Ελληνική γεωμετρία, αραβική γεωμετρία και οι απαρχές της αλγεβρικής γεωμετρίας

Συνηθίζουμε να θέτουμε το θέμα της μαθηματικής νεωτερικότητας κυρίως με αφετηρία τον Καρτέσιο και τους συγχρόνους του. Όμως δεν είναι σπάνιο να συναντούμε ιστορικούς που δεν θέλουν να περιοριστούν μόνο στα μαθηματικά αποτελέσματα να θέτουν το ακόλουθο ερώτημα: πώς στάθηκε δυνατό τα μαθηματικά του Καρτέσιου να ανοίξουν το δρόμο στα νεότερα μαθηματικά; Ή ακόμα: από ποια άποψη τα μαθηματικά του Καρτέσιου και των συγχρόνων του είναι νεωτεριστικά;

Στην παρούσα αναφορά θα επαναθέσω για λογαριασμό μου αυτά τα ερωτήματα και θα εξετάσω την έννοια της μαθηματικής νεωτερικότητας, αρχής γενομένης από το συγγραφέα της *Γεωμετρίας* και τους συγχρόνους του, ειδικά τον Φερμά.

Μένει ακόμα να κάνουμε μια διάκριση μεταξύ της μαθηματικής καινοτομίας και της μαθηματικής νεωτερικότητας. Στην τελευταία αυτή περίπτωση δεν αρκεί πλέον το αποτέλεσμα –το θεώρημα ή το πόρισμα– να είναι νέο: πρέπει επιπλέον να ανήκει σε ένα ερευνητικό πρόγραμμα που να είναι κι αυτό νέο. Όμως, σε χρονικό διάστημα μικρότερο μιας δεκαετίας, ανάμεσα στο 1630 και το 1640, βλέπουμε να κάνουν την εμφάνισή τους αρκετά μαθηματικά ερευνητικά προγράμματα. Το 1634 ο Ρομπερβάλ ωθεί την έρευνα σε μια νέα ανοδική τροχιά, την κυκλοειδή. Ο Καρτέσιος και ο Φερμά δεν θα αργήσουν να τον ακολουθήσουν, και ο ίδιος τέσσερα χρόνια αργότερα, το 1638, ακολουθούμενος πάντα από αυτούς τους τελευταίους, καθορίζει το εμβαδόν ενός τόξου του κυκλοειδούς. Την ίδια χρονιά βρίσκει την εφαπτομένη στην κυκλοειδή με μια κινηματική μέθοδο. Ο Βιντσέντσο Βιβιάνι και ο Ευαντζελίστα Τοριτσέλι θα τη βρουν από τη δική τους μεριά ένα χρόνο αργότερα. Η πιο διάσημη αυτή έρευνα του 17ου αιώνα περί της υπερβατικής καμπύλης εγκαινιάζει μια γεωμετρική ανάλυση των υπερβατικών συναρτήσεων, ανάλυση που έμελλε να έχει την τύχη που γνωρίζουμε. Κατά τη διάρκεια αυτής της ίδιας δεκαετίας ο Καρτέσιος και ο Φερμά είχαν επινοήσει μεθόδους για την εύρεση της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο χ της τετμημένης μιας δεδομένης αλγεβρικής καμπύλης. Το 1639 ο Florimont de Beaune αναζητούσε αντίθετα μια μέθοδο που να επιτρέπει την εύρεση της καμπύλης, αρχίζοντας από μια δεδομένη αλγεβρική σχέση μεταξύ της συντεταγμένης του σημείου και της κλίσης της εφαπτομένης σε αυτό το σημείο. Με τον τρόπο αυτό τίθεται το αντίστροφο πρόβλημα των εφαπτομένων, και έτσι εγκαινιάζεται μια νέα έρευνα στη διαφορική γεωμετρία. Στην ίδια πάντα

Ο Roshdi Rashed είναι Διευθυντής Ερευνών στο Εθνικό Κέντρο Ερευνών της Γαλλίας.

δεκαετία, και συγκεκριμένα το 1639 και πάλι, ο Ντεσάργκ φέρνει σε πέρας το περίφημο Brouillon Project, που εμπλουτίζει την έρευνα στην προβολική γεωμετρία. Είναι όμως και πάλι κατά τα χρόνια αυτά, το 1640, που ο Φερμά επινοεί τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής, ανανεώνοντας έτσι τη θεωρία των αριθμών. Τρία χρόνια νωρίτερα, το 1637, είχε εκδοθεί η *Γεωμετρία* του Καρτέσιου.

Ένα τέτοιο πλήθος θεμελιωδών εργασιών σε ένα τόσο σύντομο χρονικό διάστημα είναι ένα αρκετά σπάνιο φαινόμενο στην ιστορία, ώστε να αξίζει να μελετηθεί ξεχωριστά. Το ίδιο σημαντικό όμως είναι να τοποθετηθεί ο καθένας με ακρίβεια στη θέση που του ανήκει μέσα στην ιστορία των μαθηματικών. Περιορίζομαι εδώ, για προφανείς λόγους, στο πεδίο που κυρίως μελέτησε ο Καρτέσιος: την αλγεβρική γεωμετρία.

Η *Γεωμετρία* του Καρτέσιου είναι όντως προϊόν ενός νέου προγράμματος ερευνών που οδηγεί σε πρωτότυπα αποτελέσματα; Αν ναι, υπό ποία έννοια; Τα ερωτήματα αυτά μας οδηγούν είτε το θέλουμε είτε όχι στην ιστορία της γεωμετρίας και της άλγεβρας πριν τον Καρτέσιο. Μας παροτρύνουν επίσης να σκύψουμε στην εξέλιξη αυτού καθαυτού του στοχασμού του κατά την περίοδο μεταξύ 1619 και 1637. Συνηθίζουμε να εστιάζουμε την προσοχή μας σε αυτή την ιστορία της αλγεβρικής γεωμετρίας σε δυο σημεία: στους *Κωνικούς* του Απολλώνιου και στη *Γεωμετρία* του Καρτέσιου. Ωστόσο, για να σεβαστούμε τους κανόνες της αρμονίας, είναι αναγκαίο να αλγεβροποιήσουμε ένα βιβλίο καθαρά γεωμετρικό, δηλαδή τους *Κωνικούς*. Αυτό το δρόμο ακολούθησαν οι ιστορικοί όπως ο Mahoney και, πρόσφατα, ο J. Dieudonné στις μελέτες που αφιέρωσαν στην αλγεβρική γεωμετρία. Η πρόσφατη έρευνα ανανέωσε τη γνώση μας αυτής της ιστορίας, φωτίζοντας τους λόγους της εμφάνισης της αλγεβρικής γεωμετρίας και επιτρέποντάς μας την ίδια στιγμή να αξιολογήσουμε καλύτερα τη συνεισφορά του Καρτέσιου.

Γνωρίζουμε πράγματι τώρα πως κατά τη διάρκεια του 10ου αιώνα πολλοί μαθηματικοί επιδόθηκαν στην ερμηνεία της άλγεβρας και ορισμένων γεωμετρικών προβλημάτων (τόσο της επίπεδης γεωμετρίας όσο και της στερεομετρίας) με όρους του νέου κλάδου. Κάποιοι μεταξύ των μαθηματικών σκέφτηκαν πως θα μπορούσαν να λύσουν τη μια ή την άλλη κυβική εξίσωση που προκύπτουν από την τομή δύο κωνικών καμπυλών. Έπρεπε όμως να περάσει μισός αιώνας για να βρει ο αλ-Χαγιάμ (1048-1131) τα θεωρητικά μέσα (μονάδες μέτρησης, διάσταση, γεωμετρικό λογισμό κ.λπ.), ώστε να εκπονήσει μια γενική θεωρία και να θεμελιώσει έτσι ένα νέο κεφάλαιο του οποίου το αντικείμενο ήταν η με τη βοήθεια της γεωμετρίας λύση όλων των εξισώσεων του βαθμού ≤ 3. Στην ουσία ο αλ-Χαγιάμ βρήκε τα θεωρητικά μέσα μιας διπλής ερμηνείας: την αναγωγή των προβλημάτων της στερεομετρίας σε αλγεβρικές εξισώσεις και την επίλυση των μη αναγώγιμων αλγεβρικών εξισώσεων τρίτου βαθμού με τη διατομή δύο κωνικών καμπυλών. Αν θέλουμε να εκφράσουμε αυτή τη διπλή ερμηνεία με μια φόρμουλα, θα μπορούσαμε να πούμε πως το πιστοποιητικό γεννήσεως της αλγεβρικής γεωμετρίας βρίσκεται στο σημείο διασταύρωσης της άλγεβρας των πολυωνύμων, που αναπτύχθηκε περισσότερο από έναν αιώνα πριν τον αλ-Χαγιάμ με αφετηρία το θεμελιώδες βιβλίο του αλ-Χβαρίσμι, και την έρευνα περί κωνικών τομών, που άρχισε από τα μέσα του 9ου αιώνα ξεκινώντας από τους *Κωνικούς* του Απολλώνιου. Η διασταύρωση αυτή, που πραγματοποιήθηκε τον 10ο αιώνα με την ευκαιρία του ενός ή του άλλου γεωμετρικού προβλήματος, συστηματοποιήθηκε από τον αλ-Χαγιάμ.

Η βάση του προβλήματος είναι επομένως να ξεδιαλύνουμε τους λόγους αυτής της διασταύρωσης και το γιατί πραγματοποιήθηκε στη συγκεκριμένη στιγμή και στο συγκεκριμένο χώρο. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να ξεκινήσουμε με την υπενθύμιση πως η διασταύρωση αυτή έγινε σε σχέση με τη σύσταση και την εξέλιξη δυο ομάδων επιστημονικών κλάδων, καθ' όλη τη διάρκεια των δύο αιώνων που προηγήθηκαν της γέννησης του αλ-Χαγιάμ –λόγος για τον οποίο πολλοί μαθηματικοί παλαιότεροι από τον αλ-Χαγιάμ (ο Άμπου αλ-Τζοντ για παράδειγμα) την είχαν εν μέρει διαβλέψει.

Η πρώτη ομάδα των επιστημονικών κλάδων είναι εκείνη της πολυωνυμικής άλγεβρας και της θεωρίας των αλγεβρικών εξισώσεων. Η δεύτερη ομάδα αποτελείται από δυο γεωμετρικά κεφάλαια εκ των οποίων το πρώτο είναι συναφές με τις γεωμετρικές κατασκευές μέσω της διατομής των κωνικών. Δεν πρόκειται πλέον, όπως στην αρχαία γεωμετρία, του Ευτόκιου για παράδειγμα, για μεμονωμένα προβλήματα που αναφαίνονται με σποραδικό τρόπο και επιλύονται μέσω της διατομής καμπυλών, κωνικών ή μη. Αυτή τη φορά διαθέτουμε μια μέθοδο για την εξερεύνηση του πεδίου των γεωμετρικών προβλημάτων, στη μεγάλη πλειοψηφία τους στερεομετρικών, αλλά ακόμα και, θα μπορούσαμε να πούμε, τετραγωνικών, που κατασκευάζουμε μόνο με τη βοήθεια των κωνικών καμπυλών εξαιρώντας όλες τις άλλες. Στο πλαίσιο αυτού του νέου κεφαλαίου κάποιοι μαθηματικοί, ο Ιμπν αλ-Χάιθαμ για παράδειγμα, μελετούν, κατά γενικό κανόνα επιμελώς, την ύπαρξη λύσεων και τον αριθμό τους. Η μελέτη αυτή που διεξάγεται μέσω της ανάλυσης και της σύνθεσης βασίζεται στις ασυμπτωτικές και τοπικές ιδιότητες των κωνικών και ιδιαίτερα στην επαφή τους.

Ανεπτυγμένο από τους μαθηματικούς από τα μέσα του 9ου αιώνα και έπειτα, αυτό το νέο κεφάλαιο αποτέλεσε ένα δραστήριο πεδίο έρευνας, όπως και εκείνο του δεύτερου μισού του 10ου αιώνα με τους αλ-Κουχί, Ιμπν Σαχλ, αλ-Σιτζί, Άμπου αλ-Τζοντ, αλ-Σαγάνι, Ιμπν αλ-Χάιθαμ μεταξύ άλλων, παρέχοντας στους αλγεβριστές μεθόδους και τεχνικές και κυρίως ένα νέο κριτήριο παραδεκτικότητας. Έκτοτε η κατασκευή με τη βοήθεια κωνικών τομών αποτελεί μια αποδεκτή κατασκευή στη γεωμετρία, όπως ακριβώς οι κατασκευές με το χάρακα και το διαβήτη. Είναι φανερό πως η εξέλιξη αυτή αποτέλεσε ένα σημαντικό βήμα. Επιπλέον αυτοί οι ίδιοι οι γεωμέτρες, που κατά τις κατασκευές προέβαιναν σε γεωμετρικές μετατροπές (ομοιότητα, μετάθεση, ομοθεσία, συγγένεια...), ορισμένες από τις οποίες θα τις δανείζονταν οι αλγεβριστές, επικέντρωσαν τις προσπάθειές τους στην εισαγωγή της κίνησης στις γεωμετρικές αποδείξεις και τα πορίσματα. Δεν πρόκειται εδώ για μια κινηματική αλλά για μια γεωμετρική μετακίνηση, με άλλα λόγια κάνοντας αφαίρεση του χρόνου που χρειάζεται για να εκτελεσθεί. Αυτή η συνεχής κίνηση –μετατόπιση, περιφορά...– πραγματοποιείται με τη βοήθεια του ενός ή του άλλου οργάνου και είναι πάντα επακριβώς επαναλαμβανόμενη.

Όσο για τον αλ-Χαγιάμ, αυτός δανείζεται το νέο κριτήριο παραδεκτικότητας καθώς και τις τεχνικές και μεθόδους των γεωμετρικών κατασκευών. Συνεχίζει ωστόσο να εμμένει στην αριστοτελική και ευκλείδεια νομιμότητα και κατά συνέπεια, σε αντίθεση με την πλειοψηφία των γεωμετρών που ανέπτυξαν αυτό το νέο κεφάλαιο, απορρίπτει την κίνηση έξω από τα σύνορα της γεωμετρίας. Το μικρό ενδιαφέρον που έδειχνε για την αποδεικτική διαδικασία της ύπαρξης των σημείων διατομής επέτρεπε αυτή την απόρριψη, εφόσον δεν είχε καμία ανάγκη να εκφέρει μια αδήριτη άποψη για τις ίδιες τις καμπύλες και για τη φύση τους.

Το δεύτερο κεφάλαιο αυτής της δεύτερης ομάδας επιστημονικών κλάδων αφορά τη θεωρητική και πρακτική μελέτη της διαδικασίας αναπαραγωγής της κίνησης και, με τον τρόπο αυτό, την περιγραφή των κωνικών καμπυλών. Αν όντως το διάγραμμα σημείο προς σημείο έχει αποτελέσει εδώ και πολύ καιρό αντικείμενο έρευνας, η οποία εντάθηκε στη διάρκεια του 10ου αιώνα, δεν είναι παρά στο τέλος αυτού του αιώνα που τέθηκε το πρόβλημα του συνεχούς διαγράμματος των καμπυλών που χρησιμοποιούνται στην άλγεβρα, στην οπτική και στην παραγωγή κατόπτρων, φακών, αστρολάβων και ηλιακών ρολογιών... Σίγουρα περιγράφαμε και πριν την έλλειψη με τη λεγόμενη μέθοδο «του κηπουρού» (Ανθέμιος ο Τραλλιανός), αλλά δεν είναι παρά στα τέλη του 10ου αιώνα που το πρόβλημα του συνεχούς διαγράμματος, καθώς και εκείνο της επινόησης των απαραίτητων εργαλείων για την εκτέλεσή του, τέθηκε αυτό καθαυτό και σε σχέση με μια ολόκληρη κατηγορία καμπυλών. Αν όμως οι μαθηματικοί της εποχής ανέλαβαν μια τέτοια έρευνα είναι, μεταξύ άλλων, επειδή είχαν ανάγκη να σιγουρευτούν για τη συνέχεια των καμπυλών. Η τελευταία αυτή έννοια επιβαλλόταν πράγματι στο εξής κατά την αποδεικτική διαδικασία της ύπαρξης σημείων διατομής των καμπυλών, η οποία ήταν αναγκαία στις κατασκευές των γεωμετρών και στη λύση από τους αλγεβριστές των κυβικών και διτετραγωνικών εξισώσεων. Αυτή η έρευνα όμως του συνεχούς διαγράμματος δεν είναι μόνο θεωρητική. Χρειαζόταν επίσης να επινοηθούν και να κατασκευαστούν νέα εργαλεία ανάμεσα στα οποία ένα νέο είδος διαβήτη, όπως ο «τέλειος διαβήτης», που ήταν ικανός να διαγράψει ευθεία, κύκλο και κωνικούς.

Ωστόσο οι μελέτες αυτές δεν άργησαν να προσκρούσουν στο μείζον πρόβλημα της ταξινόμησης των καμπυλών αναφορικά με τον τύπο και τον αριθμό των κινήσεων που υπεισέρχονται στο διάγραμμά τους. Έτσι ο αλ-Κουχί, ο πρώτος μαθηματικός που έγραψε μια πραγματεία περί του τέλειου διαβήτη, ξεχωρίζει τις καμπύλες που χαράζονται από αυτόν (την ευθεία, τον κύκλο και τους τρεις κωνικούς) και τους βαπτίζει «μετρήσιμους», δηλαδή επιδεκτικούς μελέτης από τη θεωρία των αναλογιών. Πρόκειται λοιπόν για επίπεδες καμπύλες που σχηματίζονται από μία μόνο συνεχή μετακίνηση και στις οποίες εφαρμόζουμε τη θεωρία των αναλογιών, πράγμα που παραμένει ακριβές όποιος κι αν είναι ο χαρακτηρισμός των κωνικών δια συμπτώματος ή κατευθυντήριας εστίας. Ένας σύγχρονος του αλ-Κουχί, πιο νέος απ' αυτόν, ο αλ-Σιτζί, κατατάσσει επίσης τις καμπύλες σύμφωνα με τον τύπο και τον αριθμό των κινήσεων: τις «μετρήσιμες», όπως προηγουμένως, που είναι γεωμετρικές, και εκείνες που παράγονται από δύο συνεχείς μετακινήσεις, που χωρίς να είναι «μετρήσιμες» ούτε γεωμετρικές αλλά –κατ' αυτόν– μόνο μηχανικές είναι εντούτοις «κανονικές και διατεταγμένες». Ως παράδειγμα δίνει την κυλινδρική έλικα, η οποία είναι μια αριστερόστροφη καμπύλη που παράγεται με μία ομοιόμορφη περιστροφή γύρω από έναν άξονα και μία ομοιόμορφη μετάθεση παράλληλη προς τον άξονα. Η τελευταία κατηγορία είναι εκείνη των μη μετρήσιμων καμπυλών, που δεν είναι ούτε κανονικές ούτε διατεταγμένες. Αυτή η διάκριση ανάμεσα στις τάξεις των καμπυλών προφανώς δεν κίνησε το ενδιαφέρον του αλ-Χαγιάμ, για τον οποίο αναφέρθηκε πως απεχθανόταν την κίνηση στη γεωμετρία. Τελικά αυτή η απόρριψη της κίνησης σε συνδυασμό με το μικρό ενδιαφέρον που έδειξε για την απόδειξη της ύπαρξης σημείων διατομής περιόρισαν το ερευνητικό πρόγραμμα του αλ-Χαγιάμ σε μια γεωμετρική θεωρία των αλγεβρικών εξισώσεων. Είναι κάτω από αυτή τη μορφή που εκδηλώθηκε η πρώτη συνεισφορά στην αλγεβρική γεωμετρία.

Ο διάδοχος του αλ-Χαγιάμ, ο Σάραφ αλ-Ντιν αλ-Τούσι, ενδιαφέρθηκε αντίθετα για την απόδειξη ύπαρξης. Εισήγαγε την έννοια της κίνησης για να εξασφαλίσει τη συνέχεια των καμπυλών, όρισε την έννοια του μέγιστου μιας αλγεβρικής πρότασης πάνω σε ένα μεσοδιάστημα και μελέτησε ορισμένες αλγεβρικές ιδιότητες των κωνικών καμπυλών. Έτσι, μισό μόλις αιώνα μετά τον αλ-Χαγιάμ, οδήγησε σε μια αναλυτική κατεύθυνση την αλγεβρική γεωμετρία του προκατόχου του.

Τα πράγματα έμειναν στην ουσία εκεί μέχρι τη *Γεωμετρία* του Καρτέσιου, στον οποίο πρέπει τώρα να επανέλθουμε.

Μπορούμε να αποδείξουμε, όπως νομίζω ότι έκανα σε κάποιο άλλο σημείο, πως από τη μια μεριά η *Γεωμετρία* αποτελεί την ολοκλήρωση αυτής της παράδοσης του αλ-Χαγιάμ, και από την άλλη, διαμέσου αυτής της ολοκλήρωσης, ο Καρτέσιος ανακάλυψε εκ νέου όλα τα ζητήματα της κίνησης –της ταξινόμησης των καμπυλών, του συνεχούς διαγράμματος, των νέων διαβητών για την πραγματοποίησή του κ.λπ.– ξεκινώντας έτσι μια νέα παράδοση που η ανάπτυξή της θα αποτελέσει το έργο των διαδόχων του. Ας εξηγήσουμε εν συντομία.

Μπορούμε να συμφωνήσουμε πως η *Γεωμετρία* βασίζεται σε μια οργάνωση γύρω από δύο βασικούς άξονες. Ο πρώτος συνίσταται στην αναγωγή ενός γεωμετρικού προβλήματος σε μια αλγεβρική εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο, ενώ ο δεύτερος στην αναγωγή της λύσης της προκύπτουσας εξίσωσης στην κατασκευή της δια της διατομής δύο «γεωμετρικών» καμπυλών, από τις οποίες η μία θα είναι στο μέτρο του δυνατού κύκλος.

Αν αναπαραγάγουμε την εξέλιξη του στοχασμού του Καρτέσιου σε σχέση με τον πρώτο άξονα, παρατηρούμε ότι με αρχή το 1619 και μέχρι λίγο πριν από τον Ιανουάριο του 1632, ημερομηνία της λύσης του στο πρόβλημα του Πάππου, είχε λύσει, όπως ακριβώς ο αλ-Χαγιάμ, όλες τις εξισώσεις τρίτου βαθμού μέσω της διατομής των κωνικών. Το 1637, στην *Γεωμετρία*, επιτυγχάνει, ενεργώντας πάντα κατά το παράδειγμα του αλ-Χαγιάμ, τη λύση όλων των εξισώσεων τρίτου και τέταρτου βαθμού μέσω της διατομής δυο κωνικών, με τη διαφορά πως αυτός εξαναγκάστηκε στη χρήση μιας παραβολής και ενός μεταβλητού κύκλου, ανάλογα με τον τύπο της εξίσωσης. Όμως εκείνο τον καιρό δεν ασχολήθηκε περισσότερο από τον αλ-Χαγιάμ με την ύπαρξη των ριζών. Όσον αφορά τις εξισώσεις πέμπτου και έκτου βαθμού, για τις οποίες ο αλ-Χαγιάμ σκόπιμα δεν ενδιαφέρθηκε, ο Καρτέσιος συνέλαβε μια κυβική παραβολή, ή μια κογχοειδή παραβολική, μια καμπύλη εξίσωσης $y^3 - 2αy^2 - α2^y + 2^α = xy$.

Μπροστά όμως σε μια κυβική εξίσωση, για παράδειγμα, ο Καρτέσιος, όπως και ο προκάτοχός του, περιορίστηκε στο να αποφανθεί πως είναι το πολύ πολύ στερεά, δεν μπορούσε λοιπόν, όπως και εκείνος, να καθορίσει τη φύση των φανταστικών αριθμών που υπεισέρχονται στη λύση. Διαπιστώνουμε λοιπόν πως, αν περιοριστούμε στον πρώτο άξονα, ο Καρτέσιος επαναλαμβάνει τη διαδικασία του αλ-Χαγιάμ. Βεβαίως την εκλεπτύνει, τη γενικεύει, την οδηγεί μέχρι τα δυνατά όρια της λογικής, κοντολογίς τη συμπληρώνει, αλλά χωρίς να αγγίξει πραγματικά την ουσία ούτε να ανακατασκευάσει το νόημά της. Τι συμβαίνει όμως με τον δεύτερο άξονα;

Στην ηλικία των είκοσι ετών (επιστολή προς τον Beeckman), έχοντας μια πραγματικά μέτρια γνώση των μαθηματικών, ο Καρτέσιος διατύπωνε ένα πρόγραμμα που σύμφωνα με τη δική του ομολογία ήταν «φιλόδοξο» και το οποίο δεν είχε ακόμα τα μέσα να το πραγματοποιήσει. Να ποιες ήταν οι κύριες ιδέες αυτού του προγράμματος: μια ταξινόμηση των γεωμετρικών προβλημάτων χάρη στις καμπύλες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυσή τους, μια ταξινόμηση των καμπυλών αυτών καθαυτών χάρη στις κινήσεις με τις οποίες έχουν χαραχτεί και, τέλος, μια αδιάσειστη πεποίθηση, που παρ' όλα αυτά τίποτα δεν φαινόταν να επιβεβαιώνει, για την ευρετική αξία αυτών των ταξινομήσεων που θα εξαντλούσαν με την απόδειξη όλα τα γεωμετρικά προβλήματα.

Η πρόθεση που κυριαρχούσε σε αυτό το πρόγραμμα φαίνεται πως ήταν το ξεπέρασμα των κωνικών και ο καθαρός διαχωρισμός αυτής της τάξης των καμπυλών, υπό τον απαράβατο όρο της μη χρησιμοποίησης καμιάς άλλης αρχής άγνωστης στους Αρχαίους, οι οποίοι, μη γνωρίζοντας την άλγεβρα, δεν μπορούσαν να εντοπίσουν το διαχωρισμό των τάξεων των καμπυλών. Η αρχή λοιπόν την οποία διέθετε ο Καρτέσιος, ή τουλάχιστον εκείνη που πρώτη φανερώθηκε σ' αυτόν, δεν είναι άλλη από την παλιά αρχή της κίνησης όπως τη συναντούμε στην αριστοτελική παράδοση. Στη *Γεωμετρία* η έννοια αυτή της συνεχούς κίνησης χρησιμοποιείται, είναι η αλήθεια, χωρίς καμιά φαινομενικά κινηματική αντίληψη, αλλά χωρίς επίσης την ελάχιστη αλγεβρική διάσταση.

Στη διάρκεια της έρευνας που ανέλαβε στο πλαίσιο αυτού του προγράμματος ο Καρτέσιος φαίνεται να έχει αντιληφθεί πως από μόνη της η έννοια της κίνησης δεν επαρκούσε για να δικαιολογήσει πλήρως τη διάκριση που είχε εισαγάγει το 1619 μεταξύ των «γεωμετρικών» και των «μηχανικών» καμπυλών. Η διαφορά ανάμεσα στις δυο τάξεις καμπυλών μοιάζει πράγματι να παραπέμπει σε δύο διαπλεκόμενα προβλήματα: εκείνο του κατασκευάσιμου των σημείων της καμπύλης και εκείνου της ύπαρξης των σημείων διατομής όταν οι καμπύλες τέμνονται. Τα προβλήματα αυτά τα είχε συναντήσει ο αλ-Τούσι τον 12ο αιώνα. Μια κι όμως επρόκειτο μόνο για τις κωνικές καμπύλες, η κυριότητα του σημείου διατομής σε καθεμιά από απ' αυτές εξαγόταν από τη σύμπτωση. Όμως ο Καρτέσιος δεν περιορίζεται στις κωνικές, αλλά εξετάζει και τις κυβικές και πιο γενικά τις «γεωμετρικές» καμπύλες. Εντοπίζει διαφορετικά από τους προγενεστέρους του τον ρόλο της εξίσωσης για την αναπαράσταση της καμπύλης. Ωστόσο αυτή η εξίσωση τις περισσότερες φορές δεν του επιτρέπει παρά τη σημείο προς σημείο κατασκευή, η οποία δεν επαρκεί παρά μόνο για τις «γεωμετρικές» καμπύλες. Ο Καρτέσιος βρίσκεται τότε αντιμέτωπος με μια ασύμμετρη κατάσταση: ενώ για την τάξη των «γεωμετρικών» καμπυλών μπορούμε να χρησιμοποιούμε τη γλώσσα των εξισώσεων, αυτό είναι αδύνατο για τις «μηχανικές» καμπύλες. Έπρεπε, είναι η αλήθεια, να περιμένουμε τον Λάιμπνιτς και κυρίως τον Τζάκομο Μπερνούλι για να μάθουμε πως οι τελευταίες αυτές καμπύλες δεν έχουν αλγεβρική εξίσωση, αλλά έχουν διαφορικές αλγεβρικές εξισώσεις, που συνδέουν μεταξύ τους όχι την τετμημένη και την τεταγμένη αλλά τις διαφορικές τους. Ο Καρτέσιος δεν αγνοούσε ωστόσο πως όλες οι ιδιότητες των «γεωμετρικών» καμπυλών πρέπει να εξαχθούν από την εξίσωσή τους. Όμως το πρόγραμμα αυτό είναι γνωστό πως δεν εφαρμόστηκε ποτέ. Έπρεπε να περιμένουμε γι' αυτό το νεαρό Νεύτωνα.

Και όντως, πριν τον Καρτέσιο η έννοια της εξίσωσης μιας καμπύλης παρέμενε αρκετά περιορισμένη και δεν παρείχε παρά ελάχιστη διαφάνεια για τη σύσταση ενός ερευνητικού προγράμματος. Ο αλ-Τούσι κατά τις έρευνές του περί των *μεγίστων* ή ακριβέστερα περί της ύπαρξης των σημείων διατομής μελέτησε ορισμένες καμπύλες με τη βοήθεια των εξισώσεών τους. Γεγονός παραμένει όμως πως δεν έκανε κι αυτός ξεκάθαρα διάκριση μεταξύ της πολυωνυμικής εξίσωσης και της καμπύλης εκτός των κωνικών. Όμως ακριβώς χάρη στην επέκταση της μελέτης των καμπυλών πέρα από τις κωνικές και στη διάκριση που έγινε εκείνης της τάξης των καμπυλών που είναι δυνατόν να μελετηθούν με το μέσο της άλγεβρας ο Καρτέσιος μπόρεσε να επινοήσει αυτό το νέο πρόγραμμα. Η πραγματοποίησή του αποτελούσε μια μελλοντική κληρονομιά, την καταγωγή δυο ρευμάτων: εκείνου της αλγεβρικής γεωμετρίας, με τους Κράμερ και Μπεζού, και εκείνου της διαφορικής γεωμετρίας, με τους αδελφούς Μπερνούλι.

Όμως ο Καρτέσιος δεν ήταν ο μόνος που ερευνούσε το πεδίο της αλγεβρικής γεωμετρίας. Ο Φερμά συνέβαλε και αυτός από τη μεριά του, αρχικά ανεξάρτητα από τον Καρτέσιο, έπειτα σε συνάρτηση και σε κάποια αντίθεση με αυτόν. Κατάσταση διπλά ενδιαφέρουσα αφού αντιπροσωπεύει μια διαφορετική κατεύθυνση έρευνας σε ένα και μόνο τομέα. Για να κατανοήσουμε αυτή την κατεύθυνση που εγκαινίασε ο Φερμά, θα πρέπει να υπενθυμίσουμε δύο μαθηματικά κεφάλαια που αναπτύχθηκαν και αυτά στη διάρκεια του 10ου αιώνα, και στα οποία ο Φερμά επένδυσε μαζικά. Το πρώτο αφορά τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, ενώ το δεύτερο εστιάζεται στη διοφάντεια ανάλυση. Αντίθετα από τους Έλληνες μαθηματικούς, οι διάδοχοί τους, αρχής γενομένης από τα μέσα του 9ου αιώνα, ακολουθώντας την παράδοση της γεωμετρίας του Απολλώνιου, αρχίζουν να παίρνουν ως αντικείμενο μελέτης τους μετασχηματισμούς των γεωμετρικών τόπων με ομοθεσία, μετάθεση, ομοιότητα, αντιστροφή. Ήδη τον 12ο αιώνα αυτή η έρευνα είχε χρησιμοποιηθεί στην αλγεβρική γεωμετρία από τον αλ-Τούσι.Όμως είναι ακριβώς αυτή την έρευνα που ανακαλύπτει ξανά ο Φερμά στο *De locis planis* του, που τελείωσε τον Απρίλιο του 1636. Για να κάνουμε εμφανή την ομοιότητα μεταξύ των μελετών που διεξάχθηκαν τον 10ο αιώνα και αυτού του τελευταίου έργου του Φερμά, αρκεί να συγκρίνουμε τη δομή και τα αποτελέσματά του με εκείνα του βιβλίου του Ιμπν αλ-Χάιθαμ με τίτλο *Les Connus.* Όσον αφορά τη διοφάντεια ανάλυση, ο Φερμά ασχολήθηκε με αυτήν το 1636 ξεκινώντας από τον Μπασέ από τη μια και τον Βιέτ από την άλλη.

Το 1637 ο Φερμά κυκλοφόρησε ένα χειρόγραφο της πραγματείας του *Ad locos planos et solidos isagogè (Isagogè).* Πρόκειται λοιπόν για μια πραγματεία ανεξάρτητη από τη *Γεωμετρία* του Καρτέσιου. Σε αυτό το έργο ο Φερμά επιδιώκει να ανακαλύψει τις πολυωνυμικές εξισώσεις των καμπυλών. Αντιλαμβανόμαστε διαβάζοντάς το πώς αυτό το ερευνητικό πρόγραμμα δεν είναι ανεξάρτητο από το βιβλίο περί των επίπεδων τόπων που ήδη αναφέραμε. Ο Φερμά πράγματι δεν ασχολείται στην *Isagogè* παρά με τους τόπους που συναντά μέσα σε αυτήν (ευθεία, κύκλο, κωνικές διατομές) ακολουθώντας μια μέθοδο που δεν είναι άλλη από την αλγεβρική ερμηνεία των σημειακών μετασχηματισμών που βρίσκονταν εκεί επί τω έργω. Αν λοιπόν μέσα στην *Isagogè* ο Φερμά ερμηνεύει κάθε τόπο με μια εξίσωση, είναι ουσιαστικά για να χαρακτηρίσει την καμπύλη. Όλα δείχνουν άλλωστε πως ο ρόλος της πολυωνυμικής εξίσωσης περιορίζεται σε αυτό το χαρακτηρισμό, στο μέτρο που ο Φερμά δεν είχε ακόμα στραφεί σε αυτή για να εξαγάγει και άλλες ιδιότητες της καμπύλης. Προφανώς το ερευνητικό του πρόγραμμα το 1637 είναι διαφορετικό από εκείνο του Καρτέσιου στη *Γεωμετρία* του. Ποια είναι λοιπόν η έμπνευση που εμψυχώνει τον Φερμά στην *Isagogè*; Μπορούμε να καταδείξουμε πως πηγάζει από μια διαισθητική αντίληψη των σχέσεων της διοφάντειας ανάλυσης με τις πολυωνυμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους.

Στην *Isagogè* ο Φερμά δεν ασχολείται λοιπόν με τη θεωρία των αλγεβρικών εξισώσεων. Επανέρχεται σε αυτό το θέμα στα τέλη του 1637, σε ένα παράρτημα που έγραψε στην *Isagogè*, πιθανώς αφού είχε μελετήσει τις έρευνες του Καρτέσιου. Επεξεργάζεται πράγματι, γράφει, την «κατασκευή όλων των κυβικών και διτετράγωνων προβλημάτων μέσω μιας παραβολής και ενός κύκλου».

Δεν είναι παρά πολύ αργότερα που ο Φερμά καταπιάνεται με τη μελέτη των εξισώσεων και των αλγεβρικών καμπυλών. Μπαίνει σε αυτόν το τομέα –από τη μεγάλη πόρτα μπορούμε να πούμε– οπλισμένος με μια κριτική της ταξινόμησης των εξισώσεων και των καμπυλών που είχε προτείνει ο Καρτέσιος στη *Γεωμετρία* του. Το να επιτεθείς όμως στην καρτεσιανή ταξινόμηση σημαίνει να επανεξετάσεις κάποιες αρχές της επιστήμης. Είναι αυτό που προτείνει ο Φερμά στη *Διατριβή σε τρία μέρη*, ένα βιβλίο ενάντια στον Καρτέσιο, στο οποίο όμως η παρουσία της *Γεωμετρίας* γίνεται αισθητή με ιδιαίτερη ένταση. Χωρίς να σταματήσουμε εδώ σε αυτές τις κριτικές, που δεν είναι άλλωστε δικαιολογημένες, ας σημειώσουμε μόνο τις επιδράσεις στις ιδέες του Φερμά. Του άνοιξαν όντως το δρόμο για μια διάκριση μεταξύ δύο τάξεων αλγεβρικών εξισώσεων: εκείνες που είναι, όπως λέει, «συστατικές των καμπύλων γραμμών» και εκείνες με έναν μόνο άγνωστο. Από πολύ καιρό απασχολούμενος, όπως το σημειώσαμε, με τις εξισώσεις των γεωμετρικών τόπων, ο Φερμά επιστρατεύει αυτή τη διάκριση για να καθορίσει με πολύ πιο ξεκάθαρο τρόπο από τους προγενεστέρους του τις καμπύλες μέσω των εξισώσεών τους. Με αυτό συνεισφέρει στην πραγματοποίηση του καρτεσιανού προγράμματος.

Ο Φερμά βεβαιώνει στη συνέχεια πως κάθε εξίσωση του βαθμού 2n + 1 ή 2n + 2 λύνεται με τη διατομή δυο καμπυλών του βαθμού n + 1. Βρισκόμαστε πράγματι στο δρόμο που θα οδηγήσει στη συνέχεια στην αντιστοιχία του θεωρήματος του Μπεζού. Από την άλλη μεριά, η μέθοδος που προτείνει για τη λύση των εξισώσεων βαθμού 2n + 1 ή 2n + 2 εμπνέεται παραδόξως από τη διοφάντεια ανάλυση. Πρόκειται, απ' όσο γνωρίζω, για τον πρώτο που κατέφυγε στις τεχνικές της διοφάντειας ανάλυσης στην αλγεβρική γεωμετρία.

Με μια λέξη, ξεκινώντας από την έρευνα περί του σημειακού μετασχηματισμού των τόπων, ο Φερμά ήθελε, καθώς προχωρούσε, να εξαγάγει όλες τις εξισώσεις των τόπων, ειδικά των κωνικών. Όμως αυτός είναι ακριβώς ο προσανατολισμός που προετοίμασε το έδαφος για τις εργασίες του πάνω στην αλγεβρική γεωμετρία, όταν δηλαδή κάτω από την επίδραση του Καρτέσιου εκδηλώνει ενδιαφέρον για τη θεωρία των εξισώσεων και των αλγεβρικών καμπυλών. Από αυτή τη συνάντηση με τον Καρτέσιο ο Φερμά άντλησε τα μέσα για να καινοτομήσει σε αυτό το πεδίο. Ήταν τότε σε θέση να γεφυρώσει δυο όχθες μέχρι τότε απομακρυσμένες, για να προωθήσει, τρόπος του λέγειν, την πραγματοποίηση του καρτεσιανού προγράμματος: τις τεχνικές της διοφάντειας ανάλυσης και της αλγεβρικής γεωμετρίας. Έτσι, με αυτή την καινοτομία ο Φερμά ξεχωρίζει τόσο από τους προκατόχους του όσο και από τους συγχρόνους του. Με άλλα λόγια, όσο οι καμπύλες που μελετούνταν αλγεβρικά περιορίζονταν βασικά μόνο στις κωνικές, τίποτα δεν υποχρέωνε κάποιον να κάνει μια σαφή προσέγγιση της αλγεβρικής γεωμετρίας και της διοφάντειας ανάλυσης. Είναι ακριβώς η περίπτωση του αλ-Χαγιάμ και ακόμα εκείνη του αλ-Τούσι. Απεναντίας, οι μαθηματικοί που μελετούσαν τη διοφάντεια ανάλυση έξω από αυτή την παράδοση της αλγεβρικής γεωμετρίας, είτε για λόγους εποχής είτε από ενδιαφέρον, δεν μπορούσαν φυσικά να αναλογιστούν μια τέτοια προσέγγιση. Ενδιαφέρονταν στην πραγματικότητα για την ανάπτυξη είτε του αφηρημένου αλγεβρικού λογισμού (Άμπου Κάμιλ, Bombelli, Βιέτ...) είτε για τη θεωρία των αριθμών (αλ-Χουνφάντι, αλ-Χαζίν, Finobacci στο Liber quadratorum, αλ-Γιάζντι...). Είναι ο Καρτέσιος που προμήθευσε τους όρους της δυνατότητας: δυνατότητας, στην ουσία, επεξεργασίας των εξισώσεων γενικώς, όποιος κι αν είναι ο βαθμός τους, και μιας πιο καθαρής και πιο αλγεβρικής επεξεργασίας μιας ολόκληρης τάξης καμπύλων. Είναι λοιπόν χάρη στον Καρτέσιο και τη θεωρία του των αλγεβρικών καμπύλων που ο Φερμά μπόρεσε να χρησιμοποιήσει τις διοφάντειες μεθόδους στην αλγεβρική γεωμετρία. Όμως είναι ακριβώς η χρησιμοποίηση αυτών των μεθόδων που του επέτρεψε να προχωρήσει πέρα από τον ίδιο τον Καρτέσιο στην πραγματοποίηση αυτού του ίδιου του προγράμματός του.

Μεταξύ των κλάδων στους οποίους αναφερόμαστε για να παραστήσουμε τη μαθηματική νεωτερικότητα στη διάρκεια του πρώτου μισού του 17ου αιώνα –αν δεν είναι η ίδια η κλασική νεωτερικότητα– εμφανίζεται η αλγεβρική γεωμετρία, κυρίως με τον Καρτέσιο. Αυτό όμως ακριβώς το παράδειγμα της αλγεβρικής γεωμετρίας αποτελεί μια καλή εικόνα του σύνθετου χαρακτήρα της ίδιας αυτής έννοιας της μαθηματικής νεωτερικότητας. Όσο αγνοούσαμε τις μαθηματικές δραστηριότητες των Αράβων από τον ένατο αιώνα και πέρα, ή όταν υπερπηδούσαμε αυτά που θα μπορούσαμε να μάθουμε, η έννοια αυτή έμοιαζε ξεκάθαρη και αυτονόητη και δεν προκαλούσε κανένα πρόβλημα. Έτσι τοποθετούσαμε αυτή τη νεωτερικότητα στη διασταύρωση της *Specieuse* του Βιέτ με αυτά τα τελευταία έργα. Ήταν όμως μάλλον, όπως το ξέρουμε, μια συνάντηση της άλγεβρας και των νέων κεφαλαίων της γεωμετρίας, που αναπτύχθηκαν ξεκινώντας από τους *Κωνικούς* στην αραβική γεωμετρία, που πραγματοποιήθηκε έξι αιώνες πριν τη *Γεωμετρία* του Καρτέσιου. Χωρίς αυτά τα κεφάλαια σχετικά με τις γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια των κωνικών διατομών και το κεφάλαιο για το συνεχές διάγραμμα των καμπύλων, δεν μπορούμε να κατανοήσουμε τη γένεση της αλγεβρικής γεωμετρίας με τον αλ-Χαγιάμ και το μετασχηματισμό του, μια πρώτη φορά, με τον αλ-Τούσι. Η μαθηματική νεωτερικότητα του 17ου αιώνα δεν θα ήταν λοιπόν παρά μια αναπαραγωγή εκείνης του 11ου αιώνα; Καθόλου. Θα ήταν, όπως κάποιοι αρέσκονται να υποστηρίζουν, ένα εκ του μηδενός ξεκίνημα; Ούτε.

Καταδείξαμε μόλις πως μια τέτοια εναλλακτική λύση δεν είναι καίρια: για να διαβάσουμε τη *Γεωμετρία* του Καρτέσιου πρέπει επίσης να στρέψουμε το βλέμμα στο παρελθόν, προς τον αλ-Χαγιάμ και τον αλ-Τούσι, καθώς και προς το μέλλον, προς τον Λάιμπνιτς, τον Κράμερ, τον Μπεζού, τους αδελφούς Μπερνούλι. Το ίδιο συμβαίνει αν πρόκειται για την οριοθέτηση της *Isagogè* και της *Dissertation του Φερμά*: μια επιστροφή στο παρελθόν σε γραπτά όπως εκείνα του Ιμπν αλ-Χάιθαμ και του Καρτέσιου είναι πράγματι επιβεβλημένη, όπως και μια αναδρομή στους μεταγενέστερους Μπερνούλι, Κράμερ και Μπεζού. Τότε μόνο όλα αυτά τα καινοτόμα έργα θα βρουν τη θέση που δεν έπαψε ποτέ να είναι η δική τους. Η *Γεωμετρία*, για παράδειγμα, δεν αποτελεί καθόλου μια αρχή από το πουθενά, παρά, όπως και τα άλλα θεμελιώδη έργα, εγκαινιάζει μια μέθοδο, αυτήν της επανάληψης, της προσαρμογής και της επανόρθωσης των παραδόσεων των οποίων είναι η κληρονόμος. Όπως αυτά τα έργα, ανοίγει κι αυτή το δρόμο προς νέες εξελίξεις – στην αλγεβρική και στη διαφορική γεωμετρία. Η νεωτερικότητα εμφανίζεται έτσι σαν μια πραγματοποίηση ορισμένων δυνατοτήτων κληρονομημένων από την παράδοση, και ταυτόχρονα σαν γενεσιουργός αιτία νέων δυνατοτήτων για το μέλλον. Θα μπορούσε άραγε να είναι διαφορετικά; Τίποτα δεν εμποδίζει, αν δεν βασίζουμε το στοχασμό μας σε προκατασκευασμένες αντιλήψεις, να υποστηρίξουμε πως η συνέχεια και η ρήξη αλληλοσυμπληρώνονται. Όμως κάθε μελέτη της *Γεωμετρίας* του Καρτέσιου και των δύο βιβλίων του Φερμά είναι καταδικασμένη να είναι ελλιπής, αν παραβλέπει τα εσωτερικά δεσμά που συνδέουν αυτά τα βαθιά ριζωμένα στην παράδοση έργα, όπως και τις νέες δυνατότητες που περιέχουν και που για να πραγματωθούν περιμένουν τη στιγμή που η νεωτερικότητα θα έχει πια γίνει και η ίδια μια παράδοση.

Abd al-Rahman al-Soufi, Πραγματεία για τους απλανείς αστέρες, Βαγδάτη 1009