12} (1+R) + \mathrm{p}_2^{(\alpha)} A_{22} (1+R)$$

$$p_1^{(\beta)} = p_1^{(\beta)} A_{11}^{(\beta)} (1+R)$$

και

$$\mathrm{p}_2^{(\beta)} = p_1^{(\beta)} A_{12} (1+R) + \mathrm{p}_2^{(\beta)} A_{22} (1+R) \text{ [94]}$$

---

[92] Βλέπε σχέση (1.2.29).

[93] Με άλλα λόγια, αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{H}$, τότε η υπόθεσή μας:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

ισχύει, αν και μόνο αν η αλλαγή της μεθόδου παραγωγής του βασικού εμπορεύματος ω αυξάνει ή διατηρεί σταθερό το μέγιστο ποσοστό κέρδους της βασικής υποτεχνικής.

Αν λάβουμε υπόψη μας τις σχέσεις (63) και (65), τότε από την επίλυση των ανωτέρω συστημάτων προκύπτει, ότι, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, για τα διανύσματα τιμών $p_1^{(\alpha)}$ και $p_1^{(\beta)}$ των βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β) αντίστοιχα, η μοναδική οικονομικά σημαντική λύση είναι η *τετριμμένη* λύση (58).[95] Με βάση τη σχέση (58), τα ανωτέρω συστήματα προσδιορισμού των διανυσμάτων τιμών $\mathrm{p}_2^{(\alpha)}$ και $\mathrm{p}_2^{(\beta)}$ των μη βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β) αντίστοιχα, μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha)} = \mathrm{p}_2^{(\alpha)} A_{22}(1+R)$$

και

$$\mathrm{p}_2^{(\beta)} = \mathrm{p}_2^{(\beta)} A_{22}(1+R)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (63) και (65), από την επίλυση των ανωτέρω συστημάτων ως προς τα διανύσματα τιμών $\mathrm{p}_2^{(\alpha)}$ και $\mathrm{p}_2^{(\beta)}$ προκύπτει, ότι η μοναδική οικονομικά σημαντική λύση για τις τιμές των μη βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται από τις τεχνικές (α) και (β), είναι αυτή, κατά την οποία τα ανωτέρα διανύσματα τιμών είναι ιδιοδιανύσματα της υπομήτρας A_{22}, συνδεδεμένα με την μέγιστη ιδιοτιμή της.[96] Εφόσον η μέγιστη ιδιοτιμή της μη διασπώμενης υπομήτρας A_{22} είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού της πολυωνύμου, η γεωμετρική της πολλαπλότητα είναι ίση με την μονάδα. Επομένως, θα ισχύει η σχέση (59).

Κατά συνέπεια, από τις σχέσεις (58) και (59) συνεπάγεται:

$$\mathrm{p}^{(\alpha)} = \mathrm{p}^{(\beta)} = \mathrm{p}$$

---

[94] Ο χρησιμοποιούμενος συμβολισμός των τιμών των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων παραπέμπει στο συμβολισμό των οικονομικά σημαντικών λύσεων των ανωτέρω συστημάτων που μελετήσαμε στο Μέρος (Ι).

[95] Βλ. Μέρος (Ι).

[96] Βλ. Μέρος (Ι).

Πόρισμα 2. Αν ισχύει $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$ και οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

$$\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{E},\ \mathcal{LT},\ \mathcal{Z},\ \mathcal{H} \text{ και } \boldsymbol{\Theta},$$

τότε, για *κάθε τυποποίηση* που *επιτρέπει* τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους θα έχουμε:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} = \tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} \tag{66}$$ [97]

---

[97] Μη *επιτρεπτή* τυποποίηση έχουμε όταν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις κατηγορίες:

$$\mathcal{E},\ \mathcal{LT},\ \mathcal{Z},\ \mathcal{H} \text{ και } \boldsymbol{\Theta}$$

και ως τυπικό εμπόρευμα λειτουργεί ένα απλό ή σύνθετο βασικό εμπόρευμα. Πράγματι, σε κάθε τέτοια περίπτωση, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους ο προσδιορισμός των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *αδύνατος*. Το θέμα αυτό πραγματευτήκαμε στο Μέρος (Ι).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.

Η ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο Κεφάλαιο (2) θα εξετάσουμε την εσωτερική αλληλουχία των προταθέντων στην βιβλιογραφία κριτηρίων, με βάση τα οποία συγκρίνονται δύο τεχνικές παραγωγής ως προς την κερδοφορία. Ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί στην ανάλυση του αλγόριθμου της αγοράς.[1] Η μέθοδος του αλγόριθμου της αγοράς βασίζεται στην επιδίωξη του παραγωγού του εμπορεύματος ω να αποκομίσει πρόσθετα κέρδη (extra profits) σε σχέση με την ισχύουσα τιμή του ποσοστού κέρδους.[2]

Ο σκοπός της ανάλυσης του Κεφαλαίου (2) είναι διπλός:

- Αναπτύσσεται περαιτέρω η μέθοδος του αλγόριθμου της αγοράς εμπλουτίζοντας την με ένα σύνολο από ικανές κι αναγκαίες συνθήκες που επιτρέπουν την εξέτασή της σε συνδυασμό με τις εναλλακτικές μεθόδους σύγκρισης των τεχνικών παραγωγής. Επιπλέον, διερευνώνται οι συνθήκες, υπό τις οποίες τα διαδοχικά διανύσματα των ονομαστικών τιμών κόστους που προκαλεί η μεταβολή της χρησιμοποιούμενης τεχνικής συγκλίνουν στο διάνυσμα τιμών ισορροπίας της τελικής τεχνικής. Τέλος, επεκτείνεται το πεδίο εφαρμογής της, ούτως ώστε να περιλαμβάνει την τιμή R του ποσοστού κέρδους στην περίπτωση που ισχύει:

---

[1] Η έννοια του αλγόριθμου της αγοράς αναπτύσσεται μεταξύ άλλων από τους Levhari [1965], Schefold [1978], Bidard [1990a], Bidard [1990b], Bidard [1991], Garegnani [1970] και Garegnani [1984].

[2] "The driving force for the adoption of the new technique is competition.", βλέπε Schefold [1978, σελ. 39].

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$[3]

- Αποδεικνύεται ότι η σύγκριση των τεχνικών παραγωγής ως προς την κερδοφορία, σύμφωνα με την μέθοδο του αλγόριθμου της αγοράς, δεν εξασφαλίζει - στην γενική περίπτωση - σε κάθε εφικτή τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in [0, R]$, ούτε τη σύγκλιση των διαδοχικών διανυσμάτων των τιμών κόστους που προκαλεί η μεταβολή της χρησιμοποιούμενης τεχνικής στο διάνυσμα των τιμών ισορροπίας της τελικής τεχνικής ούτε την καταταξιμότητα των εναλλακτικών τεχνικών παραγωγής στην κλίμακα κερδοφορίας.

2. Η ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΚΑΙ Η ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΟΣΤΟΥΣ

Στο Τμήμα (2) θα μελετήσουμε τις προϋποθέσεις, υπό τις οποίες τα διαδοχικά διανύσματα των τιμών κόστους που προκαλεί η μεταβολή της χρησιμοποιούμενης τεχνικής συγκλίνουν στο διάνυσμα τιμών ισορροπίας της τελικής τεχνικής, διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας τις ακόλουθες Προτάσεις.

Πρόταση 1. Αν η αρχική τεχνική είναι η τεχνική (α), τότε, *για κάθε τυποποίηση* των τιμών, στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^{(\alpha)}\right)$,[4] η τιμή του

---

[3] "However, it is difficult to analyse the various possible processes of transition from one technique to the other. Here we shall only be concerned with the proof of the classical proposition that the capitalists who are first to make the transition will reap surplus profits, while those who are last will incur losses. Keynesian arguments about induced changes in incomes and employment, and neoclassical arguments about increases of consumption compesating the sacrifices required for making the transition will not be considered", βλέπε Schefold [1978, σελ. 40].

[4] Προϋποθέτουμε ότι ισχύει:

$$r \in \left[0, R^{(\alpha)}\right),$$

επειδή η λειτουργία του οικονομικού συστήματος με την αρχική τεχνική (α) έχει νόημα μόνο αν:

ονομαστικού ωρομισθίου και το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών κόστους των διαδοχικών περιόδων παραγωγής που ακολουθούν την αντικατάσταση της μεθόδου παραγωγής (α) του εμπορεύματος ω από τη μέθοδο παραγωγής (β) συγκλίνουν αντίστοιχα στην τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου και στο διάνυσμα των ονομαστικών τιμών ισορροπίας μιας στατικής οικονομίας (steady state economy) που χρησιμοποιεί την τελική τεχνική (β), *αν και μόνο αν* η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι παραγωγική.[5, 6]

- Η τεχνική παραγωγής (α) είναι παραγωγική, δηλαδή ισχύει: $R^{(\alpha)} \succ 0$ και
- η τιμή r του ποσοστού κέρδους περιλαμβάνεται στο οικονομικά σημαντικό διάστημα τιμών του ποσοστού κέρδους της τεχνικής παραγωγής (α).

[5] Θα αποδείξουμε, ότι η μη αρνητική μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$, με $r \geq 0$, είναι τότε μόνο παραγωγική, αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

- Η μήτρα $A^{(\beta)}$ είναι παραγωγική, δηλαδή ισχύει:

$$0 \prec \lambda_m^{A^{(\beta)}} \prec 1$$

ή

$$R^{(\beta)} \succ 0 \text{ και}$$

- Ισχύει: $r \in \left[0,\ R^{(\beta)}\right)$.

Απόδειξη: Έστω ότι η μη αρνητική μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$, με $r \geq 0$, είναι παραγωγική. Έτσι, θα έχουμε:

$$0 \prec \lambda_m\left[A^{(\beta)}(1+r)\right] \prec 1 \Rightarrow$$

$$0 \prec \lambda_m^{A^{(\beta)}}(1+r) \prec 1 \Rightarrow$$

$$0 \prec \frac{1+r}{1+R^{(\beta)}} \prec 1 \Rightarrow$$

$$0 \prec 1+r \prec 1+R^{(\beta)} \Rightarrow$$

$$-1 \prec r \prec R^{(\beta)} \Rightarrow$$

$$0 \leq r \prec R^{(\beta)}$$

Επιπλέον θα έχουμε:

$$0 \leq r \prec R^{(\beta)} \Rightarrow$$

$$0 \prec R^{(\beta)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+R^{(\beta)}} \prec 1 \Rightarrow$$

$$\lambda_m^{A^{(\beta)}} \prec 1$$

Από την άλλη μεριά, θα υποθέσουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις:

- Η μήτρα $A^{(\beta)}$ είναι παραγωγική, δηλαδή ισχύει:

  $$0 \prec \lambda_m^{A^{(\beta)}} \prec 1$$

  ή

  $$R^{(\beta)} \succ 0 \text{ και}$$

- Ισχύει: $r \in \left[0,\ R^{(\beta)}\right)$.

Έτσι, θα έχουμε:

$$0 \leq r \prec R^{(\beta)} \Rightarrow$$

$$0 \prec 1+r \prec 1+R^{(\beta)} \Rightarrow$$

$$0 \prec \frac{1+r}{1+R^{(\beta)}} \prec 1 \Rightarrow$$

$$0 \prec \lambda_m^{A^{(\beta)}}\left(1+r\right) \prec 1 \Rightarrow$$

$$0 \prec \lambda_m\left[A^{(\beta)}\left(1+r\right)\right] \prec 1$$

Υπό το πρίσμα των ανωτέρω ικανών κι αναγκαίων συνθηκών, η Πρόταση (1) διατυπώνεται ως

Απόδειξη: Θα αναλύσουμε την αποδεικτική διαδικασία που ακολουθεί στα εξής στάδια:

Α. Στο στάδιο (Α) θα δείξουμε την ισχύ της Πρότασης (1) για το διάνυσμα των τιμών κόστους, στην ιδιαίτερη περίπτωση που εκφράζονται σε όρους του μη παραγόμενου εμπορεύματος: της εργασιακής δύναμης. Έτσι, σε μια τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0,\, R^{(\alpha)}\right)$, από το σύστημα προσδιορισμού του διανύσματος των τυποποιημένων τιμών $\tilde{p}^{(\alpha)}$ της αρχικής τεχνικής (α) θα έχουμε:

$$\tilde{p}^{(\alpha)} = \tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\alpha)} (1+r) + w^{(\alpha)} l^{(\alpha)\,7} \Rightarrow$$

εξής:

Αν η αρχική τεχνική είναι η τεχνική (α), τότε, *για κάθε τυποποίηση* των τιμών, στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0,\, R^{(\alpha)}\right)$, η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου και το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών κόστους των διαδοχικών περιόδων παραγωγής που ακολουθούν την αντικατάσταση της μεθόδου παραγωγής (α) του εμπορεύματος ω από την μέθοδο παραγωγής (β) συγκλίνουν αντίστοιχα στην τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου και στο διάνυσμα των ονομαστικών τιμών ισορροπίας μιας στατικής οικονομίας (steady state economy) που χρησιμοποιεί την τελική τεχνική (β), *αν και μόνο αν* η μήτρα $A^{(\beta)}$ είναι παραγωγική και το ποσοστό κέρδους r λαμβάνει τιμές στο διάστημα $\left[0,\, R^{*}\right)$, όπου $R^{*} = \min\left(R^{(\alpha)}, R^{(\beta)}\right)$.

[6] Στην βιβλιογραφία συναντάμε μόνο διατυπώσεις, χωρίς απόδειξη, μιας επιμέρους πρότασης, σύμφωνα με την οποία σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0,\, R^{*}\right)$, το διάνυσμα των τιμών κόστους, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, των διαδοχικών περιόδων παραγωγής που ακολουθούν την αντικατάσταση της μεθόδου παραγωγής (α) του εμπορεύματος ω από την μέθοδο παραγωγής (β) συγκλίνει στο αντίστοιχο διάνυσμα των τιμών ισορροπίας μιας στατικής οικονομίας (steady state economy) που χρησιμοποιεί την τελική τεχνική (β). Για το θέμα αυτό βλέπε Levhari [1965, σελ. 101]. Επίσης, το πρόβλημα περιγράφεται με γενικούς όρους στον Pasinetti [1991, σελ. 172].

[7] Με $w^{(\cdot)}$ συμβολίζουμε την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου που για την ισχύουσα εξίσωση

$$\frac{\tilde{p}^{(\alpha)}}{w^{(\alpha)}}=\frac{\tilde{p}^{(\alpha)}}{w^{(\alpha)}}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\Rightarrow$$

$$\hat{p}^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}$$

Ορίζουμε:

$$\hat{p}^{(\alpha,0)}=\hat{p}^{(\alpha)} \tag{2}$$

Στις διαδοχικές περιόδους παραγωγής (θ), $\theta=1,2,...$, που ακολουθούν την μεταβολή της μεθόδου παραγωγής του εμπορεύματος ω, δηλαδή της αντικατάστασης της τεχνικής (α) από την τεχνική (β), τα διανύσματα τιμών κόστους, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, των n εμπορευμάτων που παράγονται με την τελική τεχνική παραγωγής (β) προσδιορίζονται από τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων:

$$\hat{p}^{(\alpha,1)}=\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}$$

$$\hat{p}^{(\alpha,2)}=\hat{p}^{(\alpha,1)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}$$

...

...

...

$$\hat{p}^{(\alpha,\theta-1)}=\hat{p}^{(\alpha,\theta-2)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}$$

τυποποίησης αντιστοιχεί στην τεχνική $(.)$, $(.)=(\alpha),(\beta)$. Σε κάθε περίπτωση, για την τιμή $w^{(.)}$ της τεχνικής $(.)$ ισχύει:

$$w^{(.)}=\frac{1}{l^{(.)}\left[I-(1+r)A^{(.)}\right]^{-1}u}=\frac{1}{\hat{p}^{(.)}u} \tag{1}$$

$$\hat{p}^{(\alpha,\theta)} = \hat{p}^{(\alpha,\theta-1)} A^{(\beta)} (1+r) + l^{(\beta)}, \tag{3}$$

όπου το διάνυσμα $\hat{p}^{(\alpha,\theta)}$, $\theta = 1,2,\ldots$, αντιπροσωπεύει τις τιμές κόστους, εκφρασμένες σε όρους της εργασιακής δύναμης, των εμπορευμάτων που παράγονται την (θ) περίοδο παραγωγής με την τεχνική παραγωγής (β), όταν οι τιμές των υλικών εισροών της περιόδου παραγωγής (1) εκφράζονται από το διάνυσμα τιμών ισορροπίας $\hat{p}^{(\alpha)}$ της αρχικής τεχνικής (α).

Θα δείξουμε, ότι, δοθέντος του διανύσματος τιμών ισορροπίας $\hat{p}^{(\alpha)}$ της αρχικής τεχνικής (α) ή, πιο σύντομα, της αρχικής τεχνικής (α), στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^{(\alpha)}\right)$, η ακολουθία διανυσμάτων $\hat{p}^{(\alpha,1)}, \hat{p}^{(\alpha,2)}, \ldots$ συγκλίνει στη λύση του γραμμικού συστήματος προσδιορισμού των τιμών ισορροπίας της τελικής τεχνικής (β):

$$\hat{p}^{(\beta)} = \hat{p}^{(\beta)} A^{(\beta)} (1+r) + l^{(\beta)},$$

αν και μόνο αν η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι παραγωγική. Με άλλα λόγια, θα αποδείξουμε, ότι, δοθείσας της αρχικής τεχνικής (α) και της τελικής τεχνικής (β), αν στην τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^{(\alpha)}\right)$, η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι παραγωγική, τότε και μόνο τότε θα ισχύει:

$$\lim_{\theta \to \infty} \hat{p}^{(\alpha,\theta)} = \hat{p}^{(\beta)}, \; \theta = 1,2,\ldots \tag{4}$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει:

$$\hat{p}^{(\alpha,\theta)} - \hat{p}^{(\beta)} = \left[\hat{p}^{(\alpha,\theta-1)} A^{(\beta)} (1+r) + l^{(\beta)}\right] - \left[\hat{p}^{(\beta)} A^{(\beta)} (1+r) + l^{(\beta)}\right] \Rightarrow$$

$$\hat{p}^{(\alpha,\theta)} - \hat{p}^{(\beta)} = \left(\hat{p}^{(\alpha,\theta-1)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)A^{(\beta)}(1+r),\ \theta = 1,2,\ldots \tag{5}$$

Αν έχουμε $\theta = 1$, τότε από τις σχέσεις (2) και (5) προκύπτει:

$$\hat{p}^{(\alpha,1)} - \hat{p}^{(\beta)} = \left(\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)A^{(\beta)}(1+r) \tag{6}$$

Έστω ότι $\theta \geq 2$. Αναπτύσσοντας τη σχέση (5) έχουμε:

$$\hat{p}^{(\alpha,\theta)} - \hat{p}^{(\beta)} = \left[\left(\hat{p}^{(\alpha,\theta-2)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)A^{(\beta)}(1+r)\right]A^{(\beta)}(1+r) \Rightarrow$$

$$\hat{p}^{(\alpha,\theta)} - \hat{p}^{(\beta)} = \left(\hat{p}^{(\alpha,\theta-2)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]^2, \theta = 2,3,\ldots$$

Ακολουθώντας την ανωτέρω επαναληπτική διαδικασία, μετά από $\theta - 2$ διαδοχικά βήματα έχουμε:

$$\hat{p}^{(\alpha,\theta)} - \hat{p}^{(\beta)} = \left(\hat{p}^{(\alpha,0)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]^\theta, \theta = 2,3,\ldots$$

Η ανωτέρω σχέση με βάση την (2) γράφεται ως εξής:

$$\hat{p}^{(\alpha,\theta)} - \hat{p}^{(\beta)} = \left(\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]^\theta,\ \theta = 2,3,\ldots \tag{7}$$

Γενικεύοντας, από τις σχέσεις (2), (6) και (7) συνεπάγεται:

$$\hat{p}^{(\alpha,\theta)} - \hat{p}^{(\beta)} = \left(\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]^\theta, \theta = 0,1,2,\ldots \text{[8]} \tag{8}$$

Στο σημείο αυτό η αποδεικτική διαδικασία διχοτομείται ως εξής:

Ι. Ικανή συνθήκη:

Από τις υποθέσεις μας, σύμφωνα με τις οποίες η μη αρνητική μήτρα

---

[8] Η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ ονομάζεται *"μήτρα αναπροσεγγισμού" (iteration matrix).*

$\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι παραγωγική και το ποσοστό κέρδους r λαμβάνει τιμές στο διάστημα $\left[0, R^{(\alpha)}\right)$, έχουμε δείξει ότι συνεπάγεται:

$$0 \leq r \prec \min\left(R^{(\alpha)}, R^{(\beta)}\right) = R^*$$

Άρα, αρκεί να αποδείξουμε, ότι αν η μήτρα $A^{(\beta)}$ είναι παραγωγική, τότε για κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους που ανήκει στο διάστημα $\left[0, R^*\right)$ ισχύει η σχέση (4). Θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

a. Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, ισχύει:

$$\hat{p}^{(\alpha)} \neq \hat{p}^{(\beta)} \tag{9}$$

Επειδή και μόνο επειδή η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι παραγωγική, η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι συγκλίνουσα, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{\theta \to \infty} \left[A^{(\beta)}(1+r)\right]^{\theta} = 0^{9} \tag{10}$$

Έτσι, από τις σχέσεις (7), (9) και (10) θα έχουμε:

$$\lim_{\theta \to \infty} \left(\hat{p}^{(\alpha,\theta)} - \hat{p}^{(\beta)}\right) = \lim_{\theta \to \infty} \left\{\left(\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]^{\theta}\right\} \Rightarrow$$

---

[9] Μια μήτρα $H \in R^{n \times n}$ ονομάζεται συγκλίνουσα αν ισχύει:

$$\lim_{\theta \to \infty} H^{\theta} = 0$$

Για την απόδειξη ότι μια μήτρα είναι παραγωγική αν και μόνο αν είναι συγκλίνουσα βλέπε μεταξύ άλλων Berman and Plemmons [1979, σσ. 9-10].

$$\lim_{\theta\to\infty}\left(\hat{p}^{(\alpha,\theta)}-\hat{p}^{(\beta)}\right)=\left(\hat{p}^{(\alpha)}-\hat{p}^{(\beta)}\right)\lim_{\theta\to\infty}\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]^{\theta}\Rightarrow$$

$$\lim_{\theta\to\infty}\left(\hat{p}^{(\alpha,\theta)}-\hat{p}^{(\beta)}\right)=0\Rightarrow$$

$$\lim_{\theta\to\infty}\hat{p}^{(\alpha,\theta)}=\hat{p}^{(\beta)},\ \theta=1,2,...$$

b. Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r\in\left[0,R^{*}\right)$, ισχύει:

$$\hat{p}^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\beta)} \quad (11)$$ [10]

Από τις σχέσεις (2), (8) και (11) συνεπάγεται:

$$\hat{p}^{(\alpha,\theta)}-\hat{p}^{(\beta)}=0\Rightarrow$$

$$\hat{p}^{(\alpha,\theta)}=\hat{p}^{(\beta)},\ \theta=0,1,2,...$$ [11]

---

[10] Θα δούμε στη συνέχεια, ότι η σχέση (11) είναι αναγκαία κι ικανή συνθήκη για να είναι οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) ισοκερδοφόρες. Βλέπε Πόρισμα (2.3.3).

[11] Επομένως, αν ισχύει η περίπτωση (I.b), τότε στο τέλος της πρώτης κιόλας περιόδου παραγωγής με την τεχνική παραγωγής (β) τα διάνυσμα τιμών κόστους, εκφρασμένων σε όρους εργασιακής δύναμης, των n παραγόμενων εμπορευμάτων συμπίπτει με το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών ισορροπίας της τελικής τεχνικής (β). Το ανωτέρω συμπέρασμα μπορούμε να διατυπώσουμε εναλλακτικά ως εξής: Αν οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες, τότε, αν και δε συντρέχει λόγος αλλαγής τεχνικής, στην υποθετική περίπτωση που η τεχνική (β) αντικαθιστούσε την τεχνική (α) το διάνυσμα τιμών κόστους, εκφρασμένων σε όρους εργασιακής δύναμης, των n παραγόμενων εμπορευμάτων με την τεχνική παραγωγής (β) συμπίπτει, από το τέλος κιόλας της πρώτης περιόδου παραγωγής, με το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών ισορροπίας της τελικής τεχνικής (β). Προφανώς, στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν, αντί να υποθέσουμε ότι οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες, θεωρήσουμε ότι πληρούνται οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ πληρούν το σύνολο ιδιοτήτων $\mathcal{T}$ και

II. Αναγκαία συνθήκη:

Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση (4). Με βάση τη σχέση (8) θα έχουμε:

$$\lim_{\theta\to\infty} \hat{p}^{(\alpha,\theta)} = \hat{p}^{(\beta)} \Rightarrow$$

$$\lim_{\theta\to\infty}\left(\hat{p}^{(\alpha,\theta)} - \hat{p}^{(\beta)}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{\theta\to\infty}\left\{\left(\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]^{\theta}\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)\lim_{\theta\to\infty}\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]^{\theta} = 0,\ \theta = 0,1,2,\ldots \tag{12}$$

Επομένως, πρέπει να δείξουμε, ότι αν σε μια τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^{(\alpha)}\right)$, ισχύει η σχέση (12), τότε για την τιμή r η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι παραγωγική. Θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

a. Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^{(\alpha)}\right)$, ισχύει:

$$\hat{p}^{(\alpha)} \neq \hat{p}^{(\beta)} \tag{13}$$

Από τις σχέσεις (12) και (13) συμπεραίνουμε ότι:

$$\exists \lim_{\theta\to\infty}\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]^{\theta} \in \Re^{n\times n}$$

Αυτό σημαίνει ότι:

- είτε η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι συγκλίνουσα, οπότε έχουμε:

Στην παραγωγή των μη βασικών εμπορευμάτων δεν εισέρχονται μη βασικά εμπορεύματα.

$$\lim_{\theta \to \infty} \left[A^{(\beta)} (1+r) \right]^{\theta} = 0$$

- είτε η μήτρα $\left[A^{(\beta)} (1+r) \right]$ είναι *ημισυγκλίνουσα,*[12] οπότε θα έχουμε:

$$\lim_{\theta \to \infty} \left[A^{(\beta)} (1+r) \right]^{\theta} \geq 0 \text{ [13]} \tag{14}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση (1.2.a.1) και τη σχέση (13) θα έχουμε:

- είτε $\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)} \geq 0$
- είτε $\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)} \leq 0$

---

[12] Μια μήτρα $H \in R^{n \times n}$ ονομάζεται *ημισυγκλίνουσα* αν:

$$\exists \lim_{\theta \to \infty} H^{\theta} \in \Re^{n \times n}$$

Η μήτρα H είναι ημισυγκλίνουσα αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

- $\lambda_m^H \leq 1$
- αν $\lambda_m^H = 1$, τότε όλοι οι στοιχειώδεις διαιρέτες που συνδέονται με την μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας H είναι γραμμικοί.
- αν $\lambda_m^H = 1$, τότε το μέτρο κάθε ιδιοτιμής της H είναι μικρότερο του μέτρου της μέγιστης ιδιοτιμής της, δηλαδή της μονάδας.

Βλ. Berman and Plemmons [1979, σελ. 152] και Debreu and Herstein [1953, σσ. 603-606].

[13] Γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\left[A^{(\beta)} (1+r) \right]^{\theta} \geq 0, \ \theta = 1,2,\ldots$$

Άρα, αν η μήτρα $\left[A^{(\beta)} (1+r) \right]$ ήταν ημισυγκλίνουσα θα είχαμε:

$$\lim_{\theta \to \infty} \left[A^{(\beta)} (1+r) \right]^{\theta} \geq 0$$

Κατά συνέπεια, αν η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ ήταν ημισυγκλίνουσα, τότε εφαρμόζοντας τις ανωτέρω συνθήκες, καθώς επίσης και τη σχέση (14), στη σχέση (12) θα συνεπάγετο αντίστοιχα:

- είτε $\left(\hat{p}^{(\alpha)}-\hat{p}^{(\beta)}\right)\lim_{\theta\to\infty}\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]^{\theta}\geq 0$
- είτε $\left(\hat{p}^{(\alpha)}-\hat{p}^{(\beta)}\right)\lim_{\theta\to\infty}\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]^{\theta}\leq 0$

Σε κάθε περίπτωση, αν η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ ήταν ημισυγκλίνουσα θα είχαμε:

$$\left(\hat{p}^{(\alpha)}-\hat{p}^{(\beta)}\right)\lim_{\theta\to\infty}\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]^{\theta}\neq 0$$

κι επομένως η σχέση (12) δεν θα ίσχυε *(άτοπο)*.

Επομένως, αν ισχύει η σχέση (13), τότε από τη σχέση (4) προκύπτει ότι η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι συγκλίνουσα ή, ισοδύναμα, παραγωγική.

b. Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r\in\left[0,R^{(\alpha)}\right)$, ισχύει:

$$\hat{p}^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\beta)} \tag{15}$$

Όταν οι τιμές των εμπορευμάτων που παράγονται από την τεχνική (α) εκφράζονται σε όρους της εργασιακής δύναμης, το διάστημα $\left[0,R^{(\alpha)}\right)$ του ποσοστού κέρδους αποτελεί το οικονομικά σημαντικό διάστημα τιμών του ποσοστού κέρδους r της τεχνικής (α). Επομένως, αποκλειστικά και μόνο στις τιμές r του ποσοστού κέρδους που ανήκουν στο διάστημα $\left[0,R^{(\alpha)}\right)$ θα ισχύει:

$$\hat{p}^{(\alpha)}\succ 0$$

Έτσι, από την ανωτέρω σχέση και τη σχέση (15) θα έχουμε:

$$\hat{p}^{(\beta)} \succ 0$$ [14]

κι επομένως, για τους λόγους που μόλις αναφέραμε, οι οποίοι ισχύουν για κάθε παραγωγική τεχνική, το ποσοστό κέρδους r θα λαμβάνει τιμές στο διάστημα $\left[0, R^{(\beta)}\right)$, δηλαδή, σε τελική ανάλυση, στο διάστημα $\left[0, R^{*}\right)$, όπου $R^{*} = \min\left(R^{(\alpha)}, R^{(\beta)}\right)$.

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω, θα έχουμε:

$$\lambda_m\left[A^{(\beta)}(1+r)\right] = \lambda_m^{A^{(\beta)}}(1+r) \Rightarrow$$

$$\lambda_m\left[A^{(\beta)}(1+r)\right] = \frac{1+r}{1+R^{(\beta)}} \Rightarrow$$

$$\lambda_m\left[A^{(\beta)}(1+r)\right] \prec 1$$

Επομένως, αν ισχύει η σχέση (15), τότε από τη σχέση (4) προκύπτει ότι η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι παραγωγική.

Β. Στο στάδιο (Β) θα δείξουμε την ισχύ της Πρότασης (1) για την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου, εκφρασμένου σε όρους ενός οποιουδήποτε numeraire. Με άλλα λόγια, θα αποδείξουμε, ότι, δοθείσας της αρχικής τεχνικής (α) και της τελικής τεχνικής (β), αν στην τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^{(\alpha)}\right)$, η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι παραγωγική, τότε και μόνο τότε θα ισχύει:

---

[14] Από την ανωτέρω σχέση προκύπτει ότι η μήτρα $A^{(\beta)}$ είναι παραγωγική.

$$\lim_{\theta\to\infty} w^{(\alpha,\theta)} = w^{(\beta)},\ \theta = 1,2,... \qquad (16)$$

Έστω $\widetilde{p}^{(\alpha,\theta)}$, $\theta = 1,2,...$, το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών κόστους, εκφρασμένων σε όρους ενός οποιουδήποτε numeraire και $w^{(\alpha,\theta)}$ η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου που αντιστοιχούν στην θ περίοδο παραγωγής με την τελική τεχνική παραγωγής (β), όταν οι τιμές των υλικών εισροών της περιόδου παραγωγής (1) εκφράζονται από το διάνυσμα ονομαστικών τιμών ισορροπίας $\widetilde{p}^{(\alpha)}$ της αρχικής τεχνικής (α). Έτσι, θα έχουμε:

$$\widetilde{p}^{(\alpha,\theta)} = w^{(\alpha,\theta)}\hat{p}^{(\alpha,\theta)},\ \theta = 1,2,... \qquad (17)$$

Ορίζουμε:

$$w^{(\alpha,0)} = w^{(\alpha)} \qquad (18)$$

και

$$\widetilde{p}^{(\alpha,0)} = \widetilde{p}^{(\alpha)} \qquad (19)$$

Με βάση τις σχέσεις (17), (18) και (19), γενικά θα ισχύει:

$$\widetilde{p}^{(\alpha,\theta)} = w^{(\alpha,\theta)}\hat{p}^{(\alpha,\theta)},\ \theta = 0,1,2,... \qquad (20)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (19) και την ισχύουσα, τυχαία εξίσωση τυποποίησης, για την τιμή του τυπικού εμπορεύματος u (σε κάθε περίοδο παραγωγής θ) θα έχουμε:

$$\widetilde{p}^{(*,\theta)}u = 1,\ \text{με}\ * = \alpha,\beta\ \text{και}\ \theta = 0,1,2,... \qquad (21)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (20) και (21), προσδιορίζουμε την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου $w^{(\alpha,\theta)}$, $\theta = 0,1,2,...$, της θ περιόδου παραγωγής ως εξής:

$$\widetilde{p}^{(\alpha,\theta)}u = 1 \Leftrightarrow$$

$$w^{(\alpha,\theta)}\hat{p}^{(\alpha,\theta)}u=1\Leftrightarrow$$

$$w^{(\alpha,\theta)}=\frac{1}{\hat{p}^{(\alpha,\theta)}u},\ \theta=0,1,2,\ldots \tag{22}$$

Επομένως, σύμφωνα με τις σχέσεις (1) και (22) καθώς και του σκέλους της Πρότασης (1) που αναφέρεται στο διάνυσμα των τιμών κόστους, στην ιδιαίτερη περίπτωση που εκφράζονται σε όρους του μη παραγόμενου εμπορεύματος: της εργασιακής δύναμης θα έχουμε:

$$\lim_{\theta\to\infty} w^{(\alpha,\theta)}=w^{(\beta)}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\hat{p}^{(\alpha,\theta)}u}=\frac{1}{\hat{p}^{(\beta)}u}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\lim\limits_{\theta\to\infty}\hat{p}^{(\alpha,\theta)}u}=\frac{1}{\hat{p}^{(\beta)}u}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{\theta\to\infty}\hat{p}^{(\alpha,\theta)}u=\hat{p}^{(\beta)}u\Leftrightarrow$$

$$\lambda_m\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]\prec 1$$

Γ. Στο τελικό στάδιο θα δείξουμε την ισχύ της Πρότασης (1) για το διάνυσμα των τιμών κόστους, στην περίπτωση που εκφράζονται σε όρους ενός οποιουδήποτε παραγόμενου εμπορεύματος. Με άλλα λόγια, θα αποδείξουμε, ότι, δοθείσας της αρχικής τεχνικής (α) και της τελικής τεχνικής (β), αν στην τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r\in\left[0,R^{(\alpha)}\right)$, η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι παραγωγική, τότε και μόνο τότε θα ισχύει:

$$\lim_{\theta\to\infty}\tilde{p}^{(\alpha,\theta)}=\tilde{p}^{(\beta)},\ \theta=1,2,\ldots \tag{23}$$

Πράγματι, από τις σχέσεις (20) και (22) προκύπτει:

$$\tilde{p}^{(\alpha,\theta)} = \frac{1}{\hat{p}^{(\alpha,\theta)}u}\hat{p}^{(\alpha,\theta)}, \theta = 0,1,2,... \tag{24}$$

Έτσι, από την ανωτέρω σχέση (24) θα έχουμε:

$$\lim_{\theta\to\infty} \tilde{p}^{(\alpha,\theta)} = \lim_{\theta\to\infty}\left(\frac{1}{\hat{p}^{(\alpha,\theta)}u}\hat{p}^{(\alpha,\theta)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\theta\to\infty} \tilde{p}^{(\alpha,\theta)} = \frac{1}{\lim\limits_{\theta\to\infty} \hat{p}^{(\alpha,\theta)}u} \lim_{\theta\to\infty} \hat{p}^{(\alpha,\theta)}, \ \theta = 0,1,2,... \tag{25}$$

Στο σημείο αυτό η αποδεικτική διαδικασία διχοτομείται ως εξής:

I. Ικανή συνθήκη:

Έστω ότι η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι παραγωγική. Με βάση τις σχέσεις (1), (16), (23) και (25) θα έχουμε:

$$\lim_{\theta\to\infty} \tilde{p}^{(\alpha,\theta)} = \frac{1}{\lim\limits_{\theta\to\infty} \hat{p}^{(\alpha,\theta)}u} \lim_{\theta\to\infty} \hat{p}^{(\alpha,\theta)} \Rightarrow$$

$$\lim_{\theta\to\infty} \tilde{p}^{(\alpha,\theta)} = \frac{1}{\hat{p}^{(\beta)}u}\hat{p}^{(\beta)} \Rightarrow$$

$$\lim_{\theta\to\infty} \tilde{p}^{(\alpha,\theta)} = w^{(\beta)}\hat{p}^{(\beta)} \Rightarrow$$

$$\lim_{\theta\to\infty} \tilde{p}^{(\alpha,\theta)} = \tilde{p}^{(\beta)}$$

II. Αναγκαία συνθήκη:

Έστω ότι ισχύει η σχέση:

$$\lim_{\theta\to\infty} \tilde{p}^{(\alpha,\theta)} = \tilde{p}^{(\beta)},\ \theta = 1,2,\ldots$$

Με βάση τις σχέσεις (1) και (25) θα έχουμε:

$$\lim_{\theta\to\infty} \tilde{p}^{(\alpha,\theta)} = \tilde{p}^{(\beta)}$$ [15]

Όμως, όπως έχουμε δείξει, η ανωτέρω συνθήκη ισχύει, αν και μόνο αν η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι παραγωγική.

Πρόταση 2. Αν η αρχική τεχνική είναι η παραγωγική τεχνική (α) και ισχύουν οι ακόλουθες υποθέσεις:

- $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)}$ [16] και
- Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

$$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{T}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{LT}, \mathcal{Z}, \mathcal{H} \text{ και } \Theta,$$

τότε, *για κάθε τυποποίηση* των τιμών που *επιτρέπει* τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων,[17] στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, με

---

[15] Στην αντίθετη περίπτωση που το διάνυσμα $\hat{p}^{(\alpha,\theta)}$ συνέκλινε σε ένα διάνυσμα συγγραμμικό ως προς το διάνυσμα $\hat{p}^{(\beta)}$, δηλαδή ίσχυε:

$$\lim_{\theta\to\infty} \hat{p}^{(\alpha,\theta)} = c\,\hat{p}^{(\beta)},\ \text{όπου } c \in \Re,\ c \succ 0,$$

θα είχαμε άτοπο, ακριβώς διότι, όπως έχουμε δείξει, οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

- $\lim_{\theta\to\infty} \hat{p}^{(\alpha,\theta)} = \hat{p}^{(\beta)}$
- $\exists \lim_{\theta\to\infty} \hat{p}^{(\alpha,\theta)} \in \Re^{n\times n}$
- $0 \prec \lambda_m\left[A^{(\beta)}(1+r)\right] \prec 1$

[16] Αυτό δηλώνει ότι και η μήτρα $A^{(\beta)}$ είναι παραγωγική.

[17] Μη *επιτρεπτή* τυποποίηση έχουμε όταν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις κατηγορίες:

$$\mathcal{E},\ \mathcal{LT},\ \mathcal{Z},\ \mathcal{H} \text{ και } \Theta$$

$r \in [0, R]$, το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών κόστους των διαδοχικών περιόδων παραγωγής που ακολουθούν την αλλαγή της μεθόδου παραγωγής του εμπορεύματος ω συγκλίνει στο αντίστοιχο διάνυσμα τιμών ισορροπίας μιας στατικής οικονομίας (steady state economy) που χρησιμοποιεί την τελική τεχνική (β).[18]

Απόδειξη: Εφόσον ισχύει:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R,$$

στο διάστημα $[0, R)$ του ποσοστού κέρδους r η μήτρα $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ είναι παραγωγική.[19] Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση (1), αρκεί μόνο να δείξουμε, ότι στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η αντικατάσταση της μεθόδου παραγωγής (α) του εμπορεύματος ω από την μέθοδο παραγωγής (β) ή, αντίστοιχα, η αντικατάσταση της τεχνικής (α) από την τεχνική (β) έχει ως αποτέλεσμα το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών κόστους των διαδοχικών περιόδων παραγωγής που ακολουθούν να συγκλίνει στο αντίστοιχο διάνυσμα τιμών ισορροπίας της τεχνικής (β). Θα υποθέσουμε, ότι σε κάθε περίοδο παραγωγής (θ), $\theta = 1, 2, \ldots$, με την τεχνική παραγωγής (β) το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών κόστους, που αντιστοιχούν στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, προσδιορίζεται από το αντίστοιχο διάνυσμα των σχετικών τιμών κόστους και την ισχύουσα εξίσωση τυποποίησης:

και ως τυπικό εμπόρευμα λειτουργεί ένα απλό ή σύνθετο βασικό εμπόρευμα. Πράγματι, σε κάθε τέτοια περίπτωση, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους ο προσδιορισμός των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *αδύνατος*. Το θέμα αυτό πραγματευτήκαμε στο Μέρος (Ι).

[18] Το ερώτημα αν στην τιμή R του ποσοστού κέρδους το αντίστοιχο διάνυσμα των ονομαστικών τιμών κόστους των διαδοχικών περιόδων παραγωγής που ακολουθούν την αντικατάσταση της μεθόδου παραγωγής (α) του εμπορεύματος ω από την μέθοδο παραγωγής (β) συγκλίνει στο αντίστοιχο διάνυσμα των τιμών ισορροπίας μιας στατικής οικονομίας (steady state economy) που χρησιμοποιεί την τελική τεχνική (β), δεν έχει τεθεί ποτέ μέχρι σήμερα στην βιβλιογραφία.

[19] Πράγματι, για την μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_m\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ της μη αρνητικής μήτρας $\left[A^{(\beta)}(1+r)\right]$ έχουμε:

$$\lambda_m\left[A^{(\beta)}(1+r)\right] = (1+r)\lambda_m^{A^{(\beta)}} = \frac{1+r}{1+R^{(\beta)}} \prec 1$$

$$\mathrm{p}^{(*,\theta)}u=1,\ \text{με: } *=\alpha,\beta \text{ και } \theta=1,2,\ldots$$ [20] (26)

Για την πληρότητα της απόδειξης που θα ακολουθήσει θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

I. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{LT}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{H}$, και Θ

Στην τιμή R του ποσοστού κέρδους τα διανύσματα τιμών $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ και $\mathrm{p}^{(\beta)}$ των τεχνικών (α) και (β) αντίστοιχα προσδιορίζονται από τα συστήματα εξισώσεων (1.3.11) και (1.3.12). Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.3.48) στη σχέση (1.3.12) έχουμε:

$$\mathrm{p}^{(\beta)}=\mathrm{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+R)$$

ή

$$\mathrm{p}^{(\beta)}=\mathrm{p}^{(\alpha,1)}, \tag{27}$$

όπου το διάνυσμα $\mathrm{p}^{(\alpha,1)}$ αντιπροσωπεύει τις *σχετικές* τιμές κόστους των εμπορευμάτων που παράγονται την (1) περίοδο παραγωγής με την τεχνική παραγωγής (β), όταν οι τιμές των υλικών εισροών της περιόδου παραγωγής (1) εκφράζονται από το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών ισορροπίας $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ της αρχικής τεχνικής (α). Με βάση τη σχέση (27), αν τυποποιήσουμε τα διανύσματα $\mathrm{p}^{(\alpha,1)}$ και $\mathrm{p}^{(\beta)}$ με την εξίσωση τυποποίησης (26), για την οποία υποθέτουμε ότι επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων, θα έχουμε:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}=\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha,1)} \tag{28}$$

Κατά συνέπεια, στο τέλος της πρώτης κιόλας περιόδου παραγωγής με την τεχνική παραγωγής (β) το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών κόστους των n παραγόμενων εμπορευμάτων, που αντιστοιχεί στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, συμπίπτει με το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών ισορροπίας $\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}$ της τελικής τεχνικής (β).

---

[20] Έτσι ορισμένη η εξίσωση τυποποίησης επιβάλλει ένα *διαχρονικό* μέτρο των τιμών που ισχύει για κάθε τεχνική.

II. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$.

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.3.40) στη σχέση (1.3.38) έχουμε:

$$p_1^{(\beta)} = p_1^{(\alpha)} A_{11}^{(\beta)} (1+R)$$

ή

$$p_1^{(\beta)} = p_1^{(\alpha,1)}, \tag{29}$$

όπου το διάνυσμα $p_1^{(\alpha,1)}$ αντιπροσωπεύει τις *σχετικές* τιμές κόστους των k βασικών εμπορευμάτων που παράγονται την (1) περίοδο παραγωγής με την τεχνική παραγωγής (β), όταν οι τιμές των υλικών εισροών της περιόδου παραγωγής (1) εκφράζονται από το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών ισορροπίας $p_1^{(\alpha)}$ της αρχικής τεχνικής (α). Κατά συνέπεια, στο τέλος της πρώτης κιόλας περιόδου παραγωγής με την τεχνική παραγωγής (β) το διάνυσμα των σχετικών τιμών κόστους των k βασικών εμπορευμάτων, που αντιστοιχεί στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, συμπίπτει με το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών ισορροπίας των k βασικών εμπορευμάτων της τελικής τεχνικής (β).[21]

Έτσι, απομένει να δείξουμε, ότι το διάνυσμα τιμών κόστους των $n-k$ μη βασικών εμπορευμάτων που παράγονται με την τεχνική παραγωγής (β), στις διαδοχικές περιόδους παραγωγής που ακολουθούν την αντικατάσταση της μεθόδου παραγωγής (α) του εμπορεύματος ω από την μέθοδο παραγωγής (β) ή, αντίστοιχα, την αντικατάσταση της τεχνικής (α) από την τεχνική (β), συγκλίνει στο διάνυσμα τιμών ισορροπίας των μη βασικών εμπορευμάτων της τελικής τεχνικής (β).

Ορίζουμε:

$$p_2^{(\alpha,0)} = p_2^{(\alpha)} \tag{30}$$

Στις διαδοχικές περιόδους παραγωγής που ακολουθούν την αντικατάσταση της τεχνικής (α) από την τεχνική (β), τα διανύσματα τιμών κόστους των $n-k$ μη

---

[21] Αυτό είναι απολύτως λογικό, αν σκεφτούμε ότι οι υποτεχνικές παραγωγής των βασικών εμπορευμάτων στις τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι ίδιες. Άλλωστε για το λόγο αυτό ισχύει η σχέση (1.3.40).

βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται με την τελική τεχνική παραγωγής (β), προσδιορίζονται από τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων:

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,1)} = \mathrm{p}_1 A_{12}^{(\beta)}(1+R) + \mathrm{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)}(1+R)$$

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,2)} = \mathrm{p}_1 A_{12}^{(\beta)}(1+R) + \mathrm{p}_2^{(\alpha,1)} A_{22}^{(\beta)}(1+R)$$

...

...

...

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta-1)} = \mathrm{p}_1 A_{12}^{(\beta)}(1+R) + \mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta-2)} A_{22}^{(\beta)}(1+R)$$

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)} = \mathrm{p}_1 A_{12}^{(\beta)}(1+R) + \mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta-1)} A_{22}^{(\beta)}(1+R), \tag{31}$$

όπου το διάνυσμα $\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)}, \theta = 1,2,\ldots$, αντιπροσωπεύει τις σχετικές τιμές κόστους των μη βασικών εμπορευμάτων που παράγονται την (θ) περίοδο παραγωγής με την τεχνική παραγωγής (β), όταν οι τιμές των υλικών εισροών της περιόδου παραγωγής (1) εκφράζονται από το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών ισορροπίας $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ της αρχικής τεχνικής (α).

Θα δείξουμε, ότι, δοθέντος του διανύσματος τιμών κόστους $\mathrm{p}_2^{(\alpha)}$ των μη βασικών εμπορευμάτων της αρχικής τεχνικής (α) ή, πιο σύντομα, της αρχικής τεχνικής (α), στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η ακολουθία διανυσμάτων $\mathrm{p}_2^{(\alpha,1)}, \mathrm{p}_2^{(\alpha,2)}, \ldots$ συγκλίνει στη λύση του γραμμικού συστήματος προσδιορισμού των τιμών ισορροπίας των μη βασικών εμπορευμάτων της τελικής τεχνικής (β):

$$\mathrm{p}_2^{(\beta)} = \mathrm{p}_1 A_{11}^{(\beta)}(1+R) + \mathrm{p}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\beta)}(1+R)$$

Με άλλα λόγια θα αποδείξουμε, ότι, δοθείσας της αρχικής τεχνικής (α) και της τελικής τεχνικής (β), στην τυχαία τιμή R του ποσοστού κέρδους, θα ισχύει:

$$\lim_{\theta \to \infty} \mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)} = \mathrm{p}_2^{(\beta)} \tag{32}$$

Από τις σχέσεις (30) και (31) προκύπτει:

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)} = \left[\mathrm{p}_1 A_{12}^{(\beta)}(1+R) + \mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta-1)} A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right] - \left[\mathrm{p}_1 A_{12}^{(\beta)}(1+R) + \mathrm{p}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right] \Rightarrow$$

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)} = \left(\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta-1)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)}\right) A_{22}^{(\beta)}(1+R),\ \theta = 1,2,\ldots \tag{33}$$

Αν έχουμε $\theta = 1$, τότε από τις σχέσεις (30) και (33) προκύπτει:

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,1)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)} = \left(\mathrm{p}_2^{(\alpha)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)}\right) A_{22}^{(\beta)}(1+R) \tag{34}$$

Έστω ότι $\theta \geq 2$. Αναπτύσσοντας τη σχέση (33) έχουμε:

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)} = \left[\left(\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta-2)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)}\right) A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right] A_{22}^{(\beta)}(1+R) \Rightarrow$$

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)} = \left[\left(\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta-2)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)}\right)\right] \left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]^2,\ \theta = 2,3,\ldots$$

Ακολουθώντας την ανωτέρω επαναληπτική διαδικασία, μετά από $\theta - 2$ διαδοχικά βήματα έχουμε:

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)} = \left(\mathrm{p}_2^{(\alpha,0)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)}\right) \left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]^\theta,\ \theta = 2,3,\ldots$$

Η ανωτέρω σχέση, με βάση τη σχέση (30), γράφεται ως εξής:

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)} = \left(\mathrm{p}_2^{(\alpha)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)}\right) \left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]^\theta,\ \theta = 2,3,\ldots \tag{35}$$

Γενικεύοντας, από τις σχέσεις (30), (34) και (35) συνεπάγεται:

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)} = \left(\mathrm{p}_2^{(\alpha)} - \mathrm{p}_2^{(\beta)}\right) \left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]^\theta,\ \theta = 0,1,2,3,\ldots \tag{36}$$

Η μήτρα $\left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]$, δηλαδή η μήτρα *αναπροσεγγισμού (iteration matrix)* της ανωτέρω επαναληπτικής διαδικασίας, είναι συγκλίνουσα.[22] Έτσι, από τη σχέση (36) θα έχουμε:

---

[22] Σύμφωνα με τους Berman and Plemmons [1979, σσ. 9-10], αρκεί να δείξουμε ότι η μήτρα $\left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]$ είναι παραγωγική. Από τις συνθήκες $\mathcal{T}_2$ και $\mathcal{D}_2$ ή, ισοδύναμα, τη σχέση (1.3.2) θα έχουμε:

$$\lambda_m\left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right] = (1+R)\lambda_m^{A_{22}^{(\beta)}} = \frac{1+R}{1+R^{A_{22}^{(\beta)}}} \prec 1$$

Επομένως, η μήτρα $\left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]$ είναι συγκλίνουσα κι ως εκ τούτου ισχύει:

$$\lim_{\theta\to\infty}\left(\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)}-\mathrm{p}_2^{(\beta)}\right)=\lim_{\theta\to\infty}\left\{\left(\mathrm{p}_2^{(\alpha)}-\mathrm{p}_2^{(\beta)}\right)\left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]^{\theta}\right\}\Rightarrow$$

$$\lim_{\theta\to\infty}\left(\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)}-\mathrm{p}_2^{(\beta)}\right)=\left(\mathrm{p}_2^{(\alpha)}-\mathrm{p}_2^{(\beta)}\right)\lim_{\theta\to\infty}\left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]^{\theta}\Rightarrow$$

$$\lim_{\theta\to\infty}\left(\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)}-\mathrm{p}_2^{(\beta)}\right)=0\Rightarrow$$

$$\lim_{\theta\to\infty}\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)}=\mathrm{p}_2^{(\beta)},\ \theta=0,1,2,..$$ [23]

Με βάση τις σχέσεις (29) και (32), αν τυποποιήσουμε τα διανύσματα τιμών $\left[\lim_{\theta\to\infty}\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha,\theta)}\right]$, $\mathrm{p}_1^{(\alpha,1)}$ και $\mathrm{p}^{(\beta)}$ με την ισχύουσα εξίσωση τυποποίησης (26) θα έχουμε:

$$\lim_{\theta\to\infty}\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha,\theta)}=\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)},\ \theta=0,1,2,..$$

Κατά συνέπεια, δείξαμε, ότι, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, το διάνυσμα των ονομαστικών τιμών κόστους των n παραγόμενων εμπορευμάτων που παράγονται με την τεχνική παραγωγής (β), όταν οι τιμές των υλικών εισροών της περιόδου παραγωγής (1) εκφράζονται από το αντίστοιχο διάνυσμα τιμών ισορροπίας $\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}$ της αρχικής τεχνικής (α), συγκλίνει στο αντίστοιχο διάνυσμα τιμών ισορροπίας $\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}$ της τελικής τεχνικής (β).

$$\lim_{\theta\to\infty}\left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]^{\theta}=0$$

[23] Προφανώς, στην ειδική περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{T}$ και ισχύει:

$$A_{22}^{(\alpha)}=A_{22}^{(\beta)}=0,$$

η σύγκλιση του (τυποποιημένου ή ατυποποίητου) διανύσματος τιμών κόστους των διαδοχικών περιόδων παραγωγής με την τεχνική παραγωγής (β) στο αντίστοιχο διάνυσμα τιμών ισορροπίας της τελικής τεχνικής (β) ολοκληρώνεται στο τέλος της πρώτης περιόδου παραγωγής με την τελική τεχνική παραγωγής (β).

Πρόταση 3. Αν η αρχική τεχνική είναι η παραγωγική τεχνική (α) και ισχύουν οι ακόλουθες υποθέσεις:

- Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{J}$,
- $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)}$[24] και
- $R^{(\beta)} = R^{A_{11}^{(\beta)}} \prec R^{A_{22}^{(\beta)}}$,

τότε, *για κάθε τυποποίηση των τιμών*, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους το διάνυσμα των (τυποποιημένων ή ατυποποίητων) τιμών κόστους των διαδοχικών περιόδων παραγωγής που ακολουθούν την αλλαγή της μεθόδου παραγωγής του εμπορεύματος ω *δε συγκλίνει* στο αντίστοιχο διάνυσμα τιμών ισορροπίας μιας στατικής οικονομίας (steady state economy) που χρησιμοποιεί την τελική τεχνική.[25]

Απόδειξη: Από τη συνθήκη $\mathcal{J}_2$ έχουμε:

$$R^{A_{11}^{(\alpha)}} = R^{A_{22}^{(\alpha)}} = R^{(\alpha)} \tag{37}$$

Επίσης, από τη συνθήκη $\mathcal{J}_3$ προκύπτει:

$$R^{A_{11}^{(\alpha)}} = R^{A_{11}^{(\beta)}} = R^{(\alpha)} \text{[26]} \tag{38}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (37) και (38) συνεπάγεται, ότι η υπόθεση μας:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

ισχύει, αν και μόνο αν έχουμε:

$$R^{(\beta)} = R^{A_{11}^{(\beta)}} \leq R^{A_{22}^{(\beta)}} \text{[27]} \tag{39}$$

---

24 Αυτό δηλώνει ότι και η μήτρα $A^{(\beta)}$ είναι παραγωγική.

25 Προφανώς, αναφερόμαστε σε κάθε περίπτωση τυποποίησης των τιμών που επιτρέπει στην τιμή R του ποσοστού κέρδους τον πλήρη προσδιορισμό των τιμών των τεχνικών (α) και (β). Στην αντίθετη περίπτωση, που, για μια ορισμένη τυποποίηση των τιμών, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους δεν είναι *δυνατός* ο προσδιορισμός των τιμών όλων των εμπορευμάτων που παράγονται από μια τουλάχιστον τεχνική, η σύγκλιση είναι εκ των πραγμάτων *αδύνατη.*

26 Βλέπε τη σχέση (1.2.a.43).

27 Με άλλα λόγια, αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{J}$, τότε η υπόθεσή μας:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

Θα θεωρήσουμε την περίπτωση που ισχύει:

$$R^{(\beta)} = R^{A_{11}^{(\beta)}} \prec R^{A_{22}^{(\beta)}} \tag{40}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (37), στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η μοναδική οικονομικά σημαντική λύση του συστήματος (11) για το διάνυσμα τιμών $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ της τεχνικής (α) έχει ως εξής:

- Το διάνυσμα τιμών $p_1^{(\alpha)}$ των βασικών εμπορευμάτων αποτελεί την μηδενική (*τετριμμένη*) λύση:

$$p_1^{(\alpha)} = 0 \tag{41}$$

- Το διάνυσμα τιμών $\mathrm{p}_2^{(\alpha)}$ των μη βασικών εμπορευμάτων αποτελεί το θετικό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $A_{22}^{(\alpha)}$ που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της $\left(\mathrm{p}_2^{(\alpha)} \succ 0\right)$.[28]

Αντίστοιχα, σύμφωνα με τη σχέση (40), στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η μοναδική οικονομικά σημαντική λύση για το διάνυσμα τιμών $\mathrm{p}^{(\beta)}$ της τεχνικής (β) προσδιορίζεται από τα ακόλουθα συστήματα:

$$\mathrm{p}_1^{(\beta)} = \mathrm{p}_1^{(\beta)} A_{11}(1+R), \text{ με } \mathrm{p}_1^{(\beta)} \succ 0 \tag{42}$$

και

$$\mathrm{p}_2^{(\beta)} = \mathrm{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)}(1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}, \text{ με } \mathrm{p}_2^{(\beta)} \succ 0 \tag{43}$$

[29]

Αρχικά θα εξετάσουμε τη σύγκλιση του διανύσματος των τιμών κόστους των βασικών εμπορευμάτων που παράγονται με την τεχνική παραγωγής (β), όταν οι τιμές των υλικών εισροών της περιόδου παραγωγής (1) εκφράζονται από το διάνυσμα τιμών ισορροπίας $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ της αρχικής τεχνικής (α).

ισχύει, αν και μόνο αν η αλλαγή της μεθόδου παραγωγής του μη βασικού εμπορεύματος ω αυξάνει ή διατηρεί σταθερό το μέγιστο ποσοστό κέρδους της μη βασικής υποτεχνικής.

[28] Βλέπε Μέρος (I).

[29] Βλέπε για παράδειγμα στην Πρόταση (2) τις σχέσεις (55) και (56).

Θέτουμε:

$$p_1^{(\alpha,0)} = p_1^{(\alpha)} \qquad (44)$$

Από τις σχέσεις (41) και (44) προκύπτει:

$$p_1^{(\alpha,\theta)} = 0\,,\ \theta = 0,1,2,\ldots \qquad (45)$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη σύγκλιση του διανύσματος των τιμών κόστους των μη βασικών εμπορευμάτων που παράγονται με την τεχνική παραγωγής (β), όταν οι τιμές των υλικών εισροών της περιόδου παραγωγής (1) εκφράζονται από το διάνυσμα τιμών ισορροπίας $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ της αρχικής τεχνικής (α). Με βάση τις σχέσεις (30) και (45), στις διαδοχικές περιόδους παραγωγής που ακολουθούν την αντικατάσταση της τεχνικής (α) από την τεχνική (β), τα διανύσματα των τιμών κόστους των $n-k$ μη βασικών εμπορευμάτων, που παράγονται με την τελική τεχνική παραγωγής (β), προσδιορίζονται από τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων:

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,1)} = \mathrm{p}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)}(1+R)$$

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,2)} = \mathrm{p}_2^{(\alpha,1)} A_{22}^{(\beta)}(1+R)$$

...

...

...

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta-1)} = \mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta-2)} A_{22}^{(\beta)}(1+R)$$

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)} = \mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta-1)} A_{22}^{(\beta)}(1+R),\ \theta = 1,2,\ldots$$

Από την ανωτέρω σχέση προκύπτει:

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)} = \mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta-1)} A_{22}^{(\beta)}(1+R) \Rightarrow$$

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)} = \left[\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta-2)} A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right] A_{22}^{(\beta)}(1+R) \Rightarrow$$

$$\mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta)} = \mathrm{p}_2^{(\alpha,\theta-2)} \left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]^2,\ \theta = 1,2,\ldots$$

Ακολουθώντας την ανωτέρω επαναληπτική διαδικασία, μετά από $\theta-2$ διαδοχικά βήματα έχουμε:

$$p_2^{(\alpha,\theta)} = p_2^{(\alpha,0)} \left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]^{\theta},\ \theta = 0,1,2,3,\ldots$$

Η ανωτέρω σχέση με βάση τη σχέση (30) γράφεται ως εξής:

$$p_2^{(\alpha,\theta)} = p_2^{(\alpha)} \left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]^{\theta},\ \theta = 0,1,2,3,\ldots \tag{46}$$

Η μήτρα $\left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]$, δηλαδή η μήτρα *αναπροσεγγισμού (iteration matrix)* της ανωτέρω επαναληπτικής διαδικασίας, είναι συγκλίνουσα.[30] Έτσι, από τη σχέση (46) θα έχουμε:

$$\lim_{\theta\to\infty} p_2^{(\alpha,\theta)} = \lim_{\theta\to\infty} p_2^{(\alpha)}\left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]^{\theta} \Rightarrow$$

$$\lim_{\theta\to\infty} p_2^{(\alpha,\theta)} = 0,\ \ \theta = 0,1,2,3,\ldots \tag{47}$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (45) και (47), θα έχουμε:

$$\lim_{\theta\to\infty} p^{(\alpha,\theta)} = 0,\ \ \theta = 0,1,2,3,\ldots \tag{48}$$

Επομένως, από τη σχέση (48) συμπεραίνουμε, ότι αν για την τεχνική (β) ισχύει:

$$R^{(\beta)} = R^{A_{11}^{(\beta)}} \prec R^{A_{22}^{(\beta)}},$$ [31]

---

[30] Από τη σχέση (40) και την υπόθεσή μας:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

προκύπτει:

$$R \prec R^{A_{22}^{(\beta)}}$$

Με βάση την ανωτέρω σχέση θα έχουμε:

$$\lambda_m\left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right] = (1+R)\lambda_m^{A_{22}^{(\beta)}} = \frac{1+R}{1+R^{A_{22}^{(\beta)}}} \prec 1$$

Επομένως, η μήτρα $\left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]$ είναι συγκλίνουσα κι ως εκ τούτου ισχύει:

$$\lim_{\theta\to\infty}\left[A_{22}^{(\beta)}(1+R)\right]^{\theta} = 0$$

[31] Βλέπε τη σχέση (40).

τότε στις διαδοχικές περιόδους παραγωγής που ακολουθούν την αντικατάσταση της μεθόδου παραγωγής του εμπορεύματος ω από μια νέα μέθοδο ή, αντίστοιχα, την αντικατάσταση της τεχνικής (α) από την τεχνική (β), είναι *αδύνατον* το διάνυσμα των τυποποιημένων ή ατυποποίητων τιμών κόστους των παραγόμενων εμπορευμάτων με την τεχνική παραγωγής (β), όταν οι τιμές των υλικών εισροών της περιόδου παραγωγής (1) εκφράζονται από το διάνυσμα τιμών ισορροπίας $\widetilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}$ ή $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ της αρχικής τεχνικής (α), να συγκλίνει στο διάνυσμα τιμών ισορροπίας $\widetilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}$ ή $\mathrm{p}^{(\beta)}$ αντίστοιχα της τελικής τεχνικής (β).

3. ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΚΑΙ Η ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΤΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ

Σε μια δεδομένη τιμή r του ποσοστού κέρδους - με $r \in \left[0, R^*\right)$, αν ισχύει $R^* \prec R$ και $r \in \left[0, R\right]$, αν ισχύει $R^* = R$ - και για μια ορισμένη τυποποίηση των τιμών θα εξετάσουμε την εσωτερική αλληλουχία των προταθέντων στην βιβλιογραφία κριτηρίων, με βάση τα οποία συγκρίνονται δύο τεχνικές παραγωγής ως προς την κερδοφορία. Τα κριτήρια αυτά είναι τα εξής:

- Ο αλγόριθμος της αγοράς.[32]
- Η ελαχιστοποίηση των τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης.
- Η μεγιστοποίηση του ονομαστικού ωρομισθίου.[33]

Πιο συγκεκριμένα, στο Τμήμα (3) η συζήτηση θα περιστραφεί γύρω από την απόδειξη των ακόλουθων προτάσεων:

- Για κάθε τυποποίηση των τιμών στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, η κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία, σύμφωνα με τον αλγόριθμο της αγοράς, είναι *πάντοτε δυνατή*. Επομένως, η σύγκριση των τεχνικών παραγωγής ως προς την κερδοφορία είναι *συνεκτική (coherent)*, δηλαδή είναι ανεξάρτητη της τεχνικής με της οποίας το αντίστοιχο διάνυσμα ονομαστικών τιμών συγκρίνεται η κερδοφορία των τεχνικών.[34]
- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, η κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία, σύμφωνα με τον αλγόριθμο της αγοράς, είναι *πάντοτε δυνατή* κι *ανεξάρτητη* από την τυποποίηση των τιμών.[35]
- Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, το κριτήριο του αλγόριθμου της αγοράς για την κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία

---

[32] Χαρακτηριστικό γνώρισμα του αλγόριθμου της αγοράς είναι η μικροοικονομική προσέγγιση στο πρόβλημα επιλογής τεχνικής.

[33] Χαρακτηριστικό γνώρισμα των δύο ανωτέρω κριτηρίων είναι η μακροοικονομική προσέγγιση στο πρόβλημα επιλογής τεχνικής.

[34] Βλέπε την Πρόταση (3).

[35] Βλέπε την Πρόταση (3).

είναι *μαθηματικά ισοδύναμο* με το κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης.[36]

• Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, το κριτήριο του αλγόριθμου της αγοράς για την κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία δεν είναι γενικά ούτε εννοιολογικά ούτε μαθηματικά ισοδύναμο με το κριτήριο της μεγιστοποίησης του ονομαστικού ωρομισθίου W. Οι λόγοι είναι οι εξής:

* Το κριτήριο της μεγιστοποίησης του ονομαστικού ωρομισθίου W εκφράζει μια ψευδή παράσταση μιας αποκεντρωμένης οικονομίας,[37] μέσω της οποίας οι σχέσεις αιτίου-αιτιατού απεικονίζονται με αντεστραμμένη φορά.[38]

* Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, η κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία, σύμφωνα με το κριτήριο της μεγιστοποίησης του

---

[36] Επομένως, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, η διαδικασία επιλογής τεχνικής συγκλίνει στην ίδια άριστη τεχνική είτε γίνει με το μικροοικονομικό κριτήριο του αλγόριθμου της αγοράς είτε γίνει με το μακροοικονομικό κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τιμών.

[37] Ριζική κριτική των κοινωνικο-οικονομικών προϋποθέσεων της θεωρίας επιλογής τεχνικής που βασίζεται στο κριτήριο της μεγιστοποίησης του ονομαστικού ωρομισθίου διατυπώθηκε από τον Σταμάτη [1991, σελ. 421]. Σύμφωνα με τον Σταμάτη, "...το κριτήριο αυτό είναι ... ξένο προς τις συνθήκες λειτουργίας της καπιταλιστικής οικονομίας, γιατί σε αυτή δεν υπάρχει ένας συλλογικός καπιταλιστής που επιλέγει για δεδομένο ονομαστικό ωρομίσθιο την πλέον κερδοφόρα τεχνική, της οποίας τις επιμέρους διαδικασίες παραγωγής αναλαμβάνουν μετά να διεκπεραιώσουν οι μεμονωμένοι καπιταλιστές". Το ανωτέρω απόσπασμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης ως κριτική της θεωρίας επιλογής τεχνικής που βασίζεται στο κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης.

[38] *"Son principal danger est de suggérer une interprétation erronée de la propriété de maximisation du* salaire, qui résulte de la recherche de surprofits temporaires par les capitalistes avec maintien du taux de profit à long terme, non de l' issue d'un jeu coopératif entre classes.", βλέπε Bidard [1991, σελ. 82]. Επίσης, "...moreover, the tendancy of producers to switch to whichever system is cheaper in the existing price situation, will bring them to the system giving the highest W; while systems giving the same W for the same r will be indifferent and can co-exist.", βλέπε Garegnani [1970, σελ. 411]. Τέλος, "It can be shown that, under the present assumptions about the systems of production, this criterion implies that the system of production in use maximises the wage in terms of any commodity for the given rate of profit (interest), or maximises the rate of profit (interest) for the wage given in terms of any commodity.", βλέπε Garegnani [1984, σελ. 146].

ονομαστικού ωρομισθίου W, εξαρτάται από το μέτρο των τιμών (numeraire sensitive).[39]

- Αν ισχύει $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$, τότε το ερμηνευτικό σχήμα του αλγόριθμου της αγοράς μας επιτρέπει να συγκρίνουμε - όποτε αυτό είναι δυνατό -την κερδοφορία των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) στην τιμή R του ποσοστού κέρδους. Έτσι, από την μελέτη της κερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β), σύμφωνα με τον αλγόριθμο της αγοράς, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

* Η σύγκριση των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) ως προς την κερδοφορία τους είναι *δυνατή αποκλειστικά μόνο* για κάθε τυποποίηση των τιμών που *επιτρέπει* τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων.[40] Επιπλέον, αν για μια *επιτρεπτή* τυποποίηση των τιμών η σύγκριση των τεχνικών παραγωγής ως προς την κερδοφορία είναι *συνεκτική (coherent)* και, κατά συνέπεια, οι τεχνικές είναι κατατάξιμες, τότε η κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την

---

[39] Βλέπε Πόρισμα (2). Αυτό βεβαίως συμβαίνει, διότι οι $W-r$ σχέσεις των τεχνικών (α) και (β), που αντιστοιχούν σε μια ορισμένη τυποποίηση των τιμών με ένα τυπικό εμπόρευμα u, σχηματίζονται, αφού διαγραφούν οι διαδικασίες παραγωγής των τεχνικών (α) και (β) που δεν απαιτούνται άμεσα ή έμμεσα για την παραγωγή του τυπικού εμπορεύματος u. Κατά συνέπεια, οι $W-r$ σχέσεις των τεχνικών (α) και (β) είναι στην πραγματικότητα $W-r$ σχέσεις των υποτεχνικών που παράγουν το τυπικό εμπόρευμα ως καθαρό προϊόν και η σύγκριση των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία, σύμφωνα με το κριτήριο της μεγιστοποίησης του ονομαστικού ωρομισθίου W, είναι στην πραγματικότητα σύγκριση των υποτεχνικών που παράγουν το τυπικό εμπόρευμα ως καθαρό προϊόν. Τις ανωτέρω υποτεχνικές ονομάζουμε τυπικές υποτεχνικές. Στην βιβλιογραφία συναντάται επίσης ο όρος "integrated industry", βλέπε Garegnani [1970, σελ. 409].

[40] Μη *επιτρεπτή* τυποποίηση έχουμε όταν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις κατηγορίες:

$$\mathcal{E},\ \mathcal{LT},\ \mathcal{Z},\ \mathcal{H},\ \Theta \text{ και } \mathcal{J}$$

και ως τυπικό εμπόρευμα λειτουργεί ένα απλό ή σύνθετο βασικό εμπόρευμα. Πράγματι, σε κάθε τέτοια περίπτωση, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους ο προσδιορισμός των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *αδύνατος, τουλάχιστον* για μια από τις δύο τεχνικές. Το θέμα αυτό πραγματευτήκαμε στο Μέρος (I).

κερδοφορία είναι *δυνατή* για κάθε *επιτρεπτή* τυποποίηση των τιμών κι *ανεξάρτητη* από αυτήν.[41]

* Οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) ενδέχεται να *είναι μη κατατάξιμες* ως προς την κερδοφορία τους για κάθε τυποποίηση των τιμών. Επομένως, η κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία *δεν είναι πάντοτε δυνατή.*[42]

• Αν ισχύει $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$, τότε στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η σύγκριση των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) ως προς την κερδοφορία τους με τα μακροοικονομικά κριτήρια στα οποία έχουμε αναφερθεί είναι *αδύνατη.*[43] Οι λόγοι είναι οι εξής:

* Το κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, στην προκείμενη περίπτωση δεν έχει εφαρμογή, εφόσον η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ίση με το μηδέν.[44]

* Για κάθε επιτρεπτή τυποποίηση των τιμών η κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία με κριτήριο την μεγιστοποίηση του ονομαστικού ωρομισθίου W συνεπάγεται *υποχρεωτικά* την ισοκερδοφορία των δύο τεχνικών.[45]

---

[41] Βλέπε τις Προτάσεις (10) και (11).

[42] Βλέπε την Πρόταση (12).

[43] Επομένως, αν ισχύει $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$, τότε στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η επιλογής τεχνικής είναι δυνατή - όποτε είναι δυνατή - μόνο με τον αλγόριθμο της αγοράς, δηλαδή μόνο με μικροοικονομικά κριτήρια.

[44] Επομένως, το κριτήριο του αλγόριθμου της αγοράς είναι *ευρύτερο* από το κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης.

[45] Αντίθετα, από τα Πορίσματα (5), (6) και (7), καθώς και την Πρόταση (12) προκύπτει, ότι, σύμφωνα με τον αλγόριθμο της αγοράς, οι τεχνικές (α) και (β) είναι:

• είτε ισοκερδοφόρες, όπως συμβαίνει στην περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στις κατηγορίες:

Α, Β, Ε, ΣΤ, Ζ, Η και **Θ.**

• είτε κατατάξιμες ως προς την κερδοφορία τους χωρίς όμως να είναι καθορισμένη a priori η θέση τους στη σχετική κλίμακα, όπως συμβαίνει στην περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία **Γ** είτε στην κατηγορία **Δ.**

Κατά συνέπεια, η τομή των w-r σχέσεων στην τιμή R του ποσοστού κέρδους εκφράζει απλώς ότι οι μέγιστες τιμές του ποσοστού κέρδους των τεχνικών (α) και (β) είναι ίσες.

Αρχικά, με τους ορισμούς που ακολουθούν θα επιχειρήσουμε να ορίσουμε για μια ορισμένη τυποποίηση των τιμών τις σχέσεις κερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β), κατά τρόπο σύμφωνο με τον αλγόριθμο της αγοράς, ούτως ώστε οι συγκρίσεις μεταξύ των τεχνικών να είναι *συνεκτικές.*

Ορισμός 1. Για μια ορισμένη τυποποίηση των τιμών, στην τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, μια τεχνική, έστω η (β), *υπερέχει* της άλλης τεχνικής, της (α), αν ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r) + w^{(\alpha)} l^{(\beta)} \leq \tilde{p}^{(\alpha)}$$

και

$$\tilde{p}^{(\beta)} A^{(\alpha)}(1+r) + w^{(\beta)} l^{(\alpha)} \geq \tilde{p}^{(\beta)}$$ [46]

Ορισμός 2. Για μια ορισμένη τυποποίηση των τιμών, στην τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, οι τεχνικές (α) και (β) είναι *ισοκερδοφόρες*, αν ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r) + w^{(\alpha)} l^{(\beta)} = \tilde{p}^{(\alpha)}$$

και

$$\tilde{p}^{(\beta)} A^{(\alpha)}(1+r) + w^{(\beta)} l^{(\alpha)} = \tilde{p}^{(\beta)}$$ [47]

- είτε δεν είναι κατάξιμες ως προς την κερδοφορία τους, όπως συμβαίνει στην περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathfrak{I}$.

[46] Επειδή οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν μόνο ως προς την μέθοδο παραγωγής του εμπορεύματος ω οι ανωτέρω σχέσεις μπορούν εναλλακτικά να διατυπωθούν ως εξής:

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r) + w^{(\alpha)} l^{(\beta)}\right]\left(e_\omega^n\right)^T \prec \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T$$

και

$$\left[\tilde{p}^{(\beta)} A^{(\alpha)}(1+r) + w^{(\beta)} l^{(\alpha)}\right]\left(e_\omega^n\right)^T \succ \tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T$$

Ορισμός 3. Αν ισχύει $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$, τότε, για μια ορισμένη τυποποίηση που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων των τεχνικών (α) και (β), στην τιμή R του ποσοστού κέρδους μια τεχνική, έστω η (β), *υπερέχει* της άλλης τεχνικής, της (α), αν ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} A^{(\beta)} (1+R) \leq \tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}$$

και

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} A^{(\alpha)} (1+R) \geq \tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}$$ [48]

Ορισμός 4. Αν ισχύει $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$, τότε, για μια ορισμένη τυποποίηση που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων των τεχνικών (α) και (β), στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές (α) και (β) είναι *ισοκερδοφόρες*, αν ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} A^{(\beta)} (1+R) = \tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}$$

και

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} A^{(\alpha)} (1+R) = \tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}$$ [49]

---

[47] Επειδή οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν μόνο ως προς την μέθοδο παραγωγής του εμπορεύματος ω οι ανωτέρω σχέσεις μπορούν εναλλακτικά να διατυπωθούν ως εξής:

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)} (1+r) + w^{(\alpha)} l^{(\beta)}\right] \left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \tilde{p}^{(\alpha)} \left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

και

$$\left[\tilde{p}^{(\beta)} A^{(\alpha)} (1+r) + w^{(\beta)} l^{(\alpha)}\right] \left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \tilde{p}^{(\beta)} \left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

[48] Επειδή οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν μόνο ως προς την μέθοδο παραγωγής του εμπορεύματος ω οι ανωτέρω σχέσεις μπορούν εναλλακτικά να διατυπωθούν ως εξής:

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} A^{(\beta)} (1+R)\right] \left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} \left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

και

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} A^{(\alpha)} (1+R)\right] \left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} \left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

Στο σημείο αυτό κρίνεται απαραίτητο να διατυπώσουμε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 1. Για *κάθε τυποποίηση* των τιμών, στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, θα ισχύει:

$$w^{(\beta)} - w^{(\alpha)} = \frac{c\left(\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)u}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)} \tag{1}$$

όπου u το τυχαίο τυπικό εμπόρευμα και c η σταθερά της τυποποίησης.

Απόδειξη: Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, οι τιμές των ονομαστικών ωρομισθίων $w^{(\alpha)}$ και $w^{(\beta)}$ των τεχνικών (α) και (β) αντίστοιχα προσδιορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$w^{(\alpha)} = \frac{c}{l^{(\alpha)}\left[I - (1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}u}$$

και

$$w^{(\beta)} = \frac{c}{l^{(\beta)}\left[I - (1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}u}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις ανωτέρω σχέσεις έχουμε:

$$w^{(\beta)} - w^{(\alpha)} = \frac{c}{l^{(\beta)}\left[I - (1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}u} - \frac{c}{l^{(\alpha)}\left[I - (1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}u} \Leftrightarrow$$

---

[49] Επειδή οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν μόνο ως προς την μέθοδο παραγωγής του εμπορεύματος ω οι ανωτέρω σχέσεις μπορούν εναλλακτικά να διατυπωθούν ως εξής:

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e^{n}_{\omega}\right)^T = \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e^{n}_{\omega}\right)^T$$

και

$$\left[\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+R)\right]\left(e^{n}_{\omega}\right)^T = \tilde{p}^{(\beta)}\left(e^{n}_{\omega}\right)^T$$

$$w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}=\frac{cl^{(\alpha)}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}u-cl^{(\beta)}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}u}{\left\{l^{(\alpha)}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}u\right\}\left\{l^{(\beta)}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}u\right\}}\Leftrightarrow$$

$$w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}=\frac{c\left\{l^{(\alpha)}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}-l^{(\beta)}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}\right\}u}{\left\{l^{(\alpha)}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}u\right\}\left\{l^{(\beta)}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}u\right\}}\Leftrightarrow$$

$$w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}=\frac{c\left(\hat{p}^{(\alpha)}-\hat{p}^{(\beta)}\right)u}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}$$

Με δεδομένο το Λήμμα (1), που διατυπώσαμε παραπάνω, θα προχωρήσουμε στη συζήτηση των ακόλουθων Προτάσεων.

Πρόταση 1. Για *κάθε τυποποίηση* των τιμών, στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r\in\left[0,R^*\right)$, οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

a) $\left[\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+r)+w^{(\alpha)}l^{(\beta)}\right]\left(e_\omega^n\right)^T \prec \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T$

b) $\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+w^{(\beta)}l^{(\alpha)}\Big]\left(e_\omega^n\right)^T \succ \tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T$

c) $\hat{p}^{(\beta)}\leq\hat{p}^{(\alpha)}$

d) $\hat{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T\prec\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T$

e) $\tilde{p}^{(\alpha)}d(1+r)+w^{(\alpha)}d_0\prec 0$

f) $\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\prec 0$

g) $\tilde{p}^{(\beta)}d(1+r)+w^{(\beta)}d_0\prec 0$

h) $\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\prec 0$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε, ότι για μια τυχαία τυποποίηση των τιμών οι ανωτέρω σχέσεις είναι ισοδύναμες. Η σχέση (a) είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις (e) και (f).

Πράγματι, από την υπόθεση μας ότι οι τεχνικές (α) και (β) διαφέρουν μόνο ως προς τη διαδικασία παραγωγής του εμπορεύματος ω και τις σχέσεις (1.2.a.10) και (1.2.a.11) θα έχουμε:

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+r)+w^{(\alpha)}l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+r)+w^{(\alpha)}l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \left[\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}(1+r)+w^{(\alpha)}l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+r)+w^{(\alpha)}\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)}\left(de_{\omega}^{n}\right)(1+r)+w^{(\alpha)}\left(d_{0}e_{\omega}^{n}\right)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\alpha)}\left(de_{\omega}^{n}\right)\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}(1+r)+w^{(\alpha)}\left(d_{0}e_{\omega}^{n}\right)\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\alpha)}d\left[e_{\omega}^{n}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right](1+r)+w^{(\alpha)}d_{0}\left[e_{\omega}^{n}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right] \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\alpha)}d(1+r)+w^{(\alpha)}d_{0} \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\tilde{p}^{(\alpha)}}{w^{(\alpha)}}d(1+r)+d_{0} \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_{0} \prec 0$$

Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε, ότι η σχέση (b) είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις (g) και (h). Πράγματι, έχουμε:

$$\left[\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+w^{(\beta)}l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+w^{(\beta)}l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \left[\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}(1+r)+w^{(\beta)}l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{p}^{(\beta)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+r)+w^{(\beta)}\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{p}^{(\beta)}\left(de_{\omega}^{n}\right)(1+r)+w^{(\beta)}\left(d_{0}e_{\omega}^{n}\right)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(de_{\omega}^{n}\right)\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}(1+r)+w^{(\beta)}\left(d_{0}e_{\omega}^{n}\right)\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\widetilde{p}^{(\beta)} d\left[e_{\omega}^{n}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right](1+r)+w^{(\beta)} d_{0}\left[e_{\omega}^{n}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right] \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\widetilde{p}^{(\beta)} d(1+r)+w^{(\beta)} d_{0} \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\widetilde{p}^{(\beta)}}{w^{(\beta)}} d(1+r)+d_{0} \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} d(1+r)+d_{0} \prec 0$$

Από την υπόθεση μας, ότι οι τεχνικές (α) και (β) διαφέρουν μόνο ως προς τη διαδικασία παραγωγής του εμπορεύματος ω ή, αναλυτικότερα, τις σχέσεις (0.1) και (0.3), θα έχουμε:

$$\left[\widetilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r)+w^{(\alpha)} l^{(\beta)}\right]\left(e_{j}^{n}\right)^{T}=\widetilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}, \; j=1,2,\ldots,n, \text{ με } j \neq \omega \qquad (2)$$

και

$$\left[\widetilde{p}^{(\beta)} A^{(\alpha)}(1+r)+w^{(\beta)} l^{(\alpha)}\right]\left(e_{j}^{n}\right)^{T}=\widetilde{p}^{(\beta)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}, \; j=1,2,\ldots,n, \text{ με } j \neq \omega \qquad (3)$$

Έστω ότι ισχύει η σχέση (a). Με βάση τη σχέση (2) θα έχουμε:

$$\widetilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r)+w^{(\alpha)} l^{(\beta)} \leq \widetilde{p}^{(\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\widetilde{p}^{(\alpha)}}{w^{(\alpha)}} A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)} \leq \frac{\widetilde{p}^{(\alpha)}}{w^{(\alpha)}} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]-\hat{p}^{(\alpha)} \leq 0$$

Αν πολλαπλασιάσουμε από δεξιά την ανωτέρω σχέση με την μήτρα $\left[I-(1+r) A^{(\beta)}\right]^{-1}$, τότε από τη σχέση (1.2.a.8) προκύπτει:

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]-\hat{p}^{(\alpha)}\right\}\left[I-(1+r) A^{(\beta)}\right]^{-1} \leq 0$$

Με βάση τη σχέση (1.2.a.2), η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}$$ [50]

Έστω ότι ισχύει η σχέση (b). Με βάση τη σχέση (3) θα έχουμε:

$$\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+w^{(\beta)}l^{(\alpha)} \geq \tilde{p}^{(\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\tilde{p}^{(\beta)}}{w^{(\beta)}}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)} \geq \frac{\tilde{p}^{(\beta)}}{w^{(\beta)}} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)} \geq \hat{p}^{(\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]-\hat{p}^{(\beta)} \geq 0$$

Αν πολλαπλασιάσουμε από δεξιά την ανωτέρω σχέση με την μήτρα$\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}$, τότε από τη σχέση (1.2.a.6) προκύπτει:

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]-\hat{p}^{(\beta)}\right\}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1} \geq 0$$

---

[50] Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε μέσα από τους εξής εναλλακτικούς τρόπους:

I. Αντικαθιστώντας τη σχέση (f), που είναι ισοδύναμη με τη σχέση (a), στη σχέση (1.2.a.13). Έτσι, με βάση την ισοδυναμία των σχέσεων (a), (e) και (f) από τη μια μεριά και των σχέσεων (b), (g) και (h) από την άλλη μεριά, που αποδείξαμε ανωτέρω, καθώς επίσης και της Πρότασης (1.2.a.1), προκύπτει άμεσα η ισοδυναμία των σχέσεων (a), (b), (c), (e), (f), (g) και (h).

II. Ακολουθώντας την μέθοδο του Levhari [1965] για την απόδειξη του "Θεωρήματος της Μη Υποκατάστασης". Σύμφωνα με αυτήν, αν αντί της σχέσης (a) θεωρήσουμε την ισοδύναμη έκφραση:

$$\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)},$$

τότε θα έχουμε:

$$\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)} \Rightarrow$$

$$l^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}-(1+r)\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)} \Rightarrow$$

$$l^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right] \Rightarrow$$

$$l^{(\beta)}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1} \leq \hat{p}^{(\alpha)} \Rightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}$$

Με βάση τη σχέση (1.2.a.1), η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}$$ [51]

Έτσι, για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι:

- Η σχέση (c) συνεπάγεται τις σχέσεις (a), (b) και (d) και
- Η σχέση (d) συνεπάγεται τη σχέση (c)

Πράγματι, από τη σχέση (c) έχουμε:

$$\hat{p}^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)}\right)\left(e_j^n\right)^T \leq 0,\ j = 1,2,\ldots,n., \tag{4}$$

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε τη σχέση (1.2.a.13). Έτσι έχουμε:

---

[51] Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε μέσα από τους εξής εναλλακτικούς τρόπους:

I. Αντικαθιστώντας τη σχέση (h), που είναι ισοδύναμη με τη σχέση (b), στη σχέση (1.2.a.12). Έτσι, με βάση την ισοδυναμία των σχέσεων (a), (e) και (f) από τη μια μεριά και των σχέσεων (b), (g) και (h) από την άλλη μεριά, που αποδείξαμε ανωτέρω, καθώς επίσης και της Πρότασης (1.2.a.1), προκύπτει άμεσα η ισοδυναμία των σχέσεων (a), (b), (c), (e), (f), (g) και (h).

II. Ακολουθώντας την μέθοδο του Levhari [1965] για την απόδειξη του "Θεωρήματος της Μη Υποκατάστασης". Σύμφωνα με αυτήν, αν αντί της σχέσης (b) θεωρήσουμε την ισοδύναμη έκφραση:

$$\hat{p}^{(\beta)} A^{(\alpha)}(1+r) + l^{(\alpha)} \geq \hat{p}^{(\beta)},$$

τότε θα έχουμε:

$$\hat{p}^{(\beta)} A^{(\alpha)}(1+r) + l^{(\alpha)} \geq \hat{p}^{(\beta)} \Rightarrow$$

$$l^{(\alpha)} \geq \hat{p}^{(\beta)} - (1+r)\hat{p}^{(\beta)} A^{(\alpha)} \Rightarrow$$

$$l^{(\alpha)} \geq \hat{p}^{(\beta)}\left[I - (1+r)A^{(\alpha)}\right] \Rightarrow$$

$$l^{(\alpha)}\left[I - (1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1} \geq \hat{p}^{(\beta)} \Rightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}$$

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)} = \left[\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0\right] e_{\omega}^{n} \left[I - (1+r) A^{(\beta)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\left(\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)}\right)\left[I - (1+r) A^{(\beta)}\right] = \left[\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0\right] e_{\omega}^{n}$$

Εφόσον η μήτρα $\left.I - (1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}$, $r \in \left[0, R^*\right)$, είναι μια μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα, το πρόσημο κάθε μη μηδενικού διανύσματος[52] που πολλαπλασιάζουμε με αυτήν *δεν αντιστρέφεται.*[53] Επομένως, υπάρχουν *πάντα* κάποιες συνιστώσες:

$$\left(\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)}\right)\left(e_j^n\right)^T, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

και

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0\right] e_{\omega}^{n}\right\}\left(e_j^n\right)^T, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

των διανυσμάτων:

$$\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)}$$

και

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0\right] e_{\omega}^{n}$$

αντίστοιχα, για τις οποίες θα ισχύει:

$$\left[\left(\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)}\right)\left(e_j^n\right)^T\right]\left\{\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0\right] e_{\omega}^{n}\right\}\left(e_j^n\right)\right\} \succ 0 \qquad (5)$$

Γενικά, εφόσον τα διανύσματα e_{ω}^{n} και $\left(e_{\omega}^{n}\right)^T$ είναι στοιχειώδη διανύσματα, θα έχουμε:

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0\right] e_{\omega}^{n}\right\}\left(e_j^n\right)^T = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n, \; \text{με}\, j \neq \omega \; ^{54} \qquad (6)$$

---

[52] Σύμφωνα με τη σχέση (c), το διάνυσμα $\left(\hat{p}^{(\beta)} - \hat{p}^{(\alpha)}\right)$ είναι διάφορο του μηδενός.

[53] Βλ. Berman and Plemmons [1979, σελ. 134].

[54] Προφανώς ισχύει:

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0\right] e_{\omega}^{n}\right\}\left(e_j^n\right)^T =$$

και

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n\right\}\left(e_\omega^n\right)^T \neq 0 \quad ^{55} \tag{7}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (5), (6) και (7) συνεπάγεται:

$$\left[\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left(e_\omega^n\right)^T\right]\left\{\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n\right\}\left(e_\omega^n\right)^T\right\} \succ 0 \Rightarrow$$

$$\left[\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left(e_\omega^n\right)^T\right]\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\left[e_\omega^n\left(e_\omega^n\right)^T\right]\right\} \succ 0 \Rightarrow$$

$$\left[\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left(e_\omega^n\right)^T\right]\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right] \succ 0$$

Από την ανωτέρω σχέση και τη σχέση (c) ή, ισοδύναμα, τη σχέση (4) προκύπτουν οι ακόλουθες συνέπειες:

$$\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left(e_\omega^n\right)^T \prec 0$$

ή

$$\hat{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T \prec \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T$$

και

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\left[e_\omega^n\left(e_j^n\right)^T\right] =$$

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]0 = 0, \ \forall j = 1,2,\ldots,n, \text{ με } j \neq \omega$$

[55] Πράγματι, σύμφωνα με τη σχέση (1.2.a.13) και τη σχέση (c) θα έχουμε:

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right] \neq 0$$

Ως εκ τούτου θα έχουμε:

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n\right\}\left(e_\omega^n\right)^T =$$

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\left[e_\omega^n\left(e_\omega^n\right)^T\right] =$$

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right] \neq 0$$

$$\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0 \prec 0$$

Έχουμε δείξει, ότι η ανωτέρω σχέση, δηλαδή η σχέση (f), είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις (a) και (e). Κατά συνέπεια, αποδείξαμε ταυτόχρονα ότι η σχέση (c) συνεπάγεται τις σχέσεις (a), (e), (f) και (d).

Ακολουθώντας μια ανάλογη διαδικασία θα δείξουμε, ότι η σχέση (c) συνεπάγεται τις σχέσεις (b), (g), (h) και (d). Πράγματι, από τη σχέση (1.2.a.12) έχουμε:

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]=\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n$$

Εφόσον η μήτρα $\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]$, $r\in\left[0,R^*\right)$, είναι μια μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα, θα υπάρχουν πάντα κάποιες συνιστώσες:

$$\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left(e_j^n\right)^T,\ j=1,2,\dots,n$$

και

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n\right\}\left(e_j^n\right)^T,\ j=1,2,\dots,n$$

των διανυσμάτων:

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}$$

και

$$\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n$$

αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει:

$$\left[\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left(e_j^n\right)^T\right]\left\{\left\{\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n\right\}\left(e_j^n\right)^T\right\}\succ 0 \tag{8}$$

Γενικά, εφόσον τα διανύσματα e_ω^n και $\left(e_\omega^n\right)^T$ είναι στοιχειώδη διανύσματα, θα έχουμε:

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n\right\}\left(e_j^n\right)^T=0,\ j=1,2,\ldots,n,\ \mu\varepsilon\, j\neq\omega \tag{9}$$ [56]

και

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n\right\}\left(e_\omega^n\right)^T\neq 0 \tag{10}$$ [57]

Επομένως, από τις σχέσεις (8), (9) και (10) συνεπάγεται:

$$\left[\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left(e_\omega^n\right)^T\right]\left\{\left\{\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n\right\}\left(e_\omega^n\right)^T\right\}\succ 0\Rightarrow$$

$$\left[\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left(e_\omega^n\right)^T\right]\left\{\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]\left[e_\omega^n\left(e_\omega^n\right)^T\right]\right\}\succ 0\Rightarrow$$

$$\left[\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left(e_\omega^n\right)^T\right]\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]\succ 0$$

Από την ανωτέρω σχέση και τη σχέση (c) ή, ισοδύναμα, τη σχέση (4) προκύπτουν οι ακόλουθες συνέπειες:

$$\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left(e_\omega^n\right)^T\prec 0$$

---

[56] Προφανώς ισχύει:

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n\right\}\left(e_j^n\right)^T=$$

$$\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]\left[e_\omega^n\left(e_j^n\right)^T\right]=$$

$$\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]0=0,\ \forall j=1,2,\ldots,n,\ \mu\varepsilon\ j\neq\omega$$

[57] Πράγματι, σύμφωνα με τη σχέση (1.2.a.12) και τη σχέση (c) θα έχουμε:

$$\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]\neq 0$$

Ως εκ τούτου θα έχουμε:

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n\right\}\left(e_\omega^n\right)^T=$$

$$\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]\left[e_\omega^n\left(e_\omega^n\right)^T\right]=$$

$$\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]\neq 0$$

ή

$$\hat{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

και

$$\hat{p}^{(\beta)}d\left(1+r\right)+d_0 \prec 0$$

Έχουμε δείξει, ότι η ανωτέρω σχέση, δηλαδή η σχέση (h), είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις (b) και (g). Κατά συνέπεια, αποδείξαμε ταυτόχρονα ότι η σχέση (c) συνεπάγεται τις σχέσεις (b), (g), (h) και (d). Εφόσον οι τεχνικές (α) και (β) διαφέρουν ως προς την μέθοδο παραγωγής ενός μόνο εμπορεύματος, του εμπορεύματος ω, τα αντίστοιχα διανύσματα τιμών $\hat{p}^{(\alpha)}$ και $\hat{p}^{(\beta}$ είναι ολικά διατεταγμένα.[58] Επομένως, από τη σχέση (d) συνεπάγεται η σχέση (c).

Πόρισμα 1. Για *κάθε τυποποίηση* των τιμών, στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α), *αν και μόνο αν* ισχύει μια από τις σχέσεις (a) - (I).[59, 60]

---

[58] Βλ. Πρόταση (1.2.a.1).

[59] Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η συνθήκη (c). Αν περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας στην ανωτέρω συνθήκη, το Πόρισμα (1) διατυπώνεται ως εξής: Η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α), *αν και μόνο αν* το διάνυσμα τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης (μη παραγόμενο εμπόρευμα), *όλων* των *παραγόμενων* εμπορευμάτων της τεχνικής (β) είναι μικρότερο (με την ευρεία έννοια) του αντίστοιχου διανύσματος των τιμών της τεχνικής (α). Την ιδιότητα κάθε ζεύγους τεχνικών, που διαφέρουν ως προς την μέθοδο παραγωγής ενός εμπορεύματος, να υπάρχει μια τεχνική η οποία ελαχιστοποιεί το διάνυσμα των τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, θεώρησαν - λανθασμένα - ορισμένοι συγγραφείς ως τον ορισμό της υπερέχουσας τεχνικής, που ανταποκρίνεται στα χαρακτηριστικά της καπιταλιστικής εμπορευματικής παραγωγής. Βλέπε μεταξύ άλλων: "This means that the technique selected for a given level of the rate of profit has associated prices, in terms of wage, invariably lower than those related to each of the non-selected techniques (according to capitalist criteria). This moreover, proves to be formally equivalent to the better known property which establishes that, if one technique is preferred to another for a certain rate of profit it is related to a higher rate of real wage... When we contrast two alternative technologies and assume that the rate of profit is given and common to all sectors, the capitalist criterion of the selection of techniques implies that the technique selected shall be the one which affords the lower prices in comparison with those of the other technology", Herrero, Jimenez-Raneda and Villar [1980, σελ. 157 και 161]. Επίσης: "Le problème est de

Απόδειξη: Συνδυάζοντας την Πρόταση (1) με τον Ορισμό (1) προκύπτει η απόδειξη του ανωτέρω Πορίσματος.

Πόρισμα 2. Αν η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α), τότε, για *κάθε τυποποίηση* των τιμών, στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, θα ισχύει:

$$w^{(\alpha)} \leq w^{(\beta)}.$$

Απόδειξη: Συνδυάζοντας το Πόρισμα (1) με τη σχέση (1) προκύπτει η απόδειξη του ανωτέρω Πορίσματος. Ειδικότερα, αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

$$\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{E} \text{ και } \mathcal{H},$$

τότε με βάση την Πρόταση (1.2.a.1) θα έχουμε:

$$\hat{p}^{(\beta)} \prec \hat{p}^{(\alpha)}$$ [61]

Σε αυτή την περίπτωση, για κάθε τυποποίηση των τιμών με ένα τυπικό εμπόρευμα u, όπου $u \geq 0$, από τη σχέση (1) θα έχουμε:

$$\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)} \succ 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)u \succ 0 \Leftrightarrow$$

$$c\left(\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)u \succ 0 \Leftrightarrow$$

---

savoir si un choix de technique opéré sur la base des prix les plus bas, critère le plus facile à mettre en oeuvre dans un système capitaliste libéral...", Abraham-Frois et Berrebi [1976, σελ. 269]. Φυσικά οι υποστηρικτές της ανωτέρω άποψης, εκτός των άλλων θα έπρεπε να εξηγήσουν γιατί αποδίδουν τόση σημασία στο κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τιμών, όταν η ελαχιστοποίηση των τιμών έχει στην γενική περίπτωση νόημα, αν και μόνο αν οι τιμές εκφράζονται σε όρους της εργασιακής δύναμης.

[60] Την ειδικότερη Πρόταση, σύμφωνα με την οποία η συνθήκη (d) είναι απλώς *αναγκαίο* αποτέλεσμα της επιλογής της πλέον κερδοφόρας τεχνικής διατύπωσε ο Bidard ως εξής: "Après insertion d' une méthode c_2 profitable aux prix $\hat{p}_1$ de T_1, le nouveau vecteur $\hat{p}_2$ des prix salariaux vérifie $\hat{p}_2 \leq \hat{p}_1$ avec inégalité stricte pour les composantes du bien consideré et de ceux dans lesquels il entre directement ou indirectement." Βλ. Bidard [1991, σελ. 80].

[61] Βλέπε την Πρόταση (1.2.a.1) και ειδικότερα τις περιπτώσεις (I) και (II).

$$\frac{c\left(\hat{p}^{(\alpha)}-\hat{p}^{(\beta)}\right)u}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)} \succ 0 \Leftrightarrow$$

$$w^{(\beta)}-w^{(\alpha)} \succ 0 \Leftrightarrow$$

$$w^{(\beta)} \succ w^{(\alpha)}$$

Επομένως, δείξαμε ότι αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις ανωτέρω κατηγορίες, τότε το κριτήριο της μεγιστοποίησης του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ισοδύναμο με το κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, ή το κριτήριο του αλγόριθμου της αγοράς. Με άλλα λόγια, το κριτήριο της μεγιστοποίησης του ονομαστικού ωρομισθίου είναι ανεξάρτητο από το μέτρο των τιμών.[62, 63] Το χαρακτηριστικό αυτό σε

---

[62] Στην ειδική περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν αποκλειστικά στην κατηγορία $\mathcal{A}$, δηλαδή είναι μη διασπώμενες, αναφέρονται οι Abraham-Frois et Berrebi [1976, σελ. 269] στο απόσπασμα που ακολουθεί: "Le problème est de savoir si un choix de technique opéré sur la base des prix les plus bas, critère le plus facile à mettre en oeuvre dans un système capitaliste libéral, conduirait à un choix de technique identique à celui opéré à partir des critères de répartitition. La réponse est affirmative à condition que les prix servant de critère de choix soient des prix salariaux (les prix étant définis en terme de salaire) et qu'on se situe dans un système fondamental à capital circulant".

[63] Γενικά, σε κάθε τιμή r, $r \in \left[0, R^{*}\right)$, του ποσοστού κέρδους η κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία, σύμφωνα με το κριτήριο της μεγιστοποίησης του ονομαστικού ωρομισθίου W, είναι *ανεξάρτητη* από το μέτρο των τιμών και, κατά συνέπεια, ισοδύναμη με το κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, ή το κριτήριο του αλγόριθμου της αγοράς, αν και μόνο αν για τα διανύσματα τιμών των τεχνικών (α) και (β), εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, ισχύει:

- είτε: $\hat{p}^{(\beta)} \prec \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε: $\hat{p}^{(\beta)} \succ \hat{p}^{(\alpha)}$
- είτε: $\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$

Σε κάθε περίπτωση που το κριτήριο της μεγιστοποίησης του ονομαστικού ωρομισθίου W, είναι *ανεξάρτητο* από το μέτρο των τιμών και, κατά συνέπεια, ισοδύναμο με το κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, ή το κριτήριο του αλγόριθμου της αγοράς, η ιδιότητα της επιλεγόμενης τεχνικής να μεγιστοποιεί την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου W την καθιστά, σύμφωνα με τον Schefold [1978, σελ. 39], άριστη τεχνική κατά Pareto, υπό την εξής έννοια:

συνδυασμό με το γεγονός ότι στην βιβλιογραφία συζητήθηκαν κυρίως παραδείγματα τεχνικών παραγωγής που διαφέρουν ως προς τη διαδικασία παραγωγής ενός βασικού εμπορεύματος θεμελείωσαν την διαδεδομένη, εσφαλμένη αντίληψη, ότι, τουλάχιστον μαθηματικά, το κριτήριο της μεγιστοποίησης του ονομαστικού ωρομισθίου είναι στην γενική περίπτωση ισοδύναμο με το κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, ή το κριτήριο του αλγόριθμου της αγοράς. Κατ' αυτόν τον τρόπο καθιερώθηκε η κατάταξη των τεχνικών παραγωγής με κριτήριο την μεγιστοποίηση της τιμής του ονομαστικού ωρομισθίου w.[64] Γεωμετρικά, η μέθοδος επιλογής τεχνικής με κριτήριο την μεγιστοποίηση της τιμής του

"...the superior technique appears to be superior to any point by a criterion which is similar to that of Pareto optimality. The superior technique is superior in theory because it allows a higher real wage rate at a given rate of profit and a higher rate of profit at the given wage in the same way as Pareto general equilibrium is optimal only relative to a given distribution of initial ressources. Hence, not distribution but the chosen technique appears to be justified, and the justification is not based on techical efficiency or productivity but on the argument that the superior technique provides a distributional advantage to both classes given the initial distribution. The argument can be matched to the known dual relationship between the rate of profit and the rate of growth."

[64] Βλέπε μεταξύ άλλων Pasinetti [1991, σσ. 172-183], Samuelson [1962, σελ. 198], Bruno, Burmeister and Sheshinski [1968, σελ. 533], Morishima [1966, σελ. 522], Morishima [1969, σσ. 20-26] κ.α. Χαρακτηριστικό επίσης είναι και το απόσπασμα του Bidard [1991, σελ. 81] που ακολουθεί:"Les prix salariaux étant minimisés par la technique dominante, celle-ci se caractérise par la maximisation du salaire réel...Cette propriété sert de fondement à une autre procédure de recherche de la technique dominante: un panier étant pris pour numéraire, on construit pour chaque technique la courbe $w-r$ et, à taux de profit fixé la technique dominante est associée à la courbe la plus haute..."

Ριζική κριτική στις ανωτέρω αντιλήψεις ασκεί ο Garegnani [1984, σελ. 146] στο απόσπασμα που ακολουθεί: "We may note in passing a tendancy in the literature to deal with the question of changes in methods of production as if the entrpreneurs could directly compare the rate of profit corresponding to the same wage in the alternative "systems of production" ...among which they can choose. Thus what it is often done is to observe that the wage curve of a system, say system I, shows a higher profit rate for the given wage (or the converse) than the curve of system II does, and then jump to the conclusion that system I will be adopted being "more profitable", without asking the question: "more profitable" at which prices of the means of production, at those of I, or of II, or of either system? ... However entrpreneurs can only compare the cheapness of the alternative methods of production for a commodity within one system of prices at a time, and the maximization of the rate of profits (interest) at a given wage (or the converse) has to be proved and cannot be assumed". Ανάλογες απόψεις διατυπώνονται από τον Garegnani [1970, σελ. 411].

ονομαστικού ωρομισθίου w έλαβε την μορφή της σύγκρισης των $w-r$ σχέσεων των επιμέρους τεχνικών, που διαγράφονται στο ίδιο επίπεδο και του σχηματισμού της περιβάλλουσας καμπύλης. Η περιβάλλουσα καμπύλη συχνά στην βιβλιογραφία αναφέρεται ως "production possibillities frontier"[65] ή "wage frontier"[66] ή "north east frontier" ή "outer envelope of factor price frontiers".[67]

Αν όμως θεωρήσουμε την περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

$$\mathcal{T},\ \mathcal{D},\ \mathcal{LT},\ \mathcal{Z},\ \Theta \text{ και } \mathcal{J},$$

τότε με βάση την Πρόταση (1.2.a.1) κι ειδικότερα τις σχέσεις (1.2.a.41) και (1.2.a.48) θα έχουμε:

$$\hat{p}_1^{(\alpha)} = \hat{p}_1^{(\beta)} = \hat{p}_1$$

και

$$\hat{p}_2^{(\beta)} \prec \hat{p}_2^{(\alpha)}$$ [68]

Έστω ότι οι τιμές είναι τυποποιημένες με ένα τυπικό εμπόρευμα u, το οποίο ούτε περιλαμβάνει το μη βασικό εμπόρευμα ω ούτε στην παραγωγή του εισέρχεται - άμεσα ή έμμεσα - το μη βασικό εμπόρευμα ω. Θα εξετάσουμε την περίπτωση που το τυπικό εμπόρευμα u είναι ένα βασικό τυπικό εμπόρευμα, δηλαδή ένα τυπικό εμπόρευμα u της μορφής:

$$u = (u_1, u_2)^T, \ \text{με } u_1 \geq 0 \ \text{ και } u_2 = 0$$ [69].

Έτσι, από τη σχέση (1) θα έχουμε:

$$\left(\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)u = \left(\hat{p}_1^{(\alpha)} - \hat{p}_1^{(\beta)}\right)u_1 + \left(\hat{p}_2^{(\alpha)} - \hat{p}_2^{(\beta)}\right)u_2 \Rightarrow$$

---

[65] Βλ. Pasinetti [1977].

[66] Βλ. Hichs [1965] και Garegnani [1970].

[67] Βλ. Samuelson [1962].

[68] Βλέπε την Πρόταση (1.2.a.1) και ειδικότερα την περίπτωση (III).

[69] Η μοναδική εναλλακτική περίπτωση είναι το τυπικό εμπόρευμα u να περιλαμβάνει και μη βασικά εμπορεύματα - διάφορα βεβαίως του ω -, υπό την προϋπόθεση όμως ότι οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{T}$ και ισχύει:

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} = 0$$

$$\left(\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)u = 0 \Rightarrow$$

$$c\left(\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)u = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{c\left(\hat{p}^{(\alpha)} - \hat{p}^{(\beta)}\right)u}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)} = 0 \Rightarrow$$

$$w^{(\beta)} - w^{(\alpha)} = 0 \Rightarrow$$

$$w^{(\alpha)} = w^{(\beta)}$$ [70, 71]

---

[70] Αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{T}$ με:

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} = 0$$

και το τυπικό εμπόρευμα u περιλαμβάνει και μη βασικά εμπορεύματα, τα οποία είναι διάφορα του ω, τότε, όπως είναι εύκολο να αποδειχθεί, θα ισχύει επίσης:

$$w^{(\alpha)} = w^{(\beta)}$$

[71] Επομένως, ανεξάρτητα από τις ενστάσεις των Garegnani [1984, σελ. 146], Garegnani [1970, σελ. 411], Bidard [1991, σελ. 82] και Σταμάτη [1991, σελ. 421], που έχουμε ήδη αναφέρει, αποδείξαμε επιπλέον, ότι σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^*\right)$, το κριτήριο της μεγιστοποίησης του ονομαστικού ωρομισθίου W δεν είναι στην γενική περίπτωση μαθηματικά ισοδύναμο με το κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, ή το κριτήριο του αλγόριθμου της αγοράς, εφόσον αυτό εξαρτάται από το μέτρο των τιμών. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την περίπτωση που οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν ως προς τη διαδικασία παραγωγής του μη βασικού εμπορεύματος ω ή οι αντίστοιχες μήτρες τεχνικών συντελεστών $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις ακόλουθες κατηγορίες:

$$\mathcal{T}, \mathcal{D}, \mathcal{LT}, \mathcal{Z}, \Theta \text{ και } \mathfrak{I}$$

και οι τιμές τυποποιηθούν με ένα τυπικό εμπόρευμα, το οποίο ούτε περιλαμβάνει το μη βασικό εμπόρευμα ω ούτε στην παραγωγή του εισέρχεται - άμεσα ή έμμεσα - το μη βασικό εμπόρευμα ω, τότε παρουσιάζεται η εξής αντίφαση: Σύμφωνα με το κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, ή το κριτήριο του αλγόριθμου της αγοράς, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^*\right)$, για τις τεχνικές παραγωγής (α) και (β) ισχύει:

- είτε η τεχνική παραγωγής (α) υπερέχει της τεχνικής (β)

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 2. Για *κάθε τυποποίηση* των τιμών, στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, θα ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\beta)} - \tilde{p}^{(\alpha)} = \left\{\left[\tilde{p}^{(\beta)} d(1+r) + w^{(\beta)} d_0\right] e_\omega^n + \left(w^{(\beta)} - w^{(\alpha)}\right) l^{(\alpha)}\right\}\left[I - (1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1} \quad (11)$$

και

$$\tilde{p}^{(\beta)} - \tilde{p}^{(\alpha)} = \left\{\left[\tilde{p}^{(\alpha)} d(1+r) + w^{(\alpha)} d_0\right] e_\omega^n + \left(w^{(\beta)} - w^{(\alpha)}\right) l^{(\beta)}\right\}\left[I - (1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1} \quad (12)$$

Απόδειξη: Όπως είναι γνωστό, για μια τυχαία τυποποίηση των τιμών στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, τα συστήματα προσδιορισμού των διανυσμάτων των τυποποιημένων τιμών $\tilde{p}^{(\alpha)}$ και $\tilde{p}^{(\beta)}$ των τεχνικών (α) και (β) αντίστοιχα έχουν ως εξής:

$$\tilde{p}^{(\alpha)} = \tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\alpha)}(1+r) + w^{(\alpha)} l^{(\alpha)}$$

και

$$\tilde{p}^{(\beta)} = \tilde{p}^{(\beta)} A^{(\beta)}(1+r) + w^{(\beta)} l^{(\beta)}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις ανωτέρω σχέσεις και λαμβάνοντας υπόψη μας τις σχέσεις (1.2.a.10) και (1.2.a.11) θα έχουμε:

$$\tilde{p}^{(\beta)} - \tilde{p}^{(\alpha)} = \left[\tilde{p}^{(\beta)} A^{(\beta)}(1+r) + w^{(\beta)} l^{(\beta)}\right] - \left[\tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\alpha)}(1+r) + w^{(\alpha)} l^{(\alpha)}\right] \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)} - \tilde{p}^{(\alpha)} = \left(\tilde{p}^{(\beta)} A^{(\beta)} - \tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\alpha)}\right)(1+r) + \left(w^{(\beta)} l^{(\beta)} - w^{(\alpha)} l^{(\alpha)}\right) \Leftrightarrow$$

- είτε η τεχνική παραγωγής (β) υπερέχει της τεχνικής (α)
- είτε οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.

Αντίθετα, σύμφωνα με το κριτήριο της μεγιστοποίησης του ονομαστικού ωρομισθίου W οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι πάντοτε ισοκερδοφόρες. Για το θέμα αυτό βλέπε επίσης Bidard [1991, σελ. 83]. Προφανώς, οι ανωτέρω διαπιστώσεις πρέπει να θεωρηθούν και ως κριτική στο "Θεώρημα της Μη Υποκατάστασης" , σύμφωνα με το οποίο "...υπάρχει μια τεχνική (ή ένας γραμμικός συνδυασμός τεχνικών) η οποία... *μεγιστοποιεί* το ονομαστικό ωρομίσθιο σε όρους ενός οποιουδήποτε numeraire." (βλ. σελ. 149).

$$\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}=\left(\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}+\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}-\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(w^{(\beta)}l^{(\beta)}-w^{(\beta)}l^{(\alpha)}+w^{(\beta)}l^{(\alpha)}-w^{(\alpha)}l^{(\alpha)}\right)\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}=\left[\tilde{p}^{(\beta)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)+\left(\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}\right)A^{(\alpha)}\right](1+r)+w^{(\beta)}\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right)+\left(w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}\right)l^{(\alpha)}\Leftrightarrow$$

$$\left(\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}\right)\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]=\tilde{p}^{(\beta)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left[w^{(\beta)}\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right)+\left(w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}\right)l^{(\alpha)}\right]\Leftrightarrow$$

$$\left(\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}\right)\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]=\left[\tilde{p}^{(\beta)}\left(de_{\omega}^{n}\right)(1+r)+w^{(\beta)}\left(d_0e_{\omega}^{n}\right)\right]+\left(w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}\right)l^{(\alpha)}\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}=\left\{\left[\tilde{p}^{(\beta)}d(1+r)+w^{(\beta)}d_0\right]e_{\omega}^{n}+\left(w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}\right)l^{(\alpha)}\right\}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}$$

Τροποποιώντας ελαφρά την ανωτέρω διαδικασία έχουμε:

$$\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}=\left[\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}(1+r)+w^{(\beta)}l^{(\beta)}\right]-\left[\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}(1+r)+w^{(\alpha)}l^{(\alpha)}\right]\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}=\left(\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(w^{(\beta)}l^{(\beta)}-w^{(\alpha)}l^{(\alpha)}\right)\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}=\left(\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}+\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(w^{(\beta)}l^{(\beta)}-w^{(\alpha)}l^{(\beta)}+w^{(\alpha)}l^{(\beta)}-w^{(\alpha)}l^{(\alpha)}\right)\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}=\left[\left(\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}\right)A^{(\beta)}+\tilde{p}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)\right](1+r)+\left(w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}\right)l^{(\beta)}+w^{(\alpha)}\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}\right)\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]=\tilde{p}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+r)+\left(w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}\right)l^{(\beta)}+w^{(\alpha)}\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}\right)\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]=\left[\tilde{p}^{(\alpha)}\left(de_{\omega}^{n}\right)(1+r)+w^{(\alpha)}\left(d_0e_{\omega}^{n}\right)\right]+\left(w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}\right)l^{(\beta)}\Leftrightarrow$$

$$\left(\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}\right)\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]=\left[\tilde{p}^{(\alpha)}d(1+r)+w^{(\alpha)}d_0\right]e_{\omega}^{n}+\left(w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}\right)l^{(\beta)}\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}=\left\{\left[\tilde{p}^{(\alpha)}d(1+r)+w^{(\alpha)}d_0\right]e_{\omega}^{n}+\left(w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}\right)l^{(\beta)}\right\}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}$$

Προφανώς, οι σχέσεις (11) και (12) είναι ανάλογες προς τις σχέσεις (1.2.a.1) και (1.2.a.2) αντίστοιχα.[72] Συγκρίνοντας τις σχέσεις (11) και (1.2.a.1) ή τις σχέσεις (12) και (1.2.a.2) συμπεραίνουμε, ότι τα διανύσματα τιμών, που εκφράζονται σε όρους του τυχαίου τυπικού εμπορεύματος u, των τεχνικών (α) και (β) δεν είναι ολικά διατεταγμένα, σε αντίθεση με την περίπτωση που οι ονομαστικές τιμές εκφράζονται

[72] Βλ. Λήμμα (1.2.a.1).

σε όρους της εργασιακής δύναμης. Επομένως, το μέτρο των τιμών (numeraire) *δεν είναι ουδέτερο,* όσον αφορά τη σύγκριση των διανυσμάτων ονομαστικών τιμών δύο διαφορετικών τεχνικών.[73]

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη σχέση των ονομαστικών τιμών των τεχνικών (α) και (β), που εκφράζονται σε όρους του τυχαίου τυπικού εμπορεύματος u, όταν οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.[74]

Πρόταση 2. Για *κάθε τυποποίηση* των τιμών, στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

a) $\left[\tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r) + w^{(\alpha)} l^{(\beta)}\right]\left(e_\omega^n\right)^T = \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T$

b) $\left[\tilde{p}^{(\beta)} A^{(\alpha)}(1+r) + w^{(\beta)} l^{(\alpha)}\right]\left(e_\omega^n\right)^T = \tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T$

c) $\tilde{p}^{(\alpha)} = \tilde{p}^{(\beta)}$

d) $\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$

e) $\tilde{p}^{(\alpha)} d(1+r) + w^{(\alpha)} d_0 = 0$

f) $\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0 = 0$

g) $\tilde{p}^{(\beta)} d(1+r) + w^{(\beta)} d_0 = 0$

h) $\hat{p}^{(\beta)} d(1+r) + d_0 = 0$

---

[73] Η ίδια άποψη, χωρίς να αποδεικνύεται, διατυπώνεται στο παρακάτω απόσπασμα: "La technique supérieure fait bien apparaitre les prix salariaux les plus faibles, mais les prix ne sont pas nécessairement plus bas s'ils sont définies en fonction d' un étalon différent.", Abraham-Frois et Berrebi [1976, σελ. 270]. Την αντίθετη- λανθασμένη- άποψη διατύπωσε αρχικά ο Pasinetti, ισχυριζόμενος ότι οι σχέσεις των τιμών μεταξύ διαφόρων τεχνικών "...are independent of the numeraire used by the price system (proposition iii)", Pasinetti, [1975, σελ. 190]. Την ανωτέρω αντίληψη ο Pasinetti αναθεώρησε στην επόμενη έκδοση του ίδιου βιβλίου του, όπου μιλά μόνο για τιμές που εκφράζονται σε όρους της εργασιακής δύναμης. Βλ. Pasinetti [1977] ή Pasinetti [1991, σσ. 174-175 και 182-183].

[74] Βλ. Ορισμό (2).

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε, ότι για μια τυχαία τυποποίηση των τιμών οι ανωτέρω σχέσεις είναι ισοδύναμες. Η σχέση (a) είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις (e) και (f). Πράγματι, από την υπόθεση μας ότι οι τεχνικές (α) και (β) διαφέρουν μόνο ως προς τη διαδικασία παραγωγής του εμπορεύματος ω και τις σχέσεις (1.2.a.10) και (1.2.a.11) θα έχουμε:

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+r)+w^{(\alpha)}l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+r)+w^{(\alpha)}l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=\left[\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}(1+r)+w^{(\alpha)}l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+r)+w^{(\alpha)}\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=0\Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)}\left(de_{\omega}^{n}\right)(1+r)+w^{(\alpha)}\left(d_{0}e_{\omega}^{n}\right)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=0\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\alpha)}\left(de_{\omega}^{n}\right)\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}(1+r)+w^{(\alpha)}\left(d_{0}e_{\omega}^{n}\right)\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=0\Leftrightarrow$$

$$d\left[e_{\omega}^{n}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right](1+r)+w^{(\alpha)}d_{0}\left[e_{\omega}^{n}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\alpha)}d(1+r)+w^{(\alpha)}d_{0}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{\tilde{p}^{(\alpha)}}{w^{(\alpha)}}d(1+r)+d_{0}=0\Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_{0}=0$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, αποδεικνύουμε ότι η σχέση (b) είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις (g) και (h):

$$\left[\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+w^{(\beta)}l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+w^{(\beta)}l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=\left[\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}(1+r)+w^{(\beta)}l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{p}^{(\beta)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+r)+w^{(\beta)}\left(l^{(\beta)}-l^{(\alpha)}\right)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=0\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(de_{\omega}^{n}\right)\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}(1+r)+w^{(\beta)}\left(d_{0}e_{\omega}^{n}\right)\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=0\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)} d\left[e_{\omega}^{n}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right](1+r)+w^{(\beta)} d_{0}\left[e_{\omega}^{n}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)} d(1+r)+w^{(\beta)} d_{0}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\tilde{p}^{(\beta)}}{w^{(\beta)}} d(1+r)+d_{0}=0 \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)} d(1+r)+d_{0}=0$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι σχέσεις (a) και (d) είναι ισοδύναμες. Πράγματι, από τις σχέσεις (a) και (2) συνεπάγεται:

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r)+w^{(\alpha)} l^{(\beta)}\right]\left(e_{j}^{n}\right)^{T}=\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}, j=1,2, \ldots, n \Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r)+w^{(\alpha)} l^{(\beta)}\right]=\tilde{p}^{(\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\tilde{p}^{(\alpha)}}{w^{(\alpha)}} A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}=\frac{\tilde{p}^{(\alpha)}}{w^{(\alpha)}} \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}=\hat{p}^{(\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]-\hat{p}^{(\alpha)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}\right]-\hat{p}^{(\alpha)}\right\}\left[I-(1+r) A^{(\beta)}\right]^{-1}=0$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.2.a.2), η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\beta)}$$ [75]

---

[75] Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε μέσα από τους εξής εναλλακτικούς τρόπους:

I. Αντικαθιστώντας τη σχέση (f), που είναι ισοδύναμη με τη σχέση (a), στη σχέση (1.2.a.13). Έτσι, με βάση την ισοδυναμία των σχέσεων (a), (e) και (f) από τη μια μεριά και των σχέσεων (b), (g) και (h) από την άλλη μεριά, που αποδείξαμε ανωτέρω, καθώς επίσης και της Πρότασης (1.2.a.1), προκύπτει άμεσα η ισοδυναμία των σχέσεων (a), (b), (d), (e), (f), (g) και (h).

Κατά τον ίδιο τρόπο, θα δείξουμε ότι οι σχέσεις (b) και (d) είναι ισοδύναμες. Πράγματι, από τις σχέσεις (b) και (3) συνεπάγεται:

$$\left[\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+w^{(\beta)}l^{(\alpha)}\right]\left(e_j^n\right)^T=\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T,\ j=1,2,\ldots,n\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+w^{(\beta)}l^{(\alpha)}=\tilde{p}^{(\beta)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\tilde{p}^{(\beta)}}{w^{(\beta)}}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}=\frac{\tilde{p}^{(\beta)}}{w^{(\beta)}}\Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\beta)}\Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\beta)}-\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\left\{\hat{p}^{(\beta)}-\left[\hat{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}\right]\right\}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}=0$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.2.a.1), η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}=0\Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\beta)}$$ [76]

II. Ακολουθώντας την μέθοδο του Levhari [1965] για την απόδειξη του "Θεωρήματος της Μη Υποκατάστασης". Σύμφωνα με αυτήν, αν αντί της σχέσης (a) θεωρήσουμε την ισοδύναμη έκφραση:

$$\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}=\hat{p}^{(\alpha)},$$

τότε θα έχουμε:

$$\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+r)+l^{(\beta)}=\hat{p}^{(\alpha)}\Leftrightarrow$$

$$l^{(\beta)}=\hat{p}^{(\alpha)}-(1+r)\hat{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}\Leftrightarrow$$

$$l^{(\beta)}=\hat{p}^{(\alpha)}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]\Leftrightarrow$$

$$l^{(\beta)}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}=\hat{p}^{(\alpha)}\Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\beta)}$$

[76] Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε μέσα από τους εξής εναλλακτικούς τρόπους:

Τέλος, θα δείξουμε ότι οι σχέσεις (c) και (d) είναι ισοδύναμες. Από τις σχέσεις (1) και (12) θα έχουμε:

$$\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}=\left\{\left[\tilde{p}^{(\alpha)}d(1+r)+w^{(\alpha)}d_0\right]e_\omega^n+\left(w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}\right)l^{(\beta)}\right\}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}=\left\{w^{(\alpha)}\left[\frac{\tilde{p}^{(\alpha)}}{w^{(\alpha)}}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n+\left[\frac{c\left(\hat{p}^{(\alpha)}-\hat{p}^{(\beta)}\right)u}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\right]l^{(\beta)}\right\}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}=\left\{w^{(\alpha)}\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n+\left[\frac{c\left(\hat{p}^{(\alpha)}-\hat{p}^{(\beta)}\right)u}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\right]l^{(\beta)}\right\}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1} \quad (13)$$

Έστω ότι ισχύει η σχέση (d). Από τη σχέση (d), την ισοδύναμη σχέση (f) [77] και τη σχέση (13) συνεπάγεται:

$$\tilde{p}^{(\beta)}-\tilde{p}^{(\alpha)}=0\Leftrightarrow$$

I. Αντικαθιστώντας τη σχέση (h), που είναι ισοδύναμη με τη σχέση (b), στη σχέση (1.2.a.12). Έτσι, με βάση την ισοδυναμία των σχέσεων (a), (e) και (f) από τη μια μεριά και των σχέσεων (b), (g) και (h) από την άλλη μεριά, που αποδείξαμε ανωτέρω, καθώς επίσης και της Πρότασης (1.2.a.1), προκύπτει άμεσα η ισοδυναμία των σχέσεων (a), (b), (d), (e), (f), (g) και (h).

II. Ακολουθώντας την μέθοδο του Levhari [1965] για την απόδειξη του "Θεωρήματος της Μη Υποκατάστασης". Σύμφωνα με αυτήν, αν αντί της σχέσης (b) θεωρήσουμε την ισοδύναμη έκφραση:

$$\hat{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\beta)},$$

τότε θα έχουμε:

$$\hat{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+l^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\beta)}\Leftrightarrow$$

$$l^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\beta)}-(1+r)\hat{p}^{(\beta)}A^{(\alpha)}\Leftrightarrow$$

$$l^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\beta)}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]\Leftrightarrow$$

$$l^{(\alpha)}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}=\hat{p}^{(\beta)}\Leftrightarrow$$

$$\hat{p}^{(\alpha)}=\hat{p}^{(\beta)}$$

[77] Από τις ανωτέρω αποδείξεις συνεπάγεται ότι οι σχέσεις: (a), (b), (d), (e), (f), (g) και (h) είναι ισοδύναμες.

$$\tilde{p}^{(\alpha)} = \tilde{p}^{(\beta)}$$

Στη συνέχεια, θα υποθέσουμε ότι ισχύει η σχέση (c). Με βάση τη σχέση (13), η σχέση (c) είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\left\{ w^{(\alpha)}\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n + \left[\frac{c\left(\hat{p}^{(\alpha)}-\hat{p}^{(\beta)}\right)u}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\right]l^{(\beta)}\right\}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}=0$$

Η ανωτέρω σχέση, με βάση τη σχέση (1.2.a.8), γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$w^{(\alpha)}\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n + \left[\frac{c\left(\hat{p}^{(\alpha)}-\hat{p}^{(\beta)}\right)u}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\right]l^{(\beta)}=0 \qquad (14)$$

Θα δείξουμε, ότι αν δεν ισχύει η σχέση (d), η σχέση (14) είναι *άτοπη*. Πράγματι, αν δεν ισχύει η σχέση (d), θα έχουμε:

- είτε $\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0 \succ 0$
- είτε $\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0 \prec 0$ [78]

Σε κάθε περίπτωση, η συνιστώσα ω του διανύσματος $\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n$ είναι διάφορη του μηδενός, ενώ η τυχαία συνιστώσα j, $j=1,2,\ldots,n$, με $j\neq\omega$, του διανύσματος $\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n$ είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή ισχύει:

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n\right\}\left(e_\omega^n\right)^T \neq 0$$ [79]

---

[78] Εφόσον οι συνθήκες (d) και (f) είναι ισοδύναμες.

[79] Πράγματι, αν δεν ισχύει η σχέση (d), τότε από τη σχέση (1.2.a.13) συνεπάγεται:

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\neq 0$$

Ως εκ τούτου θα έχουμε:

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n\right\}\left(e_\omega^n\right)^T =$$

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\left[e_\omega^n\left(e_\omega^n\right)^T\right]=$$

και

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]e^n_\omega\right\}\left(e^n_j\right)^T=0,\quad j=1,2,\ldots,n,\ \text{με}\ j\neq\omega$$ [80]

Επειδή, προφανώς ισχύει:

$$l^{(\beta)}\succ 0$$

και

$$c\succ 0$$

συμπεραίνουμε, ότι αν δεν ισχύει η σχέση (d), τότε η σχέση (14) θα ισχύει, αν και μόνο αν έχουμε:

$$\left(\hat{p}^{(\alpha)}-\hat{p}^{(\beta)}\right)u=0$$

και

$$w^{(\alpha)}=0$$

δηλαδή, δεδομένης της σχέσης (1), αν και μόνο αν έχουμε:

$$w^{(\alpha)}=w^{(\beta)}=0$$

Προφανώς, η ανωτέρω σχέση είναι *αδύνατη,* ακριβώς διότι σε κάθε τιμή r, $0\leq r\prec R^*$, με $R^*=\min\left(R^{(\alpha)},\ R^{(\beta)}\right)$, του ποσοστού κέρδους ισχύει:

$$w^{(\alpha)}\succ 0$$

και

$$w^{(\beta)}\succ 0$$

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\neq 0$$

[80] Προφανώς ισχύει:

$$\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]e^n_\omega\right\}\left(e^n_j\right)^T=$$

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\left[e^n_\omega\left(e^n_j\right)^T\right]=$$

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]0=0,\ \ \forall j=1,2,\ldots,n,\ \text{με}\ j\neq\omega$$

Έτσι, η σχέση (14) δύναται να ισχύει, μόνο αν ισχύει η σχέση (d) κι επομένως, από τη σχέση (14) ή, ισοδύναμα, τη σχέση (c) συνεπάγεται η σχέση (d).[81]

Πόρισμα 3. Για *κάθε τυποποίηση* των τιμών, στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες *αν και μόνο αν* ισχύει μια από τις σχέσεις (a) - (h).[82]

Απόδειξη: Συνδυάζοντας την Πρόταση (2) με τον Ορισμό (2) προκύπτει η απόδειξη του ανωτέρω Πορίσματος.

Πόρισμα 4. Αν οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες, τότε, για *κάθε τυποποίηση* των τιμών, στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, *όλα τα ονομαστικά μεγέθη* των τεχνικών (α) και (β), *ανεξάρτητα* του μέτρου σε όρους του οποίου εκφράζονται, είναι ίσα. Δηλαδή ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\alpha)} = \tilde{p}^{(\beta)}$$

$$\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$$

και

$$w^{(\alpha)} = w^{(\beta)}$$ [83]

Απόδειξη: Συνδυάζοντας το Πόρισμα (3) με τη σχέση (1) προκύπτει η απόδειξη του ανωτέρω Πορίσματος.[84]

---

[81] Μια ανάλογη απόδειξη της πρότασης μας, ότι οι σχέσεις (c) και (d) είναι ισοδύναμες θα προέκυπτε, αν, αντί της σχέσης (12), είχαμε χρησιμοποιήσει τη σχέση (11).

[82] Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι συνθήκες (c) και (d). Αν περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας στις ανωτέρω συνθήκες, το Πόρισμα (3) διατυπώνεται ως εξής: Οι τεχνικές (α) και (β) είναι *ισοκερδοφόρες, αν και μόνο αν* οι *ονομαστικές* τιμές *όλων* των *παραγόμενων* εμπορευμάτων, *ανεξάρτητα* αν εκφράζονται σε όρους ενός τυχαίου παραγόμενου εμπορεύματος ή σε όρους της εργασιακής δύναμης (μη παραγόμενο εμπόρευμα), που αντιστοιχούν στις ανωτέρω τεχνικές είναι ίσες. Την ιδιότητα (c) θεώρησαν - λανθασμένα - ορισμένοι συγγραφείς ως τον ορισμό της ισοκερδοφορίας δύο τεχνικών, που ανταποκρίνεται στα χαρακτηριστικά της καπιταλιστικής εμπορευματικής παραγωγής. Βλέπε Herrero, Jimenez-Raneda and Villar [1980] και Abraham-Frois et Berrebi [1976].

[83] Το Πόρισμα (4) έχει ιδιαίτερη σημασία στην θεωρία του κεφαλαίου και ιδιαίτερα στην μελέτη των πραγματικών επιπτώσεων Wichsell (Real Wichsell - effects) και του κοινωνικού ποσοστού απόδοσης (social rate of return).

Πρόταση 3. Σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, η κατάταξη ως προς την κερδοφορία των τεχνικών (α) και (β) είναι *πάντοτε δυνατή*[85] κι *ανεξάρτητη* από την τυποποίηση των τιμών.

Απόδειξη: Θα αναλύσουμε την αποδεικτική διαδικασία στα ακόλουθα στάδια:

---

[84] Στο Πόρισμα (3) δείξαμε, ότι οι σχέσεις:

$$\tilde{p}^{(\alpha)} = \tilde{p}^{(\beta)}$$

και

$$\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$$

είναι *ικανές κι αναγκαίες* συνθήκες για να είναι οι τεχνικές (α) και (β) ισοκερδοφόρες. Όμως, η σχέση:

$$w^{(\alpha)} = w^{(\beta)}$$

είναι απλώς *αναγκαία* συνθήκη, επειδή, όπως ήδη έχουμε δείξει, είναι δυνατόν να ισχύει χωρίς αυτό να σημαίνει ότι οι οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.

[85] Με άλλα λόγια, για κάθε τυποποίηση των τιμών στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, η σύγκριση των τεχνικών παραγωγής ως προς την κερδοφορία είναι *συνεκτική*. Το ζήτημα αυτό τέθηκε και απαντήθηκε για πρώτη φορά από τον Sraffa [1985, & 93, σσ. 126-128] χωρίς όμως αυτός να μπορέσει να προσφέρει μια ικανοποιητική εξήγηση: "Μπορεί, εντούτοις, να δειχθεί, ότι, ενώ ο βαθμός της φθήνειας της μιας μεθόδου παραγωγής σε σχέση με την άλλη θα μεταβάλλεται ανάλογα με το αν η σύγκριση γίνεται στο σύστημα I ή στο σύστημα II, η κατάταξη των δύο μεθόδων με κριτήριο τη φθήνεια, πρέπει να είναι ίδια και στα δύο συστήματα." Την ίδια άποψη εκφράζει ο Bidard [1990a, σελ. 840] στο παρακάτω απόσπασμα: "Comparisons between neighboring n-sets are coherent: method j pays extra profits at prices associated with the old n-set of and only if method i it replaces is not profitable at the new price vector..." Βλέπε επίσης Garegnani [1970, σελ. 411]: "The question is then whether the order of the two systems as to cheapness might not itself change according as system α or system β is in use. If the order should so change we would have endless switching back and forth between α and β, or, alternatively, no tendancy to change whichever system happens to be in use. These possibilities, however, can be ruled out: the cheaper system will be the same at both wage rates and price systems. "

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι τα ανωτέρω συμπεράσματα ισχύουν υποχρεωτικά μόνο για το διάστημα $\left[0, R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους. Εκτός του διαστήματος $\left[0, R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους ενδέχεται και να μην ισχύουν.

Α. Θα δείξουμε, ότι, για μια τυχαία τυποποίηση των τιμών, στην τιμή r ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι *πάντοτε* κατατάξιμες ως προς την κερδοφορία τους. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε, ότι σε μια τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^*\right)$, η χρησιμοποιούμενη (αρχική) τεχνική παραγωγής είναι η (α). Προφανώς, ισχύει:

- είτε $\left[\tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r) + w^{(\alpha)} l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$
- είτε $\left[\tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r) + w^{(\alpha)} l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$
- είτε $\left[\tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r) + w^{(\alpha)} l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$

Θα μελετήσουμε κάθε μια από τις ανωτέρω συνθήκες ξεχωριστά.

I. Ισχύει:

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r) + w^{(\alpha)} l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση (1), η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\left[p^{(\beta)} A^{(\alpha)}(1+r) + w^{(\beta)} l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec p^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

Επομένως, από τις ανωτέρω σχέσεις συνεπάγεται ότι, για την ισχύουσα τυποποίηση των τιμών, στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, όπου $r \in \left[0, R^*\right)$, η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β).[86]

II. Ισχύει:

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+r) + w^{(\alpha)} l^{(\beta)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση (1), η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\left[p^{(\beta)} A^{(\alpha)}(1+r) + w^{(\beta)} l^{(\alpha)}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ p^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

---

[86] Βλ. Ορισμό (1).

Επομένως, από τις ανωτέρω σχέσεις συνεπάγεται ότι, για την ισχύουσα τυποποίηση των τιμών, στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, όπου $r \in \left[0, R^*\right)$, η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α).[87]

III. Ισχύει:

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+r)+w^{(\alpha)}l^{(\beta)}\right]\left(e_\omega^n\right)^T=\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T$$

Σύμφωνα με την Πρόταση (2), η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\left[p^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+r)+w^{(\beta)}l^{(\alpha)}\right]\left(e_\omega^n\right)^T=p^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T$$

Επομένως, από τις ανωτέρω σχέσεις συνεπάγεται, ότι, για την ισχύουσα τυποποίηση των τιμών, στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, όπου $r \in \left[0, R^*\right)$, οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.[88]

B. Θα δείξουμε, ότι στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R\right]$, η κατάταξη ως προς την κερδοφορία δύο τεχνικών (α) και (β) που διαφέρουν σε μια μέθοδο παραγωγής είναι *ανεξάρτητη* από την τυποποίηση των τιμών. Σύμφωνα με το Πόρισμα (1) και το Πόρισμα (3), θα ισχύουν οι ακόλουθες αναγκαίες κι ικανές συνθήκες:

- Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α), *αν και μόνο αν* ισχύει:

$$\hat{p}^{(\cdot)}d(1+r)+d_0 \prec 0,\ (\cdot)=(\alpha),(\beta)$$

ή

$$\hat{p}^{(\beta)} \leq \hat{p}^{(\alpha)}$$

- Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β), *αν και μόνο αν* ισχύει:

$$\hat{p}^{(\cdot)}d(1+r)+d_0 \succ 0,\ (\cdot)=(\alpha),(\beta)$$

ή

---

[87] Βλ. Ορισμό (1).

[88] Βλ. Ορισμό (2).

$$\hat{p}^{(\alpha)} \leq \hat{p}^{(\beta)}$$

- Στην τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες, *αν και μόνο αν* ισχύει:

$$\hat{p}^{(\cdot)} d(1+r) + d_0 = 0,\ (\cdot) = (\alpha), (\beta)$$

ή

$$\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$$

Εφόσον οι ανωτέρω σχέσεις είναι ανεξάρτητες από την τυποποίηση των τιμών, η κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία τους θα είναι επίσης *ανεξάρτητη* από την τυποποίηση των τιμών. Επομένως, σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, το κριτήριο του αλγόριθμου της αγοράς για την κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία είναι μαθηματικά ισοδύναμο με το κριτήριο της ελαχιστοποίησης των τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης.

Δείξαμε ότι αν μια τεχνική, έστω η (β), υπερέχει της άλλης τεχνικής, της (α), τότε η τιμή, εκφρασμένη σε όρους της εργασιακής δύναμης, του εμπορεύματος ω που παράγεται από την τεχνική (β) είναι μικρότερη της αντίστοιχης τιμής του εμπορεύματος ω που παράγεται από την τεχνική (α). Επιπλέον δείξαμε, ότι στην ανωτέρω περίπτωση το διάνυσμα τιμών, εκφρασμένων σε όρους της εργασιακής δύναμης, των παραγόμενων εμπορευμάτων της υπερέχουσας τεχνικής είναι μικρότερο (με την ευρεία έννοια) του αντίστοιχου διανύσματος τιμών της υποδεέστερης τεχνικής, ενώ αντίθετα τα διανύσματα των τυποποιημένων τιμών των τεχνικών (α) και (β), που εκφράζονται σε όρους του τυχαίου παραγόμενου εμπορεύματος u (τυπικό εμπόρευμα), δεν είναι *ολικά διατεταγμένα* μεταξύ τους.

Τέλος είδαμε, ότι αν οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες, τότε οι τιμές όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων είναι ίσες μεταξύ των τεχνικών (α) και (β), ανεξάρτητα αν εκφράζονται σε όρους της εργασιακής δύναμης ή του τυχαίου τυπικού εμπορεύματος u.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις τιμές του εμπορεύματος ω, εκφρασμένων σε όρους του τυπικού εμπορεύματος u, που αντιστοιχούν στις τεχνικές παραγωγής (α) και (β), όταν η μια τεχνική, έστω η (β), υπερέχει της άλλης τεχνικής, της (α).

Από τη σύγκριση των ανωτέρω τιμών θα συμπεράνουμε, ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν όταν οι τιμές του εμπορεύματος ω εκφράζονται σε όρους της εργασιακής δύναμης δεν μπορούν να επεκταθούν γενικά στην περίπτωση που οι τιμές του εμπορεύματος ω εκφράζονται σε όρους του τυπικού εμπορεύματος u.

Ειδικότερα θα δούμε, ότι μόνο ειδικές μορφές τυποποίησης των διανυσμάτων τιμών των τεχνικών (α) και (β) συνεπάγονται, ότι η τιμή του εμπορεύματος ω που παράγεται από την υπερέχουσα τεχνική (β) είναι μικρότερη της τιμής του εμπορεύματος ω που παράγεται από την υποδεέστερη τεχνική (α).

Τέλος, θα μελετήσουμε μια ιδιαίτερη τυποποίηση των τιμών, για την οποία τα αντίστοιχα διανύσματα των ονομαστικών τιμών των τεχνικών (α) και (β) είναι *ολικά διατεταγμένα* μεταξύ τους, καίτοι η κατάταξη ως προς το μέγεθός τους είναι ακριβώς αντίθετη από την κατάταξη μεγέθους των διανυσμάτων τιμών, που εκφράζονται σε όρους της εργασιακής δύναμης. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι, αν το εμπόρευμα ω λειτουργεί ως τυπικό εμπόρευμα, οι αντίστοιχες ονομαστικές τιμές όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων της υπερέχουσας τεχνικής (β), εκτός του τυπικού εμπορεύματος ω, είναι μεγαλύτερες των αντίστοιχων ονομαστικών τιμών της υποδεέστερης τεχνικής (α).

Για να απλοποιήσουμε τις αποδείξεις που ακολουθούν θα θεωρήσουμε το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 3. Έστω η μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα $M^{(\alpha)}(r)=\left[m_{ij}^{(\alpha)}\right]=\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]$, με $r\in\left[0,R^{(\alpha)}\right)$ και $i,j=1,2,\ldots,n$ και η μήτρα $Q^{(\alpha)}(r)=\left[q_{ij}^{(\alpha)}(r)\right]=\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}$.

Για κάθε ω , $\omega=1,2,\ldots,n$, θα ισχύει:

$$\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega j}^{(\alpha)}(r) \\ q_{j\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{jj}^{(\alpha)}(r) \end{vmatrix} \succ 0, \text{ με } j \neq \omega \tag{15}$$

και

$$\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega j}^{(\alpha)}(r) \\ q_{i\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{ij}^{(\alpha)}(r) \end{vmatrix} \geq 0, \ i = 1,2,\ldots,n \text{ με } i \neq j,\omega \tag{16}$$

[89, 90]

Απόδειξη: Ορίζουμε:

$$D^{(\cdot)}(r) = \left| I - (1+r)A^{(\cdot)} \right|, \text{ με } (\cdot) = (\alpha), (\beta) \tag{18}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι:

$$i \prec \omega$$

και

---

[89] Στην ιδιαίτερη περίπτωση που η μήτρα $M^{(\alpha)}(r)$ ή, ισοδύναμα, η μήτρα $A^{(\alpha)}$ είναι μη διασπώμενη, τότε για κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^{(\alpha)}\right)$, θα αποδείξουμε ότι ισχύει:

$$\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega j}^{(\alpha)}(r) \\ q_{i\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{ij}^{(\alpha)}(r) \end{vmatrix} \succ 0 \tag{17}$$

[90] Μια ειδικότερη μορφή του Λήμματος (3) αποδεικνύεται στο Herrero, Jimenez-Raneda, and Villar [1980, σσ. 164-166]. Στην ανωτέρω εκδοχή του το Λήμμα (3) βασίζεται στις ακόλουθες υποθέσεις:

- Η μήτρα $M^{(\alpha)}(r)$ ή, ισοδύναμα, η μήτρα $A^{(\alpha)}$ είναι μη διασπώμενη μήτρα,
- $m_{ij}^{(\alpha)}(r) \prec 0$, για $i \neq j$ και
- $m_{ij}^{(\alpha)}(r) \succ 0$, για $i = j$

Με βάση τις ανωτέρω υποθέσεις, στο ανωτέρω άρθρο αποδεικνύεται η ισχύς της σχέσης (17).

$$j \prec \omega$$

Έτσι, σύμφωνα με το συμβολισμό του Gantmacher[91] και το ανάπτυγμα ορίζουσας κατά Laplace[92] θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega j}^{(\alpha)}(r) \\ q_{j\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{jj}^{(\alpha)}(r) \end{vmatrix} = Q^{(\alpha)}\begin{pmatrix} \omega & i \\ \omega & j \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{\omega+\omega+i+j} M(r)\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \\ 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \end{pmatrix}}{D^{(\alpha)}(r)}$$

$$\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega j}^{(\alpha)}(r) \\ q_{j\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{jj}^{(\alpha)}(r) \end{vmatrix} = Q^{(\alpha)}\begin{pmatrix} \omega & i \\ \omega & j \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{i+j} M(r)\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \\ 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \end{pmatrix}}{D^{(\alpha)}(r)} \quad (19)$$

Από την υπόθεση μας ότι ισχύει:

$$0 \prec r \prec R^{(\alpha)}$$

και τη συνθήκη Hawkins-Simon προκύπτει:

$$D^{(\alpha)}(r) \succ 0 \quad (20)$$

Επομένως, με βάση τις σχέσεις (19) και (20) θα έχουμε:

---

91 Βλ. Gantmacher [1959, σσ. 31-33]

92 Όπως γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$q_{ij}^{(\alpha)}(r) = \frac{\left[\operatorname{adj} M^{(\alpha)}(r)\right]_{ij}}{D^{(\alpha)}(r)} = \frac{(-1)^{i+j} M^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n \\ 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n \end{pmatrix}}{D^{(\alpha)}(r)},$$

έτσι γενικά, σύμφωνα με το ανάπτυγμα ορίζουσας κατά Laplace, θα έχουμε:

$$Q^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} M^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,j_1-1,j_1+1,\ldots,j_2-1,j_2+1,\ldots,n \\ 1,2,\ldots,i_1-1,i_1+1,\ldots,i_2-1,i_2+1,\ldots,n \end{pmatrix}}{D^{(\alpha)}(r)}, \text{ με } i_1 \prec i_2 \text{ και } j_1 \prec j_2.$$

Βλ. Δασκαλόπουλος, σσ. 89-92.

$$sign\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega j}^{(\alpha)}(r) \\ q_{i\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{ij}^{(\alpha)}(r) \end{vmatrix} = sign\left[(-1)^{i+j} M^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \\ 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \end{pmatrix}\right] \tag{21}$$

Στο σημείο αυτό θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Ι. Έστω ότι ισχύει:

$$i = j \tag{22}$$

Με βάση τη σχέση (22) θα έχουμε:

$$sign\left[(-1)^{i+j} M^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \\ 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \end{pmatrix}\right] =$$

$$sign\left[(-1)^{j+j} M^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \\ 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \end{pmatrix}\right] =$$

$$sign\, M^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \\ 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \end{pmatrix} \tag{23}$$

Η ορίζουσα $M^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \\ 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \end{pmatrix}$ είναι μια πρωτεύουσα ελάσσονα ορίζουσα (principal minor), τάξης $n-2$, της μη ιδιάζουσας Μ-μήτρας $M^{(\alpha)}(r)$. Επομένως, σύμφωνα με τη συνθήκη Hawkins-Simon, είναι πάντοτε θετική. Δηλαδή, θα ισχύει:

$$sign\, M^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \\ 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \end{pmatrix} \succ 0 \tag{24}$$

Έτσι, από τις σχέσεις (21), (23) και (24) συνεπάγεται:

$$\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega j}^{(\alpha)}(r) \\ q_{j\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{jj}^{(\alpha)}(r) \end{vmatrix} \succ 0$$

II. Έστω ότι ισχύει:

$$i \neq j$$

Ορίζουμε την μήτρα $M_*^{(\alpha)}(r)$, η οποία προκύπτει από την μήτρα $M^{(\alpha)}(r)$ αφού διαγράψουμε την ω γραμμή και την ω στήλη της. Προφανώς, η μήτρα $M_*^{(\alpha)}(r)$, $r \in \left[0, R^{(\alpha)}\right)$, είναι επίσης μια μη ιδιάζουσα Μ-μήτρα. Έτσι, έχουμε:

$$\operatorname{adj} M_*^{(\alpha)}(r) \geq 0, \quad r \in \left[0, R^{(\alpha)}\right) \quad (25)$$ [93]

Γενικά, μπορούμε να γράψουμε:

$$(-1)^{i+j} M^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \\ 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,\omega-1,\omega+1,\ldots,n \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{i+j} M_*^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n \\ 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n \end{pmatrix}, \quad (27)$$

όπου $(-1)^{i+j} M_*^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n \\ 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n \end{pmatrix}$ είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του

---

[93] Στην ιδιαίτερη περίπτωση που η μήτρα $M^{(\alpha)}(r)$ ή, ισοδύναμα, η μήτρα $A^{(\alpha)}$ είναι μη διασπώμενη μήτρα, η μήτρα $M_*^{(\alpha)}(r)$ είναι επίσης μη διασπώμενη. Έτσι, για κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^{(\alpha)}\right)$, θα ισχύει:

$$\operatorname{adj} M_*^{(\alpha)}(r) \succ 0 \quad (26)$$

Βλ. Gantmacher [1966, σελ. 53].

στοιχείου της μήτρας $M_*^{(\alpha)}(r)$ που κείται επί της j γραμμής και της i στήλης της.

Έτσι, από τη σχέση (25) προκύπτει:

$$(-1)^{i+j} M_*^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix}1,2,...,j-1,j+1,...,n\\ 1,2,...,i-1,i+1,...,n\end{pmatrix} \geq 0 \text{ [94]} \tag{28}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (21), (27) και (28) θα έχουμε:

$$(-1)^{i+j} M_*^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix}1,2,...,j-1,j+1,...,n\\ 1,2,...,i-1,i+1,...,n\end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(-1)^{i+j} M^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix}1,2,...,j-1,j+1,...,\omega-1,\omega+1,...,n\\ 1,2,...,i-1,i+1,...,\omega-1,\omega+1,...,n\end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega j}^{(\alpha)}(r) \\ q_{i\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{ij}^{(\alpha)}(r) \end{vmatrix} \geq 0 \text{ [95]}$$

---

[94] Με βάση τη σχέση (26), στην ιδιαίτερη περίπτωση που η μήτρα $M^{(\alpha)}(r)$ ή, ισοδύναμα, η μήτρα $A^{(\alpha)}$ είναι μη διασπώμενη, τότε, δεδομένου ότι η μήτρα $M_*^{(\alpha)}(r)$ είναι μη διασπώμενη, για κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^{(\alpha)}\right)$, θα ισχύει:

$$(-1)^{i+j} M_*^{(\alpha)}(r)\begin{pmatrix}1,2,...,j-1,j+1,...,n\\ 1,2,...,i-1,i+1,...,n\end{pmatrix} \succ 0 \tag{29}$$

[95] Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται, με βάση τις σχέσεις (26) και (29), ότι στην ιδιαίτερη περίπτωση που η μήτρα $M^{(\alpha)}(r)$ ή, ισοδύναμα, η μήτρα $A^{(\alpha)}$ είναι μη διασπώμενη, τότε, δεδομένου ότι η μήτρα $M_*^{(\alpha)}(r)$ είναι μη διασπώμενη, για κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^{(\alpha)}\right)$, θα ισχύει:

Έτσι, με βάση το ανωτέρω Λήμμα είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε τις ονομαστικές τιμές του εμπορεύματος ω μεταξύ της υπερέχουσας τεχνικής (β) και της υποδεέστερης τεχνικής (α). Στην τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r \in \left[0, R^*\right)$, η διαφορά των ονομαστικών τιμών του εμπορεύματος ω, σε όρους του τυχαίου τυπικού εμπορεύματος u, μεταξύ των τεχνικών (α) και (β) προσδιορίζεται ως εξής:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} - \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \frac{p^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{p^{(\beta)}u} - \frac{p^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{p^{(\alpha)}u} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} - \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \frac{\dfrac{p^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{w}}{\dfrac{p^{(\beta)}u}{w}} - \frac{\dfrac{p^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{w}}{\dfrac{p^{(\alpha)}u}{w}} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} - \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \frac{\hat{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{\hat{p}^{(\beta)}u} - \frac{\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{\hat{p}^{(\alpha)}u} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} - \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \frac{\left[\hat{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right]\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right) - \left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right]\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)} =$$

$$\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega j}^{(\alpha)}(r) \\ q_{i\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{ij}^{(\alpha)}(r) \end{vmatrix} \succ 0,$$

δηλαδή η σχέση (17).

$$\frac{\left[\hat{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T\right]\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)-\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T\right]\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)+\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T\right]\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)-\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T\right]\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}=$$

$$\frac{\left[\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left(e_\omega^n\right)^T\right]-\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T\right]\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)u\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}=$$

$$\frac{\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left\{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(e_\omega^n\right)^T-\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T\right]u\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}$$

Έτσι, από τις ανωτέρω ισότητες που μελετήσαμε καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T=\frac{\left(\hat{p}^{(\beta)}-\hat{p}^{(\alpha)}\right)\left\{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(e_\omega^n\right)^T-\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T\right]u\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)} \tag{30}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.2.a.13) στην ανωτέρω σχέση (30) προκύπτει η ακόλουθη ισοδύναμη σχέση:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T=$$

$$\frac{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]e_\omega^n\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}\left\{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(e_\omega^n\right)^T-\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T\right]u\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}=$$

$$\frac{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\left\{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)e_\omega^n\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}\left(e_\omega^n\right)^T-\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T\right]e_\omega^n\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}u\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)} \tag{31}$$

[96]

[96] Αντικαθιστώντας στη σχέση (30) την τιμή του εμπορεύματος ω με την τιμή του εμπορεύματος j,

Θα απλοποιήσουμε την ανάλυσή μας χρησιμοποιώντας τον εξής συμβολισμό:

$$C^{(.)}(r)=\left[c_{ij}^{(.)}(r)\right]=adj\left[I-(1+r)A^{(.)}\right],\ \text{με } (.)=(\alpha),(\beta) \tag{33}$$

και

$$Q^{(.)}(r)=\left[q_{ij}^{(.)}(r)\right]=\left[I-(1+r)A^{(.)}\right]^{-1}=\left[\frac{c_{ij}^{(.)}(r)}{D^{(.)}(r)}\right],\ \text{με } (.)=(\alpha),(\beta) \tag{34}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (34) θα έχουμε:

$$e_{\omega}^{n}\left[I-(1+r)A^{(.)}\right]^{-1}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=q_{\omega\omega}^{(.)}(r),\ \text{με } (.)=(\alpha),(\beta) \tag{35}$$

και

$$e_{\omega}^{n}\left[I-(1+r)A^{(.)}\right]^{-1}u=\sum_{j=1}^{n}q_{\omega j}^{(.)}(r)u_j,\ \text{με } (.)=(\alpha),(\beta) \tag{36}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (35) και (36) στη σχέση (31), λαμβάνουμε την ισοδύναμη σχέση:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=\frac{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\left\{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)-\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right]\sum_{j=1}^{n}q_{\omega j}^{(\beta)}(r)u_j\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=$$

$j=1,2,\ldots,n$ και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.2.a.13), προκύπτει η διαφορά των ονομαστικών τιμών, σε όρους του τυχαίου τυπικού εμπορεύματος u, του παραγόμενου εμπορεύματος j μεταξύ των τεχνικών (α) και (β). Έτσι, στην τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, με $r\in\left[0,R^{*}\right)$, θα έχουμε:

$$\frac{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\left\{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)e_{\omega}^{n}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}-\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}\right]e_{\omega}^{n}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}u\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)} \tag{32}$$

$$\frac{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\left\{\hat{p}^{(\alpha)}\left[q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\,u\right]-\hat{p}^{(\alpha)}\left[\sum_{j=1}^{n}q_{\omega j}^{(\beta)}(r)u_j\right]\left(e_\omega^n\right)^T\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)} \quad (37)$$

[97,98]

---

[97] Αναλυτικότερα η σχέση (37) γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T=\frac{\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\hat{p}^{(\alpha)}\left\{\left[q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\,u\right]-\left[\sum_{j=1}^{n}q_{\omega j}^{(\beta)}(r)u_j\right]\left(e_\omega^n\right)^T\right\}\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T=\frac{\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\hat{p}^{(\alpha)}\begin{bmatrix} q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\,u_1 \\ q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\,u_2 \\ \vdots \\ q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\,u_{\omega-1} \\ -\sum_{j=1,j\neq\omega}^{n}q_{\omega j}^{(\beta)}(r)u_j \\ q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\,u_{\omega+1} \\ \vdots \\ q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\,u_n \end{bmatrix} \quad (37a)$$

[98] Κατά τον ίδιο τρόπο, αν είχαμε αντικαταστήσει τη σχέση (1.2.a.12) στη σχέση (30) και είχαμε λάβει υπόψη μας τις σχέσεις (35) και (36), θα είχαν προκύψει οι ισοδύναμες σχέσεις:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T=\frac{\left[\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0\right]\left\{\hat{p}^{(\alpha)}\left[q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r)\,u\right]-\hat{p}^{(\alpha)}\left[\sum_{j=1}^{n}q_{\omega j}^{(\alpha)}(r)u_j\right]\left(e_\omega^n\right)^T\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T=\frac{\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\hat{p}^{(\alpha)}\left\{\left[q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r)\,u\right]-\left[\sum_{j=1}^{n}q_{\omega j}^{(\alpha)}(r)u_j\right]\left(e_\omega^n\right)^T\right\}\Leftrightarrow$$

Η σχέση (37) θα αποτελέσει το σημείο αφετηρίας για να προσεγγίσουμε τα προβλήματα που θέσαμε παραπάνω. Καταρχήν θα δείξουμε, ότι υπάρχει μια ιδιαίτερη μορφή τυποποίησης, που εξασφαλίζει ότι η αντίστοιχη ονομαστική τιμή του εμπορεύματος ω που παράγεται από την υπερέχουσα τεχνική (β) είναι μικρότερη της ονομαστικής τιμής του εμπορεύματος ω που παράγεται από την υποδεέστερη τεχνική (α).

Πρόταση 4. Για κάθε τυποποίηση των τιμών με ένα τυπικό εμπόρευμα u της μορφής

$$u=\lambda_z\left(e_z^n\right)^T+\lambda_\omega\left(e_\omega^n\right)^T, \text{ όπου } {}_{\omega}\geq 0,\ \lambda_z \succ 0,\ z=1,2,\dots,n \text{ και } z\neq\omega,$$

στην τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r\in\left[0,R^*\right)$, θα ισχύει:

- $\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T \prec \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T$,

αν και μόνο αν η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α)[99]

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T=\frac{\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_0}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\,\hat{p}^{(\alpha)}\begin{bmatrix} q_{\alpha\omega}^{(\alpha)}(r)\,u_1 \\ q_{\alpha\omega}^{(\alpha)}(r)\,u_2 \\ \vdots \\ q_{\alpha\omega}^{(\alpha)}(r)\,u_{\omega-1} \\ -\sum\limits_{j=1,j\neq\omega}^{n} q_{\omega j}^{(\alpha)}(r)u_j \\ q_{\alpha\omega}^{(\alpha)}(r)\,u_{\omega+1} \\ \vdots \\ q_{\alpha\omega}^{(\alpha)}(r)\,u_n \end{bmatrix} \qquad (37b)$$

[99] Με άλλα λόγια, η Πρόταση (4) δηλώνει, ότι αν τυποποιήσουμε το διάνυσμα των τιμών με το τυπικό εμπόρευμα u, τότε κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η

- $\widetilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \widetilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$,

αν και μόνο αν η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β)[100] και

- $\widetilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \widetilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$,

αν και μόνο αν οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.[101, 102]

ονομαστική τιμή του εμπορεύματος ω *μειώνεται, αν και μόνο αν* η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α).

[100] Με άλλα λόγια, η Πρόταση (4) δηλώνει, ότι αν τυποποιήσουμε το διάνυσμα των τιμών με το τυπικό εμπόρευμα u, τότε κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η *ονομαστική* τιμή του εμπορεύματος ω *αυξάνεται, αν και μόνο αν* η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνική; (β).

[101] Με άλλα λόγια, η Πρόταση (4) δηλώνει, ότι αν τυποποιήσουμε το διάνυσμα των τιμών με το τυπικό εμπόρευμα u, τότε κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η *ονομαστική* τιμή του εμπορεύματος ω παραμένει *αμετάβλητη, αν και μόνο αν* οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες. Σύμφωνα με τον Ορισμό (2), το Πόρισμα (3) και την Πρόταση (3), σε μια τιμή r, $r \in \left[0, R^{*}\right)$, του ποσοστού κέρδους που οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες, η ανωτέρω πρόταση θα ισχύει γενικά για κάθε παραγόμενο εμπόρευμα, ανεξάρτητα από το τυπικό εμπόρευμα u.

[102] Μια ειδικότερη μορφή της Πρότασης (4) αποδεικνύεται στο Herrero, Jimenez-Raneda, and Villar [1980, σσ. 166-167]. Στην ανωτέρω εκδοχή της η Πρόταση (4) βασίζεται στις ακόλουθες υποθέσεις:

- Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι μη διασπώμενες μήτρες,
- $m_{ij}^{(\alpha)}(r) \prec 0$, για $i \neq j$,
- $m_{ij}^{(\alpha)}(r) \succ 0$, για $i = j$ και
- $\lambda_{\omega} = 0$

Με βάση τις ανωτέρω υποθέσεις αποδεικνύεται, ότι κάθε μια από τις ακόλουθες συνθήκες:

Απόδειξη: Σύμφωνα με την μορφή του τυπικού εμπορεύματος u, του οποίου την μορφή περιγράψαμε παραπάνω, για τις συνιστώσες του u_j, $j = 1,2,...,n$, θα ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$u_1 = u_2 = ... = u_{z-1} = u_{z+1} = ... = u_{\omega-1} = u_{\omega+1} = ... = u_n = 0 \tag{38}$$

$$u_z = \lambda_z \succ 0 \tag{39}$$

και

$$u_\omega = \lambda_\omega \geq 0 \tag{40}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (37) το τυπικό εμπόρευμα u και λαμβάνοντας υπόψη μας τις σχέσεις (38), (39) και (40) θα έχουμε:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T - \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T =$$

$$\frac{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\hat{p}^{(\alpha)}\left\{q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\,u - \left[\sum_{j=1}^{n} q_{\omega j}^{(\beta)}(r)u_j\right]\left(e_\omega^n\right)^T\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)} =$$

- $\hat{p}^{(\beta)} \succ \hat{p}^{(\alpha)}$,
- $\hat{p}^{(\beta)} \prec \hat{p}^{(\alpha)}$ και
- $\hat{p}^{(\alpha)} = \hat{p}^{(\beta)}$

αποτελεί απλώς *ικανή* συνθήκη για να έχουμε αντίστοιχα:

- $\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T \succ \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T$,
- $\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T \prec \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T$ και
- $\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T = \tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T$

$$\frac{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\hat{p}^{(\alpha)}\left\{q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\left[\lambda_z\left(e_z^n\right)^T+\lambda_\omega\left(e_\omega^n\right)^T\right]-\left[\sum_{j=1}^{n}q_{\omega j}^{(\beta)}(r)u_j\right]\left(e_\omega^n\right)^T\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}$$

$$\frac{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\hat{p}^{(\alpha)}\left\{q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\left[\lambda_z\left(e_z^n\right)^T+\lambda_\omega\left(e_\omega^n\right)^T\right]-\left[q_{\omega z}^{(\beta)}(r)\lambda_z+q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\lambda_\omega\right]\left(e_\omega^n\right)^T\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}=$$

$$\frac{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\hat{p}^{(\alpha)}\left[q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\lambda_z\left(e_z^n\right)^T-q_{\omega z}^{(\beta)}(r)\lambda_z\left(e_\omega^n\right)^T\right]}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}=$$

$$\frac{\lambda_z\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^n\right)^T q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T q_{\omega z}^{(\beta)}(r)\right]$$

Έτσι, με βάση τις σχέσεις (38), (39) και (40), η σχέση (37) γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T=\frac{\lambda_z\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^n\right)^T q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T q_{\omega z}^{(\beta)}(r)\right] \quad (41)$$

Θα δείξουμε, ότι γενικότερα ισχύει:

$$\hat{p}^{(*)}\left(e_z^n\right)^T q_{\omega\omega}^{(.)}(r)-\hat{p}^{(*)}\left(e_\omega^n\right)^T q_{\omega z}^{(.)}(r)\succ 0,\ (.),\ (*)=(\alpha),\ (\beta)\ \text{και}\ z\neq\omega \quad (42)$$

Έστω ότι:

$$\hat{p}^{(*)}=\hat{p}^{(\alpha)},$$

$$q_{\omega\omega}^{(.)}(r)=q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)$$

και

$$q_{\omega z}^{(.)}(r)=q_{\omega z}^{(\beta)}(r)$$

Τότε, με βάση τις σχέσεις (33) και (34) θα έχουμε:

$$\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^n\right)^T q_{\alpha\omega}^{(\beta)}(r)-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T q_{\alpha z}^{(\beta)}(r)=$$

$$\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^n\right)^T \frac{c_{\alpha\omega}^{(\beta)}(r)}{D^{(\beta)}(r)}-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T \frac{c_{\alpha z}^{(\beta)}(r)}{D^{(\beta)}(r)}=$$

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^n\right)^T \frac{c_{\alpha\omega}^{(\beta)}(r)}{D^{(\alpha)}(r)}-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T \frac{c_{\alpha z}^{(\beta)}(r)}{D^{(\alpha)}(r)}\right]\frac{D^{(\alpha)}(r)}{D^{(\beta)}(r)}=$$

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^n\right)^T \frac{c_{\alpha\omega}^{(\alpha)}(r)}{D^{(\alpha)}(r)}-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T \frac{c_{\alpha z}^{(\alpha)}(r)}{D^{(\alpha)}(r)}\right]\frac{D^{(\alpha)}(r)}{D^{(\beta)}(r)} \overset{[103]}{=}$$

$$\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^n\right)^T q_{\alpha\omega}^{(\alpha)}(r)-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T q_{\alpha z}^{(\alpha)}(r)\right]\frac{D^{(\alpha)}(r)}{D^{(\beta)}(r)}=$$

$$\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} l_i^{(\alpha)} q_{iz}^{(\alpha)}(r)\right] q_{\alpha\omega}^{(\alpha)}(r)-\left[\sum_{i=1}^{n} l_i^{(\alpha)} q_{i\omega}^{(\alpha)}(r)\right] q_{\alpha z}^{(\alpha)}(r)\right\}\frac{D^{(\alpha)}(r)}{D^{(\beta)}(r)}=$$

$$\left\{\left[\sum_{i=1,\, i\neq\omega}^{n} l_i^{(\alpha)} q_{iz}^{(\alpha)}(r)\right] q_{\alpha\omega}^{(\alpha)}(r)-\left[\sum_{i=1,\, i\neq\omega}^{n} l_i^{(\alpha)} q_{i\omega}^{(\alpha)}(r)\right] q_{\alpha z}^{(\alpha)}(r)\right\}\frac{D^{(\alpha)}(r)}{D^{(\beta)}(r)}=$$

$$\left\{\sum_{i=1,\, i\neq\omega}^{n}\left[l_i^{(\alpha)} q_{iz}^{(\alpha)}(r) q_{\alpha\omega}^{(\alpha)}(r)-l_i^{(\alpha)} q_{i\omega}^{(\alpha)}(r) q_{\alpha z}^{(\alpha)}(r)\right]\right\}\frac{D^{(\alpha)}(r)}{D^{(\beta)}(r)}=$$

$$\left\{\sum_{i=1,\, i\neq\omega}^{n} l_i^{(\alpha)}\left[q_{iz}^{(\alpha)}(r) q_{\alpha\omega}^{(\alpha)}(r)-q_{i\omega}^{(\alpha)}(r) q_{\alpha z}^{(\alpha)}(r)\right]\right\}\frac{D^{(\alpha)}(r)}{D^{(\beta)}(r)}=$$

---

[103] Προφανώς ισχύει:

$$c_{\omega j}^{(\alpha)}(r)=c_{\omega j}^{(\beta)}(r),\ j=1,2,\ldots,n$$

$$\left\{\sum_{i=1,\, i\neq\omega,\, z}^{n} l_i^{(\alpha)}\left[q_{iz}^{(\alpha)}(r)q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r)-q_{i\omega}^{(\alpha)}(r)q_{\omega z}^{(\alpha)}(r)\right]+l_z^{(\alpha)}\left[q_{zz}^{(\alpha)}(r)q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r)-q_{z\omega}^{(\alpha)}(r)q_{\omega z}^{(\alpha)}(r)\right]\right\}\frac{D^{(\alpha)}(r)}{D^{(\beta)}(r)}=$$

$$\left[\sum_{i=1,\, i\neq\omega,\, z}^{n} l_i^{(\alpha)}\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega z}^{(\alpha)}(r) \\ q_{i\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{iz}^{(\alpha)}(r)\end{vmatrix}+l_z^{(\alpha)}\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega z}^{(\alpha)}(r) \\ q_{z\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{zz}^{(\alpha)}(r)\end{vmatrix}\right]\frac{D^{(\alpha)}(r)}{D^{(\beta)}(r)}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα (3) και ειδικότερα τις σχέσεις (15) και (16) θα ισχύει:

$$\left[\sum_{i=1,\, i\neq\omega,\, z}^{n} l_i^{(\alpha)}\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega z}^{(\alpha)}(r) \\ q_{i\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{iz}^{(\alpha)}(r)\end{vmatrix}+l_z^{(\alpha)}\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega z}^{(\alpha)}(r) \\ q_{z\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{zz}^{(\alpha)}(r)\end{vmatrix}\right]\succ 0$$

Έτσι, με βάση τις ανωτέρω ισότητες, την ανωτέρω σχέση και τη συνθήκη Hawkins-Simon θα έχουμε:

$$\left[\sum_{i=1,\, i\neq\omega,\, z}^{n} l_i^{(\alpha)}\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega z}^{(\alpha)}(r) \\ q_{i\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{iz}^{(\alpha)}(r)\end{vmatrix}+l_z^{(\alpha)}\begin{vmatrix} q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{\omega z}^{(\alpha)}(r) \\ q_{z\omega}^{(\alpha)}(r) & q_{zz}^{(\alpha)}(r)\end{vmatrix}\right]\frac{D^{(\alpha)}(r)}{D^{(\beta)}(r)}\succ 0$$

και

$$\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^n\right)^T q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T q_{\omega z}^{(\beta)}(r)\succ 0$$ [104]

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (39), (41) και (42) προκύπτει:

[104] Ακολουθώντας μια ανάλογη αποδεικτική διαδικασία, μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^n\right)^T q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r)-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T q_{\omega z}^{(\alpha)}(r)\succ 0$$

ή

$$\hat{p}^{(\beta)}\left(e_z^n\right)^T q_{\omega\omega}^{(\alpha)}(r)-\hat{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T q_{\omega z}^{(\alpha)}(r)\succ 0$$

ή

$$\hat{p}^{(\beta)}\left(e_z^n\right)^T q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)-\hat{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T q_{\omega z}^{(\beta)}(r)\succ 0$$

$$sign\left[\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right]=sign\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right] \tag{43}$$

Επομένως, από την ανωτέρω σχέση (43), τους Ορισμούς (1) και (2), τα Πορίσματα (1) και (3), καθώς και την Πρόταση (3) θα έχουμε:

- Ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

ή

$$\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0 \prec 0,$$

αν και μόνο αν η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α)

- Ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

ή

$$\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0 \succ 0,$$

αν και μόνο αν η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β) και

- Ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

ή

$$\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0 = 0,$$

αν και μόνο αν οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.

Μια δεύτερη, ιδιαίτερη μορφή τυποποίησης, που εξασφαλίζει ότι η ονομαστική τιμή του εμπορεύματος ω που παράγεται από την υπερέχουσα τεχνική (β) είναι μικρότερη της ονομαστικής τιμής του εμπορεύματος ω που παράγεται από την υποδεέστερη τεχνική (α), θα μελετήσουμε παρακάτω:

Πρόταση 5. Αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι διασπώμενες και διαφέρουν ως προς την μέθοδο παραγωγής του *μη βασικού* εμπορεύματος ω, τότε για κάθε τυποποίηση των τιμών με ένα τυπικό εμπόρευμα u της μορφής:

$$u=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(e_j^n\right)^T+\lambda_\omega\left(e_\omega^n\right)^T+\lambda_z\left(e_z^n\right)^T,$$

όπου: $\lambda_j\geq 0$, $j=1,2,\ldots,k$, $\lambda_\omega\geq 0$, $k\prec z\leq n$, $z\neq\omega$, $\lambda_z\geq 0$ και $u\neq\lambda_\omega\left(e_\omega^n\right)^T$, στην τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r\in\left[0,R^*\right)$, θα ισχύει:

- $\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T\prec\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T$,

αν και μόνο αν η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α)[105]

- $\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T\succ\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T$,

αν και μόνο αν η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β)[106] και

- $\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T=\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T$,

αν και μόνο αν οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.[107]

---

[105] Με άλλα λόγια, η Πρόταση (5) δηλώνει, ότι αν τυποποιήσουμε το διάνυσμα των τιμών με το τυπικό εμπόρευμα u, τότε κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η ονομαστική τιμή του εμπορεύματος ω *μειώνεται, αν και μόνο αν* η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α).

[106] Με άλλα λόγια, η Πρόταση (5) δηλώνει, ότι αν τυποποιήσουμε το διάνυσμα των τιμών με το τυπικό εμπόρευμα u, τότε κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η ονομαστική τιμή του εμπορεύματος ω *αυξάνεται, αν και μόνο αν* η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β).

Απόδειξη: Εφόσον οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι διασπώμενες και διαφέρουν ως προς την μέθοδο παραγωγής του μη βασικού εμπορεύματος ω, στην τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, θα έχουμε:

$$k \prec \omega \leq n \tag{44}$$

$$q_{\omega j}^{(\alpha)} = 0, \; j = 1,2,...,k \tag{45}$$

και

$$q_{\omega j}^{(\alpha)} \succ 0, \; j = k+1, k+2,...,n \tag{46}$$

[108]

Σύμφωνα με τη σχέση (44) και την μορφή του τυπικού εμπορεύματος u, την οποία περιγράψαμε παραπάνω, για τις συνιστώσες u_j, $j = 1,2,...,n$, του τυπικού εμπορεύματος u θα ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$u_j = \lambda_j \geq 0, \; j = 1,2,...,k \tag{47}$$

$$u_{k+1} = u_{k+2} = ... = u_{z-1} = u_{z+1} = ... = u_{\omega-1} = u_{\omega+1} = ... = u_n = 0 \tag{48}$$

$$u_z = \lambda_z \geq 0 \tag{49}$$

---

[107] Με άλλα λόγια, η Πρόταση (5) δηλώνει, ότι αν τυποποιήσουμε το διάνυσμα των τιμών με το τυπικό εμπόρευμα u, τότε κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η ονομαστική τιμή του εμπορεύματος ω παραμένει *αμετάβλητη, αν και μόνο αν* οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες. Σύμφωνα με τον Ορισμό (2), το Πόρισμα (3) και την Πρόταση (3), σε μια τιμή r, $r \in \left[0, R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους που οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες, η ανωτέρω πρόταση θα ισχύει γενικά για κάθε παραγόμενο εμπόρευμα, ανεξάρτητα από το τυπικό εμπόρευμα u.

[108] Βλ. σχέση (1.2.a.19). Εξαιρείται μόνο η ιδιαίτερη περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{T}$ κι επιπλέον ισχύει:

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} = 0$$

Με βάση τη σχέση (44), στην ανωτέρω περίπτωση - και μόνο σε αυτήν - θα ισχύει:

$$q_{\omega j}^{(\alpha)} = 0, \; j = 1,2,...,n, \text{ με } j \neq \omega$$

και

$$q_{\omega\omega}^{(\alpha)} = 1$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε, ότι η ανωτέρω, ιδιαίτερη περίπτωση δεν αποτελεί εξαίρεση, όσον αφορά τα αποτελέσματα που συνεπάγεται, στην γενική περίπτωση.

και

$$u_{\omega}=\lambda_{\omega}\geq 0 \tag{50}$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (44), (45), (46), (48), (49) και (50) θα έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{n} q_{\omega j}^{(\beta)}(r)u_j=\sum_{j=1}^{k} q_{\omega j}^{(\beta)}(r)u_j+\sum_{j=k+1}^{n} q_{\omega j}^{(\beta)}(r)u_j \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_{\omega j}^{(\beta)}(r)u_j=0+\left[q_{\omega z}^{(\beta)}(r)\lambda_z+q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\lambda_{\omega}\right]\Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_{\omega j}^{(\beta)}(r)u_j=q_{\omega z}^{(\beta)}(r)\lambda_z+q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\lambda_{\omega} \tag{51}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (37) το ανωτέρω τυπικό εμπόρευμα u και τη σχέση (51) θα έχουμε την ακόλουθη ισοδύναμη σχέση:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=\frac{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]\hat{p}^{(\alpha)}\left\{q_{\alpha\omega}^{(\beta)}(r)\ u-\left[\sum_{j=1}^{n} q_{\omega j}^{(\beta)}(r)u_j\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}$$

$$\frac{\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\hat{p}^{(\alpha)}\left\{q_{\alpha\omega}^{(\beta)}(r)\left[\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(e_j^{n}\right)^{T}+\lambda_{\omega}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}+\lambda_z\left(e_z^{n}\right)^{T}\right]-\left[q_{\alpha z}^{(\beta)}(r)\lambda_z+q_{\alpha\omega}^{(\beta)}(r)\lambda_{\omega}\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right\}$$

$$\frac{\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\hat{p}^{(\alpha)}\left\{q_{\alpha\omega}^{(\beta)}(r)\left[\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(e_j^{n}\right)^{T}+\lambda_z\left(e_z^{n}\right)^{T}\right]-q_{\alpha z}^{(\beta)}(r)\lambda_z\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right\}=$$

$$\frac{\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\hat{p}^{(\alpha)}\left\{q_{\alpha\omega}^{(\beta)}(r)\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(e_j^{n}\right)^{T}+\lambda_z\left[q_{\alpha\omega}^{(\beta)}(r)\left(e_z^{n}\right)^{T}-q_{\alpha z}^{(\beta)}(r)\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right]\right\}=$$

$$\frac{\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\left\{q_{\alpha\omega}^{(\beta)}(r)\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^{n}\right)^{T}+\lambda_z\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^{n}\right)^{T}q_{\alpha\omega}^{(\beta)}(r)-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}q_{\alpha z}^{(\beta)}(r)\right]\right. \tag{52}$$

Έτσι, με βάση τις σχέσεις (44), (45), (46), (48), (49), (50) και (52) η σχέση (37) γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T=\frac{\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\left\{q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T+\lambda_z\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^n\right)^T q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T q_{\omega z}^{(\beta)}(r)\right]\right\} \quad (53)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (42), (44), (46), (47) και (49) θα έχουμε:

$$q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T+\lambda_z\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^n\right)^T q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T q_{\omega z}^{(\beta)}(r)\right]\succ 0 \quad (54)$$

Έτσι, από τις σχέσεις (53) και (54) προκύπτει:

$$\operatorname{sign}\left[\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T\right]=\operatorname{sign}\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]^{109} \quad (55)$$

---

[109] Όπως έχουμε δείξει, στην περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{T}$ κι επιπλέον ισχύει:

$$A_{22}^{(\alpha)}=A_{22}^{(\beta)}=0$$

συνεπάγεται:

$$q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)=1$$

και

$$q_{\omega z}^{(\beta)}(r)=0$$

Έτσι, θα έχουμε:

$$q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T+\lambda_z\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^n\right)^T q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T q_{\omega z}^{(\beta)}(r)\right]=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T+\lambda_z\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^n\right)^T \quad (56)$$

Εφαρμόζοντας την ανωτέρω σχέση (56) στη σχέση (53) θα έχουμε:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T=\frac{\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\left[\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T+\lambda_z\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_z^n\right)^T\right] \quad (57)$$

Προφανώς, από τις σχέσεις (47) και (49) και την υπόθεσή μας:

$$u\neq\lambda_\omega\left(e_\omega^n\right)^T$$

θα ισχύει:

Επομένως, από την ανωτέρω σχέση (55), τους Ορισμούς (1) και (2), τα Πορίσματα (1) και (3), καθώς και την Πρόταση (3) θα έχουμε:

• Ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

ή

$$\hat{p}^{(\alpha)}d\left(1+r\right)+d_{0} \prec 0,$$

αν και μόνο αν η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α)

• Ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

ή

$$\hat{p}^{(\alpha)}d\left(1+r\right)+d_{0} \succ 0,$$

αν και μόνο αν η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β) και

• Ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

ή

$$\hat{p}^{(\alpha)}d\left(1+r\right)+d_{0} = 0,$$

αν και μόνο αν οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.

Είδαμε δύο ιδιαίτερες περιπτώσεις τυποποίησης των διανυσμάτων τιμών των τεχνικών (α) και (β), σύμφωνα με τις οποίες η ονομαστική τιμή του εμπορεύματος

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_{j}\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}+\lambda_{z}\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{z}^{n}\right)^{T} \succ 0 \tag{58}$$

Έτσι, από τις σχέσεις (57) και (58) προκύπτει:

$$sign\left[\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right]=sign\left[\hat{p}^{(\alpha)}d\left(1+r\right)+d_{0}\right],$$

δηλαδή η σχέση (55).

ω που παράγεται από την υπερέχουσα τεχνική (β) είναι μικρότερη της αντίστοιχης τιμής του εμπορεύματος ω που παράγεται από την υποδεέστερη τεχνική (α).

Για κάθε μια από τις ανωτέρω μορφές τυποποίησης των διανυσμάτων τιμών των τεχνικών (α) και (β) η τιμή του εμπορεύματος ω που παράγεται από την υπερέχουσα τεχνική (β) είναι μικρότερη της τιμής του εμπορεύματος ω που παράγεται από την υποδεέστερη τεχνική (α), ανεξάρτητα αν η ονομαστική τιμή του εμπορεύματος ω εκφράζεται σε όρους της εργασιακής δύναμης ή σε όρους του τυπικού εμπορεύματος u.[110]

Από την Πρόταση (4) και την Πρόταση (5) προκύπτει η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 6. Για κάθε καλάθι εμπορευμάτων u της μορφής:

$$u = \lambda_z \left(e_z^n\right)^T + \lambda_\omega \left(e_\omega^n\right)^T, \quad {}_\omega \geq 0, \ \lambda_z \succ 0, \quad = 1,2,\ldots,n \text{ και } z \neq \omega,$$

ή, στην ιδιαίτερη περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ είναι διασπώμενες και διαφέρουν ως προς την μέθοδο παραγωγής του μη βασικού εμπορεύματος ω, της μορφής:

$$u = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(e_j^n\right)^T + \lambda_\omega \left(e_\omega^n\right)^T + \lambda_z \left(e_z^n\right)^T,$$

110 Για κάθε άλλη μορφή τυποποίησης των τιμών είναι αδύνατον a priori να καθοριστεί η σχέση των ονομαστικών τιμών του εμπορεύματος ω μεταξύ των τεχνικών (α) και (β). Κατά συνέπεια, "...the numeraire is not neutral when we come to compare the price systems assosiated with different technologies, though the contrary claim is sometimes made." (βλ. Herrero, Jimenez-Raneda, and Villar [1980, σελ. 168]). Το αξιοπρόσεκτο είναι ότι ο "αντίθετος ισχυρισμός" διατυπώνεται στην αμέσως επόμενη παράγραφο του ίδιου άρθρου: "If... (α) και (β) are two technologies which differ only in the ... ω-th method of production, and for a certain value of $r = r_1$ we find that ... $\hat{p}^{(\beta)} \prec \hat{p}^{(\alpha)}$... (then)... $\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^n \prec \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^n$, however we normalize, i.e. prices in termes of any numeraire of the ω-th commodity are lower for technology (β) than for technology (α), and so technology (β) provides a lower price for the said rate of profit, and will be preferred to the alternative technique." [Οι μόνες τροποποιήσεις που κάναμε στο ανωτέρω απόσπασμα είναι στο συμβολισμό και στην προσθήκη της λέξης "then"].

όπου: $\lambda_j \geq 0$, $j=1,2,\ldots,k$, $\lambda_\omega \geq 0$, $k \prec z \leq n$, $z \neq \omega$, $\lambda_z \geq 0$ και $u \neq \lambda_\omega \left(e_\omega^n\right)^T$, στην τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^*\right)$, θα ισχύει:

- $$\frac{\Delta p \left(e_\omega^n\right)^T}{p^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T} \succ \frac{\Delta p\, u}{p^{(\alpha)} u}, \text{ όπου } \Delta p = \left(p^{(\alpha)} - p^{(\beta)}\right),$$

αν και μόνο αν η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α)[111]

- $$\frac{\Delta p \left(e_\omega^n\right)^T}{p^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T} \prec \frac{\Delta p\, u}{p^{(\alpha)} u}, \text{ όπου } \Delta p = \left(p^{(\alpha)} - p^{(\beta)}\right),$$

αν και μόνο αν η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β)[112] και

---

[111] Η ανωτέρω σχέση δηλώνει, ότι αν κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η τιμή του εμπορεύματος ω *μειώνεται ή μένει σταθερή*, τότε η τιμή του εμπορεύματος u θα *μειώνεται ποσοστιαία λιγότερο* από την τιμή του εμπορεύματος ω, *αν και μόνο αν* η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α). Αν όμως κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η τιμή του εμπορεύματος ω *αυξάνεται ή μένει σταθερή*, τότε η τιμή του εμπορεύματος u θα *αυξάνεται ποσοστιαία περισσότερο* από την τιμή του εμπορεύματος ω, *αν και μόνο αν* η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α). Στην ειδική περίπτωση που το εμπόρευμα u αποτελείται από το απλό εμπόρευμα $j, j=1,2,\ldots,n$ με $j \neq \omega$, η ανωτέρω σχέση δηλώνει, ότι αν κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η τιμή του εμπορεύματος ω *μειώνεται ή μένει σταθερή*, τότε η τιμή κάθε απλού εμπορεύματος j θα *μειώνεται ποσοστιαία λιγότερο* από την τιμή του εμπορεύματος ω, *αν και μόνο αν* η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α). Αν όμως κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η τιμή του εμπορεύματος ω *αυξάνεται ή μένει σταθερή*, τότε η τιμή κάθε απλού εμπορεύματος j θα *αυξάνεται ποσοστιαία περισσότερο* από την τιμή του εμπορεύματος ω, *αν και μόνο αν* η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α). Προφανώς, εφόσον αναφερόμαστε σε λόγους τιμών, τα ανωτέρω συμπεράσματα είναι ανεξάρτητα από το μέτρο των τιμών (numeraire).

[112] *Η ανωτέρω σχέση δηλώνει, ότι αν κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική* (α) στην τελική τεχνική (β) η τιμή του εμπορεύματος ω *μειώνεται ή μένει σταθερή*, τότε η τιμή του εμπορεύματος u θα *μειώνεται ποσοστιαία περισσότερο* από την τιμή του εμπορεύματος ω, *αν και μόνο αν* η τεχνική (α)

• $\frac{\Delta p\left(e_\omega^n\right)^T}{p^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T}=\frac{\Delta p\, u}{p^{(\alpha)}u}$, όπου $\Delta p=\left(p^{(\alpha)}-p^{(\beta)}\right)$,

αν και μόνο αν οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.[113, 114]

Απόδειξη: Θα εξετάσουμε κάθε μια από τις ανωτέρω περιπτώσεις ξεχωριστά:

υπερέχει της τεχνικής (β). Αν όμως κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η τιμή του εμπορεύματος ω *αυξάνεται ή μένει σταθερή,* τότε η τιμή του εμπορεύματος u θα *αυξάνεται ποσοστιαία λιγότερο* από την τιμή του εμπορεύματος ω, *αν και μόνο αν* η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α). Στην ειδική περίπτωση που το εμπόρευμα u αποτελείται από το απλό εμπόρευμα $j, j=1,2,\ldots,n$ με $j\neq\omega$, η ανωτέρω σχέση δηλώνει, ότι αν κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η τιμή του εμπορεύματος ω *μειώνεται ή μένει σταθερή,* τότε η τιμή κάθε απλού εμπορεύματος j θα *μειώνεται ποσοστιαία περισσότερο* από την τιμή του εμπορεύματος ω, *αν και μόνο* αν η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β). Αν όμως κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η τιμή του εμπορεύματος ω *αυξάνεται ή μένει σταθερή,* τότε η τιμή κάθε απλού εμπορεύματος j θα *αυξάνεται ποσοστιαία λιγότερο* από την τιμή του εμπορεύματος ω, *αν και μόνο αν* η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β). Προφανώς, εφόσον αναφερόμαστε σε λόγους τιμών, τα ανωτέρω συμπεράσματα είναι ανεξάρτητα από το μέτρο των τιμών (numeraire).

[113] Η ανωτέρω σχέση δηλώνει, ότι κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η τιμή του εμπορεύματος ω μεταβάλλεται ποσοστιαία *εξίσου* με την τιμή του εμπορεύματος u, *αν και μόνο αν* οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες. Στην ειδική περίπτωση που το εμπόρευμα u αποτελείται από το απλό εμπόρευμα $j, j=1,2,\ldots,n$ με $j\neq\omega$, η ανωτέρω σχέση δηλώνει, ότι κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η τιμή του απλού εμπορεύματος ω μεταβάλετε ποσοστιαία *εξίσου* με την τιμή κάθε άλλου απλού εμπορεύματος j, *αν και μόνο αν* οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες. Προφανώς, εφόσον αναφερόμαστε σε λόγους τιμών, τα ανωτέρω συμπεράσματα είναι ανεξάρτητα από το μέτρο των τιμών (numeraire).

[114] Εναλλακτικές διατυπώσεις κι αποδείξεις της *ικανής συνθήκης μόνο* της ανωτέρω Πρότασης (6), στην ειδική περίπτωση που το εμπόρευμα u αποτελείται από το απλό εμπόρευμα $j, j=1,2,\ldots,n$ με $j\neq\omega$, βρίσκουμε στους Bidard [1991, σελ. 81], Morishima [1973, σσ. 30-34] και Schefold [1978, σελ. 41]. Την ανωτέρω πρόταση, κατά το σκέλος που την πραγματεύεται, ο Bidard την σχολιάζει ως εξής: "La déformation de la structure des prix relatifs consécutive à l' introduction d' une nouvelle méthode est difficile à prédire mais, si les prix expriment la difficulté de la production, l' intuition suggère que la branche initiatrice du changement technique en bénéficie davantage que les autres qui ne sont pas touchés qu' indirectement". Βλ. Bidard [1991, σελ. 80].

I. Η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α).

Από τις Προτάσεις (4) και (5) προκύπτει, ότι αν η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α), τότε και μόνο τότε για τις ονομαστικές τιμές του εμπορεύματος ω, που εκφράζονται σε όρους του εμπορεύματος u, θα ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \Leftrightarrow$$

$$\frac{p^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{p^{(\beta)}u} \prec \frac{p^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{p^{(\alpha)}u} \Leftrightarrow$$

$$\frac{p^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{p^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}} \prec \frac{p^{(\beta)}u}{p^{(\alpha)}u} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{p^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{p^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}} \succ -\frac{p^{(\beta)}u}{p^{(\alpha)}u} \Leftrightarrow$$

$$1-\frac{p^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{p^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}} \succ 1-\frac{p^{(\beta)}u}{p^{(\alpha)}u} \Leftrightarrow$$

$$\frac{p^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} - p^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{p^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}} \succ \frac{p^{(\alpha)}u - p^{(\beta)}u}{p^{(\alpha)}u} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(p^{(\alpha)} - p^{(\beta)}\right)\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{p^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}} \succ \frac{\left(p^{(\alpha)} - p^{(\beta)}\right)u}{p^{(\alpha)}u} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta p\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{p^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}} \succ \frac{\Delta p\ u}{p^{(\alpha)}u}, \text{ όπου } \Delta p = \left(p^{(\alpha)} - p^{(\beta)}\right)$$

II. Η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β).

Από τις Προτάσεις (4) και (5) προκύπτει, ότι αν η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β), τότε και μόνο τότε για τις ονομαστικές τιμές του εμπορεύματος ω, που εκφράζονται σε όρους του εμπορεύματος u, θα ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

Ακολουθώντας μια ανάλογη αποδεικτική διαδικασία με αυτήν που είδαμε παραπάνω, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\frac{\left(p^{(\alpha)} - p^{(\beta)}\right)\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{p^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}} \prec \frac{\left(p^{(\alpha)} - p^{(\beta)}\right)u}{p^{(\alpha)}u} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta p\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{p^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}} \prec \frac{\Delta p\ u}{p^{(\alpha)}u}, \text{ όπου } \Delta p = \left(p^{(\alpha)} - p^{(\beta)}\right)$$

III. Οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.

Από τις Προτάσεις (4) και (5) προκύπτει, ότι αν οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες, τότε και μόνο τότε για τις ονομαστικές τιμές του εμπορεύματος ω, που εκφράζονται σε όρους του εμπορεύματος u, θα ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

Ακολουθώντας μια ανάλογη αποδεικτική διαδικασία με αυτήν που είδαμε παραπάνω οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\frac{\left(p^{(\alpha)} - p^{(\beta)}\right)\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{p^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}} = \frac{\left(p^{(\alpha)} - p^{(\beta)}\right)u}{p^{(\alpha)}u} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta p\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}}{p^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}} = \frac{\Delta p\ u}{p^{(\alpha)}u}, \text{ όπου } \Delta p = \left(p^{(\alpha)} - p^{(\beta)}\right)$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μια ειδική μορφή τυποποίησης των τιμών, από την οποία προκύπτει ότι τα διανύσματα των ονομαστικών τιμών των τεχνικών (α) και (β) είναι *ολικά διατεταγμένα* μεταξύ τους.

Πρόταση 7. Για κάθε τυποποίηση των τιμών με ένα τυπικό εμπόρευμα u της μορφής $u=\lambda_{\omega}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$, όπου $_{\omega}\succ 0$, στην τυχαία τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r\in\left[0,R^{*}\right)$, θα ισχύει:

- $\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}\succ\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}, j=1,2,\ldots,n,$ με $j\neq\omega$,

αν και μόνο αν η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α)[115]

- $\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}\prec\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}, j=1,2,\ldots,n,$ με $j\neq\omega$,

αν και μόνο αν η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β)[116] και

- $\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}=\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}, j=1,2,\ldots,n,$

αν και μόνο αν οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.[117]

---

[115] Με άλλα λόγια, η Πρόταση (7) δηλώνει, ότι αν τυποποιήσουμε το διάνυσμα των τιμών με το τυπικό εμπόρευμα u, τότε κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η ονομαστική τιμή του εμπορεύματος $j, j=1,2,\ldots,n,$ με $j\neq\omega$, *αυξάνεται, αν και μόνο αν* η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α).

[116] Με άλλα λόγια, η Πρόταση (7) δηλώνει, ότι αν τυποποιήσουμε το διάνυσμα των τιμών με το τυπικό εμπόρευμα u, τότε κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η ονομαστική τιμή του εμπορεύματος $j, j=1,2,\ldots,n,$ με $j\neq\omega$, *μειώνεται, αν και μόνο αν* η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β).

[117] Με άλλα λόγια, η Πρόταση (7) δηλώνει, ότι αν τυποποιήσουμε το διάνυσμα των τιμών με το τυπικό εμπόρευμα u, τότε κατά την μεταπήδηση από την αρχική τεχνική (α) στην τελική τεχνική (β) η ονομαστική τιμή του εμπορεύματος $j, j=1,2,\ldots,n,$ παραμένει *αμετάβλητη, αν και μόνο αν* οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες. Σύμφωνα με τον Ορισμό (2), το Πόρισμα (3) και την Πρόταση (3), σε μια τιμή r, $r\in\left[0,R^{*}\right)$, του ποσοστού κέρδους που οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες, η ανωτέρω πρόταση θα ισχύει γενικά, ανεξάρτητα από το τυπικό εμπόρευμα u.

Απόδειξη: Σύμφωνα με τις σχέσεις (33) και (34), θα απλοποιήσουμε την ανάλυσή μας χρησιμοποιώντας τον εξής συμβολισμό:

$$e_{\omega}^{n}\left[I-(1+r)A^{(\cdot)}\right]^{-1}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}=q_{\omega j}^{(\cdot)}(r),\ \text{με}\ (\cdot)=(\alpha),(\beta) \tag{59}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (36) και (59), καθώς και την υπόθεσή μας:

$$u=\lambda_{\omega}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T},\ \lambda_{\omega}\succ 0$$

στη σχέση (32) θα έχουμε:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}-\tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}=$$

$$\frac{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_{0}\right]\left\{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)e_{\omega}^{n}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}-\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}\right]e_{\omega}^{n}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}u\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}=$$

$$\frac{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_{0}\right]\left\{\hat{p}^{(\alpha)}\left[\lambda_{\omega}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right]q_{\omega j}^{(\beta)}(r)-\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}\right]e_{\omega}^{n}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}\left[\lambda_{\omega}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right]\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}=$$

$$\frac{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_{0}\right]\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right]\lambda_{\omega}q_{\omega j}^{(\beta)}(r)-\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}\right]\lambda_{\omega}e_{\omega}^{n}\left[I-(1+r)A^{(\beta)}\right]^{-1}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}=$$

$$\frac{\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_{0}\right]\left\{\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right]\lambda_{\omega}q_{\omega j}^{(\beta)}(r)-\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}\right]\lambda_{\omega}q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\right\}}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}=$$

$$\frac{\lambda_{\omega}\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_{0}\right]\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}q_{\omega j}^{(\beta)}(r)-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)\right]}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}=$$

$$-\frac{\lambda_{\omega}\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_{0}\right]}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{j}^{n}\right)^{T}q_{\omega\omega}^{(\beta)}(r)-\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}q_{\omega j}^{(\beta)}(r)\right] \tag{60}$$

Έτσι, με βάση τη σχέση (60) η σχέση (32) γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T - \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T = -\frac{\lambda_\omega\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right]}{\left(\hat{p}^{(\alpha)}u\right)\left(\hat{p}^{(\beta)}u\right)}\left[\hat{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T q_{\alpha\omega}^{(\beta)}(r) - \hat{p}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T q_{\omega j}^{(\beta)}(r)\right] \quad (61)$$

Συνδυάζοντας την ανωτέρω σχέση (61) με τη σχέση (42) και την υπόθεση μας:

$$\lambda_\omega \succ 0$$

συνεπάγεται:

$$sign\left[\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T - \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T\right] \neq sign\left[\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0\right] \quad (62)$$

Επομένως, από την ανωτέρω σχέση (62), τους Ορισμούς (1) και (2), τα Πορίσματα (1) και (3), καθώς και την Πρόταση (3) προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T \succ \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T,\ j=1,2,\ldots,n,\ \text{με}\ j\neq\omega$$

ή

$$\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0 \prec 0,$$

αν και μόνο αν η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α)

- Ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T \prec \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T,\ j=1,2,\ldots,n,\ \text{με}\ j\neq\omega$$

ή

$$\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0 \succ 0,$$

αν και μόνο αν η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β) και

- Ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T = \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T,\ j=1,2,\ldots,n,$$

ή

$$\hat{p}^{(\alpha)}d(1+r)+d_0 = 0,$$

αν και μόνο αν οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι οι μέγιστες τιμές του ποσοστού κέρδους των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) είναι ίσες, δηλαδή ισχύει:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

Με βάση το ερμηνευτικό σχήμα του αλγόριθμου της αγοράς θα συγκρίνουμε την κερδοφορία των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) στην τιμή R του ποσοστού κέρδους. Για την ανάλυση που θα ακολουθήσει είναι σκόπιμο να διατυπώσουμε τα ακόλουθα Λήμματα.

Λήμμα 4. Αν οι μήτρες $A^{(\alpha}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$[118] είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$ θα ισχύει:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}d = \frac{1}{\lambda}\left\{1-(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2\right\}\left(\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}d\right) \tag{63}$$

[119]

και

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}d = \lambda\left\{1+(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2\right\}\left(\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}d\right) \tag{64}$$

[120]

---

[118] Υπό την προϋπόθεση, φυσικά, ότι ισχύει:

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} \neq 0$$

[119] Οπου με λ συμβολίζουμε το βαθμωτό που εκφράζει την αναλογία μεταξύ των διανυσμάτων $\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}$ και $\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)}$. Δηλαδή:

$$\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}d_1 = \lambda\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)}d_1$$

Βλέπε τη σχέση (1.3.6).

[120] Αν στην ειδική περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{T}$ και ισχύει:

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} \neq 0$$

λάβουμε υπόψη μας τη σχέση (1.2.a.38), τότε οι σχέσεις (63) και (64) γράφονται αντίστοιχα ως εξής:

$$\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)}d_1 = \frac{1}{\lambda}\left\{1-(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2\right\}\left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}d_1\right) \tag{63a}$$

και

$$\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}d_1 = \lambda\left\{1+(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2\right\}\left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)}d_1\right) \tag{64a}$$

Απόδειξη: Πράγματι, από τη σχέση (1.3.7) προκύπτει:

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)} = (\lambda-1)\tilde{p}_2^{(\alpha)} + \left[\tilde{p}_2^{(\beta)} - \left(\tilde{p}_1^{(\beta)}A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\beta)}A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} = \lambda\tilde{p}_2^{(\alpha)} + \left[\tilde{p}_2^{(\beta)} - \left(\tilde{p}_1^{(\beta)}A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\beta)}A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} \tag{65}$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (1.3.6), (1.3.18a), (1.3.44), (1.3.45) και (65) θα έχουμε:

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \tilde{p}_1^{(\beta)}d_1 + \tilde{p}_2^{(\beta)}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}_1^{(\alpha)}d_1 + \left\{\lambda\tilde{p}_2^{(\alpha)} + \left[\tilde{p}_2^{(\beta)} - \left(\tilde{p}_1^{(\beta)}A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\beta)}A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}\right\}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}_1^{(\alpha)}d_1 + \lambda\tilde{p}_2^{(\alpha)}d_2 + \left[\tilde{p}_2^{(\beta)} - \left(\tilde{p}_1^{(\beta)}A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\beta)}A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}d_1 + \tilde{p}_2^{(\alpha)}d_2\right) + \left[\tilde{p}_2^{(\beta)} - \left(\tilde{p}_1^{(\beta)}A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\beta)}A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d + \left[\left(\tilde{p}_1^{(\beta)}A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\beta)}A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \left(\tilde{p}_1^{(\beta)}A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\beta)}A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d + \left[\tilde{p}_1^{(\beta)}\left(A_{12}^{(\beta)} - A_{12}^{(\alpha)}\right) + \tilde{p}_2^{(\beta)}\left(A_{22}^{(\beta)} - A_{22}^{(\beta)}\right)\right](1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d + \left[\tilde{p}_1^{(\beta)}\left(d_1e_{\omega-k}^{n-k}\right) + \tilde{p}_2^{(\beta)}\left(d_2e_{\omega-k}^{n-k}\right)\right](1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d + \left[\left(\tilde{p}_1^{(\beta)}d_1\right)e_{\omega-k}^{n-k} + \left(\tilde{p}_2^{(\beta)}d_2\right)e_{\omega-k}^{n-k}\right](1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d + \left(\tilde{p}_1^{(\beta)}d_1 + \tilde{p}_2^{(\beta)}d_2\right)e_{\omega-k}^{n-k}(1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d + \tilde{p}^{(\beta)}d(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d\left\{1 - (1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2\right\} = \lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\alpha)}d = \frac{1}{\lambda}\left\{1 - (1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2\right\}\left(\tilde{p}^{(\beta)}d\right)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, από τη σχέση (1.3.8) προκύπτει:

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)} = \frac{\lambda-1}{\lambda}\tilde{p}_2^{(\beta)} + \left[\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)}A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda}\tilde{p}_2^{(\beta)} = \tilde{p}_2^{(\alpha)} + \left[\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)}A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} = \lambda\left\{\tilde{p}_2^{(\alpha)} + \left[\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)}A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}\right\} \tag{66}$$

Επίσης, σύμφωνα με τις σχέσεις (1.3.6), (1.3.17a), (1.3.44), (1.3.45) και (66) θα έχουμε:

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \tilde{p}_1^{(\beta)}d_1 + \tilde{p}_2^{(\beta)}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}_1^{(\alpha)}d_1 + \lambda\left\{\tilde{p}_2^{(\alpha)} + \left[\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)}A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}\right\}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}_1^{(\alpha)}d_1 + \lambda\tilde{p}_2^{(\alpha)}d_2 + \lambda\left[\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)}A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}d_1 + \tilde{p}_2^{(\alpha)}d_2\right) + \lambda\left[\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)}A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \tilde{p}_2^{(\alpha)}\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d + \lambda\left[\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)}A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\alpha)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)}A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d + \lambda\left[\tilde{p}_1^{(\alpha)}\left(A_{12}^{(\beta)} - A_{12}^{(\alpha)}\right) + \tilde{p}_2^{(\alpha)}\left(A_{22}^{(\beta)} - A_{22}^{(\alpha)}\right)\right](1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d + \lambda\left[\tilde{p}_1^{(\alpha)}\left(d_1e_{\omega-k}^{n-k}\right) + \tilde{p}_2^{(\alpha)}\left(d_2e_{\omega-k}^{n-k}\right)\right](1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d + \lambda\left[\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}d_1\right)e_{\omega-k}^{n-k} + \left(\tilde{p}_2^{(\alpha)}d_2\right)e_{\omega-k}^{n-k}\right](1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d + \lambda\left(\tilde{p}_1^{(\alpha)}d_1 + \tilde{p}_2^{(\alpha)}d_2\right)e_{\omega-k}^{n-k}(1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d + \lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\beta)}d = \lambda\left\{1 + (1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2\right\}\tilde{p}^{(\alpha)}d$$

Λήμμα 5. Αν οι μήτρες $A^{(\alpha}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{T}$ και ισχύει:

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} \neq 0,$$

τότε θα έχουμε:

$$1-(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2 = 1+(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2 = 1 \qquad (67)$$

Απόδειξη: Από την υπόθεσή μας:

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} \neq 0,$$

και τη σχέση (1.2.a.38) προκύπτει:

$$1-(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2 = 1$$

και

$$1+(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2 = 1$$ [121, 122]

---

121 Από τις σχέσεις (1.2.a.38), (63), (63a), (64), (64a) και (67) προκύπτει, ότι, αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{T}$ και ισχύει:

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} \neq 0,$$

τότε θα έχουμε:

$$\mathrm{p}^{(\beta)}d = \mathrm{p}_1^{(\beta)}d_1 + \mathrm{p}_2^{(\beta)}d_2 = \mathrm{p}_1^{(\beta)}d_1 = \lambda \mathrm{p}_1^{(\alpha)}d_1 = \lambda\left[\mathrm{p}_1^{(\alpha)}d_1 + \mathrm{p}_2^{(\alpha)}d_2\right] = \lambda \mathrm{p}^{(\alpha)}d, \text{ με } \lambda \succ 0 \qquad (63b)$$

Εναλλακτικά, στην ανωτέρω σχέση (63b) μπορούμε να καταλήξουμε μέσα από τις σχέσεις (1.3.6) και (1.2.a.38), ανεξάρτητα αν ισχύει:

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} \neq 0,$$

ή

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} = 0$$

122 Με άλλα λόγια, στο Λήμμα (5) δείξαμε, ότι, αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{T}$ και ισχύει:

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} \neq 0,$$

τότε θα έχουμε:

Λήμμα 6. Αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{D}$ και ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\alpha)}d \neq 0$$ [123]

ή

$$\tilde{p}^{(\beta)}d \neq 0,$$ [124]

τότε θα έχουμε:

$$\frac{1}{1-(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2} = 1+(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2 \succ 0 \quad (68)$$

Απόδειξη: Αρχικά, θα υποθέσουμε ότι ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\alpha)}d \neq 0,$$

και θα δείξουμε, ότι από την ανωτέρω υπόθεση συνεπάγεται η σχέση (68). Πράγματι, από τις σχέσεις (1.3.6) και (63), καθώς και την υπόθεσή μας ότι ισχύει:

$$(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2 = (1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2 = 0$$

ή

$$e_{\omega-k}^{n-k}\left[I-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2 = e_{\omega-k}^{n-k}\left[I-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2 = 0 \quad (67a)$$

123 Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$\tilde{p}^{(\alpha)}d \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\nu p^{(\alpha)}d \neq 0,\ \nu \succ 0 \Leftrightarrow$$

$$p^{(\alpha)}d \neq 0,$$

όπου με ν συμβολίζουμε το βαθμωτό που εκφράζει την αναλογία μεταξύ των διανυσμάτων $p^{(\alpha)}$ και $\tilde{p}^{(\alpha)}$.

124 Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$\tilde{p}^{(\beta)}d \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\mu p^{(\beta)}d \neq 0,\ \mu \succ 0 \Leftrightarrow$$

$$p^{(\beta)}d \neq 0,$$

όπου με μ συμβολίζουμε το βαθμωτό που εκφράζει την αναλογία μεταξύ των διανυσμάτων $p^{(\beta)}$ και $\tilde{p}^{(\beta)}$.

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}d \neq 0,$$

προκύπτει:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}d \neq 0 \tag{69}$$

και

$$1-(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2 \neq 0 \tag{70}$$

Επομένως, με βάση τις σχέσεις (63) και (70) μπορούμε να γράψουμε:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}d = \frac{\lambda}{1-(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2}\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}d \tag{71}$$

Έτσι, από την ανωτέρω υπόθεσή μας και τις σχέσεις (1.3.6), (64) και (71) θα έχουμε:

$$\frac{\lambda\left(\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}d\right)}{1-(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2} = \lambda\left\{1+(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2\right\}\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}d \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1-(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2} = 1+(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2 \tag{72}$$

Επομένως, απομένει να δείξουμε ότι ένα από τα ανωτέρω βαθμωτά είναι θετικό. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$C^{A_{22}^{(.)}}(R) = \left[c_{ij}^{A_{22}^{(.)}}(R)\right] = adj\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(.)}\right],\ (.)=(\alpha),\ (\beta) \tag{73}$$

και

$$D^{A_{22}^{(.)}}(R) = \left|I_2-(1+R)A_{22}^{(.)}\right|,\ (.)=(\alpha),\ (\beta) \tag{74}$$

Από τη σχέση (73) και την υπόθεση μας ότι οι μήτρες $A_{22}^{(\alpha)}$ και $A_{22}^{(\beta)}$ διαφέρουν ως προς την στήλη $\omega-k$ θα έχουμε:

$$c_{\omega-k,j}^{A_{22}^{(\alpha)}}(R) = c_{\omega-k,j}^{A_{22}^{(\beta)}}(R) = c_{\omega-k,j}^{A_{22}}(R),\ j=1,2,\ldots,n-k \tag{75}$$

Έτσι, από τις σχέσεις (73), (74) και (75) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$ {}_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}=e_{\omega-k}^{n-k}\frac{C^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}=\frac{1}{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}\left[c_{\omega-k,1}^{A_{22}}(R),c_{\omega-k,2}^{A_{22}}(R),\ldots,c_{\omega-k,n-k}^{A_{22}}(R)\right] \quad (76) $$

και

$$ e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}=e_{\omega-k}^{n-k}\frac{C^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}=\frac{1}{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}\left[c_{\omega-k,1}^{A_{22}}(R),c_{\omega-k,2}^{A_{22}}(R),\ldots,c_{\omega-k,n-k}^{A_{22}}(R)\right] \quad (77) $$

Θέτουμε:

$$ x=\left[c_{\omega-k,1}^{A_{22}}(R),c_{\omega-k,2}^{A_{22}}(R),\ldots,c_{\omega-k,n-k}^{A_{22}}(R)\right]d_2,\quad x\in\Re \quad (78) $$

Επομένως, από τις σχέσεις (76), (77) και (78) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$ e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2=\frac{x}{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)} \quad (79) $$

και

$$ e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2=\frac{x}{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)} \quad (80) $$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (79) και (80) στη σχέση (72) θα έχουμε:

$$ \frac{1}{1-(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2}=1+(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2\Leftrightarrow $$

$$ \frac{1}{1-\frac{(1+R)}{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}x}=1+\frac{(1+R)}{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}x\Leftrightarrow $$

$$ \frac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)-(1+R)x}=\frac{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)+(1+R)x}{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}\Leftrightarrow $$

$$ (1+R)^2x^2+D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)(1+R)x-D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)(1+R)x=0\Leftrightarrow $$

$$ (1+R)x^2+D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)x-D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)x=0\Leftrightarrow $$

$$x\left[\left(1+R\right)x+\left(D^{A_{22}^{(\beta)}}\left(R\right)-D^{A_{22}^{(\alpha)}}\left(R\right)\right)\right]=0$$

Από την ανωτέρω εξίσωση δευτέρου βαθμού προκύπτουν οι λύσεις:

$$x=0$$

και

$$x=\frac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}\left(R\right)-D^{A_{22}^{(\beta)}}\left(R\right)}{\left(1+R\right)}$$

Στη συνέχεια θα διερευνήσουμε τις ανωτέρω λύσεις:

a. Ισχύει:

$$x=0 \tag{81}$$

Τότε, από τις σχέσεις (79) και (81) συνεπάγεται:

$$\frac{1}{1-\left(1+R\right)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I-\left(1+R\right)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2}=\frac{1}{1-\frac{\left(1+R\right)x}{D^{A_{22}^{(\beta)}}\left(R\right)}}=1\succ 0 \tag{82}$$

Επίσης, από τις σχέσεις (80) και (81) συνεπάγεται:

$$1+\left(1+R\right)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I-\left(1+R\right)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2=1+\frac{\left(1+R\right)x}{D^{A_{22}^{(\alpha)}}\left(R\right)}=1\succ 0 \text{ [125]} \tag{83}$$

---

[125] Οι σχέσεις (82) και (83) εκφράζουν, ότι αν για τις μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$, που ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{D}$, ισχύει:

- $\tilde{p}^{(\alpha)}d\neq 0$ ή $\tilde{p}^{(\beta)}d\neq 0$ και
- $\left[c_{\omega-k,1}^{A_{22}}\left(R\right),c_{\omega-k,2}^{A_{22}}\left(R\right),\ldots,c_{\omega-k,n-k}^{A_{22}}\left(R\right)\right]d_2=0$,

τότε θα έχουμε:

$$\tilde{p}^{(\beta)}d=\lambda\tilde{p}^{(\alpha)}d \tag{63c}$$

Με βάση τη σχέση (1.3.6), η σχέση (63c) αναλύεται ως εξής:

$$\tilde{p}_1^{(\beta)}d_1=\lambda\tilde{p}_1^{(\alpha)}d_1$$

και

b. Ισχύει:

$$x=\frac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)-D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}{(1+R)} \tag{84}$$

Τότε, από τις σχέσεις (79) και (84) συνεπάγεται:

$$\frac{1}{1-(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2}=$$

$$\frac{1}{1-\dfrac{(1+R)}{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}x}=$$

$$\frac{1}{\dfrac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)-(1+R)x}{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}}=$$

$$\frac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)-(1+R)x}=$$

$$\widetilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}d_2=\lambda\widetilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}d_2 \tag{63d}$$

Έτσι, σύμφωνα με τις σχέσεις (1.3.6), (63b), (63c) και (63d), συμπεραίνουμε, ότι αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{D}$ κι επιπλέον ισχύει:

- $\widetilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}d\neq 0$ ή $\widetilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}d\neq 0$ και
- $\left[c_{\omega-k,1}^{A_{22}}(R),c_{\omega-k,2}^{A_{22}}(R),\ldots,c_{\omega-k,n-k}^{A_{22}}(R)\right]d_2=0$,

τότε η αναλογία μεταξύ των βαθμωτών $\widetilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}d$ και $\widetilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}d$, $\widetilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)}d_1$ και $\widetilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}d_1$, καθώς επίσης και των βαθμωτών $\widetilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}d_2$ και $\widetilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}d_2$ είναι ίση με λ, όπως στην περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{T}$.

$$\frac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)-(1+R)\dfrac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)-D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}{(1+R)}}=$$

$$\frac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)-\left[D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)-D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)\right]}=$$

$$\frac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}$$

Συνοψίζοντας θα έχουμε:

$$\frac{1}{1-(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1}d_2}=\frac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}\succ 0 \text{ [126]} \qquad (85)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, από τις σχέσεις (80) και (84) συνεπάγεται:

$$1+(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2=$$

$$1+\frac{(1+R)}{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}x=$$

---

[126] Εφόσον οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{D}$ θα έχουμε:

$$R\prec R^{A_{22}^{(\alpha)}},R^{A_{22}^{(\beta)}}$$

Επομένως, οι μήτρες $\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]$ και $\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]$ είναι μη ιδιάζουσες Μ-μήτρες.

Έτσι, σύμφωνα με την γνωστή συνθήκη των Hawkins and Simon θα ισχύει:

$$D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)\succ 0$$

και

$$D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)\succ 0$$

$$1+\frac{(1+R)}{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}\frac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)-D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}{(1+R)}=$$

$$1+\frac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)-D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}=$$

$$1+\left[\frac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}-1\right]=$$

$$\frac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}$$

Συνοψίζοντας θα έχουμε:

$$1+(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1}d_2=\frac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}\succ 0 \qquad (86)$$

Με άλλα λόγια, όπως προκύπτει από τις σχέσεις (85) και (86), δείξαμε, ότι από την υπόθεση μας:

$$\tilde{p}^{(\alpha)}d\neq 0$$

συνεπάγεται η σχέση (68).

Στη συνέχεια, θα υποθέσουμε ότι ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\beta)}d\neq 0,$$

και θα δείξουμε, ότι, κατά τον ίδιο τρόπο, από την ανωτέρω υπόθεση συνεπάγεται η σχέση (68). Πράγματι, από τις σχέσεις (1.3.6) και (64), καθώς και την υπόθεσή μας ότι ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\beta)}d\neq 0,$$

προκύπτει:

$$\widetilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} d \neq 0\text{ [127]} \tag{87}$$

και

$$1+\left(1+R\right)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-\left(1+R\right)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} d_2 \neq 0 \tag{88}$$

Επομένως, με βάση τις σχέσεις (64) και (88) μπορούμε να γράψουμε:

$$\widetilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} d = \frac{\widetilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d}{\lambda\left\{1+\left(1+R\right)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-\left(1+R\right)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} d_2\right\}} \tag{89}$$

Έτσι, από την ανωτέρω υπόθεσή μας και τις σχέσεις (1.3.6), (63) και (89) θα έχουμε:

$$\frac{\left\{1-\left(1+R\right)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-\left(1+R\right)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} d_2\right\}\widetilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d}{\lambda} = \frac{\widetilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d}{\lambda\left\{1+\left(1+R\right)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-\left(1+R\right)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} d_2\right\}} \Leftrightarrow$$

$$1-\left(1+R\right)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-\left(1+R\right)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} d_2 = \frac{1}{1+\left(1+R\right)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-\left(1+R\right)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} d_2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1-\left(1+R\right)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-\left(1+R\right)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} d_2} = 1+\left(1+R\right)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-\left(1+R\right)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} d_2 \tag{90}$$

---

[127] Σύμφωνα με τις σχέσεις (69) και (87), οι σχέσεις:

$$\widetilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} d \neq 0$$

και

$$\widetilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d \neq 0$$

είναι ισοδύναμες. Επομένως, ισοδύναμες θα είναι κι οι σχέσεις:

$$\widetilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} d = 0$$

και

$$\widetilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d = 0$$

Με βάση τη σχέση (90) κι ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτήν που περιγράψαμε παραπάνω, αποδεικνύουμε τελικά, ότι από την υπόθεση μας:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d \neq 0$$

συνεπάγονται είτε οι σχέσεις (82) και (83) είτε οι σχέσεις (85) και (86), δηλαδή, σε τελική ανάλυση, η σχέση (68).[128]

Πρόταση 8. Αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$, τότε, *για κάθε τυποποίηση* των τιμών, στην τιμή R του ποσοστού οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

(a) $\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$

(b) $\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} A^{(\alpha)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$

(c) $\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} d \prec 0$

---

[128] Αξίζει να σημειώσουμε, ότι κατά την ανωτέρω απόδειξη του Λήμματος (6) κι ειδικότερα από τις σχέσεις (82), (83), (85) και (86) δείξαμε, ότι αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{D}$ και ισχύει:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} d \neq 0$$

ή

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d \neq 0,$$

τότε θα έχουμε:

- είτε:

$$e_{\omega-k}^{n-k}\left[I-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} d_2 = e_{\omega-k}^{n-k}\left[I-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} d_2 = 0 \qquad (67a)$$

- είτε:

$$1-(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} d_2 = \frac{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)}{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)} \qquad (85a)$$

και

$$1+(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} d_2 = \frac{D^{A_{22}^{(\alpha)}}(R)}{D^{A_{22}^{(\beta)}}(R)} \qquad (86)$$

(d) $\mathrm{p}^{(\alpha)}d \prec 0$

(e) $\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}d \prec 0$

(f) $\mathrm{p}^{(\beta)}d \prec 0$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε, ότι για μια τυχαία τυποποίηση των τιμών οι ανωτέρω σχέσεις είναι ισοδύναμες. Η σχέση (a) είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις (c) και (d). Πράγματι, με βάση τις σχέσεις (1.2.a.10) και (1.3.13) θα έχουμε:

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left(de_{\omega}^{n}\right)(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}d\left[e_{\omega}^{n}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right](1+R) \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}d(1+R) \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}d \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$v\mathrm{p}^{(\alpha)}d \prec 0,\ v \succ 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\alpha)}d \prec 0$$

Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η σχέση (b) είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις (e) και (f). Έτσι, με βάση τις σχέσεις (1.2.a.10) και (1.3.14) θα έχουμε:

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(de_{\omega}^{n}\right)(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d\left[e_{\omega}^{n}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right](1+R) \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d(1+R) \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\mu \mathrm{p}^{(\beta)} d \prec 0,\ \mu \succ 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\beta)} d \prec 0$$

Έτσι, για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι οι σχέσεις (c) και (e) είναι ισοδύναμες. Θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

I. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathscr{T}$.

Από τις σχέσεις (c) και (1.2.a.38) έχουμε:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} d \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} d_1 + \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} d_2 \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} d_1 \prec 0$$

Επίσης, από τις σχέσεις (e), (1.2.a.38) και (1.3.6) έχουμε:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} d_1 + \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} d_2 \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} d_1 \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda \tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} d_1 \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} d_1 \prec 0$$

Έτσι, εφόσον κάθε μια από τις σχέσεις (c) και (e) είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} d_1 \prec 0,$$

οι σχέσεις (c) και (e) θα είναι ισοδύναμες.[129]

II. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{D}$.

Προφανώς, σύμφωνα με τις σχέσεις (1.3.6), (63) και (64) οι σχέσεις (c) και (e) είναι ισοδύναμες.

Πόρισμα 5. Αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$, τότε, *για κάθε τυποποίηση* των τιμών, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α), *αν και μόνο αν* ισχύει μια από τις σχέσεις (a) - (f).

Απόδειξη: Συνδυάζοντας την Πρόταση (8) με τον Ορισμό (3) προκύπτει η απόδειξη του ανωτέρω Πορίσματος.

Πρόταση 9. Αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$, τότε, *για κάθε τυποποίηση* των τιμών, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:

(a) $\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$

(b) $\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} A^{(\alpha)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$

(c) $\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} d=0$

(d) $\mathrm{p}^{(\alpha)} d=0$

(e) $\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d=0$

(f) $\mathrm{p}^{(\beta)} d=0$

(g) $\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}=\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}$

(h) $\mathrm{p}^{(\alpha)}=\mathrm{p}^{(\beta)}$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε, ότι για μια τυχαία τυποποίηση των τιμών οι ανωτέρω σχέσεις είναι ισοδύναμες. Η σχέση (a) είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις (c) και (d). Πράγματι, με βάση τις σχέσεις (1.2.a.10) και (1.3.13) θα έχουμε:

---

[129] Μια εναλλακτική απόδειξη της ισοδυναμίας των σχέσεων (c) και (e), που αναφέρεται στην περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{T}$, προκύπτει από τη σχέση (63b).

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=0\Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left(de_{\omega}^{n}\right)(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=0\Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}d\left[e_{\omega}^{n}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right](1+R)=0\Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}d(1+R)=0\Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}d=0\Leftrightarrow$$

$$v\mathrm{p}^{(\alpha)}d=0\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\alpha)}d=0$$

Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε, ότι η σχέση (b) είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις (e) και (f). Έτσι, με βάση τις σχέσεις (1.2.a.10) και (1.3.14) θα έχουμε:

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(A^{(\beta)}-A^{(\alpha)}\right)(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=0\Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(de_{\omega}^{n}\right)(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}=0\Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}d\left[e_{\omega}^{n}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}\right](1+R)=0\Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}d(1+R)=0\Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}d=0\Leftrightarrow$$

$$\mu\mathrm{p}^{(\beta)}d=0\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\beta)}d=0$$

Έτσι, για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι οι σχέσεις (d), (f), (g) και (h) είναι ισοδύναμες. Προφανώς, από την υπόθεσή μας ότι οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$, συμπεραίνουμε ότι οι σχέσεις (g) και (h) είναι ισοδύναμες.[130] Επομένως, η απόδειξη της Πρότασης (9) θα είναι πλήρης, αν δείξουμε ότι κάθε μια από τις σχέσεις (d) και (f) είναι ισοδύναμη με τη σχέση (h). Πράγματι, από τις σχέσεις (1.2.a.10) και (1.3.11) θα έχουμε:

$$\mathrm{p}^{(\alpha)}=\mathrm{p}^{(\alpha)}A^{(\alpha)}(1+R)\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\alpha)}=\mathrm{p}^{(\alpha)}\left(A^{(\beta)}-de_{\omega}^{n}\right)(1+R)\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\alpha)}\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]=-\left(\mathrm{p}^{(\alpha)}d\right)e_{\omega}^{n}(1+R) \tag{91}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, από τις σχέσεις (1.2.a.10) και (1.3.12) θα έχουμε:

$$\mathrm{p}^{(\beta)}=\mathrm{p}^{(\beta)}A^{(\beta)}(1+R)\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\beta)}=\mathrm{p}^{(\beta)}\left(A^{(\alpha)}+de_{\omega}^{n}\right)(1+R)\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\beta)}\left[I-(1+R)A^{(\alpha)}\right]=\left(\mathrm{p}^{(\beta)}d\right)e_{\omega}^{n}(1+R) \tag{92}$$

Με βάση τη σχέση (91), από τη σχέση (d) προκύπτει:

$$\mathrm{p}^{(\alpha)}d=0\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\alpha)}\left[I-(1+R)A^{(\beta)}\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\alpha)}=(1+R)\mathrm{p}^{(\alpha)}A^{(\beta)}\Leftrightarrow$$

---

130 Εφόσον οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$, για κάθε τυποποίηση των τιμών στην τιμή R του ποσοστού κέρδους τα διανύσματα $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ και $\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}$, καθώς επίσης τα διανύσματα $\mathrm{p}^{(\beta)}$ και $\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}$ είναι συγγραμμικά. Με άλλα λόγια, η τυποποίηση του διανύσματος των τιμών δεν μεταβάλλει τη σχέση που υφίσταται μεταξύ των τιμών των εμπορευμάτων.

$$\mathrm{p}^{(\alpha)} = \mathrm{p}^{(\beta)}$$ [131]

Με βάση τη σχέση (92), από τη σχέση (f) προκύπτει:

$$\mathrm{p}^{(\beta)} d = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\beta)}\left[I - (1+R)A^{(\alpha)}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\beta)} = (1+R)\mathrm{p}^{(\beta)} A^{(\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{p}^{(\alpha)} = \mathrm{p}^{(\beta)}$$ [132]

Κατά συνέπεια, οι σχέσεις (d), (f) και (h) είναι ισοδύναμες.[133]

---

[131] Εφόσον οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$, η μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας $A^{(\beta)}$ είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού της πολυώνυμου. Κατά συνέπεια, το ιδιοδιάνυσμα $\mathrm{p}^{(\beta)}$ της μήτρας $A^{(\beta)}$, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της, είναι προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού κι ως εκ τούτου μοναδικό. Με άλλα λόγια, κάθε διάνυσμα που επαληθεύει την ανωτέρω σχέση είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $A^{(\beta)}$, δηλαδή ίσο με το ιδιοδιάνυσμα $\mathrm{p}^{(\beta)}$.

[132] Εφόσον οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$, η μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας $A^{(\alpha)}$ είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού της πολυώνυμου. Κατά συνέπεια, το ιδιοδιάνυσμα $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ της μήτρας $A^{(\alpha)}$, που συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της, είναι προσδιορισμένο με εξαίρεση ενός βαθμωτού κι ως εκ τούτου μοναδικό. Με άλλα λόγια, κάθε διάνυσμα που επαληθεύει την ανωτέρω σχέση είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $A^{(\alpha)}$, δηλαδή ίσο με το ιδιοδιάνυσμα $\mathrm{p}^{(\alpha)}$.

[133] Εναλλακτικά η ισοδυναμία των σχέσεων (c), (e) και (g) αποδεικνύεται ως εξής: Με βάση τις σχέσεις (69) και (87) δείξαμε ότι οι σχέσεις (c) και (e) είναι ισοδύναμες. Δεδομένου των σχέσεων (1.2.a.10), (1.3.13) και (1.3.14) κι ακολουθώντας μια παρόμοια αποδεικτική διαδικασία με αυτήν που είδαμε παραπάνω θα έχουμε:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left[I - (1+R)A^{(\beta)}\right] = -\left(\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} d\right) e_{\omega}^{n}(1+R) \quad (91a)$$

και

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left[I - (1+R)A^{(\alpha)}\right] = \left(\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d\right) e_{\omega}^{n}(1+R) \quad (92a)$$

Έτσι, από τις σχέσεις (91a) και (92a) συνεπάγεται, ότι κάθε μια από τις σχέσεις (c) και (e) είναι ισοδύναμη με τη σχέση (g).

Πόρισμα 6. Αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$, τότε, *για κάθε τυποποίηση* των τιμών, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες, *αν και μόνο αν* ισχύει μια από τις σχέσεις (a) - (h).[134]

Απόδειξη: Συνδυάζοντας την Πρόταση (9) με τον Ορισμό (4) προκύπτει η απόδειξη του ανωτέρω Πορίσματος.

Πρόταση 10. Αν ισχύει $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$ κι οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

$$\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{E},\ \mathcal{LT},\ \mathcal{Z},\ \mathcal{H} \text{ και } \Theta,$$

τότε, για *κάθε τυποποίηση* που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων,[135] στην τιμή R του ποσοστού κέρδους θα *ισχύουν* οι ακόλουθες ισοδύναμες σχέσεις:

(a) $\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} A^{(\beta)} (1+R)\right] \left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} \left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$

(b) $\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} A^{(\alpha)} (1+R)\right] \left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} \left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$

(c) $\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} d = 0$

(d) $\mathrm{p}^{(\alpha)} d = 0$

---

[134] Από την αντιπαράθεση των Πορισμάτων (1), (3), (5) και (6) ή, ισοδύναμα, των Προτάσεων (1), (2), (8) και (9) προκύπτει, ότι οι ικανές κι αναγκαίες συνθήκες - κριτήρια, με τις οποίες μπορούν να συγκριθούν οι τεχνικές (α) και (β) ως προς την κερδοφορία στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, όταν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$, παρουσιάζουν τυπικές ομοιότητες με τις αντίστοιχες συνθήκες - κριτήρια με τις οποίες μπορούν να συγκριθούν οι τεχνικές (α) και (β) σε κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους, $r \in \left[0, R^{*}\right)$, ανεξάρτητα της κατηγορίας στην οποία ανήκουν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$.

[135] Μη *επιτρεπτή* τυποποίηση έχουμε όταν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις κατηγορίες:

$$\mathcal{E},\ \mathcal{LT},\ \mathcal{Z},\ \mathcal{H} \text{ και } \Theta$$

και ως τυπικό εμπόρευμα λειτουργεί ένα απλό ή σύνθετο βασικό εμπόρευμα. Πράγματι, σε κάθε τέτοια περίπτωση, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους ο προσδιορισμός των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *αδύνατος*. Το θέμα αυτό πραγματευτήκαμε στο Μέρος (Ι).

(e) $\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}d=0$

(f) $\mathrm{p}^{(\beta)}d=0$

(g) $\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}=\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}$

(h) $\mathrm{p}^{(\alpha)}=\mathrm{p}^{(\beta)}$

Απόδειξη: Έχουμε δείξει, ότι στην τιμή R του ποσοστού κέρδους ισχύει η σχέση (1.3.48), δηλαδή η σχέση (h). Επίσης, δείξαμε, ότι, για *κάθε τυποποίηση* που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους θα ισχύει η σχέση (1.3.66), δηλαδή η σχέση (g). Επιπλέον, από τις σχέσεις (1.3.13) και (g) θα έχουμε:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+R)=\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\Rightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+R)\right]\left(e_j^n\right)^T=\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(e_j^n\right)^T,\ j=1,2,\ldots,n\Rightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+R)\right]\left(e_\omega^n\right)^T=\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(e_\omega^n\right)^T$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, από τις σχέσεις (1.3.14) και (g) θα έχουμε:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+R)=\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e_j^n\right)^T=\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left(e_j^n\right)^T,\ j=1,2,\ldots,n\Rightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e_\omega^n\right)^T=\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left(e_\omega^n\right)^T$$

Με άλλα λόγια δείξαμε, ότι, για *κάθε τυποποίηση* που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους θα *ισχύουν* οι σχέσεις (a), (b), (g) και (h).

Απομένει να δείξουμε ότι οι σχέσεις (a) - (h) είναι ισοδύναμες. Προφανώς, οι σχέσεις (a), (c) και (d), καθώς επίσης οι σχέσεις (b), (e) και (f), είναι ισοδύναμες.[136]

---

[136] Η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με αυτήν που δώσαμε στην Πρόταση (9).

Επίσης, ισοδύναμες είναι οι σχέσεις (d), (f) και (h),[137] καθώς επίσης οι σχέσεις (1.3.48) και (1.3.66), δηλαδή οι σχέσεις (g) και (h) αντίστοιχα.[138]

Πόρισμα 7. Αν ισχύει $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$ κι οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

$$\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{E},\ \mathcal{LT},\ \mathcal{Z},\ \mathcal{H} \text{ και } \Theta,$$

τότε, *για κάθε τυποποίηση* που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.[139]

Απόδειξη: Συνδυάζοντας την Πρόταση (10) με τον Ορισμό (4) προκύπτει η απόδειξη του ανωτέρω Πορίσματος.

Πρόταση 11. Αν ισχύει $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$ κι οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

$$\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{T},\ \mathcal{D},\ \mathcal{E},\ \mathcal{LT},\ \mathcal{Z},\ \mathcal{H} \text{ και } \Theta,$$

τότε, *για κάθε τυποποίηση* που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων,[140] στην τιμή r ποσοστού κέρδους, $r \in [0, R]$, η

---

137 Η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με αυτήν που δώσαμε στην Πρόταση (9).

138 Για *κάθε τυποποίηση* που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους τα διανύσματα $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ και $\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}$, καθώς επίσης τα διανύσματα $\mathrm{p}^{(\beta)}$ και $\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}$ είναι συγγραμμικά. Με άλλα λόγια, η τυποποίηση του διανύσματος των τιμών δεν μεταβάλλει τη σχέση που υφίσταται μεταξύ των τιμών των εμπορευμάτων.

139 Αναφερόμαστε μόνο σε τυποποιήσεις που επιτρέπουν τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων, τις οποίες ονομάζουμε *επιτρεπτές*, διότι στην αντίθετη περίπτωση, αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις ακόλουθες κατηγορίες:

$$\mathcal{E},\ \mathcal{LT},\ \mathcal{Z},\ \mathcal{H} \text{ και } \Theta,$$

ο προσδιορισμός των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *αδύνατος* στην τιμή R του ποσοστού κέρδους και, κατά συνέπεια, είναι αδύνατη η σύγκριση των τεχνικών παραγωγής, εφόσον αυτές διαφέρουν ως προς την μέθοδο παραγωγής του μη βασικού εμπορεύματος ω.

140 Μη *επιτρεπτή* τυποποίηση έχουμε όταν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις κατηγορίες:

$$\mathcal{E},\ \mathcal{LT},\ \mathcal{Z},\ \mathcal{H} \text{ και } \Theta$$

κατάταξη ως προς την κερδοφορία των τεχνικών (α) και (β) είναι *πάντοτε δυνατή*[141] κι *ανεξάρτητη* από την τυποποίηση των τιμών.

Απόδειξη: Από την υπόθεση μας ότι ισχύει:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

ή

$$R^{*} = \min\left(R^{(\alpha)}, R^{(\beta)}\right) = \max\left(R^{(\alpha)}, R^{(\beta)}\right) = R$$

και την Πρόταση (3) συνεπάγεται, ότι στο διάστημα $[0, R)$ του ποσοστού κέρδους r η Πρόταση (11) είναι αληθής. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι, *για κάθε τυποποίηση* που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι *πάντοτε κατατάξιμες* ως προς την κερδοφορία τους, *ανεξάρτητα* από την τυποποίηση των τιμών.

Θα αναλύσουμε την αποδεικτική διαδικασία στα εξής στάδια:

Α. Θα δείξουμε, ότι, για κάθε τυποποίηση που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι

και ως τυπικό εμπόρευμα λειτουργεί ένα απλό ή σύνθετο βασικό εμπόρευμα. Πράγματι, σε κάθε τέτοια περίπτωση, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους ο προσδιορισμός των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *αδύνατος*. Το θέμα αυτό πραγματευτήκαμε στο Μέρος (Ι).

[141] Με άλλα λόγια, αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις ακόλουθες κατηγορίες:

$$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{T}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{ST}, \mathcal{Z}, \mathcal{H} \text{ και } \Theta,$$

τότε για κάθε *επιτρεπτή* τυποποίηση των τιμών στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η σύγκριση των τεχνικών παραγωγής ως προς την κερδοφορία είναι *συνεκτική*. Επομένως, με την μέθοδο του αλγόριθμου της αγοράς επεκτείναμε τα συμπεράσματα που αφορούν τη σύγκριση τεχνικών για το διάστημα $[0, R^{*})$ του ποσοστού κέρδους στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, υπό την αίρεση ότι ισχύουν οι πρϋποθέσεις που αναφέραμε παραπάνω. Βλέπε την Πρόταση (3). Στην νεορικαρντιανή προβληματική η σύγκριση των τεχνικών παραγωγής ως προς την κερδοφορία στην ενιαία μέγιστη τιμή R του ποσοστού κέρδους των τεχνικών (α) και (β) αποτελεί στην καλύτερη περίπτωση τυφλό σημείο, όπως κι η δυνατότητα των τεχνικών (α) και (β) να έχουν κοινή μέγιστη τιμή R του ποσοστού κέρδους.

τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι πάντοτε κατατάξιμες ως προς την κερδοφορία τους.

Θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

I. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$.

Στην προκείμενη περίπτωση κάθε τυποποίηση επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε, ότι στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η χρησιμοποιούμενη (αρχική) τεχνική παραγωγής είναι η (α). Έτσι, έχουμε:

- είτε $\left[\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)+\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)\right](1+R) \succ \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)$
- είτε $\left[\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)+\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)\right](1+R) \prec \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)$
- είτε $\left[\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)+\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)\right](1+R) = \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)$

Θα μελετήσουμε κάθε μια από τις ανωτέρω περιπτώσεις ξεχωριστά.

a. Ισχύει:

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)+\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)\right](1+R) \succ \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση (8), η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} A^{(\alpha)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

Επομένως, από τις ανωτέρω σχέσεις συνεπάγεται, ότι, για την ισχύουσα τυποποίηση των τιμών, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β).[142]

b. Ισχύει:

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)} A_{12}^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)+\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)\right](1+R) \prec \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right) \Leftrightarrow$$

---

[142] Βλ. Ορισμό (3).

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση (8), η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}A^{(\alpha)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

Επομένως, από τις ανωτέρω σχέσεις συνεπάγεται, ότι, για την ισχύουσα τυποποίηση των τιμών, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α).[143]

c. Ισχύει:

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\alpha)}A_{12}^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)+\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}A_{22}^{(\beta)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)\right](1+R)=\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}\left(e_{\omega-k}^{n-k}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} = \tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση (9), η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)}A_{12}^{(\alpha)}+\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}A_{22}^{(\alpha)}\right](1+R)=\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)}$$

Επομένως, από τις ανωτέρω σχέσεις συνεπάγεται, ότι, για την ισχύουσα τυποποίηση των τιμών, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.[144]

II. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{LT}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{H}$, Θ

Σύμφωνα με το Πόρισμα (7), *για κάθε τυποποίηση* που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες. Επομένως, στην κλίμακα κερδοφορίας, οι τεχνικές (α) και (β) θα κατέχουν ίδια θέση κι έτσι είναι κατατάξιμες.

B. Θα δείξουμε, ότι, *για κάθε τυποποίηση* που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η

---

143 Βλ. Ορισμό (3).

144 Βλ. Ορισμό (4).

κατάταξη ως προς την κερδοφορία των τεχνικών (α) και (β) είναι *ανεξάρτητη* από την τυποποίηση των τιμών.

Θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

I. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathscr{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathscr{D}$.

Σύμφωνα με το Πόρισμα (5) και το Πόρισμα (6), θα ισχύουν οι ακόλουθες αναγκαίες κι ικανές συνθήκες:

- Στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η τεχνική (β) υπερέχει της τεχνικής (α), *αν και μόνο αν* ισχύει:

$$\mathrm{p}^{(\cdot)}d \prec 0,\ (\cdot)=(\alpha),\ (\beta)$$

- Στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η τεχνική (α) υπερέχει της τεχνικής (β), *αν και μόνο αν* ισχύει:

$$\mathrm{p}^{(\cdot)}d \succ 0,\ (\cdot)=(\alpha),\ (\beta)$$

- στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες, *αν και μόνο αν* ισχύει:

$$\mathrm{p}^{(\cdot)}d = 0,\ (\cdot)=(\alpha),\ (\beta)$$

Εφόσον οι ανωτέρω σχέσεις είναι ανεξάρτητες από την τυποποίηση των τιμών, η κατάταξη των τεχνικών (α) και (β) ως προς την κερδοφορία τους θα είναι επίσης *ανεξάρτητη* από την τυποποίηση των τιμών.

II. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{LT}$, $\mathscr{Z}$, $\mathscr{H}$, Θ

Σύμφωνα με το Πόρισμα (7), στην τιμή R του ποσοστού κέρδους η ισοκερδοφορία των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) είναι *ανεξάρτητη* από την τυποποίηση των τιμών, υπό την προϋπόθεση ότι οι ονομαστικές τιμές όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων είναι προσδιορισμένες.

Τέλος, με τον αλγόριθμο της αγοράς θα συγκρίνουμε την κερδοφορία των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) στην κοινή μέγιστη τιμή R του ποσοστού κέρδους στην ειδική περίπτωση που οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathscr{I}$.

Πρόταση 12. Αν για τις τεχνικές παραγωγής (α) και (β) ισχύουν οι ακόλουθες υποθέσεις:

- Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{J}$,
- $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)}$ και
- $R^{(\beta)} = R^{A_{11}^{(\beta)}} \prec R^{A_{22}^{(\beta)}}$,[145]

τότε στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) *δεν είναι κατατάξιμες* ως προς την κερδοφορία τους.

Απόδειξη: Θα δείξουμε, ότι *για κάθε επιτρεπτή* τυποποίηση *των τιμών* οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) *δεν είναι κατατάξιμες* ως προς την κερδοφορία τους.[146]

Στο Μέρος (I), καθώς και στην Πρόταση (2.3), μελετήσαμε τις οικονομικά σημαντικές λύσεις $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ και $\mathrm{p}^{(\beta)}$ των συστημάτων προσδιορισμού των τιμών των τεχνικών (α) και (β), που αντιστοιχούν στην τιμή R του ποσοστού κέρδους. Επειδή όμως η σύγκριση των τεχνικών (α) και (β) στην τιμή R του ποσοστού κέρδους απαιτεί την ύπαρξη πλήρως προσδιορισμένων ονομαστικών τιμών, στο σημείο αυτό θα υποθέσουμε ότι οι τιμές είναι τυποποιημένες με μια επιτρεπτή εξίσωση τυποποίησης των τιμών της μορφής:

$$pu = 1, \text{ με } u = (u_1, u_2) \text{ και } u_2 \geq 0 \tag{93}$$

---

[145] Έχουμε δείξει, ότι αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{J}$, τότε ικανή κι αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η υπόθεση μας:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

είναι:

$$R^{(\beta)} = R^{A_{11}^{(b)}} \leq R^{A_{22}^{(b)}}$$

Για το θέμα αυτό βλέπε τη σχέση (2.2.39).

[146] Αναφερόμαστε μόνο σε τυποποιήσεις που επιτρέπουν τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων, τις οποίες ονομάζουμε *επιτρεπτές*, διότι στην αντίθετη περίπτωση για την τεχνική παραγωγής (α) ο προσδιορισμός των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *αδύνατος* στην τιμή R του ποσοστού κέρδους και, κατά συνέπεια, είναι αδύνατη η σύγκριση των τεχνικών παραγωγής, εφόσον αυτές διαφέρουν ως προς την μέθοδο παραγωγής του μη βασικού εμπορεύματος ω.

Η τυποποίηση των διανυσμάτων τιμών $\mathrm{p}^{(\alpha)}$ και $\mathrm{p}^{(\beta)}$ με την εξίσωση τυποποίησης (93) συνεπάγεται τον σχηματισμό των πλήρως προσδιορισμένων διανυσμάτων τιμών $\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}$ και $\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}$ αντίστοιχα. Ειδικότερα, από τη σχέση (2.2.41) και την εξίσωση τυποποίησης (93) συνεπάγεται:

$$\tilde{p}_1^{(\alpha)} = 0 \tag{94}$$

Με βάση τις σχέσεις (94), (2.2.42), (2.2.43) και την εξίσωση τυποποίησης (93), τα συστήματα προσδιορισμού των τυποποιημένων τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων των τεχνικών (α) και (β), που αντιστοιχούν στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, έχουν ως εξής:

$$\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} = \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\alpha)}(1+R)$$

και

$$\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} = \left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)} + \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις ανωτέρω σχέσεις θα έχουμε:

$$\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} - \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} = \left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)} + \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\beta)}\right)(1+R) - \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\alpha)}(1+R) \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} - \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} = \left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)} + \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\beta)} - \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R) \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} - \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} = \left(\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)} + \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} A_{22}^{(\beta)} - \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)} + \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\beta)} - \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R) \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} - \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} = \left[\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)} + \left(\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} - \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}\right) A_{22}^{(\beta)} + \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}\left(A_{22}^{(\beta)} - A_{22}^{(\alpha)}\right)\right](1+R) \Rightarrow$$

$$\left(\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\beta)} - \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}\right)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right] = \left[\tilde{\mathrm{p}}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)} + \tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}\left(A_{22}^{(\beta)} - A_{22}^{(\alpha)}\right)\right](1+R) \tag{95}$$

Από τις υποθέσεις μας προκύπτει, ότι η μήτρα $\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]$ είναι μια μη ιδιάζουσα, μη διασπώμενη Μ-μήτρα. Έτσι έχουμε:

$$\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} \succ 0 \tag{96}$$

Με βάση τις σχέσεις (1.3.45), (2.2.43), (95) και (96) προκύπτει:

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)} = \left[\tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)}\left(A_{22}^{(\beta)} - A_{22}^{(\alpha)}\right)\right](1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)} = \tilde{p}_1^{(\beta)} A_{12}^{(\beta)}(1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} + \tilde{p}_2^{(\alpha)}\left(A_{22}^{(\beta)} - A_{22}^{(\alpha)}\right)(1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} - \tilde{p}_2^{(\alpha)} = \tilde{p}_2^{(\beta)} + \tilde{p}_2^{(\alpha)}\left(d_2 e_{\omega-k}^{n-k}\right)(1+R)\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\alpha)} + \left(\tilde{p}_2^{(\alpha)} d_2\right)(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} = 0 \qquad (97)$$

Από τις σχέσεις (94), (96) και (97) θα έχουμε:

$$\tilde{p}_2^{(\alpha)} + \left(\tilde{p}_2^{(\alpha)} d_2\right)(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\tilde{p}_2^{(\alpha)} d_2 \prec 0 \Rightarrow$$

$$\tilde{p}_1^{(\alpha)} d_1 + \tilde{p}_2^{(\alpha)} d_2 \prec 0 \Rightarrow$$

$$\tilde{p}^{(\alpha)} d \prec 0$$ [147]

Όμως, η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\left[\tilde{p}^{(\alpha)} A^{(\beta)}(1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \tilde{p}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$ [148]

Η ανωτέρω σχέση εκφράζει, ότι αν πληρούνται οι ακόλουθες υποθέσεις:

a) Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{J}$,

b) Ισχύει: $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$,

c) Ισχύει: $R^{(\beta)} = R^{A_{11}^{(\beta)}} \prec R^{A_{22}^{(\beta)}}$

d) Η χρησιμοποιούμενη (αρχική) τεχνική παραγωγής είναι η (α) και

---

[147] Εφόσον ισχύει:

$$\tilde{p}^{(\alpha)} \succ 0$$

Βλέπε Πρόταση (2.3).

[148] Η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με αυτήν που δώσαμε στην Πρόταση (8).

e) Τα διανύσματα τιμών έχουν τυποποιηθεί με μια επιτρεπτή εξίσωση τυποποίησης που επιτρέπει τον προσδιορισμό των ονομαστικών τιμών $\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)}$ των μη βασικών εμπορευμάτων της τεχνικής (α), δηλαδή με κάθε τυποποίηση της μορφής (93),

τότε η εναλλακτική μέθοδος παραγωγής (β), ανεξάρτητα από τα ιδιαίτερα παραγωγικο-τεχνικά χαρακτηριστικά της, θα εξασφαλίζει πρόσθετα κέρδη (extra profits) σε σχέση με την μέθοδο παραγωγής (α). Επομένως, ο παραγωγός του εμπορεύματος ω, που παράγει με την μέθοδο παραγωγής (α), θα κρίνει πλέον κερδοφόρα την μέθοδο παραγωγής (β) που αντιστοιχεί στην τεχνική (β) κι έτσι θα μεταπηδήσει στην χρησιμοποίηση της τεχνικής (β).[149]

---

[149] Από τη σχέση (97) και τη σχέση:

$$\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} d_2 \prec 0,$$

που αποδείξαμε παραπάνω, προκύπτει:

$$\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} + \left(\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} d_2\right)(1+R) e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} d_2 + \left(\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} d_2\right)(1+R) e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} d_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathrm{p}}_2^{(\alpha)} d_2 \left\{1 + (1+R) e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} d_2\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$1 + (1+R) e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} d_2 = 0 \qquad (98)$$

Επομένως, δείξαμε, ότι αν πληρούνται οι υποθέσεις (a) - (e), τότε θα ισχύει η σχέση (98). Από την άλλη μεριά, έχουμε δείξει ότι:

- Αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathscr{T}$ και ισχύει:

$$A_{22}^{(\alpha)} = A_{22}^{(\beta)} \neq 0,$$

τότε, σύμφωνα με το Λήμμα (5), θα έχουμε:

$$1 - (1+R) e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} d_2 = 1$$

και

$$1 + (1+R) e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2 - (1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} d_2 = 1$$

Στην προκείμενη περίπτωση, η επιλογή τεχνική θα ήταν *συνεκτική*, δηλαδή οι τεχνικές (α) και (β) θα ήταν στην τιμή R του ποσοστού κέρδους *κατατάξιμες* ως προς την κερδοφορία τους, αν και μόνο αν ο παραγωγός του εμπορεύματος ω, που τώρα πλέον χρησιμοποιεί την μέθοδο παραγωγής (β), δεν είχε συμφέρον να επαναμεταπηδήσει (reswitcing of techniques) στην χρησιμοποίηση της μεθόδου παραγωγής (α). Με άλλα λόγια, αν και μόνο αν ίσχυε:

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} A^{(\alpha)} (1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$ [150]

Η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d \prec 0$$ [151] $\Leftrightarrow$

$$\tilde{\mathrm{p}}_{1}^{(\beta)} d_1 + \tilde{\mathrm{p}}_{2}^{(\beta)} d_2 \prec 0$$

- Αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{D}$ και ισχύει:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} d \neq 0$$

ή

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d \neq 0$$

τότε, σύμφωνα με το Λήμμα (6), θα έχουμε:

$$\frac{1}{1-(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} d_2} = 1+(1+R)e_{\omega-k}^{n-k}\left[I_2-(1+R)A_{22}^{(\beta)}\right]^{-1} d_2 \succ 0$$

[150] Συνοψίζοντας, *για την δεδομένη, επιτρεπτή τυποποίηση των τιμών* που υπαγορεύει η εξίσωση τυποποίησης (93), οι τεχνικές (α) και (β) θα ήταν *κατατάξιμες* ως προς την κερδοφορία τους στην τιμή R του ποσοστού κέρδους, δηλαδή η επιλογή τεχνική θα ήταν *συνεκτική*, αν και μόνο αν ίσχυε:

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} A^{(\beta)} (1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \prec \tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

και

$$\left[\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} A^{(\alpha)} (1+R)\right]\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T} \succ \tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)}\left(e_{\omega}^{n}\right)^{T}$$

Επομένως, αν πληρούνται οι υποθέσεις (a) - (e), τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό (3), η επιλογή τεχνικής θα ήταν *συνεκτική*, αν και μόνο αν η τεχνική (β) υπερείχε της τεχνικής (α).

[151] Η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με αυτήν που δώσαμε στην Πρόταση (8).

Όμως, η ανωτέρω σχέση δεν ισχύει απαραίτητα. Κι αν ακόμη δεχόμασταν, ότι από τις ανωτέρω υποθέσεις (a) - (e), από τις οποίες προέκυψε:

$$\tilde{p}_2^{(\alpha)} d_2 \prec 0,$$

συνεπάγετο υποχρεωτικά:

$$\tilde{p}_2^{(\beta)} d_2 \prec 0,$$

θα υπήρχαν άπειρα διανύσματα d_1, τέτοια ώστε:

$$\tilde{p}_1^{(\beta)} d_1 \succ 0$$

και

$$\tilde{p}_1^{(\beta)} d_1 + \tilde{p}_2^{(\beta)} d_2 \succ 0$$ [152]

Επομένως δείξαμε, ότι, αν οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) πληρούν τις προϋποθέσεις της Πρότασης (12), τότε για κάθε επιτρεπτή τυποποίηση των τιμών στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) *δεν είναι κατατάξιμες* ως προς την κερδοφορία τους.[153]

---

[152] Αυτό είναι πράγματι δυνατόν να συμβαίνει, εφόσον το διάνυσμα d_1 είναι τελείως ανεξάρτητο από τις υποθέσεις (a), (b), (c), (d) και (e) κι ειδικότερα από τη σχέση (c). Επιπλέον, το διάνυσμα d_1 είναι τελείως ανεξάρτητο από την υπόθεσή μας ότι οι τεχνικές (α) και (β) είναι παραγωγικές. Επομένως, κάθε τιμή των συνιστωσών του διανύσματος d_1 είναι απολύτως δυνατή.

[153] Όπως είναι γνωστό, οι τεχνικές παραγωγής σύνθετων εμπορευμάτων δεν είναι στην γενική περίπτωση κατατάξιμες ως προς την κερδοφορία τους. Για το θέμα αυτό βλέπε Bidard [1990a]. Κατά συνέπεια, οι τεχνικές παραγωγής απλών εμπορευμάτων με τα ανωτέρω χαρακτηριστικά παρουσιάζουν κοινά χαρακτηριστικά με τις τεχνικές παραγωγής σύνθετων εμπορευμάτων. Στην προκείμενη περίπτωση, ο αλγόριθμος της αγοράς αποδεικνύεται ανεπαρκέστατο αναλυτικό εργαλείο για τη σύγκριση της κερδοφορίας των τεχνικών. Επιπλέον, αποκαλύπτεται ότι η μικροοικονομική προσέγγιση στο πρόβλημα επιλογής τεχνικής που διακρίνει τον αλγόριθμο της αγοράς, η ουσία του οποίου συνίσταται στην επιδίωξη αποκόμισης πρόσθετων κερδών από τον παραγωγό του εμπορεύματος ω, ακόμα και σε οικονομικά συστήματα απλών εμπορευμάτων ενδέχεται να οδηγήσει σε καταστάσεις γενικευμένης ανισορροπίας, που χαρακτηρίζονται από μια συνεχή εναλλαγή τεχνικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.

Η ΕΝΑΛΛΑΓΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διασημότερη συνεισφορά των νεορικαρντιανών οικονομολόγων στην θεωρία του κεφαλαίου και ειδικότερα στην αναίρεση της παραδοσιακής νεοκλασικής θεωρία του κεφαλαίου είναι χωρίς αμφιβολία η ανακάλυψη της δυνατότητας εναλλαγής τεχνικών.[1]

Εντούτοις, οι συμμετέχοντες στη συζήτηση - νεοκλασικοί και νεορικαρντιανοί - είτε δεν προσδιόρισαν με σαφήνεια τον μέγιστο αριθμό των τιμών ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β), αναφερόμενοι σε τεχνικές παραγωγής με πολύ γενικά χαρακτηριστικά,[2] είτε προσδιόρισαν με σαφήνεια τον μέγιστο αριθμό

---

[1] Η εναλλαγή τεχνικών είναι γνωστή στην βιβλιογραφία με τον όρο "reswitcing of techniques" ή "double switcing", βλέπε Harcourt [1969] και Harcourt [1972]. Η *εναλλαγή* τεχνικών ορίζεται αυστηρά στο Burmeister and Dobell [1970, σελ. 246]. Κατά τον ίδιο τρόπο, η *αλλαγή* τεχνικής ορίζεται αυστηρά στο Burmeister and Dobell [1970, σελ. 245]. Γενικά, θα ονομάζουμε τιμή ισοκερδοφορίας του ποσοστού κέρδους κάθε τιμή r του ποσοστού κέρδους στην οποία οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.

[2] Ενδεικτικά αναφέρουμε: "...Entre deux techniques $n \times n$ voisines il existe au plus n points de changement.", βλέπε Bidard [1991, σελ. 83] και "...Cosider, as in Levhari's analysis, a general model of an economy using one primary good, labor, and producing n (capital) goods, each one of which can be produced by k_i alternative activities $(i = 1,2,...n)$...Our results may be summarized by the following theorem:...In the general n-sector capital model there may be up to n switching points between any two techniques...", βλέπε Bruno, Burmeister and Sheshinski [1966, σελ. 538 και 542]. Προφανώς, τα ανωτέρω συμπεράσματα αναφέρονται στην περίπτωση που οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν σε μια

των τιμών ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β), αναφερόμενοι όμως σε τεχνικές παραγωγής με πολύ συγκεκριμένα χαρακτηριστικά.[3] Η μοναδική συστηματική προσπάθεια να διατυπωθεί ένας γενικής ισχύος κανόνας που να προσδιορίζει με ακρίβεια τον μέγιστο αριθμό των τιμών ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) χαρακτηρίζει ασφαλώς την Bharadwaj.[4] Παρόλα αυτά, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια,[5] ο κανόνας που διατύπωσε η Bharadwaj δεν είναι δυνατόν να γίνει αποδεκτός. Οι κυριότεροι λόγοι είναι οι εξής:

- Δεν εξετάστηκε η περίπτωση που η μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους των

μέθοδο παραγωγής. Στην αντίθετη περίπτωση, κατά την οποία οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν σε περισσότερες από μια μεθόδους παραγωγής, αναφέρεται το απόσπασμα της Bharadwaj [1970, σελ. 412] που ακολουθεί: "...A point of some interest to note is to that, if we consider any two production systems differing in the method of production for more than than one commodity common to them and express the wage and prices in the two systems in terms of someone of the commodities common to them, the relative prices for these common commodities in the two systems may not necessarily be equal at all the intersection of the wage profit curves for the two systems. The equality of the relative prices would have to be laid down as *a priori* condition to obtain the switch points among those points of intersections". Σε αυτή την περίπτωση, όπως προκύπτει από τη σχέση (2.3.1), ο μέγιστος αριθμός των σημείων τομής των $W-r$ σχέσεων των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) είναι ίσος με $2n-1$.

[3] Όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που οι οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι μη διασπώμενες. Για πιο ειδικές περιπτώσεις βλέπε Bharadwaj [1970, σσ. 422-423], Bruno, Burmeister and Sheshinski [1966, σσ. 531-538], Robinson and Naqvi [1967], Bruno, Burmeister and Sheshinski [1968] κ.α.

[4] "...The maximum number of switching possibilities between two such systems is equal to the number of distinct (i.e. without double counting) commodities entering, directly or indirectly, into the two alternative methods which respectively charecterise the two systems. Thus if it is a basic to both systems which has different methods in the two systems, this maximum number of switches would be equal to the total number of distinct basics in the two systems together; if it is a nonbasic which has different methods in the two systems, this maximum number is given by the total number of distinct basics in the two systems *plus* the number of distinct nonbasics entering, directly or indirectly, in at least one of the methods for that nonbasic.", βλέπε Bharadwaj [1970, σσ. 423-424].

[5] Βλέπε Τμήμα (2).

τεχνικών παραγωγής (α) και (β) είναι ίση και κατά συνέπεια η ανάλυση του φαινομένου της εναλλαγής των τεχνικών περιορίστηκε στο διάστημα $[0, R^*)$ του ποσοστού κέρδους.

- Δεν εκτιμήθηκαν στον βαθμό που έπρεπε οι περιπλοκές που παράγει η ύπαρξη των μη βασικών εμπορευμάτων.[6]

Στη συνέχεια του Κεφαλαίου (3) θα επιχειρήσουμε να επαναπροσεγγίσουμε το πρόβλημα που έθεσε η Bharadwaj, λαμβάνοντας υπόψη μας τις αιτίες αποτυχίας του εγχειρήματος της που εκθέσαμε.

---

[6] Κατά μείζονα λόγο οι ανωτέρω λόγοι ερμηνεύουν την αποτυχία όλων των υπόλοιπων προσπαθειών, στις οποίες ήδη αναφερθήκαμε.

2. Ο ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΟΥ ΠΟΣΟΣΤΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΠΟΥ ΔΥΟ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΚΕΡΔΟΦΟΡΕΣ

Στο Τμήμα (2) θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε με την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια τον μέγιστο αριθμό των τιμών ισοκερδοφορίας του ποσοστού κέρδους μεταξύ των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) είτε για το διάστημα τιμών $\left[0,R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους, στην περίπτωση που ισχύει $R^* \prec R$, είτε για το διάστημα τιμών $\left[0,R\right]$ του ποσοστού κέρδους, στην περίπτωση που ισχύει $R^* = R$.

Έστω s ο συνολικός αριθμός των διακριτών εμπορευμάτων που εισέρχονται άμεσα ή έμμεσα στην παραγωγή των υλικών εισροών, των οποίων οι ποσότητες διαφοροποιούνται μεταξύ των μητρών $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$. Στις προτάσεις που ακολουθούν θα δείξουμε την βαρύνουσα σημασία που κατέχει ο αριθμός s στην επίλυση του προβλήματος που μας απασχολεί.

Πρόταση 1. Στο διάστημα $\left[0,R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους r ο μέγιστος αριθμός των σημείων ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) είναι ίσος με s.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Πόρισμα (2.3.3), για κάθε τυποποίηση των τιμών, στην τιμή r, $r \in \left[0,R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\hat{p}^{(\alpha)}d\left(1+r\right)+d_0 = 0 \qquad (1)$$[7]

[7] Χωρίς ουσιαστική τροποποίηση της αποδεικτικής διαδικασίας που θα ακολουθήσει θα μπορούσαμε, αντί της σχέσης (1), να θεωρήσουμε την ισοδύναμη σχέση:

$$\hat{p}^{(\beta)}d(1+r)+d_o = 0$$

Για την ισοδυναμία της ανωτέρω σχέσης με τη σχέση (1) βλέπε Πρόταση (2.3.2).

Επομένως, σε κάθε τιμή r, $r \in \left[0, R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους που αποτελεί ρίζα της εξίσωσης (1) οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες. Με άλλα λόγια, αρκεί να δείξουμε ότι ο μέγιστος αριθμός των ριζών της εξίσωσης (1) είναι ίσος με s. Στη συνέχεια, θα διερευνήσουμε τον μέγιστο αριθμό των ριζών της εξίσωσης (1) σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

I. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{A}$.

Στην ανωτέρω περίπτωση, όπου στην παραγωγή κάθε μιας διαφοροποιηθήσας βασικής εισροής εισέρχεται άμεσα ή έμμεσα το σύνολο των παραγόμενων εμπορευμάτων, αρκεί να δείξουμε, ότι ο μέγιστος αριθμός των ριζών της εξίσωσης (1) είναι ίσος με n. Πράγματι, για κάθε τιμή r, $r \in \left[0, R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους, από τη σχέση (1) θα έχουμε:

$$\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r) + d_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$l^{(\alpha)}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1} d(1+r) + d_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$l^{(\alpha)} \frac{adj\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]}{\left|I-(1+r)A^{(\alpha)}\right|} d(1+r) + d_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$l^{(\alpha)} adj\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right] d(1+r) + d_0\left|I-(1+r)A^{(\alpha)}\right| = 0 \qquad (2)$$

Εφόσον η μήτρα $adj\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]$ είναι $n-1$ βαθμού και η ορίζουσα $\left|I-(1+r)A^{(\alpha)}\right|$ είναι n βαθμού, η σχέση (2) αντιπροσωπεύει μια εξίσωση n βαθμού, η οποία έχει n ρίζες.[8]

---

[8] Αν από τις n ρίζες της εξίσωσης (2) αφαιρέσουμε τις πολλαπλά αριθμημένες ή επαναλαμβανόμενες

II. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες: $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{LT}$, $\mathcal{H}$ και Θ.

Στην ανωτέρω περίπτωση, μεταξύ των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) διαφοροποιούνται μόνο βασικές εισροές. Εφόσον στην παραγωγή κάθε μιας βασικής εισροής εισέρχεται άμεσα ή έμμεσα το σύνολο των βασικών εμπορευμάτων, αρκεί να δείξουμε, ότι ο μέγιστος αριθμός των ριζών της εξίσωσης (1) είναι ίσος με τον αριθμό των βασικών εμπορευμάτων, δηλαδή ίσος με k.

Έτσι, για κάθε τιμή r, $r \in \left[0, R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους, από τις σχέσεις (1), (1.2.a.30) και (1.2.a.38) θα έχουμε:

$$\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r)+d_0=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\hat{p}_1^{(\alpha)} d_1+\hat{p}_2^{(\alpha)} d_2\right)(1+r)+d_0=0 \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}_1^{(\alpha)} d_1(1+r)+d_0=0 \Leftrightarrow$$

ρίζες, τις μιγαδικές ρίζες και τις πραγματικές ρίζες που βρίσκονται εκτός του διαστήματος τιμών $\left[0, R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους, προκύπτουν οι οικονομικά σημαντικές τιμές ισοκερδοφορίας των τεχνικών (α) και (β) που περιέχονται στο διάστημα $\left[0, R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους. Προφανώς, ο μέγιστος αριθμός των ανωτέρω τιμών ισοκερδοφορίας είναι μικρότερος ή ίσος του n. Για το ίδιο θέμα βλ. Bharadwaj [1970, σελ. 414]. Από την άλλη μεριά, οι τιμές ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) που περιέχονται στο διάστημα $\left[0, R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους "...could also include such cases where, at the switch point rate of profit, the wage-profit curve for one system is tangential to that of the other wholly from above: that is, as the same system continues to be the more profitable one on both sides of the switch point." (Bharadwaj [1970, σελ. 414]).

$$I_1^{(\alpha)} \frac{adj\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right]}{\left|I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right|} d_1(1+r)+d_0=0 \Leftrightarrow$$

$$I_1^{(\alpha)} adj\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right] d_1(1+r)+d_0\left|I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right|=0 \qquad (3)$$

Εφόσον η μήτρα $adj\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right]$ είναι $k-1$ βαθμού και η ορίζουσα $\left|I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right|$ είναι k βαθμού, η σχέση (3) αντιπροσωπεύει μια εξίσωση k βαθμού η οποία έχει k ρίζες.

III. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{Z}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{J}$.

Στην ανωτέρω περίπτωση, μεταξύ των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) διαφοροποιείται τουλάχιστον μια μη βασική εισροή. Εφόσον στην παραγωγή κάθε μιας μη βασικής εισροής εισέρχεται άμεσα ή έμμεσα το σύνολο των παραγόμενων εμπορευμάτων, βασικών και μη βασικών, αρκεί να δείξουμε, ότι ο μέγιστος αριθμός των ριζών της εξίσωσης (1) είναι ίσος με n. Έτσι, για κάθε τιμή r, $r\in\left[0,R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους, από τις σχέσεις (1) και (1.2.a.45) θα έχουμε:

$$\hat{p}^{(\alpha)} d(1+r)+d_0=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\hat{p}_1^{(\alpha)} d_1+\hat{p}_2^{(\alpha)} d_2\right)(1+r)+d_0=0 \Leftrightarrow$$

$$\hat{p}_1^{(\alpha)} d_1(1+r)+\hat{p}_2^{(\alpha)} d_2(1+r)+d_0=0 \Leftrightarrow$$

$$I_1^{(\alpha)}\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right]^{-1} d_1(1+r)+\left\{I_1^{(\alpha)}\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right]^{-1} A_{12}^{(\alpha)}(1+r)+I_2^{(\alpha)}\right\}\left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\alpha)}\right]^{-1} d_2(1+r)+d_0=0 \Leftrightarrow$$

$$l_1^{(\alpha)}\frac{adj\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right]}{\left|I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right|}d_1(1+r)+\left\{l_1^{(\alpha)}\frac{adj\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right]}{\left|I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right|}A_{12}^{(\alpha)}(1+r)+l_2^{(\alpha)}\right\}\frac{adj\left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\alpha)}\right]}{\left|I_2-(1+r)A_{22}^{(\alpha)}\right|}d_2(1+r)+d_0=0$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ανωτέρω σχέσης με την ορίζουσα $\left|I-(1+r)A^{(\alpha)}\right|$[9] θα έχουμε:

$$l_1^{(\alpha)}adj\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right]d_1(1+r)\left|I_2-(1+r)A_{22}^{(\alpha)}\right|+$$

$$\left\{l_1^{(\alpha)}adj\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right]A_{12}^{(\alpha)}(1+r)+l_2^{(\alpha)}\left|I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right|\right\}adj\left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\alpha)}\right]d_2(1+r)+$$

$$\left\{l_1^{(\alpha)}adj\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right]A_{12}^{(\alpha)}(1+r)+l_2^{(\alpha)}\left|I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right|\right\}adj\left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\alpha)}\right]d_2(1+r)+$$

$$d_0\left|I-(1+r)A^{(\alpha)}\right|=0 \qquad (4)$$

Εφόσον η μήτρα $adj\left[I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right]$ είναι $k-1$ βαθμού, η μήτρα $adj\left[I_2-(1+r)A_{22}^{(\alpha)}\right]$ είναι $n-k-1$ βαθμού, η ορίζουσα $\left|I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right|$ είναι k βαθμού, η ορίζουσα $\left|I_2-(1+r)A_{22}^{(\alpha)}\right|$ είναι $n-k$ βαθμού και η ορίζουσα $\left|I-(1+r)A^{(\alpha)}\right|$ είναι n βαθμού, η σχέση (4) αντιπροσωπεύει μια εξίσωση n βαθμού η οποία έχει n ρίζες.[10]

---

[9] Εφόσον η μήτρα $A^{(\alpha)}$ είναι διασπώμενη, η μήτρα $\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]$ είναι διασπώμενη κι έτσι θα ισχύει:

$$\left|I-(1+r)A^{(\alpha)}\right|=\left|I_1-(1+r)A_{11}^{(\alpha)}\right|\left|I_2-(1+r)A_{22}^{(\alpha)}\right|$$

Βλέπε Δασκαλόπουλος, σσ. 203-204.

[10] Προφανώς, ο βαθμός της εξίσωσης (4) είναι ίσος με n, ανεξάρτητα αν ισχύει:

Στη συνέχει θα θεωρήσουμε την περίπτωση που η μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) είναι ίση. Έτσι, έχουμε:

Πρόταση 2. Αν ισχύει: $R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$ κι οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

$$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{E}, \mathcal{LT}, \mathcal{Z}, \mathcal{H} \text{ και } \Theta,$$

τότε στο διάστημα $[0, R]$ του ποσοστού κέρδους r ο μέγιστος αριθμός των σημείων ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) είναι ίσος με $s+1$.

Απόδειξη: Εφόσον ισχύει:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R,$$

θα έχουμε:

$$R^{*} = R$$

Έτσι, στο διάστημα $[0, R)$ του ποσοστού κέρδους r θα υπάρχουν το πολύ s σημεία ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β).[11] Επίσης, έχουμε δείξει, ότι, για κάθε τυποποίηση που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.[12] Κατά συνέπεια, στο διάστημα $[0, R]$ του ποσοστού κέρδους υπάρχουν το πολύ $s+1$ σημεία ισοκερδοφορίας των τεχνικών

$$d_1 = 0$$

ή

$$d_1 \neq 0$$

[11] Βλ. Πρόταση (1).

[12] Βλ. Πόρισμα (2.3.6).

παραγωγής (α) και (β).

Πρόταση 3. Αν οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$, στο διάστημα $[0,R]$ του ποσοστού κέρδους r ο μέγιστος αριθμός των σημείων ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) είναι ίσος με $s+1$.

Απόδειξη: Εφόσον οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$ θα έχουμε:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$ [13]

και

$$R^{*} = R$$

Έτσι, στο διάστημα $[0,R)$ του ποσοστού κέρδους υπάρχουν το πολύ s σημεία ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β). Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η μέγιστη τιμή R του ποσοστού κέρδους αποτελεί μια πιθανή τιμή ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β).

Σύμφωνα με το Πόρισμα (2.3.6), για κάθε τυποποίηση των τιμών, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\alpha)} d = 0 \qquad (5)$$ [14]

---

[13] Βλ. Λήμμα (1.3.1).

[14] Χωρίς ουσιαστική τροποποίηση της αποδεικτικής διαδικασίας που θα ακολουθήσει θα μπορούσαμε, αντί της σχέσης (5), να θεωρήσουμε την ισοδύναμη σχέση:

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(\beta)} d = 0$$

Προφανώς, δεδομένης της τεχνικής παραγωγής (α), υπάρχουν άπειρα $d \in R^n$ τέτοια ώστε να ισχύει η συνδήκη (5).

Για την ισοδυναμία της ανωτέρω σχέσης με τη σχέση (5) βλέπε Πρόταση (2.3.9).

3. ΜΙΑ ΙΚΑΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΟ ΠΟΛΥ ΜΙΑ ΤΙΜΗ ΤΟΥ ΠΟΣΟΣΤΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΣΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΟΙ ΔΥΟ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΚΕΡΔΟΦΟΡΕΣ

Στο Τμήμα (3) θα περιγράψουμε μια ικανή συνθήκη που ακυρώνει την δυνατότητα εναλλαγής των τεχνικών (α) και (β) είτε για το διάστημα τιμών $\left[0,R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους, στην περίπτωση που ισχύει $R^* \prec R$, είτε για το διάστημα τιμών $\left[0,R\right]$ του ποσοστού κέρδους, στην περίπτωση που ισχύει $R^* = R$.[15]

Πρόταση 1. Αν το διάνυσμα d είναι ημιαρνητικό $(d \leq 0)$ κι οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{H}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{J}$, θα ισχύει:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$

Απόδειξη: Θα μελετήσουμε την απόδειξη κάθε μιας περίπτωσης ξεχωριστά:

I. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{H}$.

Από τη συνθήκη $\mathcal{H}_3$ ή, ισοδύναμα, τη σχέση (1.2.a.30) και την υπόθεση μας ότι το διάνυσμα d είναι ημιαρνητικό $(d \leq 0)$ συνεπάγεται:

$$d_1 \leq 0$$

ή

$$0 \leq A_{11}^{(\beta)} \leq A_{11}^{(\alpha)}$$

Με βάση όσα είδαμε παραπάνω, από την ανωτέρω σχέση θα έχουμε:

$$R^{A_{11}^{(\alpha)}} \prec R^{A_{11}^{(\beta)}} \tag{1}$$

---

[15] Η ικανή συνθήκη την οποία αναπτύσουμε αποτελεί γενίκευση της συνθήκης των Pertz and Teplitz [1979, σσ. 248-249] και Pertz [1980]. Για το διάστημα $\left[0,R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους - και μόνο για αυτό - έχουν προταθεί εναλλακτικές ικανές συνθήκες, όπως του Hichs [1965, σελ. 154], Bruno, Burmeister and Sheshinski [1966, σελ. 534 και 544], Laibman and Nell [1977] κ.α.

Έτσι, από τις σχέσεις (1), (1.3.63) και (1.3.64) προκύπτει:

$$R^{A_{11}^{(\alpha)}} \prec R^{A_{11}^{(\beta)}} \Rightarrow$$

$$R^{A_{22}^{(\alpha)}} \prec R^{A_{11}^{(\beta)}} \Rightarrow$$

$$R^{A_{22}^{(\beta)}} \prec R^{A_{11}^{(\beta)}} \Rightarrow$$

$$R^{(\beta)} = R^{A_{22}^{(\beta)}} \Rightarrow$$

$$R^{(\beta)} = R^{A_{22}^{(\alpha)}} \Rightarrow$$

$$R^{(\beta)} = R^{(\alpha)}$$

II. Οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{J}$.

Από τη συνθήκη $\mathcal{J}_3$ ή, ισοδύναμα, τη σχέση (1.2.a.45) και την υπόθεση μας ότι το διάνυσμα d είναι ημιαρνητικό $(d \leq 0)$ συνεπάγεται:

$$d_2 \leq 0$$

ή

$$0 \leq A_{22}^{(\beta)} \leq A_{22}^{(\alpha)}$$

Με βάση όσα είδαμε παραπάνω, από την ανωτέρω σχέση θα έχουμε:

$$R^{A_{22}^{(\alpha)}} \prec R^{A_{22}^{(\beta)}} \tag{2}$$

Έτσι, από τις σχέσεις (2), (2.2.37) και (2.2.38) προκύπτει:

$$R^{A_{22}^{(\alpha)}} \prec R^{A_{22}^{(\beta)}} \Rightarrow$$

$$R^{A_{11}^{(\alpha)}} \prec R^{A_{22}^{(\beta)}} \Rightarrow$$

$$R^{A_{11}^{(\beta)}} \prec R^{A_{22}^{(\beta)}} \Rightarrow$$

$$R^{(\beta)} = R^{A_{11}^{(\beta)}} \Rightarrow$$

$$R^{(\beta)} = R^{A_{11}^{(\alpha)}} \Rightarrow$$

$$R^{(\beta)} = R^{(\alpha)}$$

Πρόταση 2. Αν το διάνυσμα d είναι ημιθετικό $\left(d \geq 0\right)$ ή ημιαρνητικό $\left(d \leq 0\right)$, τότε στο διάστημα $\left[0, R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους r υπάρχει *το πολύ μια* τιμή ισοκερδοφορίας των εναλλακτικών τεχνικών παραγωγής (α) και (β).[16]

Απόδειξη: Έστω ότι στην τιμή r_1, $r_1 \in \left[0, R^*\right)$, του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες. Δεδομένης της υπόθεσής μας ότι οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) διαφέρουν μόνο ως προς την μέθοδο παραγωγής του εμπορεύματος ω, στην τιμή r_1 του ποσοστού κέρδους θα ισχύει:

$$\hat{p}_{r_1}^{(\alpha)} d\left(1+r\right) + d_0 = 0 \tag{3}$$ [17]

Θα δείξουμε ότι είναι αδύνατον να υπάρχει τιμή του ποσοστού κέρδους r_2, με $r_2 \in \left[0, R^*\right)$ και $r_1 \neq r_2$, στην οποία οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) να είναι ισοκερδοφόρες. Έστω ότι υπάρχει. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι:

$$r_2 \succ r_1 \tag{4}$$

Αντίστοιχα, για την τιμή ισοκερδοφορίας r_2 του ποσοστού κέρδους θα έχουμε:

$$\hat{p}_{r_2}^{(\alpha)} d\left(1+r_2\right) + d_0 = 0 \tag{5}$$

---

[16] Για την Πρόταση (2) βλέπε επίσης Pertz and Teplitz [1979, σσ. 248-249] και Pertz [1980].

[17] Βλ. Πόρισμα (2.3.3).

Από την εξίσωση των πρώτων μελών των εξισώσεων (3) και (5) προκύπτει:

$$\hat{p}_{r_2}^{(\alpha)} d(1+r_2)+d_0=\hat{p}_{r_1}^{(\alpha)} d(1+r_1)+d_0 \Rightarrow$$

$$\left[\hat{p}_{r_2}^{(\alpha)}(1+r_2)-\hat{p}_{r_1}^{(\alpha)}(1+r_1)\right]d=0 \tag{6}$$

Θα αποδείξουμε ότι η ανωτέρω σχέση (6) είναι *άτοπη*. Πράγματι, εφόσον στο διάστημα $\left[0,R^{*}\right)$ του ποσοστού κέρδους r το διάνυσμα $\hat{p}^{(\alpha)}$ είναι αύξουσα συνάρτηση,[18] από τη σχέση (6) θα έχουμε:

$$\hat{p}_{r_2}^{(\alpha)}(1+r_2)-\hat{p}_{r_1}^{(\alpha)}(1+r_1)\succ 0 \tag{7}$$

Από τη σχέση (7) και την υπόθεση μας ότι το διάνυσμα d είναι είτε ημιθετικό $(d\geq 0)$ είτε ημιαρνητικό $(d\leq 0)$ προκύπτει αντίστοιχα:

- είτε $\left[\hat{p}_{r_2}^{(\alpha)}(1+r_2)-\hat{p}_{r_1}^{(\alpha)}(1+r_1)\right]d\succ 0$
- είτε $\left[\hat{p}_{r_2}^{(\alpha)}(1+r_2)-\hat{p}_{r_1}^{(\alpha)}(1+r_1)\right]d\prec 0$

Γενικά, από τις ανωτέρω συνθήκες συνεπάγεται:

---

[18] Όπως είναι γνωστό, ισχύει:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[I-(1+r)A^{(\alpha)}\right]^{-1}\geq 0,\ \forall r\in\left[0,R^{(\alpha)}\right)$$

Βλ. Pasinetti [1985, σελ. 293]. Από την ανωτέρω σχέση και τις υποθέσεις μας:

- Σε κάθε διαδικασία παραγωγής εισέρχεται τουλάχιστον μια παραγόμενη εισροή και
- $l^{(\alpha)}\succ 0$

προκύπτει:

$$\frac{d}{dr}\hat{p}^{(\alpha)}\succ 0,\ \forall r\in\left[0,R^{(\alpha)}\right)$$

$$\left[\hat{p}_{r_2}^{(\alpha)}(1+r_2)-\hat{p}_{r_1}^{(\alpha)}(1+r_1)\right]d \neq 0$$

κι επομένως η σχέση (6) είναι *άτοπη*. Κατά συνέπεια, στο διάστημα $\left[0, R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους r υπάρχει το *πολύ μια* τιμή r στην οποία οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες.[19]

Πόρισμα 1. Αναγκαία συνθήκη για να υπάρχουν στο διάστημα $\left[0, R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους r *τουλάχιστον δύο* διακριτές τιμές ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β) είναι *τουλάχιστον μία* από τις εναλλακτικές μεθόδους παραγωγής του εμπορεύματος ω να περιέχει *τουλάχιστον δύο* διαφορετικές εισροές.[20]

Πόρισμα 2. Αν το διάνυσμα d είναι ημιαρνητικό $(d \leq 0)$ και οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{H}$, τότε, *για κάθε τυποποίηση* που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων,[21] στο διάστημα $\left[0, R\right]$ του ποσοστού κέρδους r υπάρχουν το *πολύ δύο* τιμές ισοκερδοφορίας των

---

[19] Ακολουθώντας μια παρόμοια αποδεικτική διαδικασία μπορούμε να αποδείξουμε την Πρόταση που ακολουθεί: Αν το διάνυσμα $D=(d,d_0)^T$, με $D \in \Re^{n+1}$, είναι ημιθετικό $D \geq 0$ ή ημιαρνητικό $D \leq 0$, τότε στο διάστημα $\left[0, R^*\right)$ του ποσοστού κέρδους r δεν θα υπάρχει *καμία* τιμή ισοκερδοφορίας των εναλλακτικών τεχνικών παραγωγής (α) και (β). Για το ανωτέρω θεώρημα βλέπε Stiglitz [1973, σελ. 121] και Burmeister and Dobell [1970, σελ. 248 και 266].

[20] Βλέπε επίσης Pertz and Teplitz [1979, σελ. 249], Pertz [1980, σελ. 1015], Bruno, Burmeister and Sheshinski [1966, σσ. 536-538], Robinson and Naqvi [1967] και Bruno, Burmeister and Sheshinski [1968].

[21] Μη *επιτρεπτή* τυποποίηση έχουμε όταν ως τυπικό εμπόρευμα λειτουργεί ένα απλό ή σύνθετο βασικό εμπόρευμα. Πράγματι, σε κάθε τέτοια περίπτωση, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους ο προσδιορισμός των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *αδύνατος*. Το θέμα αυτό πραγματευτήκαμε στο Μέρος (Ι).

τεχνικών παραγωγής (α) και (β).

Απόδειξη: Σύμφωνα με την Πρόταση (1) θα έχουμε:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R \tag{8}$$

και

$$R^* = R \tag{9}$$

Σύμφωνα με την ανωτέρω σχέση (9) και την Πρόταση (2), στο διάστημα $[0, R)$ του ποσοστού κέρδους r θα υπάρχει το *πολύ μια* τιμή ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β). Τέλος, από τη σχέση (8) και το Πόρισμα (2.3.7) προκύπτει, ότι, *για κάθε τυποποίηση* που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες. Κατά συνέπεια, στο διάστημα $[0, R]$ του ποσοστού κέρδους r θα υπάρχουν το *πολύ δύο* τιμές ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β).

Πρόταση 3. Αν το διάνυσμα d είναι είτε ημιθετικό $(d \geq 0)$ είτε ημιαρνητικό $(d \leq 0)$ κι οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι *αδύνατον* να είναι ισοκερδοφόρες.

Απόδειξη: Προφανώς, ισχύει:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R$$[22]

Έστω ότι στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές (α) και (β) είναι

[22] Βλ. Λήμμα (1.3.1).

ισοκερδοφόρες. Σύμφωνα με το Πόρισμα (2.3.6), *για κάθε τυποποίηση* των τιμών στην τιμή R του ποσοστού κέρδους θα ισχύει:

$$\tilde{p}^{(a)} d = 0 \tag{10}$$

Θα αποδείξουμε ότι η ανωτέρω σχέση είναι *άτοπη*. Πράγματι, για το διάνυσμα τιμών $\tilde{p}^{(a)}$ ισχύει:

$$\tilde{p}^{(a)} \succ 0$$ [23]

Από την ανωτέρω σχέση και την υπόθεσή μας, ότι το διάνυσμα d είναι είτε

---

[23] Σύμφωνα με το θεώρημα του Frobenius, για το ιδιοδιάνυσμα $\tilde{p}^{(a)}$ που συνδέεται με την δεσπόζουσα ιδιοτιμή της διασπώμενης μήτρας $A^{(a)}$ γενικά ισχύει:

$$\tilde{p}^{(a)} \geq 0$$

Πιο συγκεκριμένα, για το διάνυσμα $\tilde{p}^{(a)} = \left(\tilde{p}_1^{(a)}, \tilde{p}_2^{(a)}\right)$ θα έχουμε:

$$\tilde{p}_1^{(a)} = \tilde{p}_1^{(a)} A_{11}^{(a)} (1+R)$$

και

$$\tilde{p}_2^{(a)} = \tilde{p}_1^{(a)} A_{12}^{(a)} (1+R) \left[I_2 - (1+R) A_{22}^{(a)} \right]^{-1}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Frobenius, για το ιδιοδιάνυσμα $\tilde{p}_1^{(a)}$ που συνδέεται με την δεσπόζουσα ιδιοτιμή της μη διασπώμενης μήτρας $A_{11}^{(a)}$ ισχύει:

$$\tilde{p}_1^{(a)} \succ 0$$

Έτσι, από τις ανωτέρω σχέσεις συνεπάγεται:

$$\tilde{p}_2^{(a)} \succ 0$$

κι επομένως:

$$\tilde{p}^{(a)} \succ 0$$

ημιθετικό $(d \geq 0)$ είτε ημιαρνητικό $(d \leq 0)$ συνεπάγεται αντίστοιχα:

- είτε $\tilde{p}^{(\alpha)} d \succ 0$
- είτε $\tilde{p}^{(\alpha)} d \prec 0$

Γενικά, από τις ανωτέρω συνθήκες προκύπτει:

$$\tilde{p}^{(\alpha)} d \neq 0$$

κι επομένως η σχέση (10) είναι *άτοπη.*

Πόρισμα 3. Αν το διάνυσμα d είναι είτε ημιθετικό $(d \geq 0)$ είτε ημιαρνητικό $(d \leq 0)$ κι οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{D}$, στο διάστημα $[0, R]$ του ποσοστού κέρδους r θα υπάρχει *το πολύ μια* τιμή ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β).

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από το συνδυασμό του Λήμματος (1.3.1) και των Προτάσεων (2) και (3).

Πόρισμα 4. Αν το διάνυσμα d είναι είτε ημιθετικό $(d \geq 0)$ είτε ημιαρνητικό $(d \leq 0)$ κι οι μήτρες $A^{(\alpha)}$ και $A^{(\beta)}$ ανήκουν είτε στην κατηγορία $\mathcal{E}$ είτε στην κατηγορία $\mathcal{LT}$ είτε στην κατηγορία Θ, τότε, *για κάθε τυποποίηση* που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων,[24] στο διάστημα $[0, R]$ του ποσοστού κέρδους r θα υπάρχουν *το πολύ δύο* τιμές ισοκερδοφορίας των

---

[24] Μη *επιτρεπτή* τυποποίηση έχουμε όταν και ως τυπικό εμπόρευμα λειτουργεί ένα απλό ή σύνθετο βασικό εμπόρευμα. Πράγματι, σε κάθε τέτοια περίπτωση, στην τιμή R του ποσοστού κέρδους ο προσδιορισμός των τιμών των μη βασικών εμπορευμάτων είναι *αδύνατος*. Το θέμα αυτό πραγματευτήκαμε στο Μέρος (Ι).

τεχνικών παραγωγής (α) και (β).

Απόδειξη: Προφανώς, για κάθε διάνυσμα $d \in R^n$ θα ισχύει:

$$R^{(\alpha)} = R^{(\beta)} = R \tag{11}$$

και

$$R^* = R \tag{12}$$

Σύμφωνα με την ανωτέρω σχέση (12) και την Πρόταση (2), στο διάστημα $[0, R)$ του ποσοστού κέρδους r θα υπάρχει το *πολύ μια* τιμή ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β). Τέλος, από τη σχέση (11) και το Πόρισμα (2.3.7) προκύπτει, ότι *για κάθε τυποποίηση* που επιτρέπει τον προσδιορισμό των τιμών όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων στην τιμή R του ποσοστού κέρδους οι τεχνικές παραγωγής (α) και (β) είναι ισοκερδοφόρες. Κατά συνέπεια, στο διάστημα $[0, R]$ του ποσοστού κέρδους r θα υπάρχουν το *πολύ δύο* τιμές ισοκερδοφορίας των τεχνικών παραγωγής (α) και (β).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α. ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

Arena, R. et Ravix, G. L. (eds.) [1990] "Sraffa, trentes ans après", P.U.F., Paris.

Abraham-Frois, F. et Berrebi, E. [1976] "Théorie de la valeur, des prix et de l' accumulation", Economica, Paris.

Abraham-Frois, F. et Berrebi, E. [1978] "Pluralité des marchandises étalons: existence et construction", Revue d' Économie Politique, pp. 688-712.

Abraham-Frois, F. et Berrebi, E. [1990] "Dualité et étalons", Revue Économique, vol. 41, No 6, pp. 1071-1079.

Berman, A. and Plemmons, R. [1979] "Non-negative Matrices in the Mathematical Sciences", Academic Press, N. York, San Francisco, London.

Berrebi, Z. M. [1981] "Comparaison de Techniques et Normes des Prix", Revue Économique, No 5, pp. 965-970.

Bharadwaj, K. [1970] "On the Maximum Number of Switches Between Two Production Systems", Schweizerische Zeitschrift fur Volkswirtschaft und Statistik, Nr. 4, 1970, pp. 409-429.

Bidard, C. [1990a] "An Algorithmic Theory of the Choice of Techniques", Econometrica, vol. 58, No 4, pp. 839-859.

Bidard, C. [1990b] "Une Théorie Sraffienne des Choix Techniques". Περιέχεται στο: Arena, R. et Ravix, G. L (eds.) [1990] pp. 311-323.

Bidard, C. [1991] " Prix, Reproduction, Rareté ", Dunod, Paris.

Bowles, S. and Gintis, H. [1977] "The Marxian Theory of Value and Heterogeneous Labour: a Critique and Reformulation", Cambridge Journal of Economics, vol. 1, pp. 173-192.

Bruno, M., Burmeister, E. and Sheshinski, E. [1966] "The Nature and Implications of Reswitching of Techniques", Quarterly Journal of Economics, vol. 80, No 4, pp. 526-553.

Bruno, M., Burmeister, E. and Sheshinski, E. [1968] "The Badly Behaved Production Function: Comment", Quarterly Journal of Economics, vol. 82, pp. 524-525.

Burmeister, E. and Dobell R. [1970] "Mathematical Theories of Economic Growth", Macmillan .

D' Autume, A. [1985] "Prix, Taux de Profit et Étalons", Revue d' Économie Politique, No 1, pp. 27-50.

Debreu, G. and Herstein, I. N. [1953] "Nonnegative Square Matrices", Econometrica, vol. 21, pp. 597 - 607.

Gantmacher, F. R. [1959] "The Theory of Matrices" vol. I, Chelsea Publishing Company, New York.

Gantmacher, F. R. [1966] "Théorie des Matrices", vol. II, Dunod, Paris.

Garegnani, P. [1966] "Switching of Techniques", Quarterly Journal of Economics, vol. 80, No 4, pp. 554-567.

Garegnani, P. [1970] "Heterogeneous Capital, the Production Function and the Theory of Distribution", Review of Economic Studies, vol. 37, No 3, pp. 407-436.

Garegnani, P. [1984] "On some illusory instances of 'marginal products' ", Metroeconomica, vol. 36, pp. 143-160.

Harcourt, G. C. [1969] "Some Cambridge controversies in the theory of capital", Journal of Economic Literature, No 4, pp. 369-405.

Harcourt, G. C. [1972] "Some Cambridge controversies in the theory of capital", Cambridge University Press.

Hawkins, D. and Simon, H. A. [1949] "Note: Some conditions of macroeconomic stability", Econometrica 17, pp. 245-248.

Herrero, C., Jimenez-Raneda, I. and Villar, A. [1980] "The Selection of Techniques in Multisectoral Models of Simple Production: A Mathematical Revision", Metroeconomica, vol. 32, pp. 155-171.

Hicks J. R. [1965] "Capital and Growth", Clarendon Press, Oxford.

Koopmans, T. C. (ed.) [1951], "Activity Analysis of Production and Allocation" , John Wiley and Sons, N. York.

Krause, U. [1981] "Heterogeneous Labour and the Fundamental Marxian Theorem", Review of Economic Studies, vol. 48 pp. 173-178.

Krause, U. [1982] "Money and Abstract Labour. On the Analytical Foundations of Political Economy", N.L.B. and Verso Editions, London.

Laibman, D. and Nell, E. D. [1977] "Reswitching, Wicksell Effects, and the Neoclassical Production Function", The American Economic Review, vol. 67, pp. 878-888.

Levhari, D. [1965] "A Nonsubstitution Theorem and Switching of Techniques", Quarterly Journal of Economics, vol. 79, pp. 98-105.

Levhari, D. and Samuelson, P. A. [1966] "The Nonswitching Theorem is False", Quarterly Journal of Economics, vol. 80, No 4, pp. 518-519.

Mainwaring, L. [1974] "A Neo-Ricardian Analysis of International Trade", Kyklos, pp. 537-553.

Mainwaring, L. [1976] "Relative Prices and "Factor Price" Equalisation in a Heterogeneous Capital Model", Australian Economic Papers, pp. 109-118.

Mirrlees, J., A. [1969] "The Dynamic Non-substitution Theorem", Review of Economic Studies, vol. 36.

Mirrlees, J., A., and Stern, N., H., (eds.), [1973] "Models of Economic Growth", London-Basingstoke.

Miyao, T. [1977] "A generalisation of Sraffa's Standard Commodity and its Complete Characterization", International Economic Review, pp. 151-162.

Morishima, M. [1964] "Equilibrium, Stability and Growth", Clarendon Press, Oxford.

Morishima, M. [1966] "Refutation of the Nonswitching Theorem", Quarterly Journal of Economics, vol. 80, No 4, pp. 520-525.

Morishima, M. [1969] "Theory of Economic Growth", Oxford University Press.

Morishima, M. [1973] "Marx's Economics", Cambridge.

Nikaido, H. [1968] "Convex Structures and Economic Theory", Academic Press, New York, London.

Ostrowski, A. M. [1937] "Über die determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale, Comment", Math. Helv. 10, pp. 69-96.

Pasinetti, L. L. [1966] "Changes in the Rate of Profit and Switches of Techniques", Quarterly Journal of Economics, vol. 80, pp. 503-517.

Pasinetti, L. L. [1970] "Switches of Techniques and the 'Rate of Return' in Capital Theory", Economic Journal, pp. 508-531.

Pasinetti, L. L. [1970] "Again on Capital Theory and Solow's 'Rate of Return' ", Economic Journal, pp. 428-431.

Pasinetti, L. L. [1973] "The Notion of Vertical Integration in Economic Analysis", Metroeconomica, Vol. XXV. pp. 1-29.

Pasinetti, L.,L. [1975] "Lezioni di Teoria della Produzione", Bologna, Il Mulino.

Pasinetti, L.,L. [1977] "Lectures on the theory of Production", Mcmillan, London,.

Pertz, K. and Teplitz, W. [1979] "Changes of Technique in Neo-Ricardian and Neoclassical Production Theory", Zeitschrift f.d.g. Staatswissenschaft, Bd 135, Hefte 2.

Pertz, K. [1980] "Reswitching, Wicksell Effects, and the Neoclassical Production Function: Note", The American Economic Review, vol. 70, No. 5, pp. 1015-1017.

Robinson, J. and Naqvi, K. A. [1967] "The Badly Behaved Production Function", Quarterly Journal of Economics, vol. 81, pp. 579-591.

Samuelson, P. A. [1951] "Abstract of a Theorem concerning substitutability in open Leontief Models" στο Koopmans, T. C. (ed.) [1951].

Samuelson, P. A. [1962] "Parable and Realisme in Capital Theory: The Surrogate Production Function", Review of Economic Studies, vol. 29, pp. 193-206.

Samuelson, P. A. [1966] "A Summing Up", Quarterly Journal of Economics, vol. 80, No 4, pp. 568-583.

Schefold, B. [1971] "Theorie der Kuppelproduction", Basel.

Schefold, B. [1976] "Relative Prices as a Function of the Rate of Profit: A Mathematical Note", Zeitscrift fur Nationalokonomie, vol. 36, pp. 21-48.

Schefold, B. [1978] "Multiple Product Techniques With Properties of Single Product Systems", Zeitscrift fur Nationalokonomie, vol. 38, No 1-2, pp. 29-53.

Solow, R. [1952] "On the Structure of Linear Models", Econometica, vol. 20, pp. 29-33.

Solow, R. [1963] "Capital theory and the rate of return", North Holland Publishing Co, Amsterdam.

Solow, R. [1970] "On the rate of return: Reply to Pasinetti", Economic Journal, pp. 423-428.

Stiglitz, J. E. [1973] "The Badly Behaved Economy With the Well-Behaved Production Function". Περιέχεται στο: Mirrless, J. A. and Stern, N. H. (eds.) [1973] "Models of Economic Growth", London-Basingstoke, pp. 118-137.

Stoer, J., and Bulrisch, R. [1980] "Introduction to Numerical Analysis", Springer Verlag, N. York.

B. ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Βασιλάκης, Σ. [1992] "Μη βασικά εμπορεύματα, πρότυπο εμπόρευμα και γενικό ποσοστό κέρδους", Παράρτημα στο Σταμάτης, Γ. [1992].

Βουγιουκλάκης, Π. και Μαριόλης, Θ. [1990] "Ορισμένα ζητήματα του προσδιορισμού των τιμών στα γραμμικά συστήματα παραγωγής", Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, Τεύχος 6, σελ. 69 - 91.

Βουγιουκλάκης, Π. και Μαριόλης, Θ. [1991] "Ορισμένα ζητήματα του προσδιορισμού των τιμών στα γραμμικά συστήματα παραγωγής - Addendum", Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, Τεύχος 9, σσ. 67-79.

Βουγιουκλάκης, Π. και Μαριόλης, Θ. [1992] "Ο προσδιορισμός των τιμών και η σχέση ονομαστικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους στα γραμμικά συστήματα παραγωγής", Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, Τεύχος 10, σσ. 113-190.

Βουγιουκλάκης, Π. και Μαριόλης, Θ. [1992] "Ο προσδιορισμός των τιμών σε διασπώμενα συστήματα παραγωγής στα οποία τα μέγιστα ποσοστά κέρδους του βασικού και του μη βασικού υποσυστήματος είναι ίσα", Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, Τεύχος 12, σσ. 103-125.

Δασκαλόπουλος, Δ. "Εφηρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα. Τεύχος Πρώτον" Αθήναι.

Λουκάκης, Μ. [1991] "Μαθηματικά Οικονομικών Επιστημών", Τόμος Β', Β' Έκδοση, Θεσσαλονίκη.

Pasinetti, L.,L. [1991] "Παραδόσεις Θεωρίας της Παραγωγής", Εκδόσεις Κριτική, Επιστημονική Βιβλιοθήκη, Αθήνα.

Sraffa, P. [1985] "Παραγωγή εμπορευμάτων μέσω εμπορευμάτων. Πρελούδιο στην κριτική της οικονομικής θεωρίας.", Σύγχρονα Θέματα, Αθήνα.

Σταμάτης, Γ. και Δημάκης, Φ. [1986] "Το πρότυπο εμπόρευμα του Pierro Sraffa και το αμετάβλητο μέτρο τιμών και αξιών του David Ricardo", στον τόμο "Δοκίμια Οικονομικής Θεωρίας και Πολιτικής", επιμέλεια Γ. Σταμάτης, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα.

Σταμάτης, Γ. [1989a] "Εισαγωγή στο "Παραγωγή Εμπορευμάτων μέσω Εμπορευμάτων" του Pierro Sraffa" 2η έκδοση, Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

Σταμάτης, Γ. [1990b] "Το αδύνατον της σύγκρισης τεχνικών παραγωγής ως προς την κερδοφορία τους και της διαπίστωσης μιας επαναχρησιμοποίησης τεχνικών", Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, Τεύχος 5, σελ. 111-140.

Σταμάτης, Γ. [1990a] "Προβλήματα Μαρξιστικής Οικονομικής Θεωρίας", 2η επαυξημένη έκδοση, Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

Σταμάτης, Γ. [1990b] "Για την ερμηνεία ορισμένων φαινομενικά παράδοξων μορφών της σχέσης μεταξύ ονομαστικού μισθού και ποσοστού κέρδους", Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, Τεύχος 7, σελ. 101-119.

Σταμάτης, Γ. [1991] "Προβλήματα θεωρίας γραμμικών συστημάτων παραγωγής. Τόμος 1ος : Βασικά ζητήματα". Εκδόσεις Κριτική, Επιστημονική Βιβλιοθήκη, Αθήνα.

Σταμάτης, Γ. [1991] "Προβλήματα θεωρίας γραμμικών συστημάτων παραγωγής. Τόμος 2ος : Γραμμικά συστήματα και θεωρία της αξίας". Εκδόσεις Κριτική, Επιστημονική Βιβλιοθήκη, Αθήνα.

Σταμάτης, Γ. [1991] "Κείμενα Οικονομικής Θεωρίας και Πολιτικής. Τόμος 1ος", Εκδόσεις Κριτική, Επιστημονική Βιβλιοθήκη, Αθήνα.

Σταμάτης, Γ. [1992] "Ο Sraffa και η σχέση του με τον Ricardo και τον Marx", Εκδόσεις Κριτική, Επιστημονική Βιβλιοθήκη, Αθήνα.