Το πρόβλημα της πληρότητας και της συνέπειας στην αξιωματική θεμελίωση των μαθηματικών και τα θεωρήματα του Gödel

1. Εισαγωγή

Όποιος έχει διδαχτεί βασική Ευκλείδεια Γεωμετρία, συνάγει ευθύς εξαρχής το συμπέρασμα ότι η Γεωμετρία είναι η κατ' εξοχήν «παραγωγική επιστήμη». Δηλαδή οι προτάσεις της είναι παράγωγα λογικών διαδικασιών που βασίζονται σε κάποιες θεμελιώδεις προτάσεις, γνωστές ως «αξιώματα», που τις αποδεχόμαστε ως βάση για το οικοδόμημα της γεωμετρίας, χωρίς όμως αυτές να αποδεικνύονται κάπως. Αυτή η ιδέα της παραγωγής μιας πρότασης ως συμπέρασμα μιας συγκεκριμένης λογικής απόδειξης έχει τις ρίζες της στους αρχαίους Έλληνες, οι οποίοι ανακάλυψαν την «αξιωματική μέθοδο» και την εφήρμοσαν στη συστηματική θεμελίωση της γεωμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, η επινόηση της απόδειξης στα μαθηματικά αποδίδεται στον Θαλή το Μιλήσιο. Σύμφωνα με τον Πρόκλο, ο οποίος διετέλεσε Διευθυντής της Ακαδημίας του Πλάτωνος, ο Θαλής απέδειξε ότι οι γωνίες που είναι προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες μεταξύ τους, καθώς και ότι οι κατά κορυφήν γωνίες είναι ίσες. Μέσα σ' αυτές τις αποδείξεις, χρησιμοποιούνται πολλές προτάσεις, όπως για παράδειγμα, «αν από δυο ίσα κομμάτια αφαιρέσουμε ίσα μέρη, τότε και τα εξαγόμενα κομμάτια είναι ίσα μεταξύ τους», που φανερώνουν ότι αρκετοί κανόνες της Λογικής χρησιμοποιούνταν στην πράξη αιώνες πριν ο Αριστοτέλης διαμορφώσει τη Λογική σε επιστήμη.

Βέβαια, ο όρος «απόδειξη» είναι αρκετά σύνθετος, με την έννοια ότι η αποδεικτική μέθοδος προϋποθέτει ένα ολόκληρο σύστημα εννοιών. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος αυτή βασίζεται στο ότι ορισμένες προτάσεις γίνονται αποδεκτές ως «αξιώματα» ή, αλλιώς, ως «αιτήματα», δηλαδή χωρίς να έχουν αποδειχθεί. Με τη σειρά τους, τα αξιώματα δομούνται με γνώμονα τα αντικείμενα που πραγματεύονται τα Μαθηματικά και που για τη Γεωμετρία είναι τα σχήματα, ενώ για την Αριθμητική είναι οι αριθμοί. Τα αξιώματα αποτελούν τα θεμέλια του οικοδομήματος, ενώ το υπόλοιπο οικοδόμημα θα κατασκευαστεί από τα «θεωρήματα», τα οποία είναι προτάσεις που απορρέουν από τα αξιώματα με τη βοήθεια μόνο και μόνο των κανόνων της τυπικής λογικής.

Ο Τζιλιγκάκης Ιωάννης είναι Ι.Ε.Υ. του Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ» και τώρα μεταπτυχιακός φοιτητής στο Πανεπιστήμιο του Illinois (UIUC).

Η αξιωματική ανάπτυξη της γεωμετρίας, δηλαδή η παραγωγή ενός μεγάλου πλήθους θεωρημάτων με βάση ένα σχετικά μικρό αριθμό αξιωμάτων, ήταν πραγματικά κάτι το εντυπωσιακό. Μάλιστα, αν σκεφθούμε συγχρόνως ότι για πάνω από δυο χιλιάδες χρόνια είχε παγιωθεί η αντίληψη ότι τα αξιώματα της «Ευκλείδειας Γεωμετρίας» είναι αληθή για το χώρο (αντίληψη που προφανώς αποτελούσε εγγύηση για την αλήθεια και την αμοιβαία συνέπεια όλων των θεωρημάτων της Γεωμετρίας), εύκολα καταλαβαίνουμε το λόγο για τον οποίο η Ευκλείδεια Γεωμετρία εθεωρείτο ως το υπόδειγμα της επιστημονικής γνώσης. Η «ασφαλής» (φαινομενικά τουλάχιστον) αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας οδήγησε πολλούς να εφαρμόσουν και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών τη μέθοδο της αξιωματικής θεμελίωσης. Έτσι, για παράδειγμα, η αριθμητική των ακέραιων αριθμών εφοδιάστηκε με ένα, εκ πρώτης όψεως τουλάχιστον, επαρκές σύστημα αξιωμάτων. Καλλιεργήθηκε λοιπόν μια αντίληψη σύμφωνα με την οποία κάθε κλάδος των μαθηματικών θα μπορούσε να εφοδιαστεί με ένα σύνολο αξιωμάτων, με βάση το οποίο θα ήταν δυνατόν να αναπτυχθεί το σύνολο των αληθών προτάσεων για το συγκεκριμένο κλάδο.

Όλα έμοιαζαν να έχουν πάρει το δρόμο τους, ώσπου το 1931 ο Kurt Gödel (Αυστριακός μαθηματικός και λογικός) δημοσίευσε ένα άρθρο, η συμβολή του οποίου στη θεμελίωση των μαθηματικών άφησε εποχή. Το άρθρο του Gödel αποκαλύπτει ορισμένους απρόσμενους περιορισμούς στην αξιωματική μέθοδο. Πιο συγκεκριμένα, ο Gödel απέδειξε ότι η υπόθεση ότι όλες οι σημαντικές περιοχές των μαθηματικών μπορούν να αναχθούν πλήρως σε αξιώματα είναι αστήρικτη. Επίσης έδειξε ότι είναι αδύνατο να εδραιωθεί η εσωτερική λογική συνέπεια μιας ευρείας κλάσης παραγωγικών συστημάτων, εκτός αν η συλλογιστική μας γίνει τόσο περίπλοκη, ώστε πλέον η εσωτερική συνέπεια της ίδιας της συλλογιστικής μας να τίθεται υπό αμφισβήτηση. Άμεση απόρροια των παραπάνω είναι και το συμπέρασμα ότι τελικά κανείς δεν μπορεί να εγγυηθεί με απόλυτη σιγουριά ότι μέσα στα μαθηματικά δεν ελλοχεύουν εσωτερικές αντιφάσεις έτοιμες να καταστρέψουν εκ βάθρων το μαθηματικό οικοδόμημα.

Ο Gödel με τα θεωρήματά του αποκαλύπτει τις αδυναμίες της τυπικής αξιωματικής μεθόδου. Πιο συγκεκριμένα, απέδειξε ότι μια προσέγγιση της αριθμητικής μέσω της αξιωματικής μεθόδου αποτυγχάνει να καλύψει το σύνολο της αλήθειας για την αριθμητική.

Από τα παραπάνω θα αποκόμιζε κανείς την εντύπωση ότι ο Gödel έφερε μόνο την αναστάτωση στο χώρο των «θετικών» επιστημών, γκρεμίζοντας τις μακροχρόνιες ελπίδες για μια πλήρη αξιωματική θεμελίωση των μαθηματικών. Ωστόσο, η ανακάλυψη του Gödel ότι υπάρχουν αληθείς προτάσεις για την αριθμητική που δεν είναι δυνατόν να αποδειχθούν τυπικά, δε σημαίνει σε καμιά περίπτωση ότι υπάρχουν αλήθειες που δε θα καταφέρουμε να γνωρίσουμε ποτέ. Θα ήταν άδικο να εστιάσουμε μόνο στην «αρνητική»(!) πλευρά του άρθρου του Gödel και να μη σταθούμε στη νέα τεχνική ανάλυσης που εισήγαγε ο Gödel, τεχνική που όχι μόνο εγκαινίασε μια νέα σειρά από προβλήματα στη λογική και τα μαθηματικά, αλλά και προκάλεσε μια αναθεώρηση της φιλοσοφίας της γνώσης γενικότερα.

2. *Το πρόβλημα της συνέπειας στην αξιωματική θεμελίωση των μαθηματικών*

Κατά το 19ο αιώνα σημειώθηκε μια ραγδαία εξάπλωση και εντατικοποίηση της μαθηματικής έρευνας. Έγιναν έντονες προσπάθειες να λυθούν βασικά προβλήματα που απασχολούσαν για πολύ καιρό τους στοχαστές. Για παράδειγμα, το 19ο αιώνα αποδείχθηκε ότι τρία βασικά προβλήματα Γεωμετρίας, που είχαν θέσει οι αρχαίοι Έλληνες, ήταν αδύνατο να λυθούν.

Τα προβλήματα αυτά ήταν η τριχοτόμηση μιας δεδομένης γωνίας, με κανόνα και διαβήτη, η κατασκευή κύβου με όγκο διπλάσιο από δεδομένο κύβο (Δήλιο πρόβλημα), καθώς και η κατασκευή τετραγώνου που να έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν δεδομένου κυκλικού δίσκου. Αλλά η πιο σημαντική εξέλιξη αφορούσε στο «αίτημα του Ευκλείδη», σύμφωνα με το οποίο από σημείο εκτός μιας ευθείας μπορούμε να άγουμε μια και μόνο μια παράλληλη προς αυτή. Οι αρχαίοι ήταν εξοικειωμένοι με ασύμπτωτες ευθείες οι οποίες τέμνονται στο «άπειρο» (δηλαδή σε πολύ απομακρυσμένες περιοχές του χώρου). Έτσι γι' αυτούς το «αίτημα του Ευκλείδη» δεν ήταν αυταπόδεικτο. Πράγματι, ύστερα περίπου από 2000 χρόνια οι Gauss, Bolyai και Lobachevsky απέδειξαν ότι *δεν ήταν δυνατόν να αποδειχθεί το «αίτημα των παραλλήλων του Ευκλείδη»* από τα υπόλοιπα αξιώματα της στοιχειώδους γεωμετρίας. Έτσι, για πρώτη φορά χτυπήθηκε η πεποίθηση ότι τα αξιώματα της γεωμετρίας μπορούν να εδραιωθούν με το προφανές αυταπόδεικτό τους. Επίσης είναι η πρώτη φορά που δίνεται απόδειξη για το «αδύνατο της απόδειξης» κάποιων προτάσεων μέσα σε ένα δεδομένο σύνολο αξιωμάτων.

Η ανακάλυψη τόσο μη ευκλείδειων γεωμετριών όσο και μη μεταθετικών αλγεβρών υπέσκαψε την έννοια του αξιώματος που είχε δοθεί από τους αρχαίους Έλληνες, ότι δηλαδή το αξίωμα είναι μια αλήθεια αυταπόδεικτη ή τουλάχιστον εύκολα αποδεκτή. Επίσης οι προσπάθειες για αριθμητικοποίηση της ανάλυσης οδήγησαν στην οικοδόμηση κατάλληλων αξιωματικών βάσεων, τόσο για το σύστημα των φυσικών αριθμών όσο και για το σύστημα των πραγματικών αριθμών. Αποτέλεσμα όλων αυτών των προσπαθειών ήταν να υποστεί ένα λεπτομερή έλεγχο η εμπειρική αξιωματική μέθοδος των αρχαίων Ελλήνων, στο σύνολό της. Έτσι, κυρίως μέσα από τις προσπάθειες του Hilbert για μια αυστηρή αξιωματική ανάπτυξη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, βελτιώθηκε η αξιωματική μέθοδος ως προς τη λεπτότητα και την ακρίβειά της, για να οδηγηθούμε τελικά στη λεγόμενη «τυπική αξιωματική μέθοδο» στις αρχές του 20ού αιώνα.

Εν συνεχεία θα σκιαγραφήσουμε την πορεία που ακολουθεί μια τυπική αξιωματική μέθοδος. Κατ' αρχήν μια αξιωματική διαδικασία, όπως και κάθε λογική πραγμάτευση, θα πρέπει να ορίσει *ρητά* τα στοιχεία της, τις σχέσεις μεταξύ αυτών των στοιχείων, όπως και τις πράξεις που πρέπει να εκτελεστούν πάνω σ' αυτά. Για να οριστούν, όμως, τα παραπάνω θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε καινούρια στοιχεία, σχέσεις, πράξεις, τα οποία με τη σειρά τους θα πρέπει να οριστούν εκ νέου... κ.ο.κ. Εύκολα καταλαβαίνει κάποιος ότι πλέον έχουμε δυο δρόμους ώστε να διακοπεί η επ' αόριστον συνέχιση της αλυσίδας των ορισμών: είτε η αλυσίδα των ορισμών θα πρέπει να κλείσει κύκλο, κάτι το οποίο δεν είναι αποδεκτό σε μια λογική πραγμάτευση, είτε θα πρέπει σε κάποιο σημείο να κλείσουμε τους ορισμούς. Προφανώς ο μόνος δρόμος που μπορούμε να ακολουθήσουμε σε μια λογική πραγμάτευση είναι ο δεύτερος. Αυτό συνεπάγεται ότι κάποια στοιχεία, σχέσεις, πράξεις, δεν ορίζονται με σαφήνεια. Αυτά τα μη σαφώς ορισμένα αντικείμενα θα αποτελέσουν τους *αρχικούς όρους* της πραγμάτευσής μας. Τώρα, ένα λογικό οικοδόμημα δομείται από προτάσεις τις οποίες θα πρέπει να αποδείξουμε με κάποιο τρόπο. Σ' αυτή μας την αποδεικτική προσπάθεια θα στηριχθούμε σε άλλες προτάσεις, οι οποίες με τη σειρά τους θα πρέπει να συνάγονται από κάποιες άλλες προτάσεις... κ.ο.κ. Συνεπώς, για να αποφύγουμε τον καινούριο φαύλο κύκλο που δημιουργείται με αυτό τον τρόπο, είμαστε αναγκασμένοι να αφήσουμε μια ή περισσότερες προτάσεις αναπόδεικτες. Αυτές οι προτάσεις θα αποτελέσουν τα «*αιτήματα*» ή, αλλιώς, τα «*αξιώματα*» του λογικού μας οικοδομήματος.

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι μια τυπική αξιωματική μέθοδος θα πρέπει χοντρικά να ακολουθήσει τα παρακάτω στάδια:

α) Κατ' αρχήν στην πραγμάτευσή μας θα περιλάβουμε ένα σύνολο από αρχικούς όρους (στοιχεία, σχέσεις μεταξύ στοιχείων, πράξεις μεταξύ στοιχείων), που δεν ορίζονται.

β) Επίσης επιλέγουμε, ελεύθερα, κάποιες προτάσεις για τους αρχικούς μας όρους, χωρίς απόδειξη, οι οποίες θα αποτελέσουν το σύστημα των αξιωμάτων της λογικής πραγμάτευσής μας.

γ) Όλοι οι άλλοι «τεχνικοί όροι» θα οριστούν με βάση τους αρχικούς όρους που έχουμε ήδη εισαγάγει.

δ) Όλες οι άλλες προτάσεις συνάγονται λογικά με βάση τα αξιώματα που έχουμε ήδη δεχτεί. Οι νέες προτάσεις, που προκύπτουν, ονομάζονται θεωρήματα της πραγμάτευσης.

ε) Για κάθε θεώρημα της πραγμάτευσης υπάρχει μια αντίστοιχη πρόταση, που βεβαιώνει ότι το θεώρημα προκύπτει ως λογική απόρροια των αξιωμάτων.

Όμως το παραπάνω πρότυπο είναι γενικό και εύκολα μπορεί να πει κάποιος ότι, εφόσον οι αρχικοί μας όροι δεν έχουν οριστεί ακόμη, μπορούν κάλλιστα να θεωρηθούν ως μεταβλητές και να παρασταθούν με σύμβολα «χ», «ψ», «z»... τα οποία παριστάνουν μεταβλητές. Άρα οι προτάσεις που αφορούν τους αρχικούς όρους μετατρέπονται αυτόματα σε προτασιακούς τύπους, οι οποίοι με τη σειρά τους δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ως αληθείς ή ψευδείς. Κατά συνέπεια και τα θεωρήματα που προκύπτουν ως λογική συνέπεια των αξιωμάτων δεν είναι παρά προτασιακοί τύποι, τους οποίους με τίποτα δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε είτε ως αληθείς είτε ως ψευδείς, σε σχέση με το περιεχόμενό τους. Έτσι εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι η όλη πραγμάτευσή μας, μέχρι στιγμής, έχει αποστραγγιστεί από έννοιες όπως η αλήθεια και το ψεύδος. Όμως τα πράγματα δεν είναι ακριβώς έτσι, γιατί από το βήμα ε) έχουμε την πρόταση:

στ) Τα αιτήματα συνεπάγονται τα θεωρήματα.

Αυτή η πρόταση είναι είτε αληθής είτε ψευδής. Δηλαδή θα ισχύει είτε ότι τα θεωρήματά μας είναι λογικά επακόλουθα των αιτημάτων μας είτε ότι δεν είναι. Η πρόταση στ) περιέχει όλη την ουσία της πραγμάτευσής μας. Με τα όσα έχουμε πει παραπάνω, ουσιαστικά είναι σαν να λέμε ότι στη λογική πραγμάτευσή μας, όχι μόνο δε μας ενδιαφέρει αν αυτά για τα οποία μιλάμε είναι αληθινά, αλλά ούτε και ξέρουμε ουσιαστικά για τι πράγμα μιλάμε. Κατά τον Bertrand Russell, η προηγούμενη φράση συνοψίζει γλαφυρά το γνωστικό αντικείμενο των *καθαρών* μαθηματικών.

Πράγματι, σ' αυτό το σημείο πρέπει να κάνουμε το διαχωρισμό ανάμεσα στα «καθαρά μαθηματικά» και στα «εφαρμοσμένα μαθηματικά». Μια πραγμάτευση που έχει αναπτυχθεί σύμφωνα με το λογικό πρότυπο που μόλις περιγράψαμε, αποτελεί έναν κλάδο των «καθαρών μαθηματικών». Τώρα, αν στη θέση των μεταβλητών, με τις οποίες έχουμε αντικαταστήσει τους αρχικούς όρους, βάλουμε όρους που έχουν συγκεκριμένη σημασία και οι οποίοι μετατρέπουν τα αξιώματα της πραγμάτευσής μας σε αληθείς προτάσεις, τότε έχουμε μια *ερμηνεία του κλάδου των καθαρών μαθηματικών*. Αν επίσης όλες οι συνεπαγωγές που οδηγούν στα θεωρήματα της πραγμάτευσής μας έχουν γίνει σωστά, τότε αυτομάτως και τα θεωρήματα γίνονται αληθείς προτάσεις και μπορούμε να μιλάμε για ένα *μοντέλο των καθαρών μαθηματικών* το οποίο κατατάσσεται, πλέον, ως ένας κλάδος των *εφαρμοσμένων μαθηματικών*. Τώρα, η ανάπτυξη κάποιου κλάδου καθαρών μαθηματικών αποτελεί ένα παράδειγμα *«τυπικής αξιωματικής μεθόδου»*, ενώ η ανάπτυξη ενός κλάδου εφαρμοσμένων μαθηματικών είναι ένα παράδειγμα *«εμπειρικής αξιωματικής μεθόδου»*. Στην πρώτη περίπτωση ουσιαστικά τα αξιώματα προηγούνται από τον προσδιορισμό των αρχικών όρων και συνιστούν υποθέσεις πάνω σε κάποιους όρους που δεν ορίζονται, ενώ στη δεύτερη περίπτωση τα αντικείμενα που ερμηνεύουν τους αρχικούς όρους προηγούνται των αξιωμάτων, τα οποία εκφράζουν κάποιες ιδιότητες των βασικών αντικειμένων, που τις θεωρούμε προφανείς και αποδεκτές εκ προοιμίου. Ας πάρουμε για παράδειγμα τη Γεωμετρία:

Οι αρχαίοι Έλληνες αντιλήφθηκαν τη γεωμετρία ως μελέτη που ασχολείται με τη δομή του φυσικού χώρου. Τώρα, μέσα στο φυσικό χώρο οι αρχικοί όροι, τα στοιχεία: «σημεία», «γραμμές», θεωρούνται ως εξιδανικεύσεις ορισμένων φυσικών ποσοτήτων. Τα αξιώματα τώρα που αφορούν σ' αυτά τα στοιχεία είναι άμεσα αποδεκτές προτάσεις μέσα στο φυσικό χώρο που μελετούμε. Προφανώς η αξιωματική μέθοδος των αρχαίων Ελλήνων είναι *εμπειρική*.

Από την άλλη πλευρά, ο David Hilbert, στη διάσημη προσπάθειά του να αξιωματοποιήσει τη Γεωμετρία, χρησιμοποίησε με τη σειρά του αρχικούς όρους όπως «σημείο», «γραμμή», «κείται», «μεταξύ». Βέβαια τα περιεχόμενα αυτών των όρων μας είναι αρκετά οικεία, σε βαθμό που να καταλαβαίνουμε τις διάφορες συσχετίσεις τους, με συνέπεια να διευκολυνόμαστε στη διατύπωση και επιλογή των αξιωμάτων. Εντούτοις, ο Hilbert υποστηρίζει σαφώς ότι *στο μέτρο που μας ενδιαφέρει το πρωταρχικό μαθηματικό μέλημα, που δεν είναι άλλο από τη διερεύνηση και μελέτη των καθαρά λογικών σχέσεων μεταξύ των προτάσεων, οι οικείες υποδηλώσεις των αρχικών όρων όχι μόνο πρέπει να αγνοηθούν, αλλά και να μην αποδώσουμε σ' αυτούς οποιοδήποτε περιεχόμενο άσχετο με αυτό που τους έχει ήδη δοθεί μέσα από τα αξιώματα στα οποία συμμετέχουν*. Με άλλα λόγια, οι αρχικοί όροι, ουσιαστικά, έχουν οριστεί έμμεσα μέσα από τα αξιώματα. Έτσι οποιοδήποτε άλλο περιεχόμενο τους αποδώσουμε και το οποίο δεν καλύπτεται από τους έμμεσους ορισμούς, είναι άσχετο με τις αποδείξεις των θεωρημάτων.

Βέβαια, αυτή η εντεινόμενη τυποποίηση των μαθηματικών και η αυστηρή αφαίρεση, όπως την εννοεί ο Hilbert, έδωσε μια ελευθερία κινήσεων στους μαθηματικούς και άνοιξε νέους ορίζοντες στο πεδίο των μαθηματικών. Πράγματι, η απελευθέρωση του ανθρώπινου πνεύματος από τους περιορισμούς που αμείλικτα έθετε η συνήθης ερμηνεία των εκφράσεων και των όρων, οδήγησε στην ανάπτυξη νέων αλγεβρών (μη μεταθετικών), νέων γεωμετριών (μη ευκλείδειων). Ωστόσο, η αυξανόμενη αφαιρετικότητα των μαθηματικών ανέδειξε το θεμελιώδες ερώτημα, αν ένα δεδομένο σύνολο αξιωμάτων, που αποτελεί τη βάση ενός συστήματος, είναι εσωτερικά συνεπές, έτσι που να αποκλείεται η περίπτωση να αποδειχθούν θεωρήματα αντιφατικά μεταξύ τους, με βάση τα αξιώματα. Μέχρι το 19ο αιώνα δεν είχε τεθεί ανάλογο ερώτημα για το σύστημα αξιωμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, επειδή τα «ευκλείδεια» αξιώματα θεωρούνταν αληθείς προτάσεις για το χώρο. *Μέσα σ' αυτά τα πλαίσια είχε παγιωθεί η αντίληψη ότι λογικά ασυμβίβαστες προτάσεις δεν είναι δυνατόν να είναι ταυτόχρονα αληθείς.* Άρα λογικό επόμενο αυτού είναι ότι, αν ένα σύνολο προτάσεων είναι αληθές, τότε δεν μπορεί παρά οι προτάσεις να είναι αμοιβαία συνεπείς. Όλ' αυτά, βέβαια, μέσα στα πλαίσια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, γιατί για τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, που αναπτύχθηκαν το 19ο αιώνα, τα πράγματα ήταν διαφορετικά. Τα αξιώματά τους θεωρήθηκαν ψευδή για το χώρο, συνεπώς η αλήθεια οποιασδήποτε πρότασης, η οποία προέκυπτε από αυτά, ήταν αμφίβολη. Άρα εξίσου αμφίβολη θα ήταν και η απόδειξη της εσωτερικής συνέπειας ή μη των μη ευκλείδειων συστημάτων. Για παράδειγμα, στη γεωμετρία του Riemann το αξίωμα των παραλλήλων του Ευκλείδη έχει αντικατασταθεί από την υπόθεση ότι «από σημείο εκτός δεδομένης ευθείας δεν μπορεί να αχθεί παράλληλος προς αυτή». Το γεγονός ότι τα θεωρήματα, που έχουν ήδη αποδειχθεί με βάση τα αξιώματα που έχει θέσει ο Riemann, δεν αντιφάσκουν μεταξύ τους, δεν εξασφαλίζει τη συνέπεια των αξιωμάτων αυτών, διότι πάντοτε υπάρχει η πιθανότητα το αμέσως επόμενο θεώρημα που θα αποδειχθεί να είναι αντιφατικό με τα προηγούμενα. Έτσι το ερώτημα πώς θα αποδείξουμε τη συνέπεια τέτοιων μη ευκλείδειων συστημάτων παραμένει ουσιαστικά αναπάντητο.

Μια πρώτη προσπάθεια για να δοθεί απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι να βρεθεί ένα μοντέλο, μια ερμηνεία για τα αφηρημένα αξιώματα ενός συστήματος, έτσι που κάθε αξίωμα να μετατρέπεται σε αληθή πρόταση για το μοντέλο. Για παράδειγμα, αν την έκφραση «επίπεδο» της Reimannian γεωμετρίας την ερμηνεύσουμε σαν την επιφάνεια μιας ευκλείδειας σφαίρας, την έκφραση «σημείο» ως ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια αυτή και την έκφραση «ευθεία γραμμή» σαν ένα τόξο μέγιστου κύκλου πάνω στην επιφάνεια αυτή, τότε είναι τετριμμένο να διαπιστώσει κανείς ότι κάθε αξίωμα της Γεωμετρίας Riemann μετατρέπεται σε ένα ευκλείδειο θεώρημα. Φαινομενικά η απόδειξη της συνέπειας της γεωμετρίας Riemann έχει ολοκληρωθεί. Δυστυχώς, όμως, το πρόβλημα δεν έχει λυθεί, αλλά έχει μετατοπιστεί σε ένα άλλο πεδίο, δηλαδή στο αν και κατά πόσο τα ευκλείδεια αξιώματα, τώρα, είναι συνεπή ή όχι. Η παραδοσιακή απάντηση στο ερώτημα αυτό, την οποία έχουμε επανειλημμένως εκθέσει, είναι ότι τα ευκλείδεια αξιώματα είναι αληθή για το χώρο, άρα συνεπή. Όμως μια τέτοια απάντηση είναι λογικά ατελής. Κι αυτό γιατί η γενίκευση από το μερικό στο καθολικό, με αποκλειστικό έρεισμα την περιορισμένη εμπειρία μας για το φυσικό χώρο, αποτελεί ένα λογικό άλμα, γιατί παραβλέπει τη δυνατότητα ένα γεγονός που ενδεχομένως να παρατηρηθεί στο μέλλον να αντιφάσκει με τα αξιώματα, σε σημείο που να τα στερήσει από κάθε δικαίωμα στην καθολικότητα. Ο Hilbert, από τη μεριά του, προσπάθησε να ερμηνεύσει την Ευκλείδεια Γεωμετρία μέσω της άλγεβρας. Δηλαδή, κατά τον Hilbert η έκφραση «σημείο» ερμηνεύεται ως ένα ζεύγος αριθμών, η έκφραση «ευθεία γραμμή» ως μια σχέση (πρωτοβάθμια εξίσωση με δυο άγνωστους) μεταξύ αριθμών, η έκφραση «κύκλος» ως μια σχέση (δευτεροβάθμια εξίσωση ορισμένου τύπου με δυο άγνωστους) μεταξύ αριθμών... κ.ο.κ. Έτσι τα γεωμετρικά θεωρήματα μετατρέπονται σε αντίστοιχα αλγεβρικά θεωρήματα.

Το γεωμετρικό θεώρημα π.χ. ότι δυο σημεία προσδιορίζουν μονοσήμαντα μια ευθεία μετατρέπεται στο αλγεβρικό θεώρημα ότι μια γραμμική σχέση προσδιορίζεται μοναδικά από δυο ζεύγη πραγματικών αριθμών. Αυτή η μέθοδος του Hilbert έχει πάλι το μειονέκτημα ότι ανάγει το πρόβλημα της συνέπειας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο πρόβλημα της συνέπειας της Άλγεβρας. Η απόδειξη της συνέπειας ενός συστήματος δεν μπορεί σε καμιά περίπτωση να βασιστεί στην υποτιθέμενη συνέπεια ενός άλλου συστήματος.

Η δυσκολία της χρήσης μοντέλων για τη λύση του προβλήματος της συνέπειας έγκειται στο ότι τα μοντέλα που χρησιμοποιούμε περιέχουν άπειρο πλήθος στοιχείων. Άρα αποκλείεται αυτομάτως η δυνατότητα να ελεγχθούν τα μοντέλα με πεπερασμένο πλήθος παρατηρήσεων, με συνέπεια να μην μπορεί να αποδειχθεί η αλήθεια των θεωρημάτων. Τα μη πεπερασμένα μοντέλα μπορούν να περιγραφούν μόνο με γενικούς όρους, έτσι που να μην είμαστε σε θέση να αποφανθούμε άμεσα για το αν οι περιγραφές αυτές είναι ελεύθερες από κρυμμένες αντιφάσεις. Πάντως η φαινομενική σαφήνεια των εννοιών που εμπλέκονται στην τυποποίηση μη πεπερασμένων μοντέλων δεν αποτελεί εχέγγυο συνέπειας της λογικής κατασκευής μας. Τουλάχιστον αυτό έχει δείξει η ιστορία μέχρι σήμερα, αφού έχουν ανακαλυφθεί παράδοξα σε λογικές κατασκευές «υπεράνω πάσης υποψίας», που χαρακτηρίζονταν δηλαδή από τη, φαινομενικά τουλάχιστον, καθαρότητα των εννοιών που εμπλέκονταν σ' αυτές. Ένα κλασικό παράδειγμα που χρησιμοποιείται είναι το παράδοξο του Russel πάνω στην έννοια της «κλάσης». «Κλάση» ονομάζουμε μια συλλογή από στοιχεία. Το παράδοξο του Russel μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Οι κλάσεις είναι δυο ειδών: εκείνες που περιέχουν τους εαυτούς τους ως μέλη και εκείνες που δεν τους περιέχουν. Μια κλάση λέγεται «κανονική» όταν και μόνο όταν δεν περιέχει τον εαυτό της ως μέλος. Αλλιώς θα λέγεται «μη κανονική». Για παράδειγμα, η κλάση όλων των νοητών πραγμάτων είναι και η ίδια ένα νοητό πράγμα, άρα περιέχεται στον εαυτό της, άρα είναι «μη κανονική». Όμως η κλάση που περιέχει όλους τους φυσικούς επιστήμονες είναι «κανονική», γιατί η ίδια η κλάση δεν είναι φυσικός επιστήμονας, άρα δεν περιέχεται στον εαυτό της. Άρα, συμβολίζουμε με «K» την κλάση όλων των κανονικών κλάσεων και θέτουμε το ερώτημα: Είναι η «K» κανονική κλάση; Η αντινομία είναι σχεδόν προφανής. Γιατί αν η «K» είναι κανονική κλάση, τότε περιέχεται εξ ορισμού στον εαυτό της (αφού η «K» περιέχει όλες τις κανονικές κλάσεις), άρα είναι «μη κανονική»!! Επίσης, αν η «K» είναι «μη κανονική» κλάση, τότε δεν περιέχεται στον εαυτό της (αφού η «K» περιέχει μόνο τις κανονικές κλάσεις), άρα είναι «κανονική»!! Δηλαδή, η κλάση «K» είναι κανονική αν και μόνο αν η «K» είναι μη κανονική!!! Αυτή η αντίφαση προέκυψε από την άκριτη χρήση της «εντελώς ξεκάθαρης»(!!) έννοιας της κλάσης. Άρα η χρησιμοποίηση της έννοιας της κλάσης δεν εγγυάται τη συνέπεια κανενός συστήματος που βασίζεται σ' αυτή. Καθώς η μαθηματική θεωρία των κλάσεων, που πραγματεύεται τις ιδιότητες και τις σχέσεις που έχουν συλλογές από στοιχεία, αποτελεί βάση άλλων κλάδων των μαθηματικών, όπως είναι η στοιχειώδης αριθμητική, τίθεται αμείλικτα το ερώτημα αν οι αντινομίες που παρουσιάζονται στη θεωρία των κλάσεων επηρεάζουν τις διατυπώσεις άλλων κλάδων των μαθηματικών.

Με την ανακάλυψη κι άλλων παραδόξων, έγινε σαφές στους μαθηματικούς ότι τόσο η οικειότητα που έχουμε με κάποιες έννοιες όσο και η φαινομενική καθαρότητα ορισμένων όρων δεν παρέχουν την απαιτούμενη στήριξη για την ανάπτυξη συνεπών συστημάτων.

3. Απόλυτες αποδείξεις συνέπειας και τα θεωρήματα του Gödel

Στα προηγούμενα είδαμε ότι η συνέπεια ενός συνόλου αξιωμάτων επιτυγχάνεται συνήθως με τη βοήθεια μοντέλων. Συχνά όμως, αποδείξεις αυτού του είδους απλά μεταθέτουν το πρόβλημα της συνέπειας από ένα πεδίο των μαθηματικών σε ένα άλλο. Δεν είναι δύσκολο να καταλάβει κανείς ότι το πρόβλημα της συνέπειας ενός συστήματος αξιωμάτων θα λυθεί αν προσδιορίσουμε κάποια άμεση διαδικασία, μέσω της οποίας θα αποδεικνύεται ότι ακολουθώντας τους κανόνες του παραγωγικού συλλογισμού είναι αδύνατον να φθάσουμε σε δυο θεωρήματα αντιφατικά μεταξύ τους έχοντας ξεκινήσει από ένα δεδομένο σύνολο αξιωμάτων. Σε μια τέτοια διαδικασία είναι απαραίτητος ένας πλήρης κατάλογος με τους επιτρεπτούς κανόνες της λογικής. Μέσα σ' αυτά τα πλαίσια, χονδρικά, κινήθηκε και ο Hilbert στην προσπάθειά του να βρει απόλυτες αποδείξεις συνέπειας, δηλαδή αποδείξεις που δε θα έχουν ανάγκη να υποτεθεί η εσωτερική συνέπεια κάποιου άλλου συστήματος.

Κατ' αρχήν, το πρώτο βήμα για την κατασκευή μιας απόλυτης απόδειξης, σύμφωνα με το πρόγραμμα του Hilbert, είναι η πλήρης τυποποίηση του συστήματος των συλλογισμών. Με άλλα λόγια, πρέπει οι εκφράσεις, οι όροι που υπάρχουν στο σύστημα, να αποστραγγιστούν από κάθε νόημα που τυχόν έχουν και να θεωρούνται πλέον ως απλά σύμβολα κενά από οποιοδήποτε περιεχόμενο. Άρα, το πρώτο βήμα, κατά το πρόγραμμα του Hilbert, είναι η κατασκευή ενός συστήματος συμβόλων τα οποία περιέχουν μόνο το νόημα που εμείς, ρητά, τους έχουμε αποδώσει. Σε ένα πλήρως τυποποιημένο σύστημα, τα αξιώματα και τα θεωρήματα δεν είναι τίποτε άλλο παρά ακολουθίες (πεπερασμένου μήκους), συμβόλων κενών νοήματος, κατασκευασμένων σύμφωνα με κάποιους κανόνες που καθορίζουν τον τρόπο συνδυασμού των συμβόλων αυτών. Πλέον, η απόδειξη ενός θεωρήματος από τα αξιώματα δεν είναι παρά ένας μετασχηματισμός ενός συνόλου τέτοιων ακολουθιών σε κάποιο άλλο σύνολο ακολουθιών. Αυτό που καταφέρνουμε με αυτό τον τρόπο είναι να ελαχιστοποιήσουμε τον κίνδυνο να παρεισφρύσουν στο σύστημά μας άδηλες συλλογιστικές αρχές. Πράγματι, ένα «μωσαϊκό» από σύμβολα, κενά νοήματος, δεν μπορεί σε καμιά περίπτωση να ενέχει ή να διακηρύσσει οποιαδήποτε συλλογιστική αρχή. Βέβαια, κανείς δε μας εμποδίζει να διατυπώνουμε προτάσεις με νόημα για τις ακολουθίες αυτών των «χωρίς νόημα» συμβόλων, όμως τέτοιες προτάσεις, κατά τον Hilbert, δεν ανήκουν στα μαθηματικά, αλλά στα «μεταμαθηματικά». Τα μεταμαθηματικά δεν είναι τίποτε άλλο παρά η γλώσσα που μιλά για τα μαθηματικά, για τα σύμβολα δηλαδή που υπάρχουν μέσα σε ένα τυποποιημένο μαθηματικό σύστημα. Η διάκριση των μαθηματικών από τα «μεταμαθηματικά» συντελεί στην πλήρη αποστράγγιση του τυπικού λογισμού από κρυμμένες παραδοχές, συλλογισμούς και νοήματα, τα οποία πιθανόν αργότερα να γεννήσουν αντινομίες μέσα στο μαθηματικό μας σύστημα. Επιπλέον, το πρόγραμμα του Hilbert απαιτεί ακριβείς ορισμούς των πράξεων και των λογικών κανόνων της μαθηματικής κατασκευής και παραγωγής.

Η προσπάθεια, λοιπόν, του Hilbert για οικοδόμηση απόλυτων αποδείξεων συνέπειας στηρίχθηκε στη σαφή διάκριση ανάμεσα σε έναν τυπικό λογισμό και στην περιγραφή του. Ειδικότερα, η ανάλυση συνίσταται στο να επισημαίνουμε τους διάφορους τύπους συμβόλων, να προδιαγράψουμε το πώς ο ένας τύπος προκύπτει από τον άλλο μέσα από *ρητά εκπεφρασμένες πράξεις*. Ο Hilbert πίστευε ισχυρά ότι κάθε μαθηματικός λογισμός δύναται να παρασταθεί σαν ένας γεωμετρικός σχηματισμός τύπων, όπου κάθε τύπος σχετίζεται με ένα *πεπερασμένο* πλήθος δομικών σχέσεων με τους υπόλοιπους. Ελπίδα, λοιπόν, του Hilbert ήταν ότι, μέσα από την εξαντλητική εξέταση αυτών των δομικών σχέσεων μεταξύ των τύπων, σε ένα μαθηματικό σύστημα, θα μπορούσε να αποδείξει ότι τυπικά αντιφατικοί τύποι δεν μπορούν να προκύψουν από τα αξιώματα δεδομένου λογισμού. Το κομβικό σημείο του προγράμματος του Hilbert είναι ότι οι αποδείξεις συνέπειας θα περικλείουν μόνο *«περατοκρατικές»* διαδικασίες, δηλαδή διαδικασίες που αναφέρονται σε πεπερασμένο αριθμό δομικών σχέσεων μεταξύ των τύπων. Τέτοιες αποδείξεις συνέπειας θα καλούνται «απόλυτες». Άρα μια «απόλυτη» απόδειξη συνέπειας πετυχαίνει το σκοπό της χρησιμοποιώντας έναν ελάχιστο αριθμό λογικών αρχών, χωρίς να υποθέσει τη συνέπεια κάποιου άλλου συνόλου αξιωμάτων. Για παράδειγμα, αν μπορούσε να κατασκευαστεί μια απόλυτη απόδειξη συνέπειας της αριθμητικής, θα αποδείκνυε με μια περατοκρατική διαδικασία ότι δυο αντιφατικοί τύποι [π.χ. $(0=0)$ και $(0\neq 0)$] δεν μπορούν να αποδειχθούν και οι δυο από τα αξιώματα με τους δεδομένους λογικούς κανόνες.

Ο Hilbert, αν και εργάστηκε σκληρά πάνω στο πρόγραμμά του περί συνέπειας, αυτό που κατάφερε ήταν να εξηγήσει με κάποια πιο απλά συστήματα τι ήθελε να κάνει με το περίπλοκο σύστημα των κλασικών μαθηματικών. Δεν κατάφερε όμως να δώσει απόδειξη συνέπειας για το σύστημα των κλασικών μαθηματικών. Ο Gödel, από τη μεριά του, απέδειξε ότι αυτό ήταν αναπόφευκτο, αφού στο περίφημο άρθρο του, που δημοσιεύθηκε το 1931 στο γερμανικό περιοδικό *Monatschefte für Mathmatik und Physic*, vol. 38, p. 173-198, απέδειξε το παρακάτω θεώρημα:

Δεύτερο θεώρημα του Gödel

Για κάθε συνεπές τυπικό σύστημα Φ που περιέχει το σύστημα των φυσικών αριθμών, η συνέπεια του Φ δεν μπορεί να αποδειχθεί μέσα στο Φ.

Άρα ανάμεσα στα προβλήματα του Φ που δεν μπορούν να αποδειχθούν είναι και το πρόβλημα της συνέπειας του Φ. Με τον τρόπο αυτό γκρεμίστηκαν οι ελπίδες του Hilbert για ανακάλυψη απόλυτων αποδείξεων της εσωτερικής συνέπειας των μαθηματικών. Φαίνεται ότι για να εδραιωθεί η εσωτερική συνέπεια των κλασικών μαθηματικών χρειάζεται να υιοθετήσουμε τόσο πολύπλοκες συλλογιστικές αρχές, που η εσωτερική συνέπεια των αρχών αυτών να είναι τόσο αμφίβολη όσο και των ίδιων των κλασικών μαθηματικών.

Όμως ο Gödel στο περίφημο άρθρο του δεν εκμηδένισε μόνο τις ελπίδες (κυρίως του Hilbert) για τη θεμελίωση της εσωτερικής συνέπειας των μαθηματικών, αλλά συγχρόνως ανέτρεψε και τη διάχυτη αντίληψη ότι όλες οι σημαντικές περιοχές των μαθηματικών μπορούν να αναχθούν πλήρως σε αξιώματα. Πράγματι ένα βασικό βήμα μιας τυπικής αξιωματικής μεθόδου είναι το στάδιο όπου, αφού έχουμε επιλέξει τους αρχικούς όρους, ερχόμαστε και επιλέγουμε τα αξιώματά μας. Τα αξιώματα δεν είναι τίποτε άλλο παρά προτάσεις για τους αρχικούς όρους, που είναι όλες αμοιβαία συμβατές. Η φιλοδοξία μας είναι η εξής: το σύστημα των αξιωμάτων μας να είναι αρκετά πλούσιο, ώστε να μπορεί να εγγυηθεί την αλήθεια ή το ψεύδος κάθε δυνατής πρότασης του συστήματός μας. Με άλλα λόγια, θα θέλαμε, με βάση τα αξιώματα που έχουμε επιλέξει, να είναι δυνατόν για κάθε πρόταση «Α» να αποδειχθεί είτε η ίδια η «Α» είτε η άρνηση της Α. Αλλιώς, αν το σύστημά μας δεν είναι αρκετά πλούσιο, τότε θα υπάρχουν προτάσεις που δε θα μπορούν να αποδειχθούν με βάση τα αξιώματά μας. Αν όμως το σύστημα των αξιωμάτων μας είναι τέτοιο που να μην μπορούμε να προσθέσουμε σ' αυτό καινούργια πρόταση η οποία να είναι και ανεξάρτητη και συνεπής με τα ήδη διατυπωμένα αξιώματα (χωρίς να αυξήσουμε το σύνολο των αρχικών μας όρων), τότε το σύστημά μας ονομάζεται *πλήρες*.

Μέσα σ' αυτά τα πλαίσια, πολλοί κλάδοι των μαθηματικών εφοδιάστηκαν με σύνολα αξιωμάτων που θεωρούνταν πλήρη, όπως για παράδειγμα το σύστημα αξιωμάτων του Guisueppe Peano για το σύστημα των φυσικών αριθμών. [Το σύστημα αξιωμάτων του Peano περιέχει τα ακόλουθα πέντε αξιώματα για τους φυσικούς αριθμούς: α) Το μηδέν είναι αριθμός, β) Ο άμεσος επόμενος ενός αριθμού είναι αριθμός, γ) Το μηδέν δεν είναι άμεσος επόμενος κανενός αριθμού, δ) Δεν υπάρχουν δυο αριθμοί με τον ίδιο άμεσο επόμενο, ε) (*αρχή της μαθηματικής επαγωγής*) Κάθε ιδιότητα που ανήκει στο μηδέν και επίσης στον επόμενο κάθε αριθμού που έχει την ιδιότητα, ανήκει σε όλους τους αριθμούς.]

Το συγκεκριμένο σύστημα αξιωμάτων θεωρούνταν πλήρες ή έστω ότι θα μπορούσε κάποτε να γίνει πλήρες με την προσθήκη μερικών αξιωμάτων επιπλέον. Αυτή η πεποίθηση συντρίφθηκε εκ βάθρων από το πρώτο θεώρημα του Gödel, σύμφωνα με το οποίο:

Πρώτο θεώρημα του Gödel

Για κάθε συνεπές τυπικό σύστημα Φ που περιέχει το σύστημα των φυσικών αριθμών, υπάρχουν στο Φ μη αποδείξιμες προτάσεις. Δηλαδή, στο Φ υπάρχουν προτάσεις Α τέτοιες, που ούτε η Α ούτε η άρνηση της Α να μπορούν να αποδειχθούν μέσα στο Φ.

Αρχικά επόμενο του πρώτου θεωρήματος του Gödel είναι ότι, αν το σύστημα των φυσικών αριθμών είναι συνεπές, τότε είναι μη πλήρες. Αυτό σημαίνει ότι, ακόμη κι αν το σύστημα των αξιωμάτων μας για την αριθμητική των φυσικών αριθμών είναι συνεπές, θα υπάρχουν προτάσεις για τους φυσικούς αριθμούς που δε θα μπορούν να αποδειχθούν ή να απορριφθούν με βάση τα αξιώματα.

Πράγματι, στη θεωρία αριθμών υπάρχουν πολύ γνωστές εικασίες που δεν έχουν αποδειχθεί ή απορριφθεί παρά τις επίμονες προσπάθειες των μαθηματικών. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι η «εικασία του Goldbach», η οποία λέει ότι: *Κάθε άρτιος αριθμός μπορεί να γραφεί σαν το άθροισμα δυο πρώτων αριθμών.* Πράγματι, αν και ποτέ δεν έχει βρεθεί άρτιος αριθμός που να μην είναι το άθροισμα δυο πρώτων αριθμών, εντούτοις δεν έχει γίνει κατορθωτό να αποδειχθεί η εικασία του Goldbach. Είναι πολύ πιθανόν εικασίες σαν κι αυτή του Goldbach να μην μπορούν να αποδειχθούν με βάση το σύστημα αξιωμάτων του Peano για τους φυσικούς αριθμούς. Το ερώτημα είναι αν, σε κάθε τέτοια περίπτωση, τα αξιώματά μας θα μπορούσαν να διευρυνθούν έτσι ώστε όλες οι μη αποδείξιμες εικασίες να αποδεικνύονται πλέον από το διευρυμένο σύστημα των αξιωμάτων μας. Όμως ο Kurt Gödel, με το αντίστοιχο θεώρημά του, απέδειξε ότι, ακόμη κι αν κατορθώσουμε να διευρύνουμε κατάλληλα το σύστημα των αξιωμάτων, έτσι που όλες οι μη αποδείξιμες εικασίες σαν αυτή του Goldbach αποδειχθούν ότι είναι αληθείς, πάντα θα υπάρχουν αριθμητικές αλήθειες οι οποίες δε θα μπορούν να αποδειχθούν από το ολοένα και πιο διευρυμένο σύνολο των αξιωμάτων μας.

Σίγουρα, θα ήταν ένα σοβαρό βήμα αν τουλάχιστον μπορούσαμε να επινοήσουμε μια διαδικασία, μέσω της οποίας να μπορούσαμε να προσδιορίσουμε αν μια συγκεκριμένη πρόταση που αφορά τους φυσικούς αριθμούς μπορεί να αποδειχθεί ή όχι. Όμως και εδώ η προοπτική είναι δυσάρεστη, αφού στα 1936 ο Alonzo Church (Αμερικανός λογικολόγος) απέδειξε το ομώνυμο θεώρημά του, σύμφωνα με το οποίο:

Θεώρημα του Church

Για κάθε συνεπές τυπικό σύστημα Φ που περιέχει το σύστημα των φυσικών αριθμών δεν υπάρχει αποτελεσματική μέθοδος που να αποφασίζει ποιες προτάσεις του Φ μπορούν να αποδειχθούν στο Φ.

4. Βασικά σημεία της λογικής απόδειξης των θεωρημάτων του Gödel

Όταν κάποιος έρχεται αντιμέτωπος με τόσο σημαντικές προτάσεις, που φέρνουν τέτοιες ριζοσπαστικές αλλαγές στον τρόπο αλλά και στην κατεύθυνση της σκέψης των μαθηματικών, δεν μπορεί παρά, αφού συνέλθει από το πρώτο «σοκ», να ρωτήσει πώς κατάφερε ο Gödel να αποδείξει τα θεμελιώδη θεωρήματά του.

Η τεχνική που ακολουθεί ο Gödel για να αποδείξει τα θεωρήματά του είναι πραγματικά μεγαλοφυής και βασίζεται σε μια εκπληκτική μέθοδο αρίθμησης των αρχικών συμβόλων, των σχέσεων και των αποδείξεων.

Όπως έχουμε ήδη πει, σ' ένα τελείως τυποποιημένο σύστημα Φ υπάρχουν αρχικά όλα τα βασικά σύμβολα (οι αρχικοί όροι) με τη βοήθεια των οποίων εκφράζονται οι προτάσεις και οι αποδείξεις. Ο Gödel έδειξε ότι είναι δυνατόν να αποδώσουμε ένα *μοναδικό αριθμό* σε κάθε στοιχειώδες σύμβολο, σε κάθε τύπο (ακολουθία συμβόλων) και σε κάθε απόδειξη (ακολουθία τύπων). Αυτός ο αριθμός λέγεται «αριθμός Gödel» του αντίστοιχου συμβόλου, τύπου, απόδειξης και αποτελεί την ταυτότητα της αντίστοιχης έκφρασης.

Αυτό που κατορθώνει ο Gödel είναι η επίτευξη μιας μεθόδου που οδηγεί στην πλήρη «αριθμητικοποίηση» του τυπικού λογισμού. Ουσιαστικά έχουμε αντιστοιχίσει 1-1 τις εκφράσεις του λογισμού μας με ένα *υποσύνολο* των φυσικών αριθμών.

Αφού γίνεται αντιστοίχιση ένα προς ένα των συμβόλων και των τύπων του λογισμού μας με ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών, το επόμενο βήμα είναι να αντιστοιχιθεί ένας αριθμός Gödel σε κάθε *απόδειξη, δηλαδή σε μια πεπερασμένη και διατεταγμένη ακολουθία τύπων.*

Αυτό που επιτυγχάνει ο Kürt Gödel με την τεχνική της αριθμητικοποίησης είναι ότι επιτρέπει την *αριθμητικοποίηση μεταμαθηματικών προτάσεων που αφορούν στο τυπικό σύστημα Φ*. Πράγματι αυτό είναι και το κομβικό σημείο της απόδειξης του Gödel. Ο Gödel έδειξε ότι όλες οι μεταμαθηματικές προτάσεις, που αφορούν τις εκφράσεις του λογισμού (π.χ. αριθμητική), μπορούν κατάλληλα να απεικονιστούν μέσα στον ίδιο το λογισμό. Κατά μια έννοια, ο ίδιος ο λογισμός μπορεί και «μιλάει» για τον εαυτό του. Δηλαδή, οποιαδήποτε μεταμαθηματική πρόταση αναφέρεται στους τύπους του λογισμού και στις μεταξύ τους σχέσεις μπορεί κάλλιστα να μετασχηματιστεί σε μια πρόταση που θα αφορά τους αντίστοιχους αριθμούς Gödel των τύπων και τις αριθμητικές σχέσεις που αυτοί έχουν μεταξύ τους.

Στη συνέχεια, θα εκθέσουμε συνοπτικά τη συλλογιστική πορεία που ακολουθεί ο Gödel μέχρι να αποδείξει τα θεωρήματά του. Ο ίδιος ο Gödel επισημαίνει ότι η επιχειρηματολογία του ακολουθεί τη συλλογιστική μιας λογικής αντινομίας που λέγεται «παράδοξο του Richard» και είναι μια ανάλογη αντινομία με το παράδοξο του Russel, το οποίο έχουμε ήδη αναφέρει. Το παράδοξο του Richard διατυπώνεται εν συντομία ως εξής:

Έστω ότι έχουμε καταστρώσει τους ορισμούς που αφορούν τις αριθμητικές ιδιότητες των φυσικών αριθμών. Τώρα, τους ορισμούς αυτούς τους κατατάσσουμε με αύξουσα σειρά, ανάλογα με το ποιος περιέχει τα πιο πολλά γράμματα της αλφαβήτου. Για παράδειγμα, ο ορισμός με το μικρότερο πλήθος γραμμάτων θα αντιστοιχεί στον αριθμό 1, ο επόμενος στον αριθμό 2, ..., κ.ο.κ. Άρα, κάθε ορισμός σχετίζεται 1-1 με ένα φυσικό αριθμό. Τώρα, υπάρχουν ορισμοί για τους οποίους ο αριθμός ο οποίος τους αντιπροσωπεύει έχει και την ιδιότητα που περιγράφεται στον ορισμό. Για παράδειγμα, αν πάρουμε τον εξής ορισμό: «πρώτος είναι ένας αριθμός ο οποίος είναι διαιρετός μόνο από το 1 και τον εαυτό του». Αν αυτός ο αριθμός αντιπροσωπεύεται για παράδειγμα από τον αριθμό 13, τότε προφανώς ο 13 έχει την ιδιότητα που περιγράφεται στον ορισμό. Τώρα, αν υποθέσουμε ότι ο ορισμός «ένας φυσικός ισούται με το γινόμενο ενός άλλου φυσικού αριθμού επί τον εαυτό του» αντιπροσωπεύεται από τον αριθμό 11, τότε είναι προφανές ότι το 11 δεν έχει την ιδιότητα που περιγράφεται στον ορισμό τον οποίο αντιπροσωπεύει. Έτσι ορίζουμε γενικά ότι «ο X είναι αριθμός Richard», αν δεν έχει την ιδιότητα που περιγράφει ο ορισμός τον οποίο αντιπροσωπεύει στο γραμμικά διατεταγμένο σύνολο ορισμών. Έτσι ο αριθμός 11 προηγουμένως είναι αριθμός Richard, ενώ ο αριθμός 13 δεν είναι. Τώρα, μπορούμε κάλλιστα να δεχθούμε ότι η έκφραση «ο λ είναι αριθμός Richard» έχει μια θέση στο διατεταγμένο σύστημα ορισμών, αφού περιγράφει μια ιδιότητα που σχετίζεται με το φυσικό αριθμό λ. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η έκφραση αυτή αντιπροσωπεύεται από τον αριθμό λ. Τώρα, ρωτάμε: «Είναι ο λ αριθμός Richard;» Η αντινομία είναι σχεδόν προφανής, γιατί αν ο λ είναι αριθμός Richard, τότε έχει την ιδιότητα που περιγράφεται στον ορισμό τον οποίο αντιπροσωπεύει ο λ, άρα ο λ δεν είναι αριθμός Richard!! Επίσης, αν ο λ δεν ήταν αριθμός Richard, τότε αντιφάσκουμε αφού εξ ορισμού ο λ είναι αριθμός Richard. Άρα, η πρόταση «ο λ είναι αριθμός Richard» είναι ταυτόχρονα και αληθής και ψευδής!!! Η αντινομία προκαλείται από το γεγονός ότι η ιδιότητα το να είναι ένας φυσικός αριθμός Richard δεν είναι αριθμητική ιδιότητα των φυσικών αριθμών, υπό την έννοια ότι δεν εκφράζεται με τη βοήθεια εννοιών όπως η πρόσθεση, ο πολ/σμός, ..., κ.ο.κ. Δηλαδή η ιδιότητα αυτή βρίσκεται εκτός αριθμητικής, είναι *μεταμαθηματική*, άρα εκτός του διατεταγμένου συστήματος ορισμός που καταρτίσαμε στην αρχή, άρα δεν αντιπροσωπεύεται από κανένα φυσικό αριθμό λ.

Όμως, ο Gödel στην απόδειξή του καταφέρνει να υπερπηδήσει το εμπόδιο που προκαλεί την αντινομία στο παράδοξο του Richard. Πιο συγκεκριμένα, ο Gödel έδειξε κατ' αρχήν *πώς να κατασκευάσουμε έναν αριθμητικό τύπο G, ο οποίος να αντιπροσωπεύει τη μεταμαθηματική πρόταση: «Ο τύπος G δεν είναι αποδείξιμος»*. Δηλαδή είναι σαν ο G να λέει για τον εαυτό του ότι δεν είναι αποδείξιμος. Είναι δηλαδή σαν το παράδοξο Richard, όπου η έκφραση «*αριθμός* Richard» σχετίζεται με έναν ορισμένο αριθμό η. Ύστερα κατασκευάζεται η πρόταση: «*ο αριθμός η είναι αριθμός* Richard». Κατ' αναλογίαν (όχι πλήρη αναλογία) και στο συλλογισμό του Gödel ο τύπος G σχετίζεται με έναν ορισμένο αριθμό h (τον αντίστοιχο αριθμό Gödel) και κατασκευάζεται ο G έτσι που να αντιστοιχεί στην πρόταση: *«ο τύπος που αντιστοιχεί στον αριθμό h δεν είναι αποδείξιμος»*. Στη συνέχεια ο Gödel έδειξε ότι *ο τύπος G είναι αποδείξιμος, αν και μόνο αν η τυπική του άρνηση ~G είναι αποδείξιμη.* Αυτό το βήμα είναι αντίστοιχο με το παράδοξο του Richard, στο οποίο αποδεικνύεται ότι ο η είναι αριθμός Richard όταν και μόνο όταν ο η δεν είναι αριθμός Richard. Όμως, αν ένας τύπος και η άρνησή του είναι τυπικά αποδείξιμοι, τότε ο αριθμητικός λογισμός δεν είναι συνεπής. Άρα η μόνη ελπίδα για να είναι ο λογισμός της αριθμητικής συνεπής είναι να μην μπορεί να αποδειχθεί από τα αξιώματα της αριθμητικής ούτε ο τύπος G ούτε και ο ~G. Με άλλα λόγια, θα έπρεπε ο G να είναι ένας τυπικά μη αποδείξιμος τύπος. (Η διαφορά του συλλογισμού του Gödel με το παράδοξο του Richard έγκειται στο ότι, στο πρόγραμμα του Gödel, ο τύπος G δεν ανήκει στα μεταμαθηματικά, αλλά αντιπροσωπεύει μια μεταμαθηματική έκφραση μέσα στον αριθμητικό λογισμό. Άρα ο αριθμός Gödel που αντιστοιχεί στον G σχετίζεται με ένα συγκεκριμένο αριθμητικό τύπο και όχι με μια μεταμαθηματική έκφραση, όπως συμβαίνει με τον αριθμό λ στο παράδοξο Richard).

Όμως, στη συνέχεια ο Gödel έδειξε ότι *αν και ο τύπος G δεν είναι τυπικά αποδείξιμος, εντούτοις είναι ένας αληθής αριθμητικός τύπος*, υπό την έννοια ότι δηλώνει πως κάθε φυσικός αριθμός έχει μια συγκεκριμένη αριθμητική ιδιότητα η οποία φανερώνεται από κάθε ακέραιο που εξετάζεται. *Άρα, αφού ο G είναι και αληθής και τυπικά μη αποδείξιμος, τότε τα αξιώματα της αριθμητικής είναι μη πλήρη.* Δηλαδή δεν μπορούμε να αποδείξουμε όλες τις αληθείς προτάσεις από τα αξιώματα. Κι όχι μόνο αυτό, αλλά ο Gödel απέδειξε ότι η αριθμητική είναι *ουσιωδώς μη πλήρης*, δηλαδή ότι ακόμα και να προστεθούν επιπλέον αξιώματα, ώστε ο αληθής τύπος G να αποδειχθεί από το διευρυμένο σύνολο των αξιωμάτων μας, θα μπορεί πάντοτε να κατασκευαστεί ένας άλλος μη τυπικά αποδείξιμος τύπος G΄ ο οποίος να είναι αληθής (*1ο θεώρημα Gödel*).

Συνεπώς, η θέση που προβάλλει ο Gödel μέσα από αυτό το επαναστατικό του άρθρο είναι ότι δεν μπορεί να κατασκευαστεί λογισμός τέτοιος που κάθε πρόταση της αριθμητικής να μπορεί να παρασταθεί μέσα σ' αυτόν με έναν τύπο ο οποίος να είναι είτε αποδείξιμος είτε μη αποδείξιμος μέσα στο λογισμό αυτόν. Άρα, οποιοδήποτε επαγωγικό σύστημα θα έχει το χαρακτηριστικό να μην μπορεί να περιέχει απόδειξη για την αλήθεια ή το ψεύδος κάθε πρότασης της αριθμητικής.

Τέλος, ο Gödel περιέγραψε πώς μπορεί να κατασκευαστεί ένας αριθμητικός τύπος Α, ο οποίος να αντιπροσωπεύει τη μεταμαθηματική πρόταση: *«η αριθμητική είναι συνεπής»*. Κατόπιν απέδειξε ότι ο τύπος Α είναι τυπικά μη αποδείξιμος. *Άρα, η συνέπεια της αριθμητικής δεν μπορεί να αποδειχθεί με ένα συλλογισμό ο οποίος να μπορεί να αντιπροσωπευτεί μέσα στον τυπικό αριθμητικό λογισμό (2ο θεώρημα Gödel).*

5. Επίλογος - Συμπεράσματα

Ίσως θα ήταν κουραστικό να επαναλάβουμε, για πολλοστή φορά, ότι η σπουδαιότητα των θεωρημάτων είναι πολύ μεγάλη. Τα θεωρήματα του Gödel δείχνουν ότι η πιθανότητα να βρεθεί για κάθε επαγωγικό σύστημα (και πιο συγκεκριμένα για ένα σύστημα στο οποίο μπορεί να εκφραστεί η αριθμητική) μια απόλυτη περατοκρατική (κατά τον Hilbert) απόδειξη συνέπειας είναι πολύ μικρή αλλά όχι μηδενική. Και λέμε όχι μηδενική, γιατί αυτό που σε τελική ανάλυση απέδειξε ο Gödel είναι ότι μια τέτοια απόδειξη είναι αδύνατον να αντιπροσωπευτεί μέσα στην αριθμητική. Δηλαδή, δεν αποκλείει ο Gödel την εύρεση περατοκρατικών αποδείξεων συνέπειας που θα αντιπροσωπευτούν εκτός της αριθμητικής. Απλά κάτι τέτοιο φαντάζει, στους μαθηματικούς, πολύ απίθανο.

Επίσης, ο Gödel με τα θεωρήματά του ανέδειξε τις αδυναμίες της τυπικής αξιωματικής μεθόδου. Πιο συγκεκριμένα έδειξε ότι μια προσέγγιση της αριθμητικής μέσω της αξιωματικής μεθόδου αποτυγχάνει να εξαντλήσει το πεδίο της αριθμητικής αλήθειας.

Η ανακάλυψη του Gödel, ότι υπάρχουν αριθμητικές αλήθειες που δεν μπορούν να αποδειχθούν τυπικά, δε σημαίνει σε καμιά περίπτωση ότι υπάρχουν αλήθειες που δε θα καταφέρουμε να γνωρίσουμε ποτέ. Αντίθετα, τονίζει το ότι ο ανθρώπινος νους δεν έχει τυποποιηθεί αρκετά (και ούτε πρόκειται) έτσι που πάντα μένουν νέες αποδεικτικές αρχές για να επινοηθούν από το ανθρώπινο μυαλό. Άρα ο Gödel με τα θεωρήματά του δεν έχει ως στόχο να καταδείξει ότι υπάρχουν αξεπέραστα όρια στο ανθρώπινο λογικό, αλλά μάλλον ότι τα όριά του μπορούν να διευρύνονται συνεχώς. Αυτή είναι και η πρόκληση-έκκληση που, μύχια, ο Gödel απευθύνει προς όλους: τη συνεχή προσπάθεια για αδιάκοπη διεύρυνση των ορίων της ανθρώπινης νόησης.

Βιβλιογραφία

Gödel, Kurt, *On formally unpredictable propositions of Principia Mathematica and Related Systems*, Dover, 1992.

Nagel, Ernest and James R. Newmann, *Godel's Proof* (ελληνική μετάφραση, εκδόσεις Τροχαλία), 1991.

Eves, Howard, *Great moments in Mathematics — after 1650* (ελληνική μετάφραση, εκδόσεις Τροχαλία), 1990.

Ευαγγέλου Σ. Σταμάτη, *Η Ελληνική Επιστήμη*, Αθήναι 1968.