ΠΑΝΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

**Π.Μ.Σ.: ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ**

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ «ΑΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΥ, ΠΡΟΤΥΠΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΣΤΙΣ ΣΦΑΙΡΙΣΕΙΣ (BALL GAMES)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΦΟΙΤΗΤΗ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΡΟΥΣΣΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΤΑΣΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2015

ΤΙΤΛΟΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Παιχνίδια Ανταγωνισμού, Πρότυπα Ανάπτυξης και Στρατηγικής στις Σφαιρίσεις (Ball games)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΦΟΙΤΗΤΗ

Χρήστος Ρούσσος

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

Επιβλέπων Καθηγητής

Αναστάσιος Τασόπουλος

1ο μέλος

Άγγελος Μιμής

2ο μέλος

Χαράλαμπος Μπότσαρης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η συντριπτική πλειονότητα των ανθρώπων αντιλαμβάνεται ως ανταγωνιστική σφαίριση κάποια δράση μεταξύ δύο μερών, που διεξάγεται με μια μπάλα, (ή κάποιο παρεμφερές αντικείμενο), σύμφωνα με κάποιους κανονισμούς και καταλήγει σε κάποιο αριθμητικό αποτέλεσμα (σκορ). Στον αρχαίο κόσμο, οι σφαιρίσεις δεν ήσαν ιδιαιτέρως αναπτυγμένες, όσο για παράδειγμα οι θεατρικοί αγώνες, σε μέρη της Κίνας, ή άλλα της Ευρώπης. Υπάρχουν διάσημες τακτικές διοργανώσεις αγώνων, μεγάλα στάδια, κ.α. πειστήρια ανάπτυξης, που όμως αφορούν άλλα αγωνίσματα (όπως στίβος και πάλη) κι όχι τις παιγνιώδεις σφαιρίσεις. Εξαίρεση δείχνει να αποτελεί το λεγόμενο Mesoamerican Ballgame για το οποίο υφίστανται εκατοντάδες στάδια, όμως δεν γνωρίζουμε πως παιζόταν κι εν γένει αγνοούμε πολλά ως προς τους πολιτισμούς που συνέτριψε η επέλαση των Ευρωπαίων. Στην αρχαία Ελλάδα δημιουργούνται θίασοι που προάγουν τη θεατρική τέχνη κατά την περίοδο γέννησης της δημοκρατίας, δεν προκύπτουν όμως κατ’ αντιστοιχία σύλλογοι για τις σφαιρίσεις. Καλλιεργήθηκαν πολύ λιγότερο απ’ ότι στην αρχαία Ρώμη, επισκιάζονταν κι από άλλα αγωνίσματα, αντιθέτως από ότι συμβαίνει στη σύγχρονη εποχή.

Κατά το μεσαίωνα δεν είναι κάτι παραπάνω από μια ιδιωτική υπόθεση κυρίως για τους προνομιούχους της άρχουσας τάξης, ή και τον κλήρο. Στους προνομιούχους θα πρέπει να συμπεριλάβουμε βεβαίως και τα παιδιά, όμως ασφαλώς δεν έπαιζαν κάτι τόσο οργανωμένο, όσο οι σημερινές σφαιρίσεις. Η ιστορική αναδρομή τους ως περίπου το $17^{ο}$ αιώνα παρουσιάζει γενικότερο ενδιαφέρον, όμως δεν εξηγεί και πολύ γιατί στη σύγχρονη εποχή προκύπτει αυτή η ανάπτυξή τους. Ούτε βεβαίως όμως η οικονομική μεγέθυνση και η συνοδός παγκόσμια ανάπτυξη, δεν έχει τουλάχιστον έως τώρα, αποφέρει ανάπτυξη σφαιρίσεων που να ανταποκρίνονται ποσοτικά και ποιοτικά στις σύγχρονες αντιλήψεις μας, αν όχι να τις προάγουν περαιτέρω. Οι κάθε λογής λέσχες, σύλλογοι, ενώσεις κ.λπ. για ποικίλους σκοπούς, μπορεί να είναι καθοριστικής σημασίας για την πραγματοποίηση κάθε λογής σφαίρισεων, όμως πλέον υπάρχουν έτσι κι αλλιώς, ώστε κρίνεται πιο παραγωγικό να αναφερθούμε στις ιδιαιτερότητες που παρουσιάζουν οι δομές και οι στρατηγικές ανάπτυξης τους. Η σημασία που τους αποδίδεται πλέον, υπερβαίνει μάλλον κατά πολύ κι αυτή που αντικατοπτρίζεται στα οικονομικά δεδομένα τους, κυρίως του ποδοσφαίρου και λίγων ακόμη. Ενώ ως «γενέτειρα» των παραπάνω θεσμών μπορούμε να θεωρήσουμε τη Μεγάλη Βρετανία, την ίδια πάνω – κάτω χρονική περίοδο ένας από τους πολλούς μεγάλους μαθηματικούς εκείνης της εποχής, ο Jacob Bernoulli ασχολείται συστηματικά με μια πολύ κραταιά σφαίριση εκείνης της εποχής, το Jeu de Paume. Βρίσκουμε ότι η ιστορία των χρονολογημένων σφαιρίσεων δεν προσφέρει καλύτερη αρχή από ένα μαθηματικό που να έχει ασχοληθεί με κάποια από αυτές, μα και να έχει στρέψει το ενδιαφέρον του, όπως και πολλών άλλων μετά από εκείνον, στα ενδεχόμενα μελλοντικά συμβάντα και στην υποκειμενική βεβαιότητα. Ο J. Bernoulli, μέσω της συγκεκριμένης ενασχόλησης του, μπορούμε να πούμε ότι διανοίγει τους ορίζοντες της νόησής μας αναφορικά με τις πιθανότητες και τη θεωρία παιγνίων, ως προς τις σφαιρίσεις κι όχι μόνο. Η σπουδαιότητα του έργου του εν προκειμένω κρίνεται πως είναι δυσανάλογη με την αναγνώριση, που έχει λάβει.

Αντί να μελετήσουμε την ιστορία των σφαιρίσεων προτιμάμε να παρακολουθήσουμε ενδεικτικά την ανάπτυξη της σχετικής μαθηματικής σκέψης, καθώς και της οικονομικής βεβαίως, ή και της βιολογικής ενίοτε, που ανθίζουν έκτοτε. Οι παραπάνω επιστήμες έχουν μια στιβαρότητα και μια χρονική συνέχεια, που δεν διέπει απαραίτητα τα σπορ. Η κατανόηση των εξελικτικών διεργασιών εκ του Δαρβίνου, μπορεί να έχει πολύ σημαντικές συνέπειες για τις σφαιρίσεις, όπως είχε για τη βιολογία, μα και για την πολιτική οικονομία. Διανοητές όπως ο Markov, που μας αποδέσμευσε για τα καλά από τις αλυσίδες του ντετερμινισμού και φώτισε πως μπορούμε να περάσουμε σε πιθανοκρατικές ερμηνείες των συμβάντων, καθώς και εν συνεχεία ο Shannon, που έδωσε τόσο μεγάλη ώθηση στα επικοινωνιακά συστήματα, έχουν ενδεχομένως να μας διδάξουν πολύ περισσότερα επί του θέματος, από όσα μπορεί να νομιστεί κάπως επιπόλαια. Έχει να μας πει και το juggling επίσης πολλά για τον ανταγωνισμό και την ανάπτυξη προτύπων, που απορίας άξιο, αδυνατούσαμε για αιώνες να συλλάβουμε. Μια εύλογη εντέλει κατάληξη του παρόντος θέματος είναι η σύγχρονη θεωρία παιγνίων που μεταχειρίζεται αρκετά συχνά τις χρονολογημένες σφαιρίσεις ως παραδείγματα, υπό μια αρκετά συγκεκριμένη οπτική. Ακόμα όμως και η εξελικτική θεωρία παιγνίων, που αποτελεί σύζευξη τόσο ενδιαφερόντων επιστημονικών πεδίων, δείχνει πως ρίχνει το βάρος της προς τα βιολογικά είδη, δίχως να αναγνωρίζει αντίστοιχους τύπους και είδη σφαιρίσεων.

Δεν είναι η έλλειψη μπάλας, εδάφους, δικτυού κ.ά. τέτοιων αντικειμενικών παραγόντων, αυτή που μας εμπόδισε να έχουμε σφαιρίσεις με ενδιαφέροντα scoring systems κι όχι τα τόσο απλοϊκά των περισσοτέρων, είτε με περισσότερες της μιας και ίσως διάφορες μεταξύ τους μπάλες. Δεν είναι εντέλει αυτά που μας εμποδίζουν να έχουμε και μια τουλάχιστον δημοφιλή σφαίριση, όπου οι καθόλα συμβατοί άνδρες και γυναίκες να παίζουν μαζί ως ίσος προς ίσο, ώστε να σεβόμαστε οι ίδιοι τις αξίες του αναπτυγμένου ανθρώπινου πολιτισμού και των πολυπληθών πόλεων που ζούμε.

Κεφάλαιο 1. Η σχέση της θεωρίας παιγνίων και του λογισμού πιθανοτήτων με τον Jacob Bernoulli και τη Jeu de Paume

> *Μη μου λέτε πως δεν είπα τίποτα το καινούργιο. Η διάταξη των πραγμάτων είναι καινούργια. Στη Jeu de Paume παίζουν και οι δύο παίκτες με την ίδια μπάλα, αλλά ο ένας την ρίχνει καλύτερα.*
>
> (Pascal, 2008)

Οι περισσότερες εργασίες αναφορικά με τη *θεωρία παιγνίων* ξεκινούν με την οπωσδήποτε σπουδαία προσωπικότητα του John Von Neumann, ο οποίος μελετώντας τα παίγνια, καθόρισε μια σχέση των τελευταίων με το μαθηματικό προγραμματισμό (Von Neumann, 1928). Κατόπιν, μαζί με τον Oskar Morgenstern, εξέδωσε το ιδιαίτερα σημαντικό βιβλίο «*Theory of Games & Economic Behavior*» (Von Neumann & Morgenstern,1944). Σε αυτό οι δύο συγγραφείς όρισαν αξιωματικά τη θεωρία της χρησιμότητας - ωφέλειας, (utility theory) ανέλυσαν διεξοδικά τις βέλτιστες λύσεις στα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος και αναγνώρισαν τα παίγνια μηδενικού και μη μηδενικού αθροίσματος ως διακριτές κατηγορίες παιγνίων. Με άλλα λόγια, έθεσαν πάρα πολλές από τις βάσεις πάνω στις οποίες διεξάγεται η συζήτηση περί της θεωρίας παιγνίων.

Η τυπική συνέχεια αναφέρεται σχεδόν πάντοτε στην επίσης σπουδαία προσωπικότητα του John Nash, ο οποίος εισήγαγε την έννοια των σημείων ισορροπίας (έννοια συνδεδεμένη, έκτοτε, με το όνομά του), καθόρισε τη διάκριση παιγνίων συνεργασίας και μη συνεργασίας, ενώ πρότεινε, επιπλέον, την επίσης ομώνυμη λύση του διαπραγματευτικού προβλήματος με καταρχάς σταθερές και κατόπιν μεταβλητές απειλές (Nash, 1950·1951). Υφίσταται, όμως, και παρελθόν σε αυτή τη συζήτηση. Κάποιες ιστορικές αναδρομές φθάνουν ως τον σπουδαίο Francis Ysidro Edgeworth, ο οποίος αναφέρεται συνήθως για το περίφημο ομώνυμο πλαίσιό του (Edgeworth box) ενώ το εύρος των τελικών διευθετήσεων εντός του ταυτίστηκε αργότερα από τον Martin Shubik με την παιγνιοθεωρητική έννοια του «πυρήνα» (Shubik, 1959). Ο δε πυρήνας της οικονομίας συρρικνώνεται στο σύνολο των ανταγωνιστικών ισορροπιών, καθόσον ο αριθμός των παραγόντων στην οικονομία αυξάνεται (Edgeworth, 1881). Ορισμένες άλλες αναδρομές εκκινούν από τον Γάλλο οικονομολόγο Augustin Cournot (1838) που, στο ομώνυμο μοντέλο του, ανέλυσε ολιγοπωλιακές καταστάσεις κατά τρόπο αρκετά παρόμοιο με τις σύγχρονες μεθόδους της θεωρίας παιγνίων. Ακόμα πιο λίγες έχουν ως αφετηρία τον Daniel Bernoulli (Kahneman, 2013). Αυτός έθεσε το ζήτημα της συνάρτησης ωφέλειας και της αντίστοιχης θεωρίας, στην οποία «πάτησε» ο J.V. Neumann. Σχετίζεται ασφαλώς όμως, μαζί με τον De Waldegrave και ο Nicholas Bernoulli (Weintraub, 1992). Ο τελευταίος ήταν ξάδελφος του προαναφερθέντος Daniel όπως και ανεψιός του Jacob Bernoulli, του οποίου η έρευνα για «ηθική βεβαιότητα», οδήγησε στο νόμο των μεγάλων αριθμών και στον ορισμό της στοχαστικής σύγκλισης. Η *«ηθική αξία»* ενός παιγνίου με άπειρα αποτελέσματα οδήγησε κατόπιν τον Daniel Bernoulli στη νέα έννοια της υποκειμενικά προσλαμβανόμενης αξίας, ή (στη σημερινή γλώσσα) της προσδοκώμενης ωφέλειας (Polasek, 2000). Ο J. Bernoulli δεν εισήγαγε την τύχη στις στρατηγικές των παιγνίων, οι οποίες είναι «ανώφελες» στα αμιγώς τυχερά παίγνια. Αυτός διέκρινε πως εισάγεται η τύχη στα παίγνια, από τους ανθρώπους που επινοούν τα τυχερά παίγνια καταρχήν. Την τυχαιοθέτηση την εισηγήθηκε κατόπιν αυτού, ο de Waldegrave (που ασχολήθηκε επίσης με τα ζητήματα της αντισφαίρισης και με άλλα προβλήματα παιγνίων προερχόμενα από το έργο του).

Ο J. Bernoulli αποτελεί μία από τις πλέον εύλογες πηγές και για την παραπάνω θεωρία, όπως, βέβαια, και για τη συγκεκριμένη επιστημονική «δυναστεία». Ούτε η θεωρία παιγνίων, όπως ούτε και η θεωρία πιθανοτήτων δεν ήταν βέβαια προσωπική, μήτε οικογενειακή υπόθεση, κάποιου εκ των Bernoulli και δεν ανατρέχουμε απλώς στον ηλικιακά μεγαλύτερο. Αν ήταν να καταφεύγουμε στο χρονολογικά αρχαιότερο μέλος κάθε επιστημονικής οικογενείας, στην περίπτωση των Darwin, αντί του πλέον διάσημου Charles θα έπρεπε να προτιμήσουμε τον πατέρα του Έρασμο, που ασφαλώς ήταν κι αυτός ιδιαιτέρως αξιόλογος επιστήμονας. Επιπλέον, το ζήτημά μας δεν είναι η διατύπωση αξιολογικών κρίσεων ως προς τα μέλη τέτοιων οικογενειών και γι αυτό δεν θα σταθούμε και πολύ στη γνωστή έντονη και κινητήρια του ανταγωνισμού αντιζηλία, που έθρεφε ο μικρότερος Johan με τον Jacob Bernoulli. Η ματιά του τελευταίου ήταν πολύ διεισδυτική στην «αντισφαίριση» της εποχής, η δε αποτίμηση της επιστημονικής συνεισφοράς του στη συγκεκριμένη θεωρία, είναι περίπλοκη υπόθεση για οποιονδήποτε ερευνητή έχει ασχοληθεί επισταμένα με την ανάδυση είτε της θεωρίας πιθανοτήτων, είτε της θεωρίας παιγνίων. Όπως γράφει η E. Sylla η προσέγγιση του J. Bernoulli, όπως και του Ch. Huygens, διαφέρει από εκείνη των Pascal και Fermat, μπορεί δε καλύτερα να κατανοηθεί αν τα παίγνια θεωρηθούν ως επιχειρηματικές συνεργασίες μηδενικού αθροίσματος (zero sum business partnerships) (Bernoulli, 1713/2006).

Η θεωρία παιγνίων, έτσι όπως τη γνωρίζουμε από τον J.Von Neumann κι εξής, συνδέεται πρωτίστως με το μαθηματικό προγραμματισμό και με τις μηχανικές διαδικασίες. Σε μεγάλο πλέον βαθμό τις αναθέτουμε στους Η/Υ οπότε κατ’ επέκταση, η θεωρία παιγνίων μπορεί να συνδεθεί με τη μηχανή προσθαφαιρέσεων του B. Pascal (Goldstine, 1972). Έτσι μπορεί να συσχετιστεί και με την κατασκευή – εξέλιξη του ρολογιού χειρός ή, καλύτερα, του εκκρεμούς ωρολογιακού μηχανισμού από τον Ch. Huygens. Επιπρόσθετα, η θεωρία παιγνίων μπορεί να συνδεθεί με τον Leibniz, όχι τόσο επειδή η μηχανή που κατασκεύασε εκτελούσε επιπλέον πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις, αλλά κυρίως λόγω του ότι εννοούσε να αναθέσουμε στις υπολογιστικές μηχανές, στην λεγόμενη «παγκόσμια χαρακτηριστική», καθώς και στην ανάπτυξη του λογισμού (Davis, 2007). Ο ίδιος άλλωστε υποστήριζε ότι τα ανθρώπινα όντα δεν είναι ποτέ πιο έξυπνα απ' ότι στην επινόηση παιχνιδιών (Dumain, 2010). Όπως γράφει κι ο Gilles Deleuze, εκείνη την εποχή, όπως και με τον Pascal, κι ορισμένους άλλους μαθηματικούς, και με τον ίδιο τον Leibniz, αναπτύχθηκε μια μεγάλη θεωρία των παιχνιδιών και των πιθανοτήτων. Ο Leibniz είναι ένας από τους μεγάλους θεμελιωτές της θεωρίας παιγνίων (Deleuze, 2007). Ενώ ο Ch. Huygens υπέθετε ότι τα τυχερά παίγνια ήταν δίκαια κι ενδιαφερόταν για τις μαθηματικές συνέπειες των διαφόρων θέσεων στο παιχνίδι, ο Leibniz ενδιαφερόταν ειδικότερα προς τη δικαιοσύνη τους (Roinila, 2007). Κάπου μεταξύ αυτών εισέρχεται στο προσκήνιο κι ο J. Bernoulli που ανήκει στο ίδιο ρεύμα, λειτουργεί συμπληρωματικά και με το Ch. Huygens και με τον Leibniz, εστιάζει δε περισσότερο στον ανθρώπινο παράγοντα. Η συνεισφορά του ως προς την έρευνα των παιγνίων εν γένει, κρίνεται πως ξεπερνάει όλους τους προαναφερθέντες, που βεβαίως ως προς άλλα ζητήματα ήταν συγκριτικώς πολύ πιο σπουδαίοι. Εστιάζοντας περισσότερο στις σφαιρίσεις και λιγότερο στους Η/Υ, ο επιστήμονας του 17^{ου} αιώνα δεν είναι ούτε ο Pascal ούτε ο Leibniz, μα ο J. Bernoulli. Και φθάνοντας στη σύγχρονη εποχή είναι ίσως είναι ο Shannon. Το έργο του J. Bernoulli δείχνει μια εναλλακτική διαδρομή με την οποία τα μαθηματικά εφαρμόστηκαν στον πραγματικό κόσμο, έναν κόσμο που δεν εμπεριείχε Πλατωνικές έννοιες για το ρόλο των μαθηματικών, αλλά μάλλον τις τεχνικές της εμπορικής αριθμητικής και, ειδικότερα, της άλγεβρας (Sylla, 2013). Ο J. Bernoulli έχει μια ιδιαίτερη αντίληψη τέτοιων ζητημάτων. Αν π.χ., λάβουμε υπόψη πως μελετώντας μια ερώτηση σχετικά με τον ανατοκισμό, έδωσε τον τύπο του κι έδειξε ότι το ανάπτυγμα σε απειροσειρά του $(1 + 1/n)^n$ συγκλίνει σε ένα συγκεκριμένο αριθμό στο διάστημα 2 έως 3, τον γνωστό πλέον ως αριθμό e. Καθόσον γνωρίζουμε *η πρώτη* φορά που ο αριθμός e εμφανίζεται απομονωμένα είναι στο 1690. Σε εκείνο το έτος ο Leibniz έγραψε μια επιστολή προς τον Ch. Huygens και σε αυτήν χρησιμοποίησε το συμβολισμό b για αυτό που σήμερα ονομάζουμε e (Maor, 2005· O'Connor & Robertson, 2001).

Στο ίδιο πνεύμα, ο L. Euler, γιός μαθητή του J. Bernoulli, αναφορικά με τον τύπο συνεχούς ανατοκισμού, προσεγγίζει επακριβέστερα αυτόν τον αριθμό, ο οποίος συνδέεται, έκτοτε, περισσότερο με εκείνον. Ακόμα όμως κι ο περίφημος L. Euler που υπολογίζει και πολλά περαιτέρω, θα διατυπώσει άστοχες υποθέσεις για τη ανθρώπινη θνητότητα και για τον πολλαπλασιασμό του είδους (Euler, 1797). Δεν θα αντιληφθεί δηλαδή την απλή λύση, ότι κάθε άνθρωπος και όχι μόνον, προέρχεται από ζεύγος γονέων κι έτσι δημιουργείται μια πολύ μακριά αλυσίδα, η οποία συνδέεται όχι μόνο με το είδος του, σύμφωνα με την εξελικτική θεωρία. Η λύση δείχνει απλή, εφόσον συλλάβει κανείς aposteriori το πώς φθάνουμε σε αυτή, ενώ βέβαια ο Darwin ήταν εν προκειμένω εκείνος που αντιλήφθηκε περισσότερα (Saaty, 2008). Ούτε ο ίδιος όμως, αλλά ούτε και κάποιος από τους προαναφερθέντες εξαίρετους διανοητές, συνέλαβε τα πάντα, όμως άπαντες συνέλαβαν κάτι πολύ σπουδαίο.

Ο J. Bernoulli μας ενδιαφέρει επιπροσθέτως, επειδή είναι αυτός που καταρχάς σχετίζεται με τη στροφή των μαθηματικών προς τις ανθρώπινες υποθέσεις, από και προς τις σφαιρίσεις, επίσης. Προς επίρρωση του ισχυρισμού μας θα αναφερθούμε σε ορισμένες μόνον πτυχές του πολυδιάστατου έργου του.

Οι A. Dixit και S. Skeath (1999) γράφουν ότι τα παίγνια στρατηγικής, στα οποία αναφέρεται η θεωρία παιγνίων, αναπτύσσονται σε κάποιο φάσμα μεταξύ τύχης και ικανότητας, επικαλούμενοι, κατόπιν, και σε πολλές δεκάδες σελίδες, το παράδειγμα του τένις. Ο J. Bernoulli θεωρούσε την αντισφαίριση της εποχής ως παίγνιο ικανότητας και η σύζευξή τους με τα παίγνια τύχης την οποία θεμελίωνε στην «ίδια» κατά βάση σφαίριση, δεν αφήνει πολλά περιθώρια ως προς την εξακρίβωση της προτεινόμενης συσχέτισης. Σύμφωνα με τον I. Schneider (n.d.), ο J. Bernoulli μεταχειρίζεται τη Jeu de Paume, μια σφαίριση που θεωρείται προγονική του τένις, ως παίγνιο τύχης. Προσθέτουμε όμως ότι έχει πολύ ιδιαίτερες αντιλήψεις περί της τύχης. Επιπλέον, στο έργο του *Ars Conjectandi* (1713/2006) ο λήπτης της απόφασης φέρεται να χρησιμοποιεί σχετικές συχνότητες ως μέρος των στοιχείων προκειμένου να αυξήσει την πιθανότητα λήψης μιας καλής απόφασης. Έτσι οι πιθανότητες και οι συχνότητες είναι στενά συσχετιζόμενες, χωρίς όμως να είναι το ίδιο πράγμα (Sylla, 2013). Στο παρόν κείμενο, ανατρέχουμε καταρχάς στο έργο του J. Bernoulli, καθώς διαπιστώνεται ότι είναι ποικίλες οι επιδράσεις του, οι οποίες σχετίζονται:

α) με πτυχές του πλούσιου έργου του, στις οποίες αναγνωρίζουμε πολλές από τις μετέπειτα εξελίξεις,

β) με τη συνέχιση του ενδιαφέροντος που εκ των πραγμάτων επέδειξαν οι «πνευματικοί κληρονόμοι» του, πρωτίστως, ίσως, τα μέλη της ίδιας οικογένειας διακεκριμένων επιστημόνων,

γ) με την ανάδειξη κι επέκταση των παραπάνω πτυχών σε εργασίες μεταγενέστερων επιφανών επιστημόνων, όπως ο A.A. Markov κ.ά.

Η επιστημονική παραγωγή του J. Bernoulli αποτελεί έναν σημαντικό κρίκο στην προέλευση της θεωρίας παιγνίων. Είναι μάλιστα κάτι πολύ περισσότερο από ένας σκέτος κρίκος σε μια αλυσίδα αλληλεπιδράσεων. Κι αυτό, καθώς η τελευταία δεν ξεκινά από την αρχαιότητα, μήτε κλείνει με την αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων από τον

Kolmogorov το 1933. Σύμφωνα με τον Jerzy Neyman, μπορεί κάποιος να πει, με έναν αναπόφευκτο βαθμό υπεραπλούστευσης, ότι η θεωρία των πιθανοτήτων ξεκίνησε το 1713, με τη δημοσίευση της *Ars Conjectandi* του J. Bernoulli (Sylla, 2014). Πολύ πιο συχνά, όμως, η αφετηρία του λογισμού πιθανοτήτων αναφέρεται η αλληλογραφία μεταξύ των Pascal και Fermat το 1654, σε σημαντικό βαθμό χάρη στη σχετική απόφανση του de Montmort στη δεύτερη έκδοση του έργου του *Essay d'analyse sur les jeux de hazard,* το 1713. Στην 1η έκδοσή του, το 1708, έθετε ζητήματα που είχε ήδη απαντήσει, όπως φημολογούνταν, ο αποθανών – ήδη από το 1705 – J. Bernoulli, του οποίου όμως το έργο *Ars Conjectandi* εκδόθηκε post mortem. Ανάλογα με τον τρόπο προσέγγισης του συγκεκριμένου ζητήματος, ή και γενικότερα, η απόδοση των χρονικών πρωτείων στη λύση ενός προβλήματος ενδέχεται να είναι ένα πρόβλημα δίχως λύση.

Υπό παρόμοια συλλογιστική, αντίστοιχης σημασίας κρίκος αναφορικά με τα παίγνια είναι η Jeu de Paume.Σήμερα σχετίζεται συνήθως με το σύγχρονο τένις (αντισφαιρίση), όμως δεν πρόκειται για τη συγκεκριμένη σφαίριση και μόνον. Αναφέρεται πολύ εκτεταμένα στη Jeu de Paume ο ίδιος ο J. Bernoulli, όπως και μετά από εκείνον ο N. Bernoulli, καθώς και διάφοροι επιστήμονες με τους οποίους ο τελευταίος αλληλογραφεί.

Κρίνουμε ως υπερβολικό να συμπεριλαμβάνεται στις πηγές προέλευσης της θεωρίας παιγνίων το Ταλμούδ, όπως ενίοτε αναφέρεται. (για παράδειγμα εκ της M. Hykšová [n.d.], ή του P. Walker [2012]). Η συσχέτιση με το Ταλμούδ επιτελείται μάλλον υπό την επίδραση μιας δημοσίευσης του Εβραίου και βραβευμένου με Νόμπελ Οικονομίας, R. Aumann (Aumann & Maschler, 1985). Υπό τη λογική μιας τέτοιας σύζευξης, θα μπορούσε να συγκαταλεχθεί ως πρόδρομος του Darwin και της εξελικτικής θεωρίας ο Αναξίμανδρος, που πρέσβευε την καταρχήν προέλευση του ανθρώπου από άλλα ζωικά είδη και δη θαλάσσια (Kirk, Raven & Schofield, 2006). Εδώ δεν προεξοφλείται η εξέλιξη, όπως έχει υποστηριχθεί μερικές φορές, αλλά μάλλον γίνεται αναφορά στην οντογένεση της αυθόρμητης γένεσης (Mayr, 2008). Δεν αμφισβητούμε γενικότερα και ειδικότερα τις συλλήψεις και τη διανοητική σοφία του R. Aumann και του Ταλμούδ ή τις «εικασίες» του Αναξίμανδρου, όμως η ενδεχόμενη συμπερίληψή τους στις πηγές της θεωρίας παιγνίων, όχι μόνο δεν γεφυρώνει το χρονικό χάσμα, αλλά λειτουργεί, επιπλέον, αρκετά παραπλανητικά. Αντίθετα, αρκετά πιο εύστοχα κι εύλογα στη χρονολόγησή των πηγών της θεωρίας παιγνίων, συγκαταλέγεται η εξελικτική θεώρηση του Darwin, βάσει της αναλυτικής αιτιολόγησης του ισχυρισμού του σπουδαίου βιολόγου, ότι η φυσική επιλογή κατατείνει στο να εξισώνει τα πληθυσμιακά ποσοστά των φύλων. Ο Darwin στην πρώτη έκδοση της *Καταγωγής του Ανθρώπου* είχε διατυπώσει ως εικασία – και μάλιστα στέρεα καθώς δείχνουν οι εξελίξεις – τη λεγόμενη

«Αρχή του Fisher» («Fisher's principle») πριν από τον ίδιο το Fischer (Osborne, 1996). Αυτά τα ποσοστά δεν είναι ασφαλώς τυχαία, απαιτείται δε επαναξιολόγηση και των σφαιρίσεων μεταξύ άλλων, όπου άνδρες και γυναίκες μήτε συμμετέχουν εξίσου, μήτε διακρίνονται εξίσου. Όσον αφορά όμως τη συσχέτιση της θεωρίας παιγνίων με τη βιολογία, έχουμε και πάρα πολλές άλλες εργασίες, όπως το πολύ πιο πρόσφατο έργο του John Maynard Smith (1982). Έχουμε την εξελικτική θεωρία παιγνίων.

Εν προκειμένω στρεφόμαστε στον J. Bernoulli καθότι κατανοεί το παιχνίδι σφαιρικά. Κάνει μια πρώτη σύνθεση στη «θεωρία παιγνίων» - πολύ προτού εμφανιστεί ο J. Von Neumann και θεμελιωθεί η θεωρία παιγνίων ως κλάδος της οικονομικής επιστήμης. Η γνωστή θεωρία παιγνίων δομείται πάνω στην αριθμητική πιθανότητα. Αποτελεί τρόπον τινά μια νέα σύνθεση, εξελιγμένη ίσως όπως η νέα σύνθεση της εξελικτικής θεώρησης˙ πολύ μικρότερη μάλλον, ή και μεγαλύτερη δυνητικά. Πάντως ο J. Bernoulli στη σύνθεσή του δεν ερευνά τα τυχερά παίγνια και μόνον. Δεν «μισεί» τα τυχερά παίγνια όπως ο B. Pascal, ή δεν τα «λατρεύει» όπως παλαιότερα ο G. Cardano. Κατανοεί καλά για ποιο λόγο συμβαίνει ότι συμβαίνει σε μια σφαίριση.

Η επικέντρωση στον J. Bernoulli:

α) καθιστά εύκολο να δούμε πόσο αργή ήταν η σύζευξη ανάμεσα στην επιστημική έννοια της πιθανότητας με τα μαθηματικά των παιγνίων, τυχερών και όχι μόνον, όπως οι σφαιρίσεις.

β) δείχνει ότι το ουσιώδες για εκείνον ήταν ότι κάποιο υπεύθυνο πρόσωπο θα πρέπει, κατά τη λήψη των αποφάσεων, να επιστήσει την προσοχή του στις συχνότητες, τα κόστη και τα οφέλη (Sylla, 2013),

γ) αναδεικνύει ότι το «παιχνίδι», εκ της σκοπιάς του J. Bernoulli, όπως πολύ περισσότερο κι εκ της σκοπιάς του Pascal πριν από αυτόν, κατά κάποιο τρόπο παίζεται ασφαλώς με μια μπάλα. (σκοπιά που καθώς φαίνεται δεν είναι ακόμη ξεπερασμένη).

Οι αιώνες που μας χωρίζουν από την εποχή της ανάδειξης της «στέρεης πραγματικότητας» των αριθμητικών πιθανοτήτων, δεν είναι τόσοι όσοι μας χωρίζουν από την *Προέλευση της Γεωμετρίας*, κατά τον τρόπο που έθεσε το ζήτημα ο E. Husserl (Husserl, 2003). Αν αναζητάμε την προέλευση του λογισμού των πιθανοτήτων και κύτταρα της θεωρίας παιγνίων, οφείλουμε να διαβάσουμε την Letrre à un amy, sur les parties du jeu de paume όπως και το κατοπινό *Ars Conjectandi*. Λαμβάνοντας υπόψη το μέγεθος της ολιγοσέλιδης εργασίας του Ch. Huygens και της αλληλογραφίας των Pascal – Fermat, δεν είναι πάρα πολύς ο όγκος των αρχικών κείμενων προς ανάγνωση, που μπορούν και να μας κατατοπίσουν κι ως προς το τι συνεισέφερε ο καθείς. Δεν ενέχουν και τόση διαφιλονικία, όση η επινόηση του διαφορικού λογισμού ανάμεσα στο Newton και το Leibniz αφενός κι αφετέρου μπορούν να είναι κατατοπιστικά για τον τρόπο επινόησης κι εξέλιξης ορισμένων πολύ σημαντικών ιδεών. Ως εκ τούτου, δείχνει λιγότερο δύσκολη η υπόθεση αναζήτησης της ιστορικής εξέλιξης των ιδεών κυρίως πολύ λιγότερο κάποιων προστατών αγίων, ή μυθικών «πρωτοϊδρυτών».

1.1 Jacob Bernoulli

Ο J. Bernoulli έζησε κατά την εποχή που σημειώθηκε η μέχρι τότε ανήκουστη σύλληψη μιας «νεωτερικότητας» (modernity), απερίφραστα αντιπαρετιθέμενης στην «αρχαιότητα», κι όχι απαραίτητα προς όφελος της τελευταίας (Anderson, 1997). Η διαμάχη αρχαίων και νεότερων κυριάρχησε στη Γαλλική πνευματική ζωή το τελευταίο τέταρτο του 17ου αιώνα. Την εποχή του Λουδοβίκου ΙΔ΄ οι Γάλλοι είχαν το θάρρος να θεωρήσουν το δικό τους πολιτισμό ως ένα έγκυρο μοντέλο ισότιμο με τον πολιτισμό των αρχαίων και επέβαλαν αυτή την άποψη στην υπόλοιπη Ευρώπη (Anderson, 1997).

Ο Descartes απαλλάσσεται από το βάρος των αρχαίων, όμως τόσο ο ίδιος όσο και οι θέσεις του αποτελούν μεγάλη διανοητική πρόκληση της εποχής· πρόκληση για τον Leibniz, για τον J. Bernoulli κ.α., που στρέφονται προς τους αρχαίους. Δεν διατρέχουν τη διαδρομή μέχρι εκείνους, αλλά ανατρέχουν κατευθείαν σε εκείνους κι ενίοτε τους παραθέτουν, ακόμα κι όπως τους βρίσκουν (Schneider, 2006). Το ενδιάμεσο χρονικό διάστημα και υπήρξε κι επέδρασε, όμως οι εν λόγω μελετητές συχνά ομνύουν στην αρχαιότητα, ακόμα και για σπουδαίες επινοήσεις δικές τους, που άλλαξαν την επιστήμη, και τις οποίες δεν πήραν μάλλον ούτε από τους αρχαίους χρόνους, ούτε από τους ενδιάμεσους. Ο σκεπιστικιστής Descartes, με τους μαθητές του οποίου θήτευσε ο J. Bernoulli, κατόρθωσε μέχρι ενός βαθμού να αποκαταστήσει την εμπιστοσύνη στις ανθρώπινες νοητικές δυνάμεις, απελευθερώνοντάς τες από το βάρος της αυθεντίας του παρελθόντος. Υπήρξε μια από τις σημαντικότερες μορφές του ευρωπαϊκού ορθολογισμού καίτοι οι αντιλήψεις του, έγιναν στόχος του εμπειρισμού που επικράτησε μακροπρόθεσμα, ήταν δε πρωτοπόρος κι ως προς το ότι πρότεινε τα μαθηματικά ως παγκόσμια γλώσσα (Dipert, 2014). Ο J. Bernoulli, όπως κι ο Leibniz, έχουν επίσης πάθος με τον ορθολογισμό, όμως ο Θεός είναι γι αυτούς πραγματολογική προϋπόθεση, δίχως την οποία ο κόσμος δεν νοείται. Όπως συχνά συμβαίνει η πρόοδος τρέφεται κι από τις επιστημονικές αντιπαλότητες.

Στις βασικές φιλοσοφικές θέσεις του Leibniz, όπως συνοψίζονται στη *Μοναδολογία*, ο βασικός αντίπαλος του είναι ο δυϊσμός που εισάγει ο Descartes, ανάμεσα στο σκεπτόμενο και στο εκτατό πράγμα, εκείνο δηλαδή που ορίζεται ως προς την έκταση και την κίνησή του. Η κατά Leibniz οντότητα συγκροτείται ως «μονάδα», δηλαδή ως ενότητα ενέργειας και σκέψης.

Δεν μπορεί να νοηθεί συγκρότηση της πραγματικότητας παρά μόνο αν ο ανθρώπινος λόγος θέσει ως a priori πραγματολογική προϋπόθεση τη θεότητα. Η μονάδα ως το έσχατο στοιχείο της πραγματικότητας διαμεσολαβεί ανάμεσα στην ανθρώπινη λογική και τον Θεό. Στο σχέδιο του κόσμου που συνέταξε, εξ αρχής έλαβε υπόψη του, κάθε επιμέρους μονάδα και ρύθμισε τον κόσμο, έτσι ώστε να βρίσκονται όλες οι μονάδες σε αρμονία μεταξύ τους. Σχεδίασε καθεμιά από τις ουσίες με έναν τόσο ακριβή τρόπο, ώστε να υπάρχει σε όλες αμοιβαία επίδραση κι έτσι κάθε μονάδα να ενέχει μέσα της όλες τις άλλες. Ο Leibniz χρησιμοποιεί το παράδειγμα δύο ρολογιών που δρουν το ένα πάνω στο άλλο, δίχως κάποιος ωρολογοποιός (όπως εν προκειμένω ο Ch. Huygens) να ασχολείται συνεχώς με το να τα θέτει σε συμφωνία μεταξύ τους. Ο Ch. Huygens, ο G. Leibniz, ο J. Bernoulli, πιστεύουν ότι είναι κατασκευασμένα με τέτοιο τρόπο εκ των προτέρων, ώστε να βρίσκονται πάντα σε συμφωνία. Ο Newton επίσης, είναι αρειανιστής κι αλχημιστής˙ όχι ο πρώτος εκπρόσωπος της εποχής του Λόγου, αλλά ο τελευταίος των μάγων, όπως διαπιστώνει ο Keynes. Κατά την εποχή εκείνη τη θέση της μεσαιωνικής αντίληψης της συγχρονικότητας στη διάρκεια του χρόνου παίρνει η κατά τον W. Benjamin (1999) αντίληψη ενός *«ομοιογενούς κενού χρόνου»* Σύμφωνα με αυτήν, η συγχρονικότητα είναι εγκάρσια, τέμνει το χρόνο και δε χαρακτηρίζεται από προαναγγελία κι εκπλήρωση, αλλά από χρονική σύμπτωση, τη μετράμε δε με ρολόϊ και ημερολόγιο.

Ο J. Bernoulli είναι μια αρκετά ιδιαίτερη περίπτωση αυτής της μετάβασης. Μπορούμε μεν επιπόλαια κάπως να χαρακτηρίσουμε σχεδόν όλους τους επιστήμονες και φιλοσόφους της εποχής του ως ντετερμινιστές, όμως η περίπτωσή του διαθέτει και πολλές ιδιαιτερότητες. Πιστεύει ως ντετερμινιστής ότι υπάρχει κάποια υπέρτατη δύναμη που γνωρίζει συγχρόνως όλα όσα εμείς οι άνθρωποι δεν αντιλαμβανόμαστε, κι όσα αντιλαμβανόμαστε. Εκ των υστέρων πρωτίστως, κι εκ των προτέρων εφόσον μάθουμε να προγιγνώσκουμε. Ιδιαίτερη περίπτωση είναι και καθότι αντιλαμβάνεται όσο ελάχιστοι εκείνοι την εποχή τη σχέση του χρόνου με το ρολόϊ και το ημερολόγιο, όμως επίσης ενδιαφέρεται ζωηρά για το «άνοιγμα» της ενδεχομενικότητας. Επιπλέον, ασχολείται και με την εντός αυτής υποκειμενικότητα. Πολυμαθής και πολύγλωσσος αποτελεί επιπροσθέτως ιδιάζουσα περίπτωση καθώς ανήκει αφενός στην εποχή εκείνη, μα βεβαίως ανήκει και σε αυτούς που «έσπρωξαν» την εποχή τους και προχώρησαν πολλές υποθέσεις. Θέλει να είναι και καταφέρνει να είναι καινοτόμος, ρηξικέλευθος, μα και με τα πριν από αυτόν ασφαλώς δεν είναι, ούτε νομίζει πως είναι ξεκομμένος.

Η πρώτη επιστημονική δημοσίευση του J. Bernoulli ανάγεται στο 1681 σχετικά με έναν πολύ λαμπρό κομήτη που είχε περάσει κοντά στη γη το προηγούμενο έτος, για το οποίο ισχυρίστηκε ότι θα ξαναπερνούσε στις 17 Μαίου 1719. Η πρόβλεψή του ήταν λανθασμένη, όπως αποδείχθηκε μετά το θάνατό του (Brewster, 1832). Δεν το θεωρούσε πάντως θεϊκό σημάδι, όπως ήθελε η κυρίαρχη άποψη. Χάρη στην παρατήρηση του φαινομένου, όπως γράφει ο l. Mlodinow, διαπίστωσε ότι ήταν τα μαθηματικά, όχι η εκκλησία, εκείνο με το οποίο ήθελε να απασχολήθει στη ζωή του (Mlodinow, 2008)**.** Η διαπίστωση σηματοδότησε όχι μόνο τη δική του λαμπρή μαθηματική σταδιοδρομία, μα και του μεγαλύτερου οικογενειακού δένδρου στην ιστορία των μαθηματικών. Ο J. Bernoulli, αν είχε ακολουθήσει τις ισχυρές πατρικές παραινέσεις για να σπουδάσει θεολογία, θα είχε γίνει κληρικός και θα είχε ασφαλώς αρκετά υψηλότερο εισόδημα. Δεδομένου ότι τα εμβλήματα και τα motto συνηθίζονταν εκείνη την εποχή, η επιλογή από τον ίδιο του Φαέθοντα και του «Ad astra invito patre» καταδεικνύει ότι – προτιμούσε παρά την θέληση του πατρός του – να τραβήξει «κατά τα αστέρια κι ας κατακεραυνωθεί» (Bernoulli, 1713/2006).

Ο J. Bernoulli βρίσκει καταρχήν ανώτερα τα μαθηματικά από οποιαδήποτε επιστήμη. Ενδεικτικό του τι εννοεί και τι προτείνει είναι το παρακάτω αποσπάσμα από τις διάφορες θέσεις που υπερασπίστηκε στις 12 Φεβρουαρίου 1686.

> *«Οι συγκεκριμένες μαθηματικές πειθαρχίες όπως η φυσική, η ιατρική, η αστρονομία, η οπτική, η στατική, η βαλλιστική (αν θέλετε και η αστρολογία) κ.λπ. προσθέτουν στα αφηρημένα μαθηματικά μόνον βέβαιες αρχές, ως θεμέλια […]..Εξ 'ου και είναι σαφές ότι η βεβαιότητα αυτών των επιστημών εξαρτάται αποκλειστικά από τη βεβαιότητα αυτών των αρχών και όχι από τον τρόπο σχηματισμού συμπερασμάτων, τα οποία θα πρέπει να συναχθούν από τις αρχές με το πλέον αποδεικτικό σκεπτικό. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο τα αφηρημένα μαθηματικά είναι ακατανίκητης βεβαιότητας, γιατί η αστρολογία είναι μάταιη κι ανώφελη, ενώ οι υπόλοιπες είναι ενδιάμεσης βεβαιότητας μεταξύ αυτών των δύο. Αυτό γίνεται επειδή είναι τέτοιες οι αρχές επί των οποίων έχουν ανεγερθεί»*

(Bernoulli, 1713/2006:233-234)

Κατά το συγγραφέα οι αρχές των μαθηματικών δεν είναι δέον να θεωρηθούν αυτονόητες, αυταπόδεικτες ή αναγκαίες, αλλά μάλλον περιλαμβάνουν πολλές αρχές εμπειρικής προέλευσης οι οποίεςενδέχεται να είναι αβέβαιες. Δεν είναι μόνον επιστημονικές οι πειθαρχίες από τις οποίες ο ίδιος συνάγει αρχές, μα και παιχνίδια όπως προκύπτει από το τρανταχτό παράδειγμα της Jeu de Paume. Με άλλα λόγια συνάγει αρχές και από μια σφαίριση, όπου η κίνηση της μπάλας δεν είναι μόνον φυσικό φαινόμενο, με την ίδια επακριβώς έννοια που είναι η κίνηση κάποιου πλανήτη. Το «σώζειν τα φαινόμενα» στην εξήγηση των κινήσεων του ηλιακού μας συστήματος υποδήλωνε ότι έστω κι αν σίγουρα μια μόνον λύση θα ήταν η ορθή, αυτές θα μπορούσαν να εξηγηθούν κατά δυο τρόπους: Με «κέντρο» τη γη και τροχιές που διαγράφουν επίκυκλους επί κύκλων, ή όπως αποδείχθηκε κατόπιν αιώνων με κέντρο τον ήλιο. Κατά πόσον όμως θα μπορούσε τότε και σήμερα να μας ενδιαφέρει κάτι αντίστοιχο στην αντισφαίριση που είναι παιγνιώδης «εκ φύσεως»; Είναι εντυπωσιακό το πόσο διαφορετικά την αντιλαμβάνεται J. Bernoulli, ακόμα κι από τον σπουδαίο Newton, τον οποίο η ίδια σφαίριση τον βοηθά να αντιληφθεί την χρωματική ανάλυση του φωτός. Η γνώμη του J. Bernoulli θα μπορούσε ακόμα και σήμερα ενδεχομένως να μας στρέψει προς καλύτερες απαντήσεις. Όπως παρατηρούσε στις θέσεις που έθετε προς συζήτηση κατά το διαγωνισμό για την κενή έδρα των Μαθηματικών στη Βασιλεία το 1687, ***η άλγεβρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παρέχει τόσους πολλούς νέους κανονισμούς όσους ίσως θα ήθελε κανείς***.

Ο J. Bernoulli έχει πάθος με τα μαθηματικά, που εκείνα τα χρόνια – και για πολύ καιρό – βρίσκονται ενδεχομένως ακόμα και στο απώγειό τους. Ενδεικτικό της ισχύος τους, αλλά και της εποχής εκείνης κατά την οποία η κατασκευή του εκκρεμούς ρολογιού από τον Ch. Huygens εισάγει την ανθρωπότητα σε μια νέα θεώρηση του χρόνου, είναι το παρακάτω περιστατικό σχετικά με τον βραχιστοχρονισμό του κυκλοειδούς. Σχετίζεται με κάποιο αποτέλεσμα που έρχεται σε σύγκρουση με την διαίσθηση, σύμφωνα με την οποία θα περιμέναμε η ταχύτερη διαδρομή να είναι η ευθεία που συνδέει τα δυο σημεία, απλά και μόνο επειδή είναι η βραχύτερη απόσταση. Η απόδειξη του βραχιστοχρονισμού του κυκλοειδούς σημειώθηκε το 1696, κατόπιν μιας πρόσκλησης που απηύθυνε ο Johan προς τους οξυδερκέστερους μαθηματικούς του κόσμου, δίνοντάς τους έξι μήνες περιθώριο να λύσουν το πρόβλημα. Ο Leibniz το έλυσε την ίδια ημέρα που το έλαβε. Επιπροσθέτως, προέβλεψε πολύ «ορθώς», ότι μόνο πέντε άτομα θα κατάφερναν να λύσουν το πρόβλημα, και μάλιστα τους ονομάτισε: ο Newton, οι δυο αδελφοί Bernoulli και ο Guillaume de l’ Hospital, ο οποίος χρειάστηκε λίγη βοήθεια από τον Bernoulli (Landes, 2012).

Επισημαίνουμε βέβαια την πολύ μεγάλη σπουδαιότητα και κάποιων άλλων τεχνικών ανακαλύψεων πέραν του ρολογιού· όπως οι φακοί, που οδήγησαν αφενός προς το τηλεσκόπιο, το οποίο έδωσε μεγάλη ώθηση στην επιστημονική πρόοδο της αστρονομίας κι αφετέρου προς το μικροσκόπιο το οποίο έδωσε μεγάλη ώθηση στην επιστημονική πρόοδο της βιολογίας. Ο J. Bernoulli πέραν του ενδιαφέροντός του για την αστρονομία αφοσιώθηκε στα μαθηματικά και τη μελέτη της γεωμετρίας καταρχήν, ενώ είχε ένα σύντομο πέρασμα από το Πανεπιστήμιο της Χαϊδελβέργης. Του προξένησε εντύπωση κι απασχόλησε πάρα πολύ μια στριφνή δημοσίευση του Leibniz, το 1684, υπό έναν πολύ μακρύ τίτλο, ανάλογο κάπως της δυσκολίας των όσων ακολουθούσαν. Πρόκειται για τη θεωρούμενη πρώτη έντυπη δημοσίευση σχετικά με τον απειροστικό λογισμό, που ως γνωστόν αναπτύσσεται παράλληλα κι από τον Newton, οδηγεί δε σε μια επανάσταση στα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Ο J. Bernoulli μαζί με το αδελφό του Johan αντιλήφθηκαν πολύ γρήγορα και προσέδωσαν ακόμα περαιτέρω ισχύ στη νέα αυτή προσέγγιση˙ τότε που το πεδίο ήταν πολύ πιο τραχύ, σε βαθμό που η προσφορά τους αναγνωρίζεται ως εφάμιλλη του Leibiniz, από τον ίδιο κιόλας. Παρά το γεγονός ότι ο J. Bernoulli δημιούργησε κατόπιν μια σπουδαία νέα προσέγγιση στη θεωρία πιθανοτήτων, η ισχύς των μαθηματικών δεν έδωσε το έναυσμα για μεγάλη πρόοδο στη στατιστική, καθώς πήραν το προβάδισμα οι φυσικές επιστήμες (Polasek, 2000).

Ο J. Bernoulli σημείωσε σημαντικές πρωτιές στην ιστορία της συμπερασματολογικής (επαγωγικής) στατιστικής. Διέκρινε ξεκάθαρα την έννοια της αξίας του δείγματος από την έννοια της αξίας του πληθυσμού, καθώς έθεσε ρητά το πώς συνάγεται το τελευταίο από το πρώτο. Συγχρόνως, κατέγραψε την κατανομή δειγματοληψίας εκ της συχνότητας του δείγματος με δεδομένη τη συχνότητα του πληθυσμού και θεώρησε την εν λόγω κατανομή και το θεώρημα που βασίζεται σε αυτήν ως το θεμελιώδες για τη συμπερασματολογία. Έτσι ο J. Bernoulli πρέπει να θεωρηθεί ως ο ιδρυτής της ευρείας σχολής της συμπερασματολογίας. (Dempster, 1966).

Ο βαθμός βεβαιότητάς μας και η σύλληψη των πιθανοτήτων είναι κατά κάποιο τρόπο υποκειμενική υπόθεση για τον J. Bernoulli, που αντιλαμβάνεται όμως με πολύ συγκεκριμένο τρόπο το πώς προάγεται η συνολική ανθρώπινη γνώση κι όχι μόνον η δική του.

> *«Όλη μας η σκέψη, όπως μια ποσότητα, μεγεθύνεται με βήματα και βαθμιαία αυξάνει, έτσι ώστε από τη μια βαθμίδα προς την επόμενη να απαιτείται μόνον, τρόπος του λέγειν, ένα απειροελάχιστα μικρό βήμα. Κανένας δεν είναι τόσο ηλίθιος ώστε, εάν προχωράει με τάξη κι έχει καταλάβει τι προηγήθηκε, να μην μπορεί με τις δικές του δυνάμεις να προχωρήσει προς το επόμενο στάδιο. Ακόμα και οι πιο ευφυείς ανακαλύψεις συχνά έχουν αρχές τόσο προφανείς και μηδαμινές, που ίσως δεν έχουν οξυδερκώς συγκριθεί με το είδος της αγυρτείας που προκαλεί στους ανίδεους την έκπληξη, ενώ εκείνοι που ξέρουν το κόλπο γελούν και το βρίσκουν ευκαταφρόνητο… Βεβαίως γνωρίζουμε πλέον καλά ότι και η σκέψη είναι προϊόν μιας μακράς διαδικασίας, κανένας δεν είναι τόσο βλάκας και κανένας δεν είναι τόσο έξυπνος όσο όταν γεννήθηκε, οπότε είχε τις προϋποθέσεις να γίνει αυτό που έγινε – καθένας αξίζει να κατακτήσει αυτό που θα κατακτήσει δίχως να αποτύχει».*

(Bernoulli, 1713/2006:30)

Το παραπάνω απόσπασμα είναι ιδιαιτέρως χαρακτηριστικό της ευρύτητας του πνεύματός του. Η γνώση μας μεγεθύνεται έτσι, με μάλλον μικρά βήματα, κάπως σαν μια ικανότητά μας που τη βελτιώνουμε σταδιακά εξασκούμενοι σε αυτή «συστηματικά». Την αξιοποιούμε υπό κάποια ευρύτερη έννοια κι έτσι μάλλον τη βελτιώνουμε, δεν βελτιώνεται ως εκ θαύματος. Δεν αποκλείεται βεβαίως γενικότερα να συσσωρεύονται και ανωμαλίες, που να προκαλούν εντέλει προβλήματα σε κάποιο κυρίαρχο παράδειγμα, ή και την αλλαγή του, καθώς έχει ως γνωστόν προτείνει ο Th. Khun (1962). Η αντίληψη όμως που έχει ο J. Bernoulli για την πρόοδο της γνώσης, ταιριάζει πολύ στην κατοπινή εξελικτική θεωρία, που δεν έχει διατυπωθεί ως σκέτη εικασία. Η λεγόμενη εξελικτική θεωρία, δεν είναι ασφαλώς εικασία, ούτε και θεωρία πλέον. Στην πραγματικότητα, πολλοί βιολόγοι δεν θεωρούν την εξέλιξη θεωρία, αλλά απλό γεγονός που το έχουν τεκμηριώσει (πλέον) οι γονιδιακές δεξαμενές από γενιά σε γενιά και οι αλλαγές στην αλληλουχία των απολιθωμάτων σε διαδοχικά, επακριβώς χρονολογημένα, γεωλογικά στρώματα (Mayr, 2008). Το «από το ψάρι έως τον άνθρωπο» πλαίσιό μας, υποστηρίζεται τόσο ισχυρά, ώστε δεν προσπαθούμε πλέον να συγκεντρώσουμε αποδείξεις γι’ αυτό – το να κάναμε κάτι τέτοιο θα ήταν σαν να ρίχναμε μια μπάλα πενήντα φορές για να δοκιμάσουμε αν ισχύει η θεωρία της βαρύτητας. Το ίδιο ισχύει και για το βιολογικό μας παράδειγμα, όπου θα έχουμε την ίδια τύχη να δούμε την μπάλα μας να μένει ψηλά την πεντηκοστή πρώτη φορά που θα την πετάξουμε, όπως έχουμε για την εξεύρεση ισχυρών αποδείξεων εναντίον του (Shubin, 2009). Τις μπάλες βέβαια μπορούμε να τις ρίχνουμε ψηλά και προς άλλες κατευθύνσεις, ακόμα και γι άλλους λόγους. Ασφαλώς ο J. Bernoulli δεν θα ζήσει αυτή τη σύζευξη του αφηρημένου με το συγκεκριμένο, σε τόσο μεγάλο βάθος χρόνου, με το συγκριτικά πολύ μεγαλύτερο διάστημα που δεν υπήρχαν άνθρωποι. Ο ίδιος υποστηρίζει ενδεικτικά ότι ο λόγος για τον οποίο δεν ανακαλύπτουμε όλοι μας τα πάντα, είναι ότι υπάρχει τόσο μεγάλη πολλαπλότητα πραγμάτων, ώστε κανένας δεν έχει επαρκή ελεύθερο χρόνο ή ευκαιρία να δώσει προσοχή στα πάντα. Ακόμα κι αν δυο άνθρωποι υποβάλουν ο καθείς τη νόησή του στην ίδια ερώτηση, συχνά συμβαίνει να ακολουθούν διαφορετικές προσεγγίσεις, όχι εξίσου ταιριαστές με τη φύση του πράγματος, το οποίο δεν θα μπορούσε να προβλεφθεί κατά την αρχή. Είναι πεπεισμένος ότι ακόμα και δυο παρόμοιοι ερευνητές, ίσης ευφυίας, ενδέχεται να παρατηρούν τις ίδιες άγνωστες γαίες και αμφότεροι να επιστρέψουν πίσω φορτωμένοι με λάφυρα, τα οποία κανένας τους δεν θα μπορούσε να μεταφέρει, αν το επιχειρούσε μόνος του (Bernoulli, 1713/2006).

Λαμβάνοντας υπόψη και τον επιστημονικό ανταγωνισμό με το μικρότερο αδελφό και μαθητή του Johan, η παραπάνω θεώρηση του J. Bernoulli είναι πολύ ενδεικτική επίσης κι ως προς το πώς αντιλαμβάνεται ο ίδιος την υποκειμενικότητα. Αυτή η υποκειμενικότητα, δεν είναι βεβαίως ταυτόσημη, με εκείνην που εννοείται από τον J. Von Neumann και τη μετέπειτα θεωρία παιγνίων˙ πολύ περισσότερο δε από άλλους ακόμα πιο ακραίους υποστηρικτές μιας υποκειμενικής-προσωπικής διάστασης, μετά ή και πριν από εκείνον, όπως π.χ. από τον de Fineti (1974). Ούτε επίσης, ταυτίζεται με την πιο διαδεδομένη κατοπινή υποκειμενική προσδοκώμενη χρησιμότητα ως μέθοδο της θεωρίας αποφάσεων υπό την παρουσία κινδύνου, την οποία εντέλει το 1954 αξιωματικοποίησε και υποστήριξε ο L. J. Savage. Η τελευταία ακολουθούσε τις αρχές της θεωρίας παιγνίων του J. Von Neumann, αλλά και τις απόψεις του Ramsey (1931), συνδυάζει δε δυο υποκειμενικές έννοιες:

α) μια υποκειμενική – προσωπική συνάρτηση χρησιμότητας και

β) μια προσωπική κατανομή πιθανότητας, συνήθως στη βάση των πιθανοτήτων του Bayes.

Ο Thomas Bayes είχε πραγματευτεί σε ένα δοκίμιο του, θεολογικές προεκτάσεις των αποτελεσμάτων του Abraham de Moivre του οποίου το πολύ σημαντικό έργο *The doctrine of chances* βασιζόταν στα θεμέλια του J. Bernoulli. Η λύση του **de Moivre** σε ένα πρόβλημα, συγκεκριμένα του καθορισμού της πιθανότητας ενός γεγονότος από την σχετική του συχνότητα, θεωρήθηκε ως απόδειξη για την ύπαρξη του Θεού από τον Bayes (Schneider, 2006). Η Μπεϋζιανή συμπερασματολογία έχει βεβαίως και σήμερα πολύ μεγάλη αναγνώριση κι είναι σημαντική. Θα μπορούσαμε συνοπτικά να θεωρήσουμε ότι χρησιμοποιεί έναν μέσο όρο της πιθανοφάνειας, παρά την μεγιστοποίηση της και ότι η κύρια αμφισβήτηση της οφείλεται στο ότι ο μέσος όρος αυτός σταθμίζεται με βάση την a-priori κατανομή (Gelman et al., 2009). Οι εκ του J. Bernoulli a priori και a posteriori πιθανότητες δεν έχουν να κάνουν με τις a priori και a posteriori κατανομές πιθανοτήτων που χρησιμοποιούνται στην σύγχρονη Μπεϋζιανή ορολογία (Hald, 1990).

Τέτοιες αντιλήψεις διαφέρουν μάλλον κι από την αντίστοιχη συνάρτηση που κατόπιν ανέπτυξε πρώτος ο Daniel Bernoulli, μα ενδεχομένως ακόμα περισσότερο από τη συνολική θεώρηση του J. Bernoulli. Όπως σημειώνει η L. Daston «[…] *ακόμα και οι υποκειμενικές πιθανότητες του Bernoulli συνιστούσαν πολύ πιο σταθερά αντικείμενα από τα αέρια ρεύματα του Γαλιλαίου, ή τη ρητορική του Pascal, και ήσαν εμφατικώς όχι υποκειμενικές με την έννοια των προσωπικών, αυτή την τρέχουσα έννοια μεταξύ των Μπεϋζιανών (Bayesian) της σχολής των Savage de Fineti. Στο βαθμό που οι υποκειμενικές πιθανότητες του Bernoulli έχουν κάποια ανάλογα στον εικοστό αιώνα, αυτές είναι οι λογικές πιθανότητες των John Meynard Keynes και Rudolf Karnap (*Daston, 1995:43).

Οι πιθανότητές του J. Bernoulli αντιπροσωπεύουν τον εύλογο βαθμό βεβαιότητας που θα οφειλόταν σε μια δεδομένη εικασία, επί της βάσης των διαθέσιμων στοιχείων. Κάτι επιπλέον που μπορούμε να επισημάνουμε στην παραπάνω αναλογία, είναι η σε βάθος χρόνου ματιά αμφοτέρων, καθώς είναι γνωστή η συμβολή του Keynes στη στροφή του γενικότερου ενδιαφέροντος προς τη Μακροοικονομία (Keynes, 2001). Δεν μπορεί μάλλον κανείς να αποφανθεί με βεβαιότητα αν η πλέον σύγχρονη διάνοια του J.Von Neumann, ή του J.M. Keynes, εκφράζει καλύτερα αυτά που εννοούσε η διάνοια οποιουδήποτε εκ των Bernoulli, δίχως να υπεισέλθει σε ιδεολογικές διαμάχες.

Ο J. Bernoulli αξίζει να θεωρηθεί ως ο πρώτος ερευνητής που είδε ότι είναι δυνατόν να γίνουν ακριβείς δηλώσεις σχετικά με αβεβαιότητες γεγονότων κατά βάση τυχαίων (Polasek, 2000)˙ ότι μπορούμε να προχωρήσουμε με την πειραματική μέθοδο, δίχως να είναι όλα τόσο προκαθορισμένα όσο πιστευόταν, μα και δίχως να προχωρούμε στα τυφλά. Έτσι ως πειράματα, με την ευρεία έννοια, μπορούμε να υποθέσουμε ακόμα και τις φάσεις μιας οποιασδήποτε σφαίρισης. Θεωρούμε ότι τα πειράματα δεν καταλήγουν κατ’ ανάγκη σε ένα μόνον αποτέλεσμα, (οπότε χαρακτηρίζονται ως ντετερμινιστικά), καθώς ενδέχεται να καταλήγουν σε περισσότερα από ένα, (οπότε και χαρακτηρίζονται τυχαία). Όσα εκ των τελευταίων καταλήγουν σε ακριβώς δυο αποτελέσματα χαρακτηρίζονται ως πειράματα Bernoulli, ή δοκιμές Bernoulli (Bernoulli trials). Σύμφωνα με τα σημερινά δεδομένα, όλες σχεδόν οι παρτίδες των δημοφιλών σφαιρίσεων διεξάγονται ανάμεσα σε δυο μέρη, επιδέχονται δε κι ανάλυση ως αλληλουχίες ανεξάρτητων φάσεων, κατά κάποιο τρόπο ως διεργασίες Bernoulli. Επισημαίνουμε ενδεικτικά πως όλες οι μεγάλες σημερινές διοργανώσεις τους, καταλήγουν με ακριβώς έναν πρώτο νικητή. Ο J. Bernoulli έγραψε βεβαίως για τη δημοφιλή σφαίριση της εποχής του μόνον. Αξίζει να αναρωτηθούμε μήπως δεν είναι εύστοχο να χαρακτηρίζουμε, μα και να διεξάγουμε, τις «μεγάλες» παρτίδες των σφαιρίσεων, ως διεργασίες Bernoulli. Δεν τις διεξάγουμε εντέλει καθ’ υπόδειξή του έτσι, μα ακόμη κι αν η υπόδειξή του ήταν τέτοια, δεν θα μας εμπόδιζε να την ξεπεράσουμε. (Πρόκειται ενδεχομένως για διπλή αστοχία: αφενός ο J. Bernoulli δεν προέταξε την αναγκαστική αριθμητική ανισότητα στο αποτέλεσμα, την οποία προτιμάμε σήμερα ως κανόνα στις παρτίδες κάθε σφαίρισης, αφετέρου μας υπέδειξε και πως μπορούμε να την αποφύγουμε).

1.1.1 Ο J. Bernoulli και η διαφοροποίηση από τους αρχαίους Έλληνες

Οι αρχαίοι Έλληνες δεν είχαν δώσει την έμφαση που αποδίδεται πλέον στο βαθμό της βεβαιότητάς μας, ούτε και στις σχετικές συχνότητες ως θεμέλια για τη διαμόρφωση της εκάστοτε δόξας μας – δηλαδή, έτσι όπως τις εξέτασε ο Bernoulli. Επίσης δεν είχαν δώσει την έμφαση που αποδίδεται πλέον στις σφαιρίσεις, καθώς λόγω πολεμικού ενδιαφέροντος ασχολούνταν συγκριτικά πολύ περισσότερο με μαχητικά αγωνίσματα, ή με το στίβο. Το ίδιο ισχύει και για τους Ρωμαίους, που εντούτοις ασχολήθηκαν πολύ περισσότερο από εκείνους με τις σφαιρίσεις. (Harris, 1972). Οι αρχαίοι Έλληνες δημιούργησαν μια σπουδαία αξιωματική θεωρία για τη γεωμετρία – πέρασαν δε πάρα πολλοί αιώνες ώσπου να υποδειχθούν γεωμετρίες άλλες πέραν της Ευκλείδειας – όμως δεν δημιούργησαν κάποια αντίστοιχη θεωρία πιθανοτήτων. (Hald, 1990). Τα μαθηματικά τους διέπονταν σε μεγάλο βαθμό από αυτό που αναγνωρίζεται ως θεμελιώδες αξίωμα του Πλάτωνα, τη θεωρία των ιδεών, σύμφωνα με την οποία κάθε φαινόμενο έχει κάποια υποκείμενη αληθινή φύση, μια ιδεώδη μορφή, που οι αισθήσεις μας εγγενώς αδυνατούν να συλλάβουν αξιόπιστα. Εν προκειμένω χαρακτηριστικό απόσπασμα είναι το παρακάτω.

> *Όταν κάποιος μου λέει ότι η ωραιότητα ενός πράγματος οφείλεται στο ζωηρό του χρώμα ή στο σχήμα του ή σε κάτι παρόμοιο, αφήνω κατά μέρος τέτοιου είδους εξηγήσεις γιατί όλες με μπερδεύουν και κρατώ για τον εαυτό μου μόνο αυτή την απλή, άτεχνη και ίσως αφελή εξήγηση: τίποτα άλλο δεν κάνει αυτό το πράγμα ωραίο παρά μόνο η παρουσία ή η συμμετοχή της Ιδέας του ωραίου. Αυτή μου φαίνεται ότι είναι η ασφαλέστερη απάντηση που μπορώ να δώσω και στον εαυτό μου και στους άλλους. Και νομίζω ότι αν στηριχτώ σε αυτήν δεν διακινδυνεύω ποτέ να πέσω έξω, αλλά, όποτε τίθεται η ερώτηση, για μένα είναι αρκετή η απάντηση ότι τα ωραία είναι ωραία διά μέσου της Ιδέας του ωραίου.*
>
> (Πλάτων, Φαίδων 100c-d)

Σε αυτά απαντά κάπως το *de Ludo Palmarum* – συναπτά με μια νομική υπόθεση – μέσα στο επιστημονικό σημειωματάριο του J. Bernoulli που βρίσκονται έπειτα από πάμπολλες σελίδες γεωμετρίας κι ακολουθούν πολλές άλλες ακόμη. Πολλοί άνθρωποι και ιδιαίτερα διαπρεπείς επιστήμονες είχαν δοκιμάσει να δημιουργήσουν μεθόδους που να προάγουν την επιστήμη μέσα από εμπειρικά στοιχεία κι όχι από αυταπόδεικτες αλήθειες όπως εκείνες των αξιωμάτων του Πλάτωνα και κατ' επέκταση του Ευκλείδη. Αυτές οι μέθοδοι επέδειξαν περιορισμένη δυνατότητα αναπαραγωγής των αποτελεσμάτων κι αμφίβολη αντικειμενικότητα, ώστε δεν γνώρισαν ευρεία αποδοχή, ούτε και κατά τη διάρκεια της ζωής του Bernoulli, που κατόρθωσε το μέχρι τότε ακατόρθωτο. Μια ιδιαίτερη δυσκολία είναι αναμφισβήτητα η αξιολόγη των στοιχείων, καθώς ακόμη και αν όλα τα μέλη της επιστημονικής κοινότητας συμφωνούσαν ως προς το ποια είναι τα εμπειρικά στοιχεία είναι, θα ήταν επιπλέον αναγκαίο να καταλήξουν σε συμφωνία και ως προς την αξιολόγησή τους (Ekström, 2012). Από τους πλέον διακεκριμένους επιστήμονες και φιλοσόφους που εργάστηκαν προς την κατεύθυνση αυτή, ήταν ο πιο διάσημος μάλλον μαθητής του Πλάτωνα. Ο Αριστοτέλης διαφοροποιήθηκε από το δάσκαλο. Στο σπουδαίο έργο που άφησε δεν έκανε «μαθηματικοποίηση». Παραθέτουμε ένα πολύ χαρακτηριστικό απόσπασμα από τα *Ηθικά Νικομάχεια,* ιδιαίτερα ενδεικτικό και ως προς το τι κατόρθωσε ο J. Bernoulli, έπειτα από σχεδόν δυο χιλιάδες έτη, μεταφέροντας την ίδια κατά βάση συλλογιστική δια της άλγεβρας στην αντισφαίριση, είτε δια της αντισφαίρισης στην άλγεβρα.

> *Σε καθετί που παρουσιάζει συνοχή και μπορεί να διαιρεθεί είναι δυνατό να πάρουμε ένα κομμάτι μεγαλύτερο ή μικρότερο απ' το άλλο, ένα κομμάτι ίσο με το άλλο και μάλιστα ή σε σχέση με το ίδιο το πράγμα ή σε σχέση μ' εμάς. Θεωρώ όμως μέσο ενός πράγματος αυτό που απέχει εξίσου από καθεμιά απ' τις άκρες, το οποίο είναι ένα και το ίδιο για όλους, ενώ σε σχέση μ' εμάς αυτό που δεν είναι ούτε περισσότερο ούτε λιγότερο, αυτό όμως δεν είναι ένα ούτε ίδιο για όλους. Για παράδειγμα, αν τα δέκα είναι πολλά ενώ τα δύο λίγα, το έξι βρίσκεται στη μέση ως προς καθαυτό το πράγμα, γιατί υπερέχει και υπολείπεται εξίσου. Σύμφωνα λοιπόν με τη διδασκαλία της αριθμητικής αυτό είναι το μέσο. Σε σχέση μ' εμάς όμως δε θεωρείται κατ' αυτό τον τρόπο. Γιατί, αν για κάποιον δέκα μνες είναι πολλές για να τις φάει ενώ δύο λίγες, ο προπονητής δε θα ορίσει έξι μνες, γιατί ίσως αυτή [η ποσότητα] είναι πολλή ή λίγη σε σχέση μ' αυτόν που θα τη λάβει. Για το Μίλωνα θα είναι λίγη, ενώ γι' αυτόν που μόλις ξεκίνησε τη γυμναστική πολλή. Όμοια για το δρόμο και την πάλη. Έτσι λοιπόν κάθε ειδικός αποφεύγει την υπερβολή και την έλλειψη και επιζητά το μέσο όρο και αυτό προτιμά, όχι το από καθαρά ποσοτική άποψη μέσο αλλά αυτό που καθορίζεται σε σχέση μ' εμάς.*

(Αριστοτέλης, 1975)

Δεν είναι καθόλου δύσκολο να αντιληφθούμε τη μετάβαση εκ των αγωνισμάτων που αναφέρονται στα *Ηθικά Νικομάχεια* προς την αντισφαίριση. Μπορούμε να κατανοήσουμε πόσο βαθειά διείσδυσε ο J. Bernoulli στη συλλογιστική του Αριστοτέλη και πώς προχώρησε στη σύζευξή της με την αντίστοιχη του Πλάτωνα, που ασφαλώς τη γνώριζε πάρα πολύ καλά. Η αντίληψη του Αριστοτέλη για την πιθανότητα είναι επιστημική, αλλά και μη ποσοτική. Αυτό που ο J. Bernoulli παρουσιάζει στην *Lettre à un amy…*και στο υπόλοιπο έργο του είναι μια αντίληψη των μαθηματικών επιστημών παρόμοια με τις αντιλήψεις των Αριστοτελικών στοχαστών του 14ου αιώνα όπως οι λεγόμενοι Oxford Calculators ή ο Nicholas Oresme στο Παρίσι (Sylla, 2013). Ο Oresme έφθασε την όχι αριθμητική έννοια της πιθανότητας, μέχρι τις διαβαθμίσεις της σχετικής συχνότητας (Garbel & Zabell, 1979). Είναι πολύ χαρακτηριστικά τα γραφόμενα – που παραθέτει η Sylla – του J. Burridan, ενός από τους πλέον επιφανείς εκπρόσωπους αυτής της αντίληψης των μαθηματικών, τα οποία είναι σχεδόν ίδια με ορισμένες αντιρρήσεις που έχει εκφράσει πολύ παλαιότερα, ο φιλόσοφος και σατιρικός συγγραφέας Λουκιανός:

> *Σαν να πιστεύεις κάποιον που λέει ότι δυο επί πέντε ίσον επτά, χωρίς να μετρήσεις ο ίδιος· προφανώς εκείνος θα συνεχίσει λέγοντας ότι τέσσερις φορές το πέντε κάνει σίγουρα δεκατέσσερα και ούτω καθ' εξής, κατά βούληση. Τέτοια κάνει και η περίφημη γεωμετρία – γιατί κι εκείνη παρουσιάζει στην αρχή κάποια παράδοξα αξιώματα κι έχει την απαίτηση να τα δεχτούμε παρ' όλο που είναι ανυπόστατα: σημεία που δεν διαιρούνται, γραμμές χωρίς φάρδος και τα τοιαύτα. Και πάνω σ' αυτά τα σαθρά θεμέλια χτίζει ένα οικοδόμημα και ισχυρίζεται ότι αποδεικνύει αλήθειες, ενώ ξεκινάει από ψεύτικη βάση*

(Λουκιανός, 1999).

Σύμφωνα με την Αριστοτελική άποψη, η οποία κρατούσε καλώς ως το $18^{ο}$ αιώνα, όλα τα μαθηματικά αναβλύζουν από την ίδια πηγή, την αφαίρεση της μορφής από την ύλη (Daston, 1992). Ο J. Bernoulli, αν δεχθούμε πως βρίσκεται κάπως κοντά σε κάποια τέτοια άποψη, νοιάζεται για τη σύζευξη της πραγματικότητας με τα μαθηματικά που τα τοποθετεί στην κορυφή των επιστημών. Για αρκετούς από τους συγγραφείς της εποχής τα μαθηματικά δεν είναι μόνον η βαθύτερη μορφή γνώσης, είναι επίσης δυνητικώς και η πλατύτερη όλων. Ήταν μάλλον όλοι πεπεισμένοι στον υπέρτατο βαθμό, ότι η φύση «έχει γραφεί με τη γλώσσα των μαθηματικών». Πολύ πιο περισσότερο σημαντικές από τις φιλοσοφικές επιδράσεις των αρχαίων Ελλήνων, τον Αριστοτέλη και τον Πλάτωνα, είναι οι επιδράσεις των σπουδαίων Μαθηματικών της Αρχαιότητας. Ο J. Bernoulli ήταν πεπεισμένος ότι πρέπει να τους κατανοήσει καλά, ώστε να προχωρήσει προς το καινούργιο κι όχι απλώς να τους παραθέτει σε κατάλληλες περιστάσεις. Τους έχει πολύ μεγάλη υπόληψη, όπως άλλωστε κι ο Leibniz, ο Newton κι όλοι σχεδόν οι εξαίρετοι διανοητές εκείνης της εποχής. Δεν είναι επίσης καθόλου τυχαία η γνώση της ελληνικής γλώσσας που κατέχει και η χρήση λατινικών λέξεων ελληνικής προέλευσης όπως brabeuta κι apocatastasis, είτε κατευθείαν ελληνικών λέξεων όπως απόδειξιν, συμπάθειαν, άτοπον κ.α.. Ως μαθηματικός όμως πρωτίστως, ο J. Bernoulli, δημιούργησε, ή έστω προχώρησε πάρα πολύ σε κάποιο πεδίο, που είναι πολύ σημαντικό για τη σύγχρονη επιστήμη και που ήταν αχαρτογράφητο στους αρχαίους, Έλληνες και μη.

1.2 Η θεωρία πιθανοτήτων κατά την εποχή του J. Bernoulli και η σημασία των σφαιρίσεων για την εξέλιξή της

> *Στην ερώτηση «τι ήταν η θεωρία πιθανοτήτων περίπου κατά το δεύτερο μισό του δέκατου εβδόμου αιώνα;» η κλασσική απάντηση είναι τυχερά «παίγνια», που δεν είναι όμως πλήρης και συνάμα είναι παραπλανητική.*
>
> (Daston, 1995:31)

Τα τυχερά παίγνια συντέλεσαν αναμφίβολα πάρα πολύ, στην ανάπτυξη της θεωρίας πιθανοτήτων, δεν ήσαν όμως τα μόνα. Το λεγόμενο «πρόβλημα των πόντων», ή αλλιώς «πρόβλημα της διαίρεσης του στοιχήματος», συζητήθηκε από τους Pascal & Fermat γύρω στο 1654, όταν το έθεσε υπόψη του πρώτου, κάποιος αριστοκράτης τζογαδόρος, ο Chevalier de Méré επί των παιγνίων τύχης – και όχι επί παιχνιδιών που προϋπέθεταν κάποια ικανότητα όπως η Jeu de Paume, που ήταν επίσης γνωστή στον Pascal, αλλά και πολύ ευρύτερα. Παρόμοιο πρόβλημα, το οποίο θεωρείται κι ως η αφετηρία της μελέτης των πιθανοτήτων, τέθηκε αρχικά το 1494, από το Luca Pacioli επί κάποιας σφαίρισης, μάλλον ποδοσφαιρικής χροιάς: μια ομάδα παίζει μπάλα με τέτοιο τρόπο ώστε απαιτούνται 60 συνολικά πόντοι για τη νίκη στο παιχνίδι, και κάθε γκολ λογαριάζεται για 10 πόντους. Το στοίχημα είναι 10 δουκάτα. Λόγω κάποιου περιστατικού δεν μπορεί να τελειώσει το παιχνίδι, και το ένα μέρος έχει συγκεντρώσει 50 πόντους ενώ το άλλο μέρος έχει 20. Κάποιος θέλει να ξέρει τι μερίδιο από το έπαθλο πηγαίνει σε κάθε μέρος (Hacking, 2006).

Ο L. Pacioli ήταν Ιταλός μαθηματικός, Φραγκισκανός μοναχός, συνομιλητής του Leonardo da Vinci ενώ αναφέρεται και ως πατέρας της λογιστικής (έκανε την πρώτη δημοσίευση για το διπλογραφικό σύστημα της τήρησης λογιστικών βιβλίων) (Pacioli, 1494). Έλυσε το προαναφερθέν πρόβλημα με βάση την αναλογία των πόντων που λογαριαζόνταν υπέρ του κάθε μέρους κι όχι, όπως πολύ κατόπιν οι Pascal και Fermat, με βάση τους πόντους που υπολείπονταν από το συμφωνηθέν τέλος. Ο ίδιος επίσης με τον λεγόμενο «κανόνα των 72» που εισηγείται υπήρξε πρόδρομος της έννοιας της μελλοντικής αξίας (future value), πριν από την έλευση των λογαρίθμων. Δεν θα έβλαπτε να έχουμε υπόψη μας κι ότι οι διεκδικήσεις – αξιώσεις που προβάλλονται στη διακοπή κάποιας σφαίρισης είναι ενδεχομένως άλλες από εκείνες που προβάλλονται στη διακοπή κάποιου τυχερού παιγνίου κι ότι η παραδεδεγμένη ως πλέον καλή συσχέτιση των διαφόρων κατηγοριών παιγνίων, ασφαλώς δεν γίνεται από κανέναν πριν από τον J. Bernoulli. Το προβάδισμα πόντων που για παράδειγμα έχει «κατακτήσει» κανείς σε κάποια σφαίριση ενδέχεται να το αντιλαμβάνεται ως κάτι πολύ διαφορετικό από ένα αντίστοιχο προβάδισμα που του έχει «τύχει». Ο L. Pacioli εν προκειμένω όχι μόνον αναφέρεται σε κάποια σφαίριση, μα και υποδεικνύει ένα πρόβλημα και προτείνει μια λύση, στο ίδιο κατά βάση ζήτημα που κατόπιν ανεξάρτητα ανέτεμνε ο J. Bernoulli. O L. Pacioli αρχίζει το πρόβλημα από σφαίριση, το επεκτείνει μάλιστα προς αγώνες δρόμου, ανθρώπων ή αλόγων, θέτει κι ένα παρεμφερές με σκοποβολή, φθάνει και στη λεγόμενη morra, μέχρι για να το καταλήξει στις εμπορικές επιχειρήσεις. Δηλαδή όχι και τόσο μακριά από τις αναφορές του J. Bernoulli.

> *Τώρα θα δώσω αυτό το ίδιο πράγμα κατά τον τρόπο μιας εμπορικής κομπανίας, όπως το είπαμε σε εκείνα με την μπάλα. Εκείνα που κάνεις εκεί με τις δυο τα κάνεις εδώ με τη μια. Μπορεί όμως να λεχθεί: 3 φτιάχνουν μια κομπανία, ένας βάζει 4, ο 2ος 3, ο 3ος 2 κι έχουν να μοιράσουν 10. Τι πιάνει ο καθένας. Δουλειά. Θα το βρεις όπως έχει ήδη λεχθεί.*

(Pacioli, 1494:3)

Στις ύστερες μεσαιωνικές πόλεις της Ιταλίας υπήρχε ήδη ως μορφή επιχείρησης η λεγόμενη κομπανία (compagnia), στην οποία τα κέρδη ή οι ζημίες μοιράζονταν αναλογικά προς τα μερίδια των συμβαλλόμενων μερών. Η εσφαλμένη λύση του Pacioli, βασίζεται στο ότι καθένας αξίζει όσα έχει ήδη κατακτήσει. Βάσει αυτών πρέπει να του αποδοθεί και μερίδιο από τα προς διανομή, σύμφωνα με την τότε εμπορική πρακτική. Ο ίδιος δεν πέρασε το ζήτημα από τα αμιγώς τυχερά παίγνια. Μετέπειτα, ο επίσης περίφημος διανοητής, αλλά και τζογαδόρος Gerolamo Cardano, έγραψε πως θα αναγνώριζε τη λύση ακόμα κι ένα παιδί που κατηγορεί τα άλλα κι ισχυρίζεται πως η δική του γνώμη είναι εξαίσια. (Gardano, 1593). O Cardano κι ο Pascal περνάνε από τα τυχερά παίγνια, μα δεν αντιλαμβάνονται τις σφαιρίσεις. O J. Berrnoulli δεν φθάνει στις πιθανότητες δια μέσου του Pascal, μα δια του Ch. Huygens. O τελευταίος επίσης δεν γνώριζε τις λύσεις των Pascal και Fermat. O J. Berrnoulli χωρίς να παραβλέπει τον ανθρώπινο παράγοντα, πηγαίνει πολύ πέρα από όλες τις προαναφερόμενες λύσεις. Η θεωρία πιθανοτήτων (theory of probability) καθίσταται τέτοια από την εποχή του J. Bernoulli και μετά, καθώς έως τότε υπήρχε ως δόγμα, το λεγόμενο doctrine of chances (δόγμα των πιθανοτήτων), που είχε ως κύριο σκοπό τον υπολογισμό του προσδοκώμενου κέρδους ενός τζογαδόρου σε κάποιο τυχερό παίγνιο (Hald, 2004). Όλα τα δυνατά αποτελέσματα θεωρούνταν εξίσου πιθανά, λόγω της συμμετρίας που έχουν τέτοια παίγνια, κάτι που οδήγησε και στον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας, ως το λόγο του αριθμού των ευνοϊκών περιπτώσεων προς τον αριθμό των συνολικών περιπτώσεων. Η σπουδαία ενόραση του J. Bernoulli συνίστατο στην υπόδειξη της κατάλληλης μεταχείρισης των αβέβαιων συμβάντων στις πολιτικές, ηθικές και οικονομικές υποθέσεις. Ο ίδιος αναφέρεται στο καλώς γνωστό διαπιστωμένο γεγονός, ότι η σχετική συχνότητα ενός συμβάντος, υπολογισμένη από παρατηρήσεις που έχουν ληφθεί υπό τις ίδιες περιστάσεις, καθίσταται όλο και περισσότερο σταθερή με την αύξηση του αριθμού των παρατηρήσεων. Ο J. Bernoulli θέτει το παραπάνω ερώτημα, σημειώνοντας ότι το στατιστικό μοντέλο για τέτοιες παρατηρήσεις είναι η διωνυμική κατανομή. *Η σχετική συχνότητα που προέρχεται από τη διωνυμική έχει την ίδια εγκυρότητα με την εμπειρική σχετική συχνότητα. (*Hald 2004:11-12). Αφού αποδείξει ότι αυτό ισχύει, συμπεραίνει ότι μπορούμε τότε να επεκτείνουμε τη θεωρία πιθανοτήτων από τη Jeu de Paume και τα τυχερά παίγνια σε άλλα πεδία όπου υφίστανται σταθερές σχετικές συχνότητες.

1.3 Η σημασία της πρόσληψης της Jeu de Paume από τον J. Bernoulli

Στην ανάγνωση του *Meditationes, Annotationes, Animadversiones Theologicae et. Philosophicae* (Bernoulli, 1677), δηλαδή του ερευνητικού σημειωματάριου του J. Bernoulli, συναντούμε μια νομική υπόθεση, σχετικά με τη διανομή της περιουσίας κάποιου (Titius) και της γυναίκας του (Caja). Κατά τον I. Schneider (n.d.) προκύπτει ότι: ένα βασικό πέρασμα για το μετασχηματισμό των «προσδοκιών» του Ch. Huygens στην «πιθανότητα» περιλαμβάνει την επεξεργασία ενός νομικού προβλήματος, με το οποίο ασχολήθηκε ο J. Bernoulli το 1685-1686. Πρόκειται για ένα προγαμιαίο συμβόλαιο ενός ζευγαριού με παιδιά το οποίο, στην περίπτωση θανάτου της συζύγου πριν από τον σύζυγο διέπει τη διαίρεση της κοινής περιουσίας, μεταξύ του πατέρα και των παιδιών. Στην παραπάνω υπόθεση το μερίδιο του γαμπρού θα είναι μεγαλύτερο εφόσον έχει ήδη συμπεριληφθεί στην κληρονομιά, μικρότερο εφόσον όχι, εκτός αν και οι δύο πατέρες έχουν πεθάνει, οπότε ο πατέρας της νύφης αντιτίθεται στην αρχική του πρόταση. Αυτό προκαλεί μια δεύτερη πρόταση, σύμφωνα με την οποία ο σύζυγος πρόκειται να λάβει το ίδιο μερίδιο της κοινής περιουσίας, ανεξάρτητα από το τι θα συμβεί με τους δυο άρρενες γονείς. Ο J. Bernoulli φαίνεται πως υπολογίζει έτσι καταρχήν στο σημειωματάριό του τις αριθμητικές πιθανότητες, για τα ενδεχόμενα της σειράς θανάτου των παραπάνω.

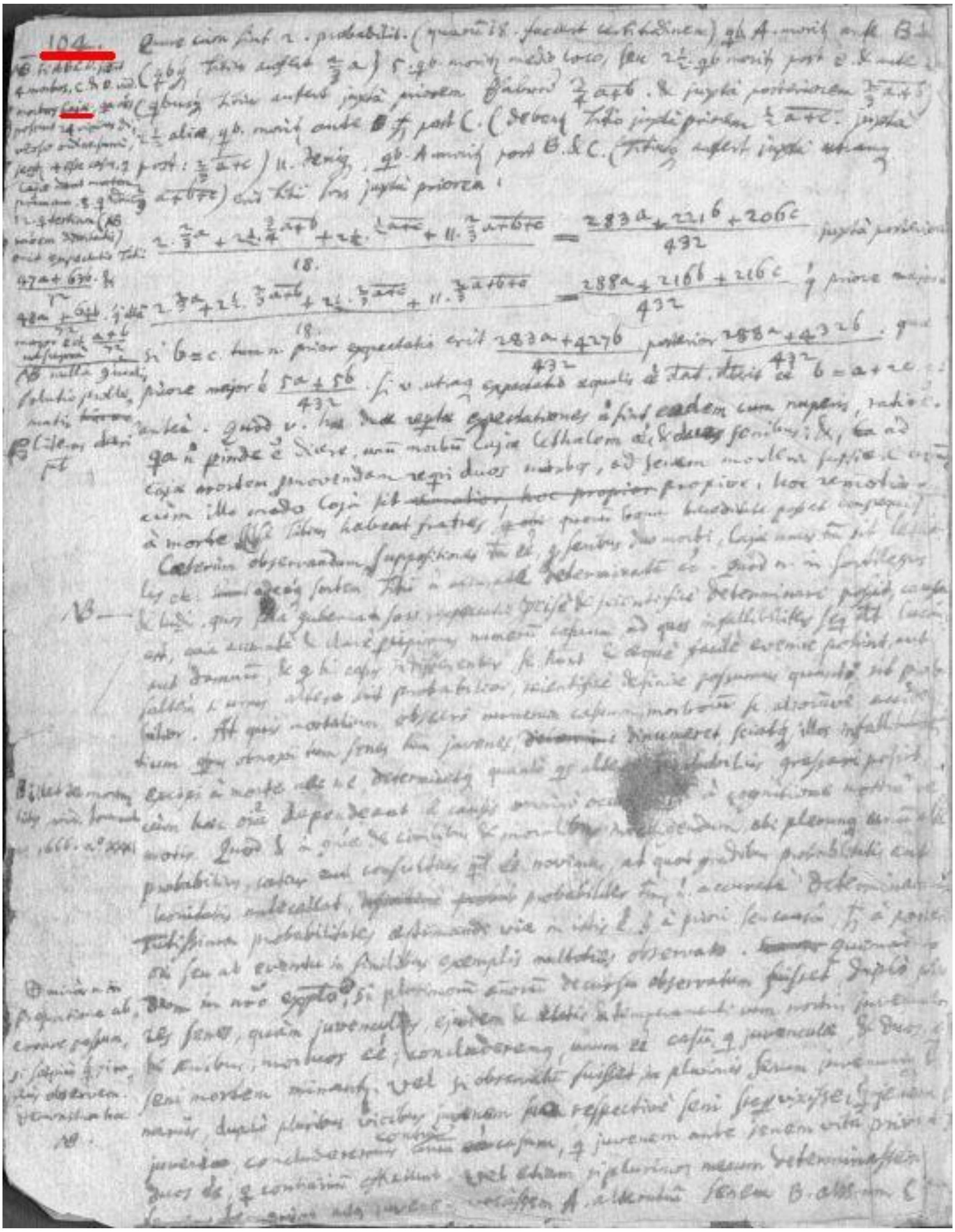
> *Στο παράδειγμά μας, αν κατά τη διάρκεια πολλών χρόνων έχει παρατηρηθεί ότι έχουν πεθάνει διπλάσιοι ηλικιωμένοι άνδρες απ' ότι νεαρές γυναίκες, όλοι τους στην ίδια ηλικία και κατάσταση ως οι ηλικιωμένοι και οι νεαρές, θα συμπεραίναμε ότι θα υπήρχε μια περίπτωση που απειλεί τη νεαρή γυναίκα με θάνατο για δυο περιπτώσεις που απειλούν τον ηλικιωμένο*

(Schneider, 1984:85).

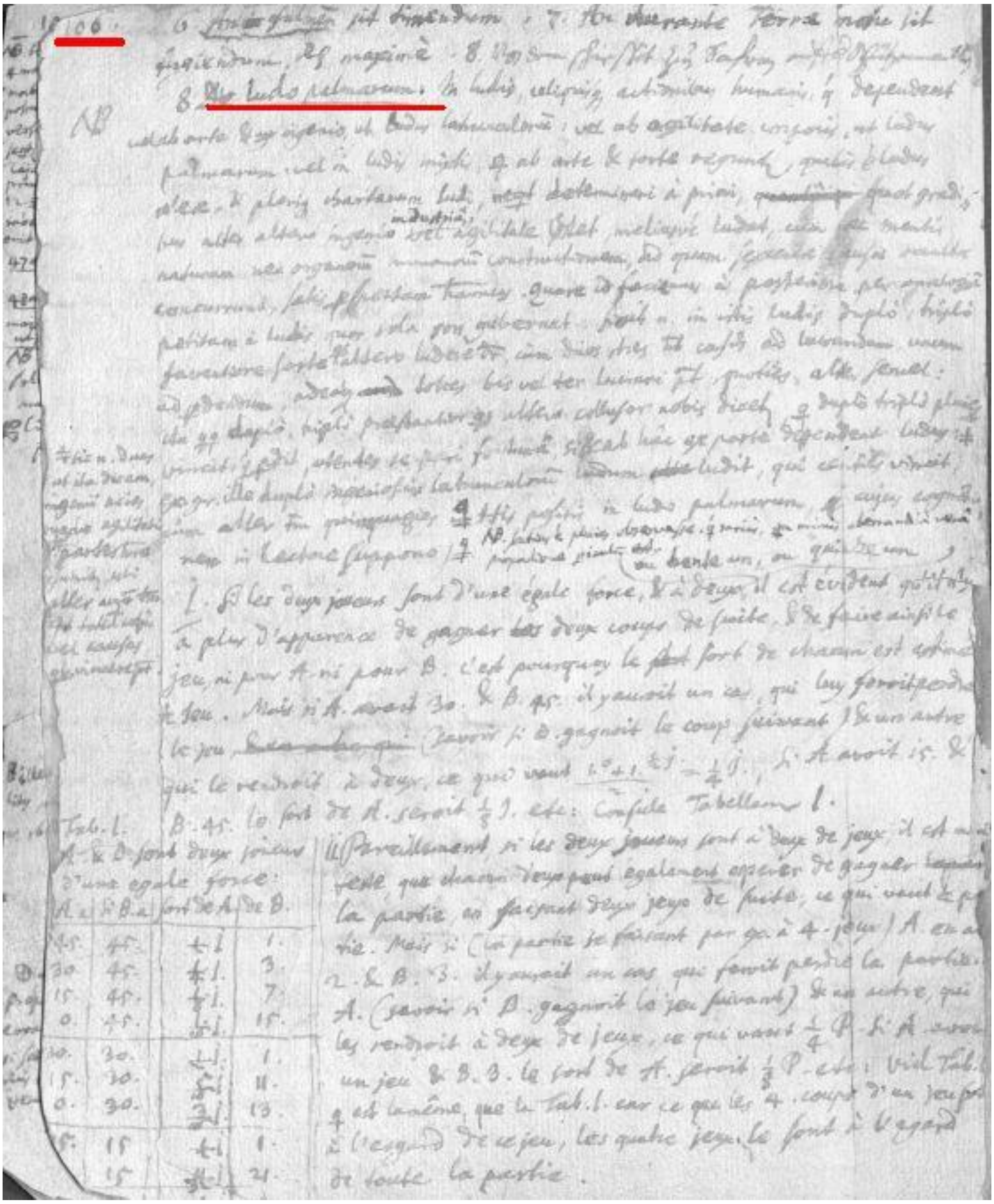
Σε αυτή τη βάση, ο J. Bernoulli διερωτάται ποια πρόταση θα είναι ευνοϊκότερη για τα παιδιά και για το σκοπό αυτό πρέπει να κάνει υποθέσεις σχετικά με την πιθανή σειρά που θα πεθάνουν οι τρεις εμπλεκόμενοι άνθρωποι, οι δύο πατέρες και η σύζυγος. Η προαναφερθείσα «νομική» υπόθεση είναι ασφαλώς ενδεικτική ως προς το ότι το ενδιαφέρον του επιστήμονα για τα ανθρώπινα ζητήματα έχει εκδηλωθεί από νωρίς. Αυτή την ίδια κρίσιμη χρονική περίοδος, συμβαίνει επίσης ο J. Bernoulli να ασχολείται ποικιλοτρόπως και με την Jeu de Paume. Σύμφωνα με το σχολιασμό της ιστορικού E. Sylla (Bernoulli, 1713/2006), η οποία μετέφρασε στην αγγλική γλώσσα και την «*Lettre à un amy …*» μαζί με την γραμμένη στα λατινικά *Ars Conjectandi*, ο J. Bernoulli είχε ήδη από το 1686 ολοκληρώσει το μεγαλύτερο μέρος από το έργο του πάνω στη Jeu de Paume. Όπως αναφέρουμε κι αλλού, στο σημειωματάριό του μέσα βρίσκεται κι ένα άλλο εκτεταμένο απόσπασμα σχετικά με την εν λόγω σφαίριση. Το *de Ludo Palmarum* φαίνεται να έχει γραφεί το χειμώνα του 1685/86 (Bernoulli, 1713/2005). Έχουμε κατά συνέπεια, ως προς την εποχή σύλληψης της ιδέας των αριθμητικών πιθανοτήτων, δυο υποθέσεις. Στην νομική υπόθεση θα σημειώσει ως 4/15c (certitudo – βεβαιότητα) στο ενδεχόμενο η Caja να πεθάνει δεύτερη κατά σειρά, 8/15c στο ενδεχόμενο να πεθάνει τρίτη. Η νομική υπόθεση προηγείται ως εγγραφή στο *Meditationes…*, φέροντας τον αριθμό 77 (Bernoulli, 1677). Στο ίδιο σημειωματάριο η εγγραφή για την Jeu de Paume βρίσκεται πολύ λίγο παρακάτω στον αριθμό 88. Από την σελ. 101 ως την σελ. 105 έχουμε την υπόθεση της Caja, στη σελ. 106 ξεκινάει το *de Ludo Palmarum* (Εικόνα 1 και 2). Εν προκειμένω, ακόμη κι αν φαίνεται πως έχει προκύψει πρώτα η υπόθεση του Titius, μπορεί τα πρωτεία της ενασχόλησης να μη σημαίνουν και τόσα, μπορεί επίσης και αυτά τα πρωτεία να μην ισχύουν. Δεν αποκλείεται καθόλου η Jeu de Paume να τον απασχολεί κι από πριν – τουλάχιστον ως παίκτη τον απασχολεί. Η Jeu de Paume, όπως και κάθε σφαίριση που ενδιαφέρει κάποιον, δεν είναι μια υπόθεση που την πληροφορείται κάποιος, με τον ίδιο τρόπο που πληροφορείται μια νομική υπόθεση.

Επιπλέον, ο J. Bernoulli έχει καταρχήν συζητήσει δημοσίως την παραπάνω νομική υπόθεση με το προσδόκιμο ζωής των γονέων του ανδρογύνου και της νύφης το Σεπτέμβριο του προηγούμενου έτους κι επανέρχεται σε αυτή το Φεβρουάριο του 1686. Ισχυρίζεται ότι στην πρώτη λύση που είχε δώσει, υπέθεσε ότι θα μπορούσε εξίσου εύκολα να συμβεί η νύφη να ζήσει περισσότερο από τους γονείς του ανδρόγυνου, όσο και το αντίθετο. Έχοντας πλέον αναθεωρήσει, υποστηρίζει ότι είναι πιο πιθανόν, η νύφη, ως πιο νέα, να ζήσει περισσότερο από τους γονείς. Αλλάζοντας έτσι τις προσδοκίες του γαμπρού, ισχυρίζεται πως για να τις υπολογίσουμε (χωρίς να λησμονούμε ότι γενικά για τον ο J. Bernoulli καταρχήν η πιθανότητα ισοδυναμεί με την αξία της προσδοκίας) απαιτείται ο πιο επακριβής προσδιορισμός του πόσο πιο πιθανόν θα ήταν ότι η σύζυγος να ζήσει περισσότερο από καθέναν εκ των γονέων (Bernoulli, 1713/2006). Το γεγονός αυτό μας ωθεί να ψάξουμε τι μεσολάβησε κι έκανε τον ο J. Bernoulli να αναθεωρήσει. Η εν λόγω αναθεώρηση συνηγορεί υπέρ του ότι ήταν η Jeu de

Paume, η οποία ακολουθεί επίσης κι ως η $32^{η}$ θέση του. Αξίζει να αναφέρουμε επιπλέον ότι σημειώνει για τη λύση της νομικής υπόθεσης του γαμήλιου συμβολαίου, ότι μια αρχή θα μπορούσε να γίνει από τα στοιχεία στις λίστες θανάτων του Παρισιού και του Λονδίνου. Πάντως μια πολύ σημαντική θεωρητική αρχή έχει ήδη γίνει.



Εικόνα 1. Σημειώσεις του J. Bernoulli (Πηγή: *Meditationes, Annotationes, Animadversiones Theologicae et. Philosophicae)*



Εικόνα 2. Σημειώσεις του J. Bernoulli (Πηγή: *Meditationes, Annotationes, Animadversiones Theologicae et. Philosophicae)*

Με την υπόθεση της Jeu de Paume θα ασχοληθεί πολύ εκτενώς και στα άλλα γραπτά του, όπου θα ορίσει την πιθανότητα ως υποκειμενικό βαθμό βεβαιότητας. Το ότι κλείνει με τη Jeu de Paume την παρουσίαση των θέσεων του για την κατάληψης της έδρας των μαθηματικών που επιδιώκει, ή ότι γράφει και ξαναγράφει γι αυτήν και στα Λατινικά και στα Γαλλικά, συμπληρώνοντας κάποιο αρκετά εκτεταμένο κείμενο, μπορεί να σημαίνει έμφαση. Η αντισφαίριση και η νομική υπόθεση, όχι μόνο τον απασχολούν την ίδια εποχή, όπως έχει ήδη σημειωθεί, αλλά τις συσχετίζει κιόλας μάλλον, λαμβάνοντας υπόψη και το 4ο κεφάλαιο της Ars Conjectandi (Bernoulli, 1713/2005). Εκεί ως πρώτο παράδειγμα αναφέρει ότι αν κάποτε υπήρχαν τριακόσιοι άνθρωποι της ηλικίας και του σωματικού τύπου που τώρα έχει ο Titius και παρατηρήσει κανείς ότι διακόσιοι από αυτούς πέθαναν πριν από το τέλος μιας δεκαετίας, ενώ οι υπόλοιποι έζησαν περισσότερο, θα μπορούσε με αρκετή βεβαιότητα να συμπεράνει ότι υπάρχουν διπλάσιες περιπτώσεις ο Titius ενδεχομένως επίσης να πεθάνει εντός της δεκαετίας απ’ όσες περιπτώσεις ενδεχομένως να ζήσει πέραν της δεκαετίας. Ως δεύτερο παράδειγμα παραθέτει την περίπτωση που κάποιος έχει παρατηρήσει για κάμποσα περασμένα έτη τον καιρό κι έχει σημειώσει πόσες φορές ήταν καθαρός, ή βροχερός. Ως τρίτο παράδειγμα παραθέτει την περίπτωση κάποιος να έχει παρατηρήσει πολύ συχνά δυο παίκτες σε ένα παιχνίδι και έχει δει πόσες φορές αυτός ή εκείνος ο παίκτης νίκησε.

Τα παραπάνω αποτελούν και το κρίσιμο βήμα που κάνει ο J. Bernoulli προς το τέλος της Ars Conjectandi και του βίου του, περνώντας προς τις εμπειρικές επιστήμες, από τα τυχερά παίγνια, όπως αναφέρει ο A. Hald (1998). Στο τελευταίο τρίτο παράδειγμα, δεν αναφέρεται κατ’ ανάγκη στα παίγνια τα αμιγώς τυχερά, και μάλιστα σε συνδυασμό με το πρώτο παράδειγμα καθώς το δεύτερο δεν αποτελεί παίγνιο. Εύλογο μάλλον είναι ότι μπορεί να έχει την αντισφαίριση της εποχής κατά νου του. Συνεπώς το κρίσιμο βήμα μπορεί να μη γίνεται από τα αμιγώς τυχερά παίγνια. Ο Hald (1998) γράφει στη συνέχεια ότι αυτή είναι η «πλαδαρή» (loose) ανάλογη αιτιολόγηση με την οποία ο J. Bernoulli μεταφέρει τα αποτελέσματά του από τα τυχερά παίγνια στα προβλήματα της πολιτικής ζωής. Εφόσον όμως πρόκειται για τη Jeu de Paume, η αιτιολόγηση κρίνεται ενδεχομένως πολύ λιγότερο «πλαδαρή». Τέτοιες μεταφορές από σφαιρίσεις, είναι στη σύγχρονη εποχή πολύ πιο συνηθισμένες, η προκείμενη είναι μακράν η πλέον πρωτοποριακή ως προς αυτές. Το τρίτο παράδειγμα της Jeu de Paume και το πρώτο παράδειγμα μπορούν σύμφωνα με τον F. Knight (1921), ή με τον πιο πρόσφατο παιγνιοθεωρητικό R. Myerson (1997) να υπαχθούν στα υποκειμενικώς άγνωστα, ενώ τα τυχερά παίγνια και οι καιρικές συνθήκες υπάγονται στα αντικειμενικώς άγνωστα. Ήτοι, το κρίσιμο βήμα μπορεί να γίνεται από τη Jeu de Paume, ή και δι’ αυτής επίσης. Λίγες γραμμές παρακάτω, άλλωστε προτού περάσει στην απόδειξη του χρυσού θεωρήματος του, θα γράψει ότι αυτό αφορά κάτι που τον απασχολούσε για είκοσι χρόνια προτού το αποκαλύψει, τόσα όσα τον χωρίζουν από την εποχή της Lettre à un amy… και του νομικού προβλήματος.

Το επί του παρόντος, νομικό πρόβλημα, δεν παρουσιάζεται βεβαίως εξίσου αναλυτικά. Είναι ενδιαφέρον, όμως δεν είναι οπωσδήποτε πρωτοφανές. Δεν περιέχει, όλους αυτούς τους αριθμούς, τις συσχετίσεις και τη δομή εν γένει, που διαθέτει η αντισφαίριση. Δεν ισχυριζόμαστε ότι ο J. Bernoulli δεν θα είχε οδηγηθεί στις αριθμητικές πιθανότητες και στο χρυσό θεώρημά του, αν δεν είχε προκύψει η Jeu de Paume, όπως ούτε κι αν δεν προϋπήρχε το παραπάνω νομικό πρόβλημα˙ ούτε κι αντιθέτως όμως, ότι θα είχε οδηγηθεί οπωσδήποτε στα πορίσματά του, ανεξάρτητα από την ιστορική συγκυρία και την ύπαρξη της Jeu de Paume εν προκειμένω. Καθώς αναφέρεται στη συνέχεια ήταν ιδιαιτέρως πρόσφορη και πολύ κατάλληλη η συγκεκριμένη σφαίριση για τη διατύπωση γενικών υποθέσεων. Πέραν του να καταστήσουμε τα πάντα σχετικά, σημειώνουμε τις μάλλον ισχυρές ενδείξεις που έχουμε ως προς τη σημασία της Jeu de Paume σε αυτή την περίπτωση.

1.4 Η Jeu de Paume του J. Bernoulli σε σχέση με τις σύγχρονες ανταγωνιστικές σφαιρίσεις

Η δια της Jeu de Paume του J. Bernoulli ανάδειξη των αριθμητικών πιθανοτήτων και εν συνεχεία η επέκταση της θεωρίας παιγνίων μπορούν να αγκαλιάσουν όλες σχεδόν τις σύγχρονες ανταγωνιστικές σφαιρίσεις, από μια συγκεκριμένη σκοπιά τουλάχιστον. Η Jeu de Paume, έχει υποστεί πολλές μεταμορφώσεις, εφόσον, αγνοώντας τες, δεχθούμε έστω ότι είναι κατά βάση μία μάλλον η εξελισσόμενη σφαίριση, που συνδέεται με το συγκεκριμένο λεκτικό όρο. Δεν είναι βεβαίως μια όμως, όπως ούτε και καμία άλλη σφαίριση συνδεδεμένη με άλλο συγκεκριμένο λεκτικό όρο, είναι μια και ριζική των υπολοίπων. Οι σφαιρίσεις είναι sport και υπό τη βιολογική σημασία του όρου.

Η Jeu de Paume είναι κάποια σφαίριση στην οποία η μπάλα χτυπιόταν αρχικά με τα χέρια, έπειτα με γάντια και μετέπειτα με ρακέτες, ενίοτε και με τα πόδια, ενώ άλλοτε διεξαγόταν κι ανάμεσα σε ομάδες, πέραν των ζευγών. (Gillmeister, 1997). Τα παραπάνω στοιχεία με βάση τις σημερινές συνθήκες πιθανότατα θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε διάκριση πολλών διαφορετικών σφαιρίσεων. Εκείνη την εποχή δεν διεξάγονταν και τόσο πολλές άλλες σφαιρίσεις, η Jeu de Paume ήταν από πολλές απόψεις κραταιά, ενώ η λεγόμενη ιστορική της «συνέχεια», πηγαίνει κι άλλους αιώνες πιο πριν. Χρήζει ελέγχου το ζήτημα της συνέχειας ή ασυνέχειας από τα παραδοσιακά παιχνίδια στα σύγχρονα σπορ, κατά τη μετάβαση από την παραδοσιακή στη σύγχρονη κοινωνία και η Jeu de Paume δεν αποτελεί εξαίρεση. (Κουλούρη, 1997). Δεν θα ασχοληθούμε εκτεταμένα με την παρελθοντική ιστορική «συνέχεια» της, ούτε ασφαλώς και με την ευλόγως αβέβαιη μελλοντική εξέλιξη οποιασδήποτε συγκεκριμένης σφαίρισης. Οποιαδήποτε σφαίριση ενδέχεται να επινοηθεί, ή ακόμη κι εκ νέου να «αναβιώσει» και να συνεχιστεί για αρκετούς αιώνες, υπό την ίδια, ή άλλη εκδοχή. Δεν αποσκοπούμε στο να πλέξουμε το εγκώμιο της Jeu de Paume, ούτε και να ψέξουμε τα αδύναμα σημεία που διαθέτει, όπως άλλωστε όλες οι υπόλοιπες σφαιρίσεις. Δεν θα έβλαπτε να μη λησμονούμε ότι παίζονται από ανθρώπους, μα και τίθενται από ανθρώπους επίσης. Οπότε σε αυτές προβάλλονται (και κατά κάποιο τρόπο «εις διπλούν») οι αντιλήψεις, ή κι οι προκαταλήψεις μας, εκείνες που έστω επικρατούν κατά δεδομένους τόπους κι εποχές.

Οι χρονολογημένες «ανταγωνιστικές» σφαιρίσεις παρουσιάζουν μια ποικιλία που μπορεί να εκληφθεί ως μεγάλη, από κάποιον που δεν γνωρίζει όλο το εύρος της, ή δεν την έχει λάβει καλώς υπόψη του. Μπορεί αντίθετα να εκληφθεί ως πάρα πολύ μικρή κι ενδεικτική φτώχειας, από κάποιον άλλον που διακρίνει πως διέπεται από λίγες τυπολογίες, που μπορούν να χωρέσουν ακόμη και σε ένα και μοναδικό γενικό υπόδειγμα. Λόγου χάριν, καμία από τις σύγχρονες σφαιρίσεις δεν διεξάγεται με περισσότερες από μια, διαφορετικές μπάλες, οπότε καμία τους δεν εμπίπτει σε κάποιο τέτοιο υπόδειγμα. Δεν εμπίπτει σε αυτό ούτε η αρχαία trigon, που και πολυμερής ήταν και διεξαγόταν με δυο μπάλες (McDaniel, 1906). Με άλλα λόγια δεν διαθέτουμε κάποιο πρότυπο ανάπτυξης με έστω δυο μπάλες κι έστω ένα ενδιάμεσο στόχο, ενώ έχουμε όλες εκείνες τις σφαιρίσεις που εμπίπτουν στο υπόδειγμα των δύο στόχων και μιας μπάλας. Στο ίδιο πρότυπο ανήκει και η Jeu de Paume, οπότε τουλάχιστον υπό μια έννοια μπορεί να τις περικλείει. Διέπονται πάντως από κάποια οικονομική και αναπτυξιακή λογική, που δεν συλλαμβάνεται σφαιρικά αν αρκεστούμε μόνον σε μια ιστορική πραγματικότητα. Ότι δηλαδή μια αναδρομή του τύπου «η α΄ σφαίριση ξεκίνησε κατά το τάδε έτος, πριν ή μετά από τη β΄ και τη γ΄ σφαίριση, λίγα έτη κατόπιν παίχθηκε στο τάδε σύλλογο της δείνα πόλης και χώρας, έπειτα ιδρύθηκε η πρώτη εθνική ομοσπονδία της καθώς και η διεθνής ομοσπονδία της, μετέπειτα τυποποιήθηκε η μοναδική μπάλας της κ.λπ.». Δεν είναι βεβαίως ασήμαντη η ιστορική πραγματικότητα όλων των σύγχρονων σφαιρίσεων, εκ των οποίων οι πλέον δημοφιλείς ξεκίνησαν όχι και τόσο τυχαία 1-2 αιώνες πριν, στις σύγχρονες υπερδυνάμεις της Μ. Βρετανία και των Η.Π.Α. (Szymanski, 2009). Μπορεί να καταγραφεί πλέον με αρκετή ακρίβεια για σχεδόν όλες, εφόσον δεν είναι και πολλές. Ενδεχομένως όμως να μην αξίζει κιόλας περισσότερο από πληροφορίες όπως ότι ο Markov ήταν Ρώσος κι έζησε ένα αιώνα πριν, ο Shannon κ.λπ. Οι σφαιρίσεις δεν είναι όμως επίσης κατ' αφηρημένο τρόπο διαχρονικές. Είναι πλέον σημαντικό ότι προκειμένου να αναπτυχθούν πραγματικά, έχουν απαιτήσεις κοινού που να τις παίζει και να τις παρακολουθεί και βέβαια απαιτήσεις χώρου, αστικού χώρου καταρχήν. Συνενώνουμε τραπέζια για την επιτραπέζια αντισφαίριση σαν να μην έχουν διαφορές τα εδάφη με τα τραπέζια, που βεβαίως μπορούν και να απομακρυνθούν μεταξύ τους, αν ξεφύγουμε από την επίδραση της αντισφαίρισης και κατ' επέκταση της Jeu de Paume. Δεν διεξάγεται καμία σφαίριση, δίχως εξωτερικό πλαίσιο γραμμών, παρότι τα 24 sec που διατίθενται για την επίθεση στο μπάσκετ θα αρκούσαν για να διεξαχθεί και χωρίς αυτό, αν ξεφύγουμε από την επίδραση του ποδοσφαίρου. Καμία δημοφιλής σφαίριση δεν διαφέρει από τη Jeu de Paume ως προς την αρχική αριθμητική βάση του 0 – 0. Επιπλέον όλες οι σφαιρίσεις διεξάγονται βάσει κάποιου scoring system, το οποίο για πολλές είναι κοινό. Στο ποδόσφαιρο, την υδατοσφαίριση, τη χειροσφαίριση, το χόκεϊ αναγνωρίζεται μόνον η αριθμητική πράξη της πρόσθεσης, ένας πόντος – γκολ σε κάθε «επιτυχία» κι αυτό είναι όλο. Δεν είναι ίδιο με το να έχει κανείς κάποιον αριθμό πόντων εξαρχής, οι οποίοι να μειώνονται, ή να αυξομειώνονται μέχρι τη λήξη του παιχνιδιού. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να επιδρά στον τρόπο που παίζει κανείς, ή κι όπως ίσως γνωρίζουν οι παίκτες της πρέφας και επισημανθεί από τους Kahneman & Tversky (2007). Οι παραπάνω ενδεικτικές ομοιότητες μεταξύ των σφαιρίσεων και ιδιαίτερα οι ομοιότητες ως προς το ποιοι κυρίως συμμετέχουν και ποιοι διακρίνονται ακόμη σε αυτές, καθιστούν εύλογο ότι η Jeu de Paume, ως η σφαίριση για την οποία γράφει ο J Bernoulli, μπορεί να εκφράζει σε πολλά σημεία, οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες σημερινές.

Βάσει μιας λογικής αντίστοιχης με την παραπάνω, ακόμα πιο σημαντικό κι από την ιστορία τους να αντιληφθούμε την προϊστορία τους, που απλά μπορεί να μην υπάρχει ξέχωρα από την εξέλιξη των ανθρώπων, των πόλεων και των οικονομιών μας, ώστε να συναντάται με τη θεωρία τους. Επί του παρόντος κειμένου η Jeu de Paume της εποχής του J. Bernoulli μπορεί μέχρι ενός σημείου να λειτουργεί κι ως προϊστορικό πλαίσιο όλων των σύγχρονων ανταγωνιστικών σφαιρίσεων. Κάτι τέτοιο ενδεχομένως να ξενίζει αυτόν που δεν αποκλείεται να μην έχει στο νου του επαρκώς τη θεώρηση της ποικιλίας τους. Τη συμπληρώνουμε κατόπιν με το juggling (σε υπο-ατομικό επίπεδο εφόσον η Jeu de Paume κρίνεται στο ατομικό) και μετέπειτα αναφερόμαστε στις ομαδικές σφαιρίσεις, για να ολοκληρώσουμε με την πληθυσμιακή θεώρηση των πραγμάτων. Στη θέση της Jeu de Paume θα μπορούσε να τεθεί δίχως μεγάλη δυσκολία οποιαδήποτε από τις σύγχρονες σφαιρίσεις, οι οποίες, ως προς ορισμένα ζητήματα τουλάχιστον, δεν έχουν εξελιχθεί παρά ελάχιστα και δεν μπορούν να χαρακτηριστούν αναπτυγμένες, με μια ορολογία παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιούμε για τα λεγόμενα αναπτυγμένα κράτη. Οι σύγχρονες σφαιρίσεις διαθέτουν τις δικές τους εσωτερικές οικονομίες, καθώς για παράδειγμα έχουν πόντους και άλλα τέτοια ζητήματα που διαφοροποιούν τη μια από την άλλη, ώστε δεν είναι όλες εξίσου πρόσφορες γι ανάπτυξη. Και γι' αυτό άλλωστε χρειάζεται να εστιάσουμε σε αυτές. Έχει ιδιαίτερη σημασία το ότι ορισμένες σφαιρίσεις είναι πιο αναπτυγμένες σε σχέση με άλλες, και ότι δεν υποκαθίστανται όλες εξίσου εύκολα, ώστε η μεγαλύτερη ανάπτυξη ορισμένων δεν οφείλεται απλώς στο ότι επενδύθηκαν με περισσότερο οικονομικό χρήμα.

Η πλέον απλή υποψηφιότητα σημερινής σφαίρισης που μπορεί να υποτεθεί ως κατέχουσα μια θέση σαν αυτή της Jeu de Paume είναι το tennis. Έτσι όπως το γνωρίζουμε σήμερα, με το ανοιχτό γήπεδα κ.λπ. θα τεθεί περίπου 2 αιώνες έπειτα από τη Jeu de Paume, από τον αξιωματούχο W. Wingfield (http://www.itftennis.com/technical/courts/other/history.aspx). Ο ίδιος θέλησε να το λανσάρει ως «sphairistike», προκειμένου να του προσδώσει περισσότερη αίγλη σε σχέση με το παρελθόν. Εμπίπτει στα περί επινόησης της παράδοσης (Hobsbawm, & Ranger, 2004). Κράτησε κατά βάση το scoring system κι αρκετά ακόμη στοιχεία του˙ άλλα τα άλλαξε, όπως την μπάλα του, που θεωρείται πλέον χαρακτηριστική. Η καθιέρωση κάποιου συγκεκριμένου μοναδικού τύπου μπάλας, δείχνει μέχρι σήμερα πως νομίζεται σε όλες τις περιπτώσεις πολύ σημαντικό ζήτημα, ως προς την ανάπτυξη κάποιας σφαίρισης. Το ίδιο μπορούμε να υποστηρίξουμε επίσης για τη μοναδικότητα των νικητών και για πολλές άλλες τυπικές «μοναδικότητες» των σφαιρίσεων που δεν είναι καθόλου άνευ ιδεολογικών προεκτάσεων. Το tennis ή και η Jeu de Paume, κατά τα άλλα μπορεί να θεωρηθεί ως ρίζα και για κάμποσες άλλες σφαιρίσεις που διεξάγονται με ενδιάμεσο δίκτυ, όπως το badminton (αντιπτέριση), το table tennis (επιτραπέζια αντισφαίριση), το volleyball (πετοσφαίριση) και το beach volleyball (πετοσφαίριση παραλίας). Μπορεί να το διαπιστώσει κανείς διαβάζοντας την ιστορία αυτών των πέντε σφαιρίσεων˙ όπως και διαβάζοντας την ιστορία των υπολοίπων μισών του θερινού προγράμματος των τελευταίων Ολυμπιακών Αγώνων, μπορεί να διαπιστώσει κάποια αντίστοιχη σχέση τους με το ποδόσφαιρο. Έτσι, μπορούν κατά κάποιο τρόπο να υπαχθούν στο «ποδόσφαιρο», δηλαδή σε άνα και μόνο πρότυπο, όλες οι σφαιρίσεις του προγράμματος των τελευταίων Ολυμπιακών Αγώνων. Το πρόγραμμα των Ολυμπιακών αποτελεί τον «κανόνα» των αγωνισμάτων, όπως σχεδόν ο «θεατρικός κανόνας» περιέχει τα θεατρικά είδη του κι ως πρόσωπα τον Αισχύλο, τον Shakespeare κ.α., ο «μουσικός κανόνας» περιέχει τα μουσικά είδη του, τον Bach κ.ά και ούτω καθεξής.

Ο H. Gillmeister (1997) αναφέρει χαρακτηριστικά ότι το γεγονός ότι η αντισφαίριση είναι ένα παρακλάδι του ποδοσφαίρου, έχει συσκοτιστεί εκ των αλλαγών που έχουν υποστεί τα δυο παιγνίδια στην πάροδο πολλών αιώνων. Και συνεχίζει λέγοντας ότι από μια ιστορική σκοπιά το Parkspell είναι κατά πάσα πιθανότητα μια από τις παλαιότερες μορφές της αντισφαίρισης. Ειδικότερα, το κλώτσημα της μπάλας, απόλαυση των παικτών του parkspell, πηγαίνει πολύ πίσω στο χρόνο, όταν οι παίκτες της αντισφαίρισης δεν είχαν χειραφετηθεί από τον πατέρα της όλης οικογένειας των σφαιρίσεων: το ποδόσφαιρο.

Η διατύπωση μιας τέτοιας γνώμης, μπορεί να ξενίζει κάπως αρκετούς αναγνώστες, όπως και να χαροποιεί άλλους, τους πολλούς οπαδούς του ποδοσφαίρου. Δεν είναι παντελώς αβάσιμη ιστορικά, άλλωστε και με το ποδόσφαιρο κάτι παρόμοιο ισχύει. Σε πολύ γενικές γραμμές μπορούν δηλαδή για παράδειγμα να ενταχθούν από κοινού μαζί και με κάποιες αρχαίες, - «νεκρές» όμως - σφαιρίσεις σε ένα ενιαίο πρότυπο αντιθετικών σφαιρίσεων. Παίζονται μεταξύ ίσα διισταμένων, με δυο στόχους, με μια μπάλα κ.α (Pollucis, 1824). Κάποιο τέτοιο υπόδειγμα μπορούμε να το αναγνωρίσουμε ακόμα και σε απομακρυσμένους τοπικά και χρονικά πολιτισμούς, ως επίσκυρο στην αρχαία Ελλάδα και την Ρώμη, μα κι ακόμα πιο παλιά - και βέβαια με άλλη ονομασία - στην Κίνα, στη Μέση Ανατολή, ή πιο μετά στην Αμερική κ.λπ.

Δεν μπορεί να υποστηριχθεί βάσιμα για καμία σφαίριση, πως αυτή καθαυτή, έχει ιστορική συνέχεια χιλιετιών κι αρχαία καταγωγή. Η Jeu de Paume, η αντισφαίριση, ή το ποδόσφαιρο, μπορεί καθένα να αποτελεί έτσι ενδεικτικό παράδειγμα και για τις υπόλοιπες σύγχρονες σφαιρίσεις εν γένει. Διαφαίνεται όμως ήδη και το πρόβλημα της ιστορικής εξέτασης, κατά το μέτρο που, στο πλαίσιό της, αναζητείται κάποια σφαίριση ριζική, ως πρόγονος όλων των σφαιρίσεων. Το πρόβλημα που προκύπτει, έγκειται στην εστίαση της έρευνας στα χρονικά εγγύτερα αίτια και στην παραγνώριση των απώτερων. Μπορούμε να τη συζητήσουμε κατ' αναλογία με την βάσιμη αρχική υπόθεση της εξελικτικής θεωρίας του Darwin, ότι μια «πρώτη ζωή» μπορεί να προέκυψε καταρχήν σε λίγες μορφές, ή μόνο σε μια, που έλαβε χώρα σε μια και μοναδική χρονική στιγμή στο απώτερο παρελθόν (Darwin, 1998).

Παρομοίως όλες οι σφαιρίσεις μας, - που αναπτύσσονται εν πολλοίς στους ίδιους χώρους, προβάλλονται από την τηλεόραση κ.λπ. - μπορούν πολύ απλά να εκληφθούν ως παραλλαγές μιας και μόνης πρωταρχικής. Από κει και πέρα όμως, το να προβάλλει κανείς σαν αλήθεια, ότι κάποια σύγχρονη σφαίριση (ενδεχομένως η αγαπημένη του) έχει στ' αλήθεια πιο σπουδαία ιστορία από τις υπόλοιπες που κατάγονται εξ αυτής, μπορεί να είναι πολύ παραπλανητικό, όπως βέβαια και το ότι όλες έχουν σπουδαία ιστορία - καθώς η όποια ιστορία είναι σπουδαία. Συσκοτίζει ασφαλώς και μια μεγάλη «φτώχεια», αν μη τι άλλο αποτρέπει την ενασχόληση μεγάλων πληθυσμιακών ομάδων και κινδυνεύει αντιστοίχως από θεωρητική μεγαλοποίηση, ή μεγάλη θεωρητικοποίηση.

Η τότε αντισφαίριση με τη σύγχρονη εκδοχή της έχουν ποικίλες ομοιότητες και διαφορές, τις οποίες δεν θα αναλύσουμε εν προκειμένω. Ασφαλώς η αντισφαίριση δεν αποτελεί ρίζα όλων των υπόλοιπων, όπως άλλωστε και καμμία άλλη σφαίριση ειδικά. Οι σφαιρίσεις εν γένει όμως αποδεδειγμένα προσελκύουν έντονα το ανθρώπινο ενδιαφέρον, που καθώς εξόχως προκύπτει από την ενασχόληση του J. Bernoulli, μπορεί να είναι ιδιαιτέρως γόνιμο. Υπό κάποια εξελικτική μα και αναπτυξιακή πλέον θεώρηση, είναι δυνατόν κατόπιν και με την ιστορική διερεύνηση να αντιληφθεί κανείς, ότι κοινό στοιχείο στις σφαιρίσεις, μπορεί να είναι ακόμη και μια μπάλα˙ δηλαδή ένα αντικείμενο που δεν είναι βεβαίως έμβιο. Θεωρείται ως αυτονόητο - μα ασφαλώς δεν ήταν και μάλλον ούτε ακόμη είναι - ότι η αντισφαίριση, όπως και κάθε σφαίριση, παίζεται από ανθρώπους˙ οι τελευταίοι δεν αποκλείεται να μην ανήκουν στο ανδρικό φύλο, στη λευκή φυλή, και άλλες διακριτές κατηγορίες. Η πλέον κατάλληλη εναλλακτική προσέγγιση είναι πως πρόγονος των σφαιρίσεων είναι το ανθρώπινο είδος. Ασφαλώς, υπάρχει πολύ ενδιαφέρον για σχετικό παιχνίδι με τα αντικείμενα και στο ζωικό βασίλειο, όπως μας έχουν διαφωτίσει πολλοί, όπως οι J. Huizinga (1989), K. Groos (1898, 1901) κ.ά.. Ωστόσο, όπως γράφει πριν από το 1500, ο σπουδαίος N. Cusano (1463), σε ένα από τα πλέον ενδιαφέροντα ως προς τις σφαιρίσεις έργα, κανένα ζώο δεν φτιάχνει μια κυλιόμενη μπάλα και την κάνει να κινείται προς ένα σκοπό. Και γι’ αυτό, τα συγκεκριμένα έργα του ανθρώπου γίνονται μέσω μιας δύναμης που ξεπερνάει τα άλλα ζώα αυτού του κόσμου.

Οι σφαιρίσεις εν προκειμένω, για να αναπτυχθούν δεν απαιτούν κυρίως κάποιο γενετικό πρόγραμμα. Η πραγματική ανάπτυξή τους όμως όπως επισημαίνεται κι αλλού απαιτεί χρηματικές οικονομίες, απαιτεί αστικό χώρο και ανθρώπινο πληθυσμό. Το πρόβλημα της ανάπτυξής τους είναι ως εκ τούτου πολυσύνθετο, ιδίως εφόσον έχει κάποιος υπόψη ότι αλλάζουν, καθότι αν δεν συνέβαινε αυτό θα ήμασταν ακόμη στον επίσκυρο και στις αρχαίες παραλλαγές του αντιθετικού παιχνιδιού. Οι περισσότεροι άνθρωποι όμως ενδεχομένως πιστεύουν ότι - ως προς τις σφαιρίσεις – υπάρχουν κάποια σταθερά είδη. Πιστεύουν ότι η ανάπτυξή τους επέρχεται αυτόματα και συμβαδίζει πάντοτε με την εποχή της. Οι σφαιρίσεις όμως από την άλλη, ενδέχεται να μην είναι αντάξιες των σύγχρονων αντιλήψεων, να μην είναι αναπτυγμένες, ούτε καν αναπτυσσόμενες, υπό την ορολογία της ανάπτυξης. Δεν αποκλείεται βεβαίως το ενδεχόμενο οι όποιες παραλλαγές της σύγχρονης εποχής, τα σπορ, να έχουν ως βιολογικό αντίστοιχο κάτι πολύ πριν τον πίθηκο και πολύ πιο κοντά στα βακτήρια, παρά την πλέον εξελιγμένη εκδοχή του homo sapiens.

1.5 Τι βρήκε ο J. Bernoulli στη Jeu de Paume

Ο J. Bernoulli διακρίνει στη Jeu de Paume πάρα πολλά χαρακτηριστικά που έχουν ιδιαίτερη σημασία στη θεωρία πιθανοτήτων, είτε στην κατοπινή θεωρία παιγνίων. Ο ίδιος είχε ασφαλώς ευρύτερα επιστημονικά ενδιαφέροντα κι εκτός της Jeu de Paume και των σφαιρίσεων εν γένει. Επίσης και αυτές οι τελευταίες, διαθέτουν κι άλλα «πράγματα», στα οποία δεν αναφέρθηκε εκείνος. Ακολούθως και σε αντιδιαστολή με τα τυχερά παίγνια κυρίως, συνοψίζουμε ορισμένα από τα πλέον κύρια εξ αυτών, που διέκρινε σαφώς ο J. Bernoulli στη Jeu de Paume.

- Στη Jeu de Paume δεν γνωρίζουμε τον ακριβή αριθμό των ευμενών και των δυσμενών περιπτώσεων για τους παίκτες. Οι προσδοκίες – πιθανότητές τους δεν είναι ίσες, οι παίκτες δεν είναι εξίσου ικανοί απαραιτήτως, δεν είναι συμμετρικά τα γήπεδα, όπως είναι σήμερα, ούτε είναι συμμετρικοί εν γένει και οι όροι του παιχνιδιού. Αυτό τον οδηγεί στον εκ των υστέρων προσδιορισμό των αιτιών, δια μέσου του μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων επαναλαμβανόμενων αποτελεσμάτων.

- Στη Jeu de Paume της εποχής υπάρχουν ως «καταστάσεις» τα deuce και τα advantage. Οι παίκτες κατά την εξέλιξη του παιχνιδιού παρέχουν συνεχώς ενδείξεις του συσχετισμού των δυνάμεών τους κατ’ αντιδιαστολή με την ενδεχόμενη άγνοια που έχουμε για τον συσχετισμό αυτόν κατά την έναρξη του παιχνιδιού (κάτι αδύνατο για τυχερά παίγνια). Αν ο συσχετισμός μάς είναι γνωστός, προσφέρεται πλεονέκτημα στον πλέον αδύναμο ώστε και πάλι το παιχνίδι να είναι «ισορροπημένο» και υποβοηθείται έτσι να παλινδρομεί ανάμεσα σε αυτές τις καταστάσεις.
- Στο παιχνίδι αναγνωρίζονται όχι μόνον πόντοι, μα και σύνολα πόντων, τα game, καθώς και σύνολα συνόλων (σύνολα από game) τα set. Για τη νίκη στην παρτίδα απαιτείται ελάχιστη διαφορά 2 set (κι όχι 1), όπως και για τη νίκη στο set απαιτείται ελάχιστη διαφορά 2 game (κι όχι 1). Τα παραπάνω σύνολα πόντων, ή σύνολα συνόλων, μπορεί να είναι οσαδήποτε, απαραιτήτων όμως πάνω από τέσσερα το καθένα. Βάσει αυτού ο J. Bernoulli μπορεί να οδηγηθεί σε συγκεκριμένο τύπο για το αρχικό 0-0, καθώς και για κάθε άλλο σκορ.
- Οι πόντοι και τα game, μετριούνται κατά περίεργο, μα ευκόλως κατανοητό τρόπο, τα μεν με τη σειρά 15, 30, 45,…, τα δε με τη σειρά των φυσικών αριθμών. Κατά κάποιο τρόπο όπως ορίζεται ότι 60 δευτερόλεπτα κάνουν ένα λεπτό και 60 λεπτά κάνουν μια ώρα, ή ότι 10 εκατοστά κάνουν ένα δέκατο και 10 δέκατα κάνουν ένα μέτρο, ο J. Bernoulli θεωρεί game των 4 φάσεων και σετ των 4 game.
- Η σφαίριση παίζεται κανονικά ανάμεσα σε δυο μέρη, έστω κι αν ενίοτε παίξουν περισσότεροι από 2 ανθρώπους. Αυτό τον οδηγεί στο να ορίσει ότι η τύχη (sort) του κάθε μέρους είναι πάντοτε 1/2. Αυτή η διαίρεση δια του 2 είναι ιδιαίτερα βολική, καθότι μπορεί να εξασφαλιστεί ως αναλογική (proportional) κι άνευ φθόνου (envy-free) διεργασία, ιδιότητες που δεν διαθέτουν, ή ήσαν άγνωστες μέχρι πρότεινος για διαιρέσεις, προς μεγαλύτερους αριθμούς παικτών (Brams & Taylor, 1996).
- Στη Jeu de Paume υφίστανται τα λεγόμενα half odds, ανάμεσα στα διάφορα handicap, που έτσι κι αλλιώς έχουν τεθεί για να αντισταθμίζουν τα πλεονεκτήματα εκ της συχνής ανισότητας ως προς τις δυνάμεις των παικτών. Στα half odds, αντί για σταθερές υπάρχουν κυμαινόμενες τιμές, χαμηλές και υψηλές εναλλάξ, κάτι που στρέφει τον J. Bernoulli να εξετάσει, μεταξύ άλλων, και το ζήτημα της αδιαφορίας (Hald 2004). Μπορεί να διερευνήθηκε περαιτέρω, από άλλους επιστήμονες, όπως ο

Hicks σχεδόν δυο αιώνες μετά, όμως ο J. Bernoulli θίγει ήδη το ζήτημα της αδιαφορίας κατά την αναζήτηση πλεονεκτημάτων ως προς τα half odds, όπως και το ζήτημα αυτού που αργότερα θα ονομαστεί ως «ανεπαρκής λόγος» («insufficient reason»).

- Το ότι ενίοτε συνηθίζεται εμπράκτως να παίζουν περισσότεροι από δυο, είτε ως δυο εναντίον ενός είτε ως ζεύγη, τον στρέφει να ορίσει μια αξιολόγηση – και αριθμητική κατάταξη δυνητικά, όχι μόνον των δυο που παίζουν κανονικά σε κάθε αναμέτρηση, μα κι οσωνδήποτε έχουν παίξει, ή θα παίξουν με οποιονδήποτε αξιολογημένο αντίπαλο. Επισημαίνει επιπλέον, πως κάθε ζεύγος πρέπει να αξιολογηθεί ως τέτοιο κι όχι πως παίζει καθείς μόνος. Στρέφεται επίσης σε γενικά ζητήματα στρατηγικής των παικτών, όπου διαπιστώνει ότι οι πλέον ικανοί παίκτες πάντα θα επιχειρούν να στοχεύουν προς τους αδύναμους αντιπάλους τους.
- Στη Jeu de Paume υφίστανται τα λεγόμενα bisque, τα οποία είναι πόντοι από φάσεις που δεν παίζονται, αλλά χαρίζονται προκαταβολικά από το ένα μέρος προς το άλλο, το οποίο παίρνει το δικαίωμα να τα χρησιμοποιήσει οποτεδήποτε θελήσει. Τίθενται έτσι ζητήματα ως προς το ποια είναι η αξία τους και πότε είναι προτιμότερο να τα πάρει κάποιος. Τα ζητήματα αυτά τον κάνουν να συζητήσει περαιτέρω και περί της αδιαφορίας και της αποφασιστικότητας – αναποφασιστικότητας ως προς αυτά. Σε γενικές γραμμές αποφαίνεται πως είναι καλύτερο να παίζει κανείς αποφασισμένος να πάρει το bisque αμέσως, δίχως να περιμένει.
- Υφίστανται τα chase, εκτός από τα bisque, οπότε ο J. Bernoulli αναγνωρίζει το να κερδίζει κανείς κάποιο πιο συγκεκριμένο chase, ως ειδική ικανότητα εντός της γενικότερης ικανότητας στη Jeu de Paume. Αν κάποιο μέρος διαθέτει συγκριτικά μεγαλύτερη ικανότητα να κερδίσει κάποιο ειδικό chase, τότε ο J. Bernoulli, δια των μαθηματικών του και πάλι, κρίνει σκόπιμο να μην πάρει το bisque αμέσως, μα να το φυλάξει για όποτε το χρειαστεί.
- Οι παρτίδες της Jeu de Paume αρχίζουν με service που φαίνεται να παρέχουν κάποιο προνόμιο σε εκείνον που τα εκτελεί, καθότι αφενός η μπάλα βρίσκεται στο χέρι του κι όχι στον αέρα κι αφετέρου ακόμη κι αν αυτά χαθούν συνιστούν περίπτωση για chase. Ο J. Bernoulli κρίνει πως εκείνος που σερβίρει μπορεί να φαντάζεται ότι έχει έρθει ήδη η σειρά του αντιπάλου να απαντήσει (υπάρχει μια σειρά σε κάθε περίπτωση, καθώς οι παίκτες δεν παίζουν «πολλαπλώς» υπό την ορολογία της θεωρίας παιγνίων). Υπολογίζει και πάλι δια των μαθηματικών την πιθανότητα του καθενός, ως κατά τι μεγαλύτερη υπέρ εκείνου που σερβίρει.

1.6 Η Lettre à un amy sur les parties du jeu de paume

1.6.1 Η εισαγωγή της Lettre à un amy…

«Αναφέρετε, κύριε, πως έχετε δει κάποια από τις θέσεις μου, όπου παραθέτω ορισμένες νέες προτάσεις σχετικά με τις παρτίδες στο jeu de paume. Αναρωτιέστε εάν οι προτάσεις αυτές έχουν κάποια εξακριβώσιμη βάση ή μήπως βασίζονται σε καθαρές εικασίες ή αερολογίες αφού, όπως λέτε, δεν μπορούμε να μετρήσουμε τις δυνάμεις των παικτών, πολύ λιγότερο δε να συνάγουμε από αυτό όλα τα συμπεράσματα που έχω συνάγει. Τούτο με υποχρεώνει να εκθέσω γραπτώς τις σκέψεις μου σχετικά με το θέμα σε αυτήν την επιστολή. Σας γράφω στα γαλλικά για να μην δυσχεράνω την ανάγνωση με τη μετάφραση των όρων που συνηθίζουν να χρησιμοποιούν οι παίκτες, οι οποίοι δύσκολα θα γίνονταν κατανοητοί σε μια άλλη γλώσσα. Δεν θα σας απασχολήσω εδώ με τους κανόνες του παιχνιδιού ή τις αρχές της τέχνης του συμπεραίνειν (art de conjecturer), η οποία πρέπει να μας χρησιμεύσει ως βάση για την έρευνά μας, επειδή ξέρω ότι είσαστε απόλυτα εξοικειωμένος και με τα δύο. Κατά τα λοιπά, όμως, θα εξετάσω λεπτομερώς όλες τις ιδιαιτερότητες του θέματός μου, χωρίς να φοβηθώ την κατηγορία ότι σπαταλώ το χρόνο σας για φληναφήματα. Γιατί γνωρίζετε ότι το ευγενές αυτό παιχνίδι αποτελούσε ανέκαθεν πηγή ψυχαγωγίας για πρόσωπα ανωτάτου επιπέδου και σύντομα θα δείτε ότι, πέραν του ότι είναι χρήσιμο για την άσκηση του σώματος, είναι επίσης πλέον ικανό και άξιο να συγκεκριμενοποιεί τους συλλογισμούς του πνεύματος.

Επισημαίνω, πρώτα απ' όλα, ότι ο λόγος που μπορούμε να υπολογίζουμε επακριβώς τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των παικτών στα τυχερά παίγνια, είναι ακριβώς ότι πολύ συχνά γνωρίζουμε τις ευνοϊκές ή δυσμενείς καταστάσεις που αφορούν στους παίκτες. Και οφείλω να σας πω ότι δεν συμβαίνει το ίδιο με παιχνίδια όπως η Jeu de Paume, το σκάκι ή τα περισσότερα χαρτοπαίγνια, τα οποία εξαρτώνται εξ ολοκλήρου ή εν μέρει από την ευφυΐα, την επιμέλεια ή την επιδεξιότητα των παικτών. Είναι προφανές ότι δεν θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε με βάση τις αιτίες, ή εκ των προτέρων, κατά πόσον ένας άνθρωπος έχει περισσότερες γνώσεις ή είναι πιο επιδέξιος ή πιο ικανός από κάποιον άλλον, εκτός κι αν είχαμε τέλεια γνώση της φύσεως της ψυχής του και της θέσης των οργάνων εντός του ανθρώπινου σώματος. Μια τέτοια γνώση καθίσταται απολύτως αδύνατη εξαιτίας μυριάδων κρυφών αιτιών. Αλλά αυτό δεν μας εμποδίζει να γνωρίσουμε τις σχετικές ικανότητες των παικτών εκ των υστέρων, σχεδόν με βεβαιότητα, παρακολουθώντας το γεγονός πολλές φορές και αντιλαμβανόμενοι τι *συμβαίνει στην πράξη, ακόμη και στα παιχνίδια καθαρής τύχης όπου δεν γνωρίζουμε τον αριθμό των περιπτώσεων που μπορούν να συντρέξουν. Ας υποθέσουμε ότι έχω ένα σακούλι με λαχνούς, λευκούς και μαύρους, αλλά δεν ξέρω πόσοι από αυτούς είναι λευκοί και πόσοι μαύροι. Τι θα μπορούσα να κάνω για να το ανακαλύψω; Θα μπορούσα να τραβάω έναν-έναν λαχνό από το σακούλι (ξαναρίχνοντας πίσω κάθε λαχνό που τραβάω πριν πάρω τον επόμενο έτσι ώστε να μην μειώνεται ο αριθμός των λαχνών μέσα στο σακούλι) και εάν διαπιστώσω ότι τράβηξα εκατό φορές μαύρο λαχνό και διακόσιες φορές λευκό λαχνό, δεν θα δίσταζα να συμπεράνω ότι ο αριθμός των λευκών λαχνών είναι περίπου ο διπλάσιος των μαύρων. Γιατί είναι αρκετά βέβαιο ότι, όσο περισσότερους λαχνούς τραβήξω, τόσο καλύτερα μπορώ να προσεγγίσω την πραγματική αναλογία μεταξύ των δύο ομάδων λαχνών. Έχει μάλιστα αποδειχθεί ότι αυτό μπορεί να επαναληφθεί αρκετές φορές, ώστε τελικά είναι πιθανόν, κατά πάσα πιθανότητα (de toute probabilité donée), και συνεπώς ηθικώς βέβαιο, ότι η αναλογία των ποσοτήτων που διαπιστώσαμε με την εμπειρία διαφέρει από τον αληθινό λόγο τόσο λίγο όσο θα επιθυμούσαμε, πράγμα που είναι το περισσότερο που θα ευχόταν κανείς. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε επίσης να γνωρίζουμε στα παιχνίδια τεχνικής και επιδεξιότητας πόσο δυνατότερος είναι ο ένας παίκτης από τον άλλον. Για παράδειγμα, βλέπω δύο άνδρες να παίζουν Jeu de Paume. Τους παρακολουθώ για πολλή ώρα και παρατηρώ ότι ο ένας από αυτούς κερδίζει 200 ή 300 φάσεις ενώ ο άλλος κερδίζει μόνον εκατό. Από αυτό κρίνω, με αρκετό βαθμό βεβαιότητας, ότι ο πρώτος είναι δύο ή τρεις φορές καλύτερος παίκτης από τον άλλον, επειδή διαθέτει δύο ή τρία μέρη επιδεξιότητας, φερ' ειπείν, όσες δηλαδή και οι περιπτώσεις ή οι αιτίες που τον κάνουν να κερδίζει την μπαλιά (la bale), εκεί που ο άλλος διαθέτει μόνον ένα μέρος».*

(Bernoulli, 1713/2006:363-364)

1.6.2 Το πρώτο τμήμα της Lettre à un amy…

Ο J. Bernoulli σημειώνει ότι, εφόσον το εισαγωγικό μέρος είναι κατανοητό μπορεί να προχωρήσει θεωρώντας δυο ισοδύναμους παίκτες (που σημαίνει ότι τους έχουμε δει να κερδίζουν και να χάνουν ισάριθμες φάσεις) ενώ καταρχήν βρίσκονται με ίσους πόντους (Bernoulli, 1713/2006). Γράφει πως μπορούμε να θεωρήσουμε πως βρίσκονται έστω σε κάποιο ίσο σκορ, στο λεγόμενο «deuce» που καταρχήν είναι το 45-45, ή στο 30-30, ή στο 15-15, ή εντέλει στο 0-0. Δεν αναφέρει όμως πρώτα το 0-0 κι αυτό έχει τη σημασία του. Ο J.

Bernoulli θέτει καταρχήν p=1/2, έστω κι αν δεν είναι αυτός ο συμβολισμός που χρησιμοποιεί. Μπορεί να αντιληφθεί κανείς πάρα πολλά για το πώς προσεγγίζει τις πιθανότητες στη *Lettre à un amy…* με την εξέταση των επτά συνολικά πινάκων που περιέχει.

Ο συγγραφέας ξεκινάει με το πώς οι ολοκληρωμένες φάσεις άγουν προς την ολοκλήρωση των game προσδίδοντας καταρχήν αριθμητικές τιμές. Έπειτα από λίγο θα συνεχίσει με το πώς τα ολοκληρωμένα game άγουν προς την ολοκλήρωση του κάθε set. Μετέπειτα θα αντικαταστήσει τις αριθμητικές τιμές με αλγεβρικές. Το κάνει τόσο στα μεν, όσο και στα δε, πάντα με βάση το δεδομένο σύστημα σκοραρίσματος της Jeu de Paume, του οποίου το σκεπτικό της ανάπτυξης κατανοεί πολύ καλώς. Παίρνει δε, τη σκοπιά του ενός μόνον εκ των παικτών και λογαριάζει τις πιθανότητές του, καθώς λέμε σήμερα («sorts» είναι ο όρος που χρησιμοποιεί στους πίνακές του κι αλλού, κι ο οποίος μπορεί να αποδοθεί ποκιλοτρόπως, π.χ. ως «τύχες» αν και εννοείται καλύτερα μάλλον ως προσδοκίες).

Σκορ game		Προσδοκία του Α
Α	Β	
45	45	1/2g
30	45	1/4g
15	45	1/8g
0	45	1/16g
30	30	1/2g
15	30	5/16g
0	30	3/16g
15	15	1/2g
0	15	11/32g
0	0	1/2g

Πίνακας Ι.

Σκορ set		Προσδοκία του Α
Α	Β	
3	3	1/2s
2	3	1/4s
1	3	1/8s
0	3	1/16s
2	2	1/2s
1	2	5/16s
0	2	3/16s
1	1	1/2s
0	1	11/32s
0	0	1/2s

Πίνακας ΙΙ.

Δίνει έτσι δυο πίνακες μαζί, τους Ι και ΙΙ, τους οποίους και παραθέτουμε (Πίνακας Ι και ΙΙ). Οι πίνακες είναι ισοδύναμοι γιατί ο J. Bernoulli υποθέτει set που αποτελείται από 4 τουλάχιστον νικηφόρα game με ελάχιστη διαφορά 2, κατά αντιστοιχία με το game, που αποτελείται από αντίστοιχα αριθμητικά δεδομένα φάσεων.

Σήμερα πλέον μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σύγχρονη σημειογραφία, την οποία ο ίδιος δεν είχε στη διάθεσή του. Ξεκινάει λοιπόν από το deuce, που μπορούμε να το γράψουμε ως g(45,45), ή κι ως g(3,3), αν το θέλουμε πιο απλοποιημένο προς τους 15 πόντους κάθε φάσης. Κατόπιν ασχολείται με την πιθανότητα νίκης σε κάποιο set, για την οποία επίσης μπορούμε να έχουμε αντίστοιχο τύπο που ακόμη κι αν δείχνει πιο περίπλοκος, παράγεται με τα ίδια επαναλαμβανόμενα απλά βήματα, και δεν διαφέρει τον προηγούμενο τύπο ως προς τη λογική του. Ο J. Bernoulli δεν αλλάζει μέθοδο, λογαριάζει τις διάφορες πιθανότητες βασιζόμενος στο προϋπάρχον σύστημα σκοραρίσματος της Jeu de Paume, που έχει δομηθεί υπό συγκεκριμένη λογική. Σύντομα περνάει στην υπόθεση ότι καθένας από τους ισοδύναμους παίκτες έχει ορισμένο αριθμό κερδισμένων game κι έναν αριθμό κερδισμένων φάσεων (πόντων), που είναι διάφορος του αντιπάλου του. Αυτό δεν τον εμποδίζει, με την ίδια μέθοδο, να υπολογίσει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς και να τους εντάξει στον επόμενο πίνακα (Πίνακας III). Αυτός ο πίνακας είναι γενικός, κι εμπεριέχει όλον τον πίνακα II, που βρίσκεται στην τελευταία σειρά του. Επισημαίνει ότι αν μπει κανείς στον προβληματισμό να τον εξετάσει, θα κάνει πολλές αξιόλογες παρατηρήσεις. Μπορούμε να διαπιστώσουμε για παράδειγμα ότι το 15 προς 30 με τους παίκτες σε deuce στο set, αξίζει ακριβώς το ίδιο όσο το 30 προς 0 με δύο προς τρία game, ή όσο το 45 προς 30 με ένα προς δύο game, ή, τελικά, όσο το 30 προς 45 με ένα προς ένα game και διάφορα άλλα σκορ που οδηγούν προς ακριβώς ίσες, ή άλλοτε σχεδόν ίσες πιθανότητες ανάμεσά τους.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ

Game A		III. ή II.	II.	I.	0.	I.	0.	I.	0.	0.
Game B		III. II.	III.	III.	III.	II.	II.	I.	I.	0.
πόντοι A	B	προσδοκία του A								
45.	45	1:2	1:4	1:8	1:16	5:16	3:16	1:2	11:32	1:2
30.	45	3:8	1:8	1:16	1:32	7:32	1:8	13:32	17:64	27:64
15.	45	5:16	1:16	1:32	1:64	11:64	3:32	23:64	29:128	49:128
0.	45	9:32	1:32	1:64	1:128	19:128	5:64	42:128	53:256	93:256
45.	30	5:8	3:8	3:16	3:32	13:32	1:4	19:32	27:64	37:64
30.	30	1:2	1:4	1:8	1:16	5:16	3:16	1:2	11:32	1:2
15.	30	13:32	5:32	5:64	5:128	31:128	9:64	55:128	73:256	113:256
0.	30	11:32	3:32	3:64	3:128	25:128	7:64	49:128	63:256	103:256
45.	15	11:16	7:16	7:32	7:64	29:64	9:32	41:64	59:128	79:128
30.	15	19:32	11:32	11:64	11:128	49:128	15:64	73:128	103:256	143:256
15.	15	1:2	1:4	1:8	1:16	5:16	3:16	1:2	11:32	1:2
0.	15	27:64	11:64	11:128	11:256	65:256	19:128	113:256	151:512	231:512
45.	0	23:32	15:32	15:64	15:128	61:128	19:64	85:128	123:256	163:256
30.	0	21:32	13:32	13:64	13:128	55:128	17:64	79:128	113:256	153:256
15.	0	37:64	21:64	21:128	21:256	95:256	29:128	143:256	201:512	281:512
0.	0	1:2	1:4	1:8	1:16	5:16	3:16	1:2	11:32	1:2

Πίνακας III.

Κατόπιν ο J. Bernoulli περνάει στις πιθανότητες όταν οι παίκτες δεν είναι ισοδύναμοι. Προκειμένου να συντομεύσει τον υπολογισμό, υποδηλώνει με n τον αριθμό γενικότερα των φάσεων που έχουμε δει το ισχυρότερο παίκτη A να νικά, κάθε φορά που ο αδύναμος παίκτης B, έχει κερδίσει μια. Έτσι, αυτό το n προς 1, υποδηλώνει την αναλογία δυνάμεων των δύο παικτών. Κάνει λοιπόν μια μικρή ανάλυση με αφετηρία το deuce εκ νέου, στηριζόμενος στον ισχύοντα κανονισμό. Βάσει αυτού, για να χριστεί κάποιος νικητής του game, απαιτείται να νικήσει όχι σε μια φάση μόνον, (που τον βγάζει σε game point, ή με άλλα λόγια σε πλεονέκτημα για τον ίδιο), αλλά σε δυο διαδοχικές. Οπότε ο J. Bernoulli ορίζει $x = n^2 / (n^2 + 1)$, ή όπως το γράφει αλλιώς x = nn / (nn+1), τις πιθανότητες να νικήσει ο ισχυρότερος παίκτης, δυο φάσεις διαδοχικά, από το deuce κι έπειτα. Αφήνει έτσι 1 / (nn + 1) για την πιθανότητα νίκης του ασθενέστερου, ώστε η αναλογία των πιθανοτήτων των δύο παικτών, να είναι nn προς 1˙ δηλαδή, το τετράγωνο της αναλογίας των δυνάμεών τους n προς 1. Αυτές οι πιθανότητες νίκης καθενός που δίνει για το deuce, στο 45-45, ισχύουν και για κάθε ίσο σκορ μετά από αυτό, όπως και για το αμέσως προηγούμενο, στο 30-30. Οι πιθανότητές τους όμως στο 15-15 και εντέλει στο 0-0 διαφέρουν, ενώ διαφοροποιούνται και οι πιθανότητές τους στα υπόλοιπα σκορ.

Αυτά όλα δίνουν τον Πίνακα IV, ο οποίος περιέχει τις πιθανότητες του A (σε σχέση με το κάθε game) γενικώς και για κάθε είδους αναλογία, που κάποιος μπορεί να φαντάζεται ανάμεσα στις δυνάμεις των παικτών.

Βλέπουμε πολύ καλά ότι εάν πάρουμε το n να είναι 1, τότε ο Πίνακας IV αντιστοιχεί στον πίνακα I, ο οποίος φτιάχτηκε για παίκτες ισοδύναμους. Διαπιστώνουμε επίσης ότι κατά την έναρξη του παιχνιδιού, στο συγκεκριμένο 0–0 της Jeu de Paume, ή αλλιώς στην κατάσταση g(0,0) η πιθανότητα του A υπολογίζεται πως είναι:

$$g(0,0) = \frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1},$$

Ο τύπος ισχύει καθότι αποδίδεται στο 45-45, το σκορ του deuce, η αρχική βάση υπολογισμού της τιμής x = nn / nn + 1, σύμφωνα με το πώς το γράφει ο J. Bernoulli. Από αυτό συνάγεται ότι όταν οι αντίπαλοι είναι ισοδύναμοι, δηλαδή έχουμε n = 1, τότε έχουμε g(0,0) = 1/2, που εντέλει είναι και η τιμή για το g(45,45).

ΠΙΝΑΚΑΣ IV

Πόντοι A	Πόντοι B	Προσδοκία του A
45	45	$\frac{nn}{nn+1}$
30	45	$\frac{n^3}{n^3+nn+n+1}$
15	45	$\frac{n^4}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$
0	45	$\frac{n^5}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
45	30	$\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1}$
30	30	$\frac{nn}{nn+1}$
15	30	$\frac{n^5+3n^4+n^3}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
0	30	$\frac{n^6+4n^5+n^4}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$
45	15	$\frac{n^4+2n^3+2nn+2n}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$
30	15	$\frac{n^5+3n^4+4n^3+3nn}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
15	15	$\frac{n^5+3n^4+4n^3}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
0	15	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$
45	0	$\frac{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
30	0	$\frac{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+6nn}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$
15	0	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+10n^3}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$
0	0	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$

Πίνακας IV.

Στο επόμενο άρθρο προχωρά σε έναν άλλο παρόμοιο πίνακα, ο οποίος περιέχει τις πιθανότητες των παικτών σε σχέση με ολόκληρο το set, όταν παίζουν διάφορα game, έχουν ήδη κερδίσει μερικά, και ίσως να έχουν μερικούς πόντους (από κερδισμένες φάσεις) απέναντι στον άλλο. Ότι έκανε για ίσους παίκτες στον Πίνακα III προηγουμένως, το κάνει πλέον για παίκτες με διαφορετικές δυνάμεις δίνοντας τον παρακάτω πίνακα (Πίνακας V).

ΠΙΝΑΚΑΣ V

πόντοι A	πόντοι B	λόγος των προσδοκιών όταν ο Α είναι τόσο δυνατός όσο ο Β επί 2 φορές	3 φορές	4 φορές
45	45	4:1	9:1	16:1
30	45	8:7	27:13	64:21
15	45	16:29	81:79	256:169
0	45	32:103	243:397	1024:1101
45	30	14:1	39:1	84:1
30	30	4:1	9:1	16:1
15	30	88:47	513:127	1856:269
0	30	208:197	891:389	8448:2177
45	15	44:1	159:1	424:1
30	15	124:11	621:19	2096:29
15	15	112:23	297:23	2048:77
0	15	176:67	891:133	49408:3717
45	0	134:1	639:1	2124:1
30	0	392:13	1269:11	10592:33
15	0	224:19	999:25	52608:517
0	0	208:35	243:13	51968:1157

Πίνακας V.

Άν η αναλογία των δυνάμεων των δύο παικτών είναι γνωστή, τότε μπορούμε να βρούμε πόσο εξισορροπητικό handicap μπορεί να πάρει ο ένας, ή αλλιώς πόσο εξισορροπητικό πλεονέκτημα μπορεί να δώσει στον άλλο, με σκοπό να κάνει το game «ίσο». Μια ματιά στον πίνακα V αρκεί για να βρούμε το πού συγκλίνουν οι πιθανότητες νίκης τους και μπορούμε πράγματι να υποθέσουμε διάφορες τιμές για το n, ώστε να δούμε τα handicap που προκύπτουν.

Διαπιστώνουμε για παράδειγμα ότι αν ο ένας παίκτης είναι δυο φορές ανώτερος από τον άλλο, ότι $p/q = 2$, τότε έχουμε $g(0,30) = 208/(208+197) = 208/405 = 0.514$. Με άλλα λόγια, όταν το παιχνίδι ξεκινά με σκορ (0 – 30), αυτό το handicap πόντων σχεδόν εξισώνει τις πιθανότητες νίκης των παικτών.

Αν $p/q = 3$, τότε δεν αρκεί το παραπάνω handicap, καθώς τότε έχουμε $g(0,30) = 891/1286 = 0.696$ οπότε είναι καλύτερα να έχουμε handicap $g(15,45) = 81/160 = 0.506$.

Μετέπειτα ο J. Bernoulli, αντιστρέφει το ερώτημα. Είναι κάτι που λατρεύουν να κάνουν οι μαθηματικοί (Du Sautoy, 2009). Εν προκειμένω όμως, κανένας μαθηματικός πριν από αυτόν δεν έχει επιχειρήσει κάτι τέτοιο, ούτε το ευθύ ούτε το αντίστροφο. Θέτει δηλαδή το ερώτημα πόσο πιο ισχυρός συμπεραίνεται πως είναι ο Α, αν δύναται να προσφέρει handicap 15, ή 30, ή 45 πόντων στον Β, προκειμένου να παίξουν στα ίσα. Το να προσφέρει κάποιος handicap στη Jeu de Paume, είναι κάτι που συνέβαινε, και που έχει νόημα, ενώ δεν είναι το ίδιο στα τυχερά παίγνια.

Ο J. Bernoulli ανατρέχει έτσι και πάλι στον πίνακα IV, εξισώνοντας με 1/2 κάθε αλγεβρική παράσταση που έχει βρει, ανάλογα με το αν το παιχνίδι ξεκινά από 0 - 15, ή 0 - 30, ή 0 - 45. Επιλύει με άλλα λόγια από g(0, j) = 1/2, με δεδομένη τιμή του j και υπό τη συνθήκη n = p/q, οπότε καταλήγει πλέον σε δεδομένη αλγεβρική έκφραση για το n. Αν π.χ. κάποιος προσφέρει handicap 30 πόντων, σύμφωνα με τη λύση της $6^{ου}$ βαθμού εξίσωσης που δίνει, βρίσκουμε ότι n = 1.946, δηλαδή ότι ο ένας παίκτης είναι σχεδόν δυο φορές ανώτερος από τον άλλο. Επισημαίνει ότι εφόσον απαντάμε πόσο είναι το handicap που οφείλει να δώσει ο ισχυρός ώστε το παιχνίδι να είναι ίσο, θα πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι του καθενός η «τύχη» ισούται με το 1/2. Διαπιστώνει εντέλει ότι αν ο Α δίνει στον Β το πλεονέκτημα που είναι αναγκαίο για να φέρει το παχνίδι στα ίσα, τότε είναι όλως ίδιο το αν παίζουν ένα game, ή δύο game, ή τρία ή οσαδήποτε θέλουμε. Γιατί είναι εξίσου πιθανό ο Α να κερδίσει το game ή να το χάσει, και είναι επίσης εξίσου δυνατό να νικήσει δύο game στη σειρά, ή να τα χάσει (όταν το set παίζεται στα δυο game), ή αλλιώς να νικήσει, ή να χάσει τρία game (όταν παίζεται στα τρία game), κ.ο.κ.

Το πλούσιο scoring system της Jeu de Paume τον στρέφει να εξετάσει το συσχετισμό δυνάμεων κι όταν προσφέρεται κάποιο εκ περιτροπής handicap από το ίδιο ισχυρό μέρος πάντοτε, το λεγόμενο και ως half odds. Αυτό σημαίνει ότι το αδύναμο μέρος δέχεται κάποιο πλεονέκτημα που παίρνει δυο τιμές. Το εν λόγω πλεονέκτημα εναλλάσσεται διαδοχικά, έτσι ώστε κατά το ένα game το αδύναμο μέρος παίζει έχοντας υπέρ του το σχετικά μεγαλύτερο αριθμό πόντων κι ένα ελαφρύ προβάδισμα προς τη νίκη, ενώ στο επόμενο game, το ίδιο μέρος παίζει με σχετικά μικρότερο αριθμό πόντων, ώστε έχουμε αναλόγως ελαφρύ προβάδισμα του αντιπάλου.

Ο J. Bernoulli υποθέτει, για παράδειγμα, ότι η αναλογία της πιθανότητας του Β να κερδίσει το game προς την πιθανότητα του Α, είναι b προς a κάθε φορά που το Β παίρνει 45 (στα μονά game), και c προς d κάθε φορά που παίρνει 45 (στα ζυγά game). Με αυτό ως δεδομένο, ορίζει την πιθανότητα του Α στην αρχή του set ίση με το z και εξετάζει τι θα συνέβαινε, εάν το Β κέρδιζε το πρώτο game. Τότε το Β θα έπαιρνε 45 και εξ υποθέσεως το Α θα είχε c πιθανότητες να κερδίσει το επόμενο game και d πιθανότητες να το χάσει. Κατόπιν εξετάζει τι λογαριάζουμε στις υπόλοιπες τρεις εκδοχές, δηλαδή στην περίπτωση που κέρδιζε το Α, καθώς και στις αντίστοιχες δυο περιπτώσεις που το Β παίρνει γι αρχή 30. Χρησιμοποιεί πάλι τη γνωστή μέθοδο και καταλήγει ότι η αξία που βρέθηκε για το z πρέπει να είναι ίση με 1/2 κι άρα ότι ac = bd. Το set θα είναι ίσο όταν αυτές οι τέσσερις ποσότητες a, b, c και d είναι ανάλογες. Ήτοι, όταν το ασθενέστερο μέρος έχει 30, τότε του δυνατότερου η «ελπίδα» να κερδίσει το game είναι ως προς του ασθενέστερου την ελπίδα, τόση όση είναι του ασθενέστερου η ελπίδα ως προς του δυνατότερου, όταν το ασθενέστερο έχει 45. Το πρόβλημα δεν επιλύεται πλέον ως άθροισμα άπειρης σειράς. Ο J. Bernoulli παρέχει τον σχετικό πίνακα:

ΠΙΝΑΚΑΣ VI

game που λείπουν A	B	άθροισμα των game	Πιθανότητα του A
⚁	⚁	ΖΥΓΟ	$\frac{1}{2}$
⚁	⚀	ΜΟΝΟ	$\frac{1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 0}{3}=\frac{1}{6}$
⚂	⚀	ΖΥΓΟ	$\frac{2\cdot\frac{1}{6}+1\cdot 0}{3}=\frac{1}{9}$
⚃	⚀	ΜΟΝΟ	$\frac{1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot 0}{3}=\frac{1}{27}$
⚄	⚀	ΖΥΓΟ	$\frac{2\cdot\frac{2}{27}+1\cdot 0}{3}=\frac{2}{81}$
⚀	⚁	ΜΟΝΟ	$\frac{1\cdot 1+2\cdot\frac{1}{2}}{3}=\frac{2}{3}$
⚀	⚂	ΖΥΓΟ	$\frac{2\cdot 1+1\cdot\frac{2}{3}}{3}=\frac{8}{9}$
⚀	⚃	ΜΟΝΟ	$\frac{1\cdot 1+2\cdot\frac{8}{9}}{3}=\frac{25}{27}$
⚀	⚄	ΖΥΓΟ	$\frac{2\cdot 1+1\cdot\frac{26}{27}}{3}=\frac{79}{81}$
⚂	⚁	ΜΟΝΟ	$\frac{1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{9}}{3}=\frac{13}{54}$
⚃	⚁	ΖΥΓΟ	$\frac{2\cdot\frac{13}{54}+1\cdot\frac{1}{27}}{3}=\frac{14}{81}$
⚄	⚁	ΜΟΝΟ	$\frac{1\cdot\frac{14}{81}+2\cdot\frac{2}{81}}{3}=\frac{2}{27}$
⚁	⚂	ΜΟΝΟ	$\frac{1\cdot\frac{8}{9}+2\cdot\frac{1}{2}}{3}=\frac{17}{27}$
⚁	⚃	ΖΥΓΟ	$\frac{1\cdot\frac{26}{27}+1\cdot\frac{17}{27}}{3}=\frac{67}{81}$
⚁	⚄	ΜΟΝΟ	$\frac{1\cdot\frac{79}{81}+2\cdot\frac{67}{81}}{3}=\frac{71}{81}$
⚂	⚂	ΖΥΓΟ	$\frac{2\cdot\frac{17}{27}+1\cdot\frac{13}{54}}{3}=\frac{1}{2}$
⚃	⚂	ΜΟΝΟ	$\frac{1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{14}{81}}{3}=\frac{137}{486}$
⚄	⚂	ΖΥΓΟ	$\frac{2\cdot\frac{137}{486}+1\cdot\frac{2}{27}}{3}=\frac{155}{729}$
⚂	⚃	ΜΟΝΟ	$\frac{1\cdot\frac{67}{81}+2\cdot\frac{1}{2}}{3}=\frac{148}{243}$
⚂	⚄	ΖΥΓΟ	$\frac{2\cdot\frac{71}{81}+1\cdot\frac{148}{243}}{3}=\frac{574}{729}$
⚃	⚃	ΖΥΓΟ	$\frac{2\cdot\frac{148}{243}+1\cdot\frac{137}{486}}{3}=\frac{1}{2}$
⚄	⚃	ΜΟΝΟ	$\frac{1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{155}{729}}{3}=\frac{1349}{4374}$
⚃	⚄	ΜΟΝΟ	$\frac{1\cdot\frac{574}{729}+2\cdot\frac{1}{2}}{3}=\frac{1303}{2187}$
⚄	⚄	ΖΥΓΟ	$\frac{2\cdot\frac{1303}{2187}+1\cdot\frac{1349}{4374}}{3}=\frac{1}{2}$

Πίνακας VI.

Στο σημείο αυτό επισημαίνει - κι επαναλαμβάνει επίσης αργότερα - ως προς το προσφερόμενο εναλλάξ handicap, ότι όχι μόνον δεν έχει σημασία αν θα προσφερθεί αρχικά το μεγαλύτερο, ή το μικρότερο, μα κι ότι δεν έχει σημασία το πόσα game θα παιχθούν˙ ακόμα κι αν εντέλει παιχθεί μονός αριθμός game.

Τέσσερα άρθρα από IX ως και XII εκτεινόμενα σε 2 ως 5 γραμμές το καθένα, περιέχουν δε ισάριθμα προβλήματα που βασίζονται στα όσα έχει προηγουμένως θέσει, καθώς και τις σύντομες λύσεις τους.

1.6.3 Επισημάνσεις ως προς το πρώτο τμήμα της Lettre à un amy…

> *«Η Lettre à un amy… είναι ένα επιβλητικό έργο, που καταδεικνύει τις παιδαγωγικές αρετές του J. Bernoulli, την ικανότητά του για συστηματοποίηση και την επιμέλειά του. Θα περιοριστούμε σε μια συζήτηση των κύριων σημείων, αφήνοντας εκτός τις περισσότερες λεπτομέρειες. Φαίνεται ότι τα αποτελέσματα του Bernoulli έχουν παραβλεφθεί από τους σύγχρονους συγγραφείς για το παιχνίδι.»*
>
> (Hald, 1990:241)

Τα άρθρα I ως XII που τα συνεξετάζουμε ως πρώτο τμήμα της επιστολής, δεν αναφέρονται σε κάτι πολύ διαφορετικό από τη σύγχρονή αντισφαίριση, που διεξάγεται πάνω κάτω με το ίδιο σύστημα σκοραρίσματος. Ο όρος πιθανότητα, οπωσδήποτε έχει επικρατήσει για την αριθμητική κι αλγεβρική απόδοσή της έννοιας, εν προκειμένω όμως ο όρος προσδοκία, και η προσδοκία νίκης πιο συγκεκριμένα, αποδίδει τουλάχιστον καλύτερα αυτό που υποθέτει ο J. Bernoulli μα κι ο Huygens. Οι πιθανότητες, στην *Lettre à un amy…* δεν γράφονται καταρχήν ως σκέτος αριθμός˙ είναι λόγου χάρη, 1/8g, ή 1/8s, αναλόγως του αν αναφέρονται σε game, ή set. Για τον αρχικό πίνακα I μπορούμε να κάνουμε κάποιες επισημάνσεις που ισχύουν και για τον πίνακα II, με βάση τη σκοπιά του J. Bernoulli. Διαπιστώνουμε αμέσως πως για ισοδύναμους παίκτες, οι πιθανότητες στο 0-15 είναι διάφορες από εκείνες του 15-0. Οι καταρχήν ίσες πιθανότητες των παικτών, μόλις προηγηθεί κάποιος, αλλάζουν ελαφρώς υπέρ του ιδίου κι εναντίον του άλλου. Στις γραμμές των παραπάνω πινάκων, έχουμε τη σκοπιά του Α μόνον. Διαπιστώνουμε, επίσης, ότι εκείνος που ενίοτε προηγείται είναι ο Β μόνον.

Μπορούμε βεβαίως να συμπληρώσουμε τους εν λόγω πίνακες με τις παρακάτω γραμμές, τις οποίες παρέλειψε, ασφαλώς όχι καθότι του διέφυγαν. Τις συμπληρώνουμε, προκειμένου να καταστήσουμε πιο ξεκάθαρες τις αντιλήψεις του ως προς τις πιθανότητες, που μας ενδιαφέρουν, καθώς τις θέτει αναφορικά με τη συγκεκριμένη σφαίριση. Έτσι έχουμε τους Πίνακες I.b και II.b, συμπληρωματικούς των Πινάκων I και II.

Σκορ game		Προσδοκία του Α
Α	Β	
15	0	21/32g
30	0	13/16g
30	15	11/16g
45	0	15/16g
45	15	7/8g
45	30	3/4g

Πίνακας I.b

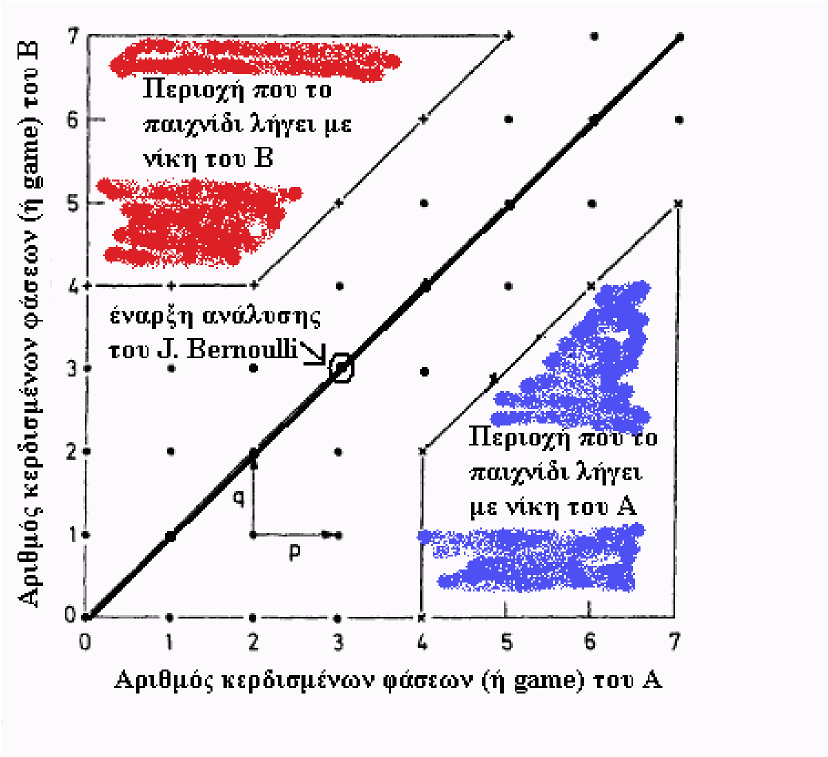
Σκορ set		Προσδοκία του Α
Α	Β	
15	0	21/32s
30	0	13/16s
30	15	11/16s
45	0	15/16s
45	15	7/8s
45	30	3/4s

Πίνακας II.b

Οι τιμές σε αυτούς τους πίνακες συνάγονται εύκολα, βάσει των αντίστοιχων τιμών των Πινάκων I και II, αλλά και του πιο γενικού Πίνακα IV. Οι τιμές των Πινάκων I.b και II.b, καταδεικνύουν ότι ο J. Bernoulli υπολογίζει δια της αφαιρέσεως από τις αρχικές αριθμητικές πιθανότητες του Α, όχι μόνον τις πιθανότητες του Β, μα και τις πιθανότητες του ιδίου του Α στα «συμμετρικά» σκορ. Ήτοι, άμα οποιοσδήποτε εκ των δύο χάνει με 0-15 από τον ισοδύναμο αντίπαλό του, όποιος κι αν χάνει, έχει τις ίδιες πιθανότητες με όσες θα είχε εκείνος που κερδίζει, αν έχανε ο άλλος αντί αυτού. Και οι πιθανότητες αυτού του τύπου (κρινόμενες βάσει των αρκετών προηγούμενων παρατηρήσεών μας), μεταφέρονται κατόπιν σε οιοδήποτε συσχετισμό δυνάμεων και υπό οποιοδήποτε σκορ. Ενισχύεται ως εκ τούτου το συμπέρασμα ότι η σκοπιά του J. Bernoulli, διαφέρει από εκείνη του J. von Neumann.

Αν οι αντίπαλοι δεν είναι ισοδύναμοι, αν για παράδειγμα ο Α είναι διπλάσιας δύναμης του Β (άρα $n = 2$), τότε έχουμε αρχικά $g(45,45) = nn / (nn + 1) = 4/5 = 0.8$ και κατά συνέπεια $g(0,0) = 1040/1215 = 0.856 > 0.8$. Ήτοι, όταν οι αντίπαλοι είναι ισοδύναμοι: $g(0,0) = g(45,45)$ ενώ όταν οι αντίπαλοι δεν είναι ισοδύναμοι: $g(0,0) > g(45,45)$. Η αλγεβρική τιμή του $g(0,0)$ συνδέεται με την αρχική βάση υπολογισμού του $g(45,45)$ είτε είναι ίση με αυτήν, είτε είναι άνιση (Σχήμα 1). Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί επίσης κι από τον πίνακα IV, καθώς και τον πίνακα V. Η απεικόνιση της Jeu de Paume ως τυχαίου περιπάτου σε κάποιο σύστημα δυο αξόνων, μπορεί να συμπληρωθεί με τις τιμές από τον πίνακα IV.

Αν ο κανονισμός του παιχνιδιού, προκειμένου να χρίσει κάποιον νικητή, όριζε την ίδια ελάχιστη διαφορά 2 φάσεων, μα αρκούσε αυτή να επιτευχθεί για παράδειγμα εντός τριών συνολικά φάσεων (κι όχι τεσσάρων), τότε και η αλγεβρική τιμή του $g(0,0)$ θα ήταν άλλη. Παρομοίως, αν ο κανονισμός όριζε άλλη διαφορά για να χρίσει κάποιον νικητή, όπως για παράδειγμα, διαφορά 3 φάσεων αντί για 2, τότε επίσης θα ήταν διαφορετική και η τιμή του $g(0,0)$. Είναι ευνόητο ότι ο J. Bernoulli θα προχωρήσει στον υπολογισμό για τα set, βάσει των game. Είναι όμως ήδη ξεκάθαρο ότι άμα θεωρήσουμε τα σημερινά σετ με τα 6 game, αντί των σετ με τα 4 game που αναφέρει στο σκεπτικό του, το αρχικό 0-0 δεν καταλήγει με τον ίδιο τύπο (όπως βέβαια αντιλαμβάνεται πολύ καλά πρώτα κι ο ίδιος). Είναι ξεκάθαρο επίσης ότι το 0-0, με scoring system από άλλες διάφορες σφαιρίσεις, και για έστω ισοδύναμους αντιπάλους σε αυτές, άγεται προς διαφορετικό αρχικό αλγεβρικό τύπο.



Σχήμα 1.

Ενδιαφέρουσα προέκταση έχουμε με την περίπτωση του g(0,0,0) ως υποθετική αφετηρία για τρεις παίκτες, ισοδύναμους ή και μη, που παίζουν ξεχωριστά μια παρτίδα σφαίρισης, ή άλλου παιγνίου όπως η πρέφα. Είναι προφανές ότι εν προκειμένω αντί για κάποιο σημείο g(0,0) ως τομή δυο αξόνων, θα οδηγούμασταν σε κάποιο αντίστοιχο σημείο ως τομή τριών πλέον αξόνων, το g(0,0,0). Η αρχή του καρτεσιανού συστήματος τριών αξόνων είναι κάπως προβληματική όταν αναφέρεται σε ισάριθμους παίκτες, που στις σφαιρίσεις δεν είναι και συνήθης. Στην κατοπινή θεωρία παιγνίων, τυπικά υπάρχει κάποιος παίκτης που «ελέγχει» τις γραμμές και δεύτερος που «ελέγχει» τις στήλες, ενώ ενίοτε υπάρχει τρίτος και τέταρτος ώστε περνάμε σε περισσότερες διαστάσεις. Ο J. Von Neumann, όταν θεμελίωνε κατόπιν τη θεωρία παιγνίων, έγραψε πολλά εξ αρχής, ως προς την περίπτωση περισσότερων από δυο παίκτες και τη διαμόρφωση «συμμαχιών». Οι αναμετρήσεις στις σφαιρίσεις δεν γίνονται εύκολα μεταξύ τριών αντιπάλων, καθώς χρειάζονται κάποιες προϋποθέσεις για να μη συμμαχήσουν οι δυο εναντίον του ενός. Αναφέρονται πάντως τέτοιες από την αρχαία εποχή (McDaniel, 1906).

Στη *Lettre à un amy…* από άλλη σκοπιά, βρίσκουμε τις πιθανότητες νίκης κάθε μέρους σε μια διμερή παρτίδα Jeu de Paume, αν αφαιρέσουμε από τη μονάδα, τις πιθανότητες νίκης του άλλου. Εκτός Jeu de Paume και υπό άλλες συνθήκες, οι «πιθανότητες» που αποδίδει ο J. Bernoulli, αθροίζονται μεν, αλλά όχι σε σταθερό άθροισμα. Δεν αθροίζονται πάντοτε στη μονάδα, όπως εξ ορισμού αποδεχόμαστε σήμερα. Έτσι η θεώρηση του J. Bernoulli πλησιάζει και προς την κατοπινή θεωρία παιγνίων του J. Von Neumann, χωρίς αυτή να αποδίδεται βεβαίως στον πρώτο, όπως άλλωστε δεν του αποδίδεται εξ ολοκλήρου, ούτε και η θεωρία πιθανοτήτων. Βλέπει πάντως πολύ ευρύτερα τη Jeu de Paume, του δίνει ασφαλώς προεκτάσεις και παράγει από αυτό μαθηματικά, σε μια εποχή που δεν έχει ακόμα γράψει την Ars Conjectandi.

Αν μεταφερθούμε προς τη Γεωμετρία, όπου είναι επίσης σπουδαίος, μπορούμε να παρομοιάσουμε τον παίκτη του με γεωμετρικό σχήμα, έτσι δε είναι και το παχνίδι του, σαν τυχαίο δοθέν τρίγωνο. Αργότερα με αυτή του την κατασκευή και την επακόλουθη προτεινόμενη λύση του προβλήματος, άσκησε κριτική στη μέθοδο του Descartes. O Descartes (1637) στα πλαίσια της νέας Γεωμετρίας του, της *Geometrie,* έδωσε μια απάντηση – σταθμό για τις γεωμετρικές κατασκευές, πάνω στο ερώτημα: «Πως θα φτιαχθούν οι κατασκευές προβλημάτων που δεν μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη;» (Bos, 1984). Η καινοτομία του ήταν η εκτεταμένη χρήση άλγεβρας στη γεωμετρία και πάνω σ' αυτή δομήθηκε όλο το κατασκευαστικό του πρόγραμμα. Ο J. Bernoulli και αρκετοί άλλοι μαθηματικοί (Newton, Fermat) απέρριψαν το αίτημα του Descartes, ότι ο βαθμός των κατασκευαστικών καμπυλών πρέπει πάντα να είναι ο μικρότερος δυνατός. Από την άλλη μεριά, το πρόγραμμα του Descartes έστρεφε τα μαθηματικά προς τις εξισώσεις κάτι πολύ κατανοητό και βολικό για τον J. Bernoulli, ο οποίος άλλωστε στη *Lettre à un amy…* κάνει εκτεταμένη, όπως διαπιστώνουμε, χρήση τους. Η εκ νέου ερμηνεία της γενικής ιδέας της κατασκευής, από τον Descartes, πρακτικά περιόρισε την επίλυση γεωμετρικού προβλήματος σε σκέτο αλγεβρικό πρόβλημα: στην «κατασκευή εξισώσεων». Ως αποτέλεσμα, μετακινήθηκε από μια κεντρική, προς μια περιφερειακή θέση στα μαθηματικά. Σε αυτή τη θέση παρέμεινε ζωντανή για περίπου έναν αιώνα και τότε εξαφανίστηκε λόγω έλλειψης νοήματος (Bos, 1984). Ήδη από τις πρώιμες καρτεσιανές ιδέες περί κατασκευής με τα νέα όργανα (instruments) υπήρχε μια μετακίνηση από τα όργανα καθαυτά ως μέσα κατασκευής, προς τις καμπύλες που χαράσσονταν από εκείνα (Bos, 1984). Υπό το φως της *Lettre à un amy…*καθίσταται πιο εύλογος ο τύπος των ενστάσεων που εγείρε ο J. Bernoulli.

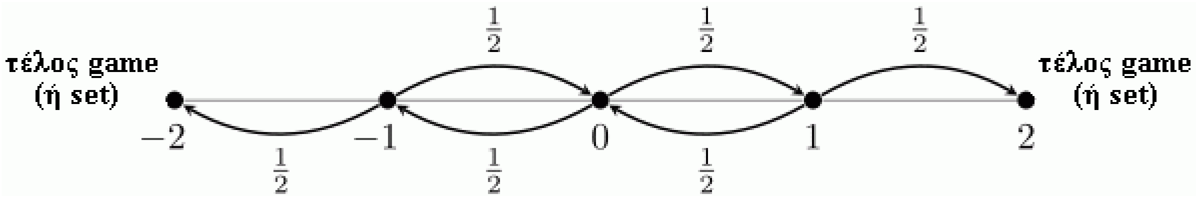
Προς το τέλος του πρώτου μέρους της επιστολής, ο J. Bernoulli υποπίπτει σε ένα σφάλμα, το οποίο και επαναλαμβάνει μάλιστα, υποστηρίζοντας κάτι το οποίο δεν ισχύει γενικώς. Δείχνει να πιστεύει ότι αν οι παίκτες παρουσιάζουν κάποια παρατηρημένη διαφορά δυνάμεων, με την εύρεση ενός κατάλληλου handicap, μπορούν σε κάθε περίπτωση να εξισορροπήσουν την παρτίδα. Κατόπιν αυτής της εύρεσης, δεν έχει σημασία πόσο θα παίξουν. Μπορούμε να επισημάνουμε εξαρχής ότι για να εξισορροπηθεί μια παρτίδα, για να κατασταθεί «δίκαιο» ένα παίγνιο, χρειάζεται και να «θέλουν» οι παίκτες του κάτι τέτοιο. Πολλοί σύγχρονοι συγγραφείς εστιάζουν στις κατά μια έννοια παλιές αντιλήψεις των στοχαστών της εποχής, περί δίκαιου παιγνίου, παραβλέποντας κάπως ότι επρόκειτο και για έναν τρόπο εξισορρόπησής του. Όμως και σήμερα αναφερόμαστε σε ισορροπίες παιγνίων ακόμα κι αν πρόκειται για καταφανείς διαφορές δυνάμεων. Ενδέχεται να μην έχουμε απομακρυνθεί τόσο πολύ όσο νομίζουμε από αυτές τις αντιλήψεις, παρά την όποια πρόοδο γνωρίζουμε κι αναγνωρίζουμε. Ο J. Bernoulli και πολλοί άλλοι αμέσως επόμενοι - και σημερινοί ακόμη - διανοητές, φαίνεται να πιστεύουν ότι όπως εξισορροπείται κάποιο μικρό υποσύνολο του παιχνιδιού, για παράδειγμα ένα game, μπορεί να εξισορροπηθεί ολόκληρη η παρτίδα του παιχνιδιού˙ εν προκειμένω της Jeu de Paume. Ο όρος «υποπαίγνιο» («subgame») κι ο συνώνυμος όρος «υποσύνολο» («subset») που συναντώνται κατόπιν στην ορολογία της θεωρίας παιγνίων ορίζονται διαφορετικά απ’ ότι ορίζονται τα game, τα set, οι παρτίδες στη Jeu de Paume. Το υποπαίγνιο συνδέεται με τα όσα γνωρίζει κάποιος παίκτης τη στιγμή που ενεργεί, το λεγόμενο πληροφοριακό του σύνολο. Η συλλογιστική όμως υπό την οποία τέθηκαν οι εν λόγω όροι παρουσιάζει αρκετά κοινά χαρακτηριστικά με τη συλλογιστική του J. Bernoulli.

Κατά μια αναλογία που καταδεικνύει το λανθασμένο του συλλογισμού του, ο J. Bernoulli δείχνει να πιστεύει ότι η ποσοστιαία διαφορά κάποιων διαγωνιζομένων σε ένα δρομικό, κολυμβητικό, κωπηλατικό, ή άλλο αγώνα «αντοχής», είναι ίδια με αυτή σε έναν αντίστοιχο αγώνα ταχύτητας που δεν απαιτεί αντοχή. Σε έναν αγώνα 100μ. το Α μπορεί να είναι έστω 20% πιο ταχύ από το Β και να δοθεί handicap 20μ. καθιστώντας αμφίρροπη την αναμέτρηση. Αν η αναμέτρηση συνεχιστεί προσθέτοντας 100άδες μέτρα με το ίδιο πάντοτε handicap, μπορούμε να φθάσουμε σε αγώνες «ημιαντοχής» κι αγώνες αντοχής, αρκετών χιλιομέτρων, όπου το αντίστοιχο handicap ενδέχεται να μη χρειάζεται, ή να μην επαρκεί. Στη σημερινή εποχή γνωρίζουμε βεβαίως ότι κάποιοι ενδέχεται συγκριτικώς να υπερτερούν στα 100μ. και να υστερούν στα 10.000μ.˙ όχι μόνον άτομα, μα κι ολόκληρες πληθυσμιακές κατηγορίες. Ή μπορούμε να το θέσουμε κι αλλιώς: Ενδέχεται το Α και το Β μέρος να έχουν διαφορετικούς ρυθμούς προεξόφλησης των μελλοντικών αποδόσεών τους και βάσει αυτών να αποτελεί ζήτημα διαπραγμάτευσης η τιμή του προσφερόμενου handicap.

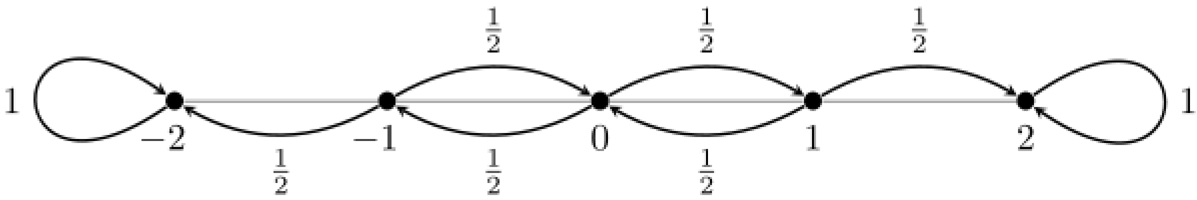
Αυτό που μάλλον πιστεύει ο J. Bernoulli, υπό το φως των δεδομένων εκείνης της εποχής δεν δείχνει τόσο παράλογο – άλλωστε και ορισμένες σημερινές αντιλήψεις μας μπορεί να δείχνουν ακόμα πιο παράλογες αύριο. Ένα παίγνιο ενδέχεται να είναι εξισορροπημένο για ένα ή κάποια έστω set, χωρίς αυτό να σημαίνει οπωσδήποτε ότι έτσι είναι εξισορροπημένη και συνολικά η παρτίδα. Αν η «παρτίδα» διεξαχθεί σε έστω περισσότερα set, απ' όσα προϋπολογίζουμε προκειμένου να εξισορροπηθεί, τότε η παράτασή της, πιθανώς να ευνοεί κάποιο παίκτη. Όπως θα δούμε αργότερα ότι αντιλαμβάνεται κι ο ίδιος ο J. Bernoulli, άλλος ευνοείται ενδεχομένως από μια μεταβολή της μορφής του παιχνιδιού. Έτσι, στο ποδόσφαιρο ενδέχεται κανείς να ευνοείται με τη συνέχιση του παιχνιδιού όχι υπό τη μορφή παράτασης, αλλά υπό τη μορφή εκτέλεσης «πέναλτι». Η εξισορρόπηση σε κάποιο αριθμό σετ, αντί να αποσκοπεί στο να καταστήσει «δίκαιη» μια παρτίδα, μπορεί επίσης να αποτελεί στρατηγική˙ στρατηγική του πλέον ισχυρού μάλλον, ή στρατηγική του λιγότερο ισχυρού, ή ενίοτε ακόμα και στρατηγική αμφοτέρων. Κάπως έτσι μπορούμε να αντιληφθούμε και τα σχετικά με τις στρατηγικές και τα σημεία ισορροπίας που ενδεχομένως κατατείνουν. Τίθενται όλα αυτά πολύ αργότερα από το J. Von Neumann καταρχήν, αλλά κι εν συνεχεία από το Nash και ιδίως τους παιγνιοθεωρητικούς που εστιάζουν στις υποπαιγνιακές ισορροπίες.

Ο J. Bernoulli εκφέρει τη γνώμη ότι, με την εξισορρόπηση του game - με την προσφορά του κατάλληλου handicap όπως συνηθίζεται τότε - δεν έχει σημασία πόσα set θα διεξαχθούν, καθώς μάλλον έχει στο νου του κάποιο ομοιογενές σύνολο παικτών˙ ενεδομένως μια παρέα σχεδόν συνομήλικων ανδρών, για τους οποίους μπορεί λίγο πολύ να ισχύει κάτι τέτοιο. Δεν ισχύει σε κάθε περίπτωση και κυρίως δεν ισχύει όταν το σύνολο των παικτών δεν είναι «ομοιογενές». Ο ίδιος ο J. Bernoulli όμως, πρώτος ισχυρίζεται ότι εφόσον υπεισέρχονται καινούργια δεδομένα απαιτούνται νέες παρατηρήσεις. Επιπλέον, δεν έχει στο νου του τη Jeu de Paume μόνον, μα επεκτείνεται όπως καταδεικνύεται και στην Ars Conjectandi πολύ περισσότερες υποθέσεις, που σε μερικές από αυτές ισχύει πολύ περισσότερο.

Ιδιαίτερα αξιοσημείωτο είναι και πως ο J. Bernoulli γράφει ότι στο δίκαιο παιχνίδι καθένας έχει μερίδιο 1/2 (επί πάσης πιθανότητας – προσδοκίας), κάτι που μας δίνει αφορμή για να κάνουμε κάποιες συσχετίσεις που κρίνουμε ως ενδιαφέρουσες. Η πρώτη αφορά το πώς με αυτό το 1/2 οδηγούμαστε προς κάποιο έτσι ή αλλιώς τέλος του παιχνιδιού, κατά τον J. Bernoulli, ενώ πολύ καιρό μετά, με το Markov, το 1/2 καθίσταται κατά κάποιο τρόπο, η έτσι ή αλλιώς αρχή του παιχνιδιού. Στο Σχήμα 2α αναγνωρίζουμε εύλογα τη σκοπιά του πρώτου, ενώ στο Σχήμα 2β έχουμε τη σκοπιά του δεύτερου, στην οποία θα αναφερθούμε κατόπιν.



Σχήμα 2α.



Σχήμα 2β.

Πολύ ενδιαφέρουσα είναι η συσχέτιση που γίνεται ανάμεσα στον προσδιορισμό του μεριδίου καθενός εκ των παικτών και στο διαπραγματευτικό πρόβλημα. Δεν είναι καθόλου σπάνιο πλέον, μια διαπραγματευτική διαδικασία να παρομοιάζεται με κάποιου είδους σφαίριση, με το tennis, το ping- pong κ.α., που που μπορεί να μην απέχουν και πολύ από τη Jeu de Paume. Το πλεονέκτημα κάποιου μέρους σε αυτήν, μπορούμε έτσι να το σκεφθούμε σαν κάποιο πλεόνασμα, οικονομικό λόγου χάριν, που πρέπει να διανεμηθεί κάπως ανάμεσα σε δυο μέρη, που αναγνωρίζουν ότι πρόκειται για πλεόνασμα και το οποίο θα χάσουν αν δεν συμφωνήσουν ως προς τη νομή του (Dixit & Skeath, 1996). Διακρίνουμε εδώ ορισμένες ενδιαφέρουσες νοηματικές συνδέσεις ανάμεσα στην προσέγγιση του J. Bernoulli και σε εκείνη του επίσης σπουδαίου σύγχρονου μαθηματικού και κορυφαίου παιγνιοθεωρητικό J. Nash. Ο δεύτερος προσεγγίζει το θέμα της διαπραγμάτευσης στο πλαίσιο της διανομής κάποιων αντικειμένων ανάμεσα σε δυο μέρη, που τα αξιολογούν διαφορετικά αρχικά. Βρίσκει τη λύση αξιωματικά καταρχήν, επανέρχεται όμως σε αυτήν με μια απόπειρα επανόρθωσης, σε μια δεύτερη από τις συνολικά λίγες, μα διάσημες και πολύ μεστές εργασίες του. Όπως αναφέρει ο S. Hagreaves Heap για εκείνον, στην εργασία του το 1950, το αξίωμα (συμμετρίας) εκφράζει την ιδέα της ίσης διαπραγματευτικής δύναμης. Το 1953 αυτό θεωρείται λάθος· προτείνει ότι είναι σημαντική η ικανότητα να εξαπατήσει κάποιος τον άλλο παίκτη (Κοτταρίδη & Σιουρούνης, 2002). Ο J. Nash εν προκειμένω μετανοεί κι αναθεωρεί ως προς την πρόταση επίλυσης του διαπραγματευτικού προβλήματος και των σχετικών ανθρώπινων υποθέσεων, στις οποίες έχει περάσει από ένα πρόβλημα εξεύρεσης σταθερού σημείου.

Παρομοίως ενδιαφέρουσα είναι η συσχέτιση του μεριδίου καθενός εκ των παικτών της παρτίδας της Jeu de Paume με την αναλογία φύλων, στο ανθρώπινο είδος κι όχι μόνον. Εφόσον προϋποθέσουμε βεβαίως ότι υπάρχουν δυο μόνον δυνατότητες, αρσενικό ή θηλυκό, δεν ήταν και δεν είναι δύσκολο να υποθέσει κάποιος, ότι η αναλογία τους κατά τη στιγμή της γέννησης έστω, είναι κοντά στο 1/2. Μοιάζει σαν παίγνιο εξισορροπημένο εκ της φύσεως του, στο οποίο μάλλον δεν μπορούμε να επιτύχουμε βελτιστοποίηση. Το βέλτιστο φύλο για το κάθε παιδί μπορεί να είναι το αρσενικό αν τα αρσενικά αποτελούν μειονότητα, ή το θηλυκό αν τα θηλυκά αποτελούν μειονότητα, μα αν κανένα φύλο δεν αποτελεί μειονότητα δεν υπάρχει βέλτιστο (Dawkins, 1995). Η συγκεκριμένη αριθμητική πιθανότητα, στο παράδειγμα του φύλου των νεογέννητων του ανθρωπίνου είδους, αναφέρεται εν προκειμένω καθώς θα απασχολήσει κατόπιν τον ανεψιό του J. Bernoulli, Nicholas, καθώς και τον Charles Darwin, το Ronald Fisher, κ.α., κατά τρόπο που δίνει στην έννοια της αριθμητικής πιθανότητας και στο νόμο των μεγάλων αριθμών, προεκτάσεις αρκετά πέραν της συνήθους θεώρησης των τυχερών παιγνίων.

Τέλος, ως προς τα half odds, μπορούμε να τονίσουμε καταρχήν ότι η ύπαρξή τους και μόνο μαρτυρά μια διαφορετική κουλτούρα παιξίματος, μα κι ένα έντονο ενδιαφέρον για την εξισορρόπηση της παρτίδας. Ήταν πολύ σημαντικό (σε πλαίσιο μάλλον παρέας) να μην παίζουν κάποιοι με όλες τις ενδείξεις υπέρ τους κι άλλοι να παίζουν ως καταδικασμένοι. Δείχνει λίγο περίεργη η επισήμανσή του ότι δεν έχει σημασία αν η έναρξη θα γίνει με μικρό ή μεγάλο πλεονέκτημα για τον ασθενέστερο και αντίστοιχο handicap για τον ισχυρότερο. Ο διαγωνισμός της Jeu de Paume όμως λήγει ή σε ζυγό αριθμό game, ή σε μονό αριθμό κι όποτε ο νικητής προηγείται με τουλάχιστον τρία game, όποιο κι αν είναι το αρχικό handicap δεν αρκεί για να αλλάξει το νικητή. Μπορούμε μάλιστα να λάβουμε υπόψη κι ότι ο συγγραφέας κάπως αργότερα ασχολείται και με το πλεονέκτημα πόντων που απορρέει από το αρχικό σέρβις· με μαθηματικά σε κάθε περίπτωση, που δεν σχετίζονται με τις προκαταλήψεις των παικτών, οι οποίοι ενδέχεται να πιστεύουν ότι υφίσταται κάποιο πλεονέκτημα πράγματι κι αυτό εντέλει να επηρεάζει την απόδοσή τους.

1.6.4 Δεύτερο τμήμα της Lettre à un amy …

> *Στην πραγματικότητα, η Lettre à un amy... φαίνεται να μην έχει μιμητές, ακόμα και σήμερα. Στην τεράστια βιβλιογραφία για το lawn και το court tennis, δεν φαίνεται να υπάρχουν περαιτέρω μελέτες για τις τύχες (lots) του παιχνιδιού. Ο Bernoulli ενδιαφερόταν περισσότερο να επιδείξει τη δυνατότητα υπολογισμού των τυχών σε παιχνίδια στα οποία οι αποδόσεις (odds) δεν είναι εκ των προτέρων γνωστά παρά για τη ρεαλιστική*

μοντελοποίηση των προσδοκιών στο court tennis.

(Bernoulli, 1713/2006:397)

Τα άρθρα XIII ως και XXII συναπαρτίζουν ότι αναφέρουμε ως δεύτερο τμήμα της *Lettre à un amy*....

Στο άρθρο XIII, ο J. Bernoulli γράφει ουσιαστικά ότι άμα γνωρίζουμε το συσχετισμό δυνάμεων ανάμεσα στο A και το B, καθώς και το συσχετισμό ανάμεσα στο A και στο C, τότε μπορούμε να συνάγουμε και το συσχετισμό ανάμεσα στο B και στο C. Οπότε έτσι απλά κάπως, περνάει καταρχήν στο παιχνίδι περισσότερων από δυο ανθρώπων. Υποστηρίζει κατόπιν πως ο ικανότερος όλων, αυτός που παίζει μόνος, δεν θα παίζει αδιακρίτως, ήτοι δεν θα σημαδεύει εξίσου συχνά τους αντιπάλους του, μα θα σημαδεύει πιο συχνά το λιγότερο ικανό. Συμπληρώνει ωστόσο ότι η αυτό εξισορροπείται κάπως από την περισσότερη κούραση του ενός που παίζει μόνος. Συνυπολογίζοντάς την, γράφει ότι αν τρεις ισάξιοι παίκτες έπαιζαν ως ένας εναντίον δυο, δεν θα έπρεπε να μεταφέρουμε εδώ τη λογική που λέει ότι θα είχαν ίσες πιθανότητες (το ένα μέρος κουράζεται συγκριτικά περισσότερο από το άλλο, όπου η κούραση μοιράζεται σε δύο ανθρώπους, καθώς υπερασπίζονται από μισό γήπεδο). Έτσι συμπεραίνει ότι, λαμβάνοντας υπόψη αυτή τη διαφορά, θα αξιολογούσαμε τις απόλυτες δυνάμεις των παικτών μας από τον αριθμό των χτυπημάτων, που κερδίζουν ή χάνουν, όχι όταν παίζει ο καθένας μόνος εναντίον του A, αλλά όταν παίζουν μαζί εναντίον του.

Στο άρθρο XIV περνάει με την ίδια λογική και στο παιχνίδι 4 ανθρώπων, που παίζουν ως δυο εναντίον δυο, επί ίσοις όροις· ήτοι κάποιο κανονικό διπλό, με παίκτες δεδομένης σχετικής ατομικής ισχύος, με δυνάμεις k,l,m και n, τις οποίες αντιστοιχίζει με τους αριθμούς 1, 5, 2 και 3. Τα ζεύγη συνίστανται από τους 1 και 5 αφενός κι αφετέρου τους 2 και 3, και δείχνει ότι υπό προϋποθέσεις τα ζεύγη μπορούν να παίξουν ως ίσα.

> *«Σε κάθε περίπτωση, πρέπει να επαναλάβουμε εδώ την προειδοποίηση του προηγούμενου άρθρου. Ήτοι, οι ικανοί παίκτες θα επιχειρούν πάντα να χτυπούν την μπάλα προς τον αδύναμο παίκτη, ένα γεγονός που θα πρέπει να λογαριάσουμε εάν θέλουμε να πιάσουμε ορθώς κι επακριβώς το πρόβλημα.»*

(Bernoulli, 1713/2006:382)

Εν συνεχεία, στο άρθρο XV ο J. Bernoulli καταπιάνεται με την περίπτωση που ένας από τους δυο παίκτες A και B μπορεί να προσφέρει στον άλλον πλεονέκτημα σε φάσεις (πόντους), μα θα προτιμούσε να του προσφέρει αυτό το πλεονέκτημα σε ολόκληρα game παρά σε φάσεις· διερωτάται λοιπόν πόσα game θα πρέπει να του προσφέρει. Δεν βρίσκει πρακτικά κανένα πρόβλημα στο να μετατρέψει τα χονδρά σε ψιλά, είτε τα ψιλά σε χονδρά, ήτοι τον ένα τύπο πλεονεκτήματος στον άλλο. Απλά εισάγει και λογάριθμους για την απλοποίηση των μαθηματικών υπολογισμών του. Δεν δυσκολεύεται καθόλου να δείξει ότι το να δίνονται ως πλεονέκτημα τρεις φάσεις από συνολικά τέσσερις (ήτοι, αρχή από 0-45 σε κάθε game) διαφέρει από το να δίνονται τρία game από συνολικά τέσσερα.

Στα επόμενα δυο άρθρα θέτει άλλα δυο προβλήματα πάνω στα όσα έγραψε προηγουμένως και δίνει βάσει αυτών τις λύσεις τους.

Ο J. Bernoulli όμως έπειτα, στα άρθρα XVIII και XIX, καταπιάνεται για λίγο με τα bisques και τα chases, που παρότι δεν υφίστανται στη σημερινή αντισφαίριση, ή σε κάποιο άλλο από τα πλέον δημοφιλή αγωνίσματα, παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Διευκρινίζει πως δεν θα προχωρήσει πολύ στην εξέτασή τους, καθότι θα μπορούσε να τραβήξει μακριά.

- Τα bisque μπορούν να εννοηθούν ως πόντοι που μπορεί να ζητήσει κάποιος (ως επί το πλείστον μεταξύ μη ισοδύναμων παικτών και τυπικά, ο πιο αδύναμος προκειμένου να κερδίσει τους πόντους κάποιας ειδάλλως διεξαγόμενης φάσης, δίχως αυτή να παιχθεί καθόλου.
- Τα chase έχουν να κάνουν κυρίως με την αναπήδηση της μπάλας δυο φορές στο ίδιο «γήπεδο», καθώς οι αγωνιστικοί χώροι ήταν περίκλειστοι κι ασύμμετροι. Όταν προκύπτει chase, οι παίκτες αλλάζουν μεριές, καθένας πηγαίνει στην άλλη μεριά του γηπέδου, ώστε εκείνος που πρώτα σέρβιρε, κατόπιν απαιτείται να υποδεχτεί.

Ο J. Bernoulli σημειώνει ότι ο προσδιορισμός των προσδοκιών των παικτών, υπό τη θεώρηση των bisques, συμπεριλαμβάνει την ειδική σύσταση (τον καταστατικό κανονισμό, το σύνταγμα, – το «constitution», όπως πιο συγκεκριμένα γράφει) του παιχνιδιού, την ποικιλία των περιπτώσεων κι ακόμα τις ιδιαιτερότητες - ιδιοτροπίες των παικτών, οι οποίες δεν ακολουθούν κανόνες. Έτσι είναι δύσκολο να σχηματίσουμε πραγματικά βάσιμες εικασίες γι' αυτά. (Bernoulli, 1713/2006). Παρά την προαναφερόμενη προειδοποίηση συνεχίζει με προτάσεις σχετικές με όσα σήμερα συζητούνται, υπό άλλους όρους, στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων και της οικονομικής επιστήμης. Το συγκεκριμένο μέρος της επιστολής που αναφέρεται στο bisque και στο chase, σχετίζεται με την λήψη αποφάσεων, την αδιαφορία ως προς την επιλογή λήψης των εν λόγω πόντων, έως και την πλήρη αδιαφορία ως προς την επιλογή, ακόμα και με συστάσεις που υπεισέρχονται στις στρατηγικές. Το bisque το εξετάζει ως προς την αναποφασιστικότητα. Ανάμεσα στο να ρευστοποιήσει κανείς άμεσα, ή να το φυλάξει μήπως του χρειαστεί περισσότερο κατόπιν, με κίνδυνο όμως να μείνει αναξιοποίητο.

ΠΙΝΑΚΑΣ VII

Οι Α και Β είναι κάποιοι ισοδύναμοι παίκτες κι ο Α έχει το δικαίωμα να πάρει chase											
πόντοι		προσδοκίες του Α			chase	πόντοι		προσδοκίες του Α			chase
Α	Β	I.	II.	III.		Α	Β	I.	II.	III.	
45	45	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{43}{60}$	$\frac{19}{15}$	30	15	$\frac{7}{8}$	$\frac{209}{240}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{17}{15}$
30	45	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{15}{7}$	15	15	$\frac{11}{16}$	$\frac{219}{320}$	$\frac{109}{160}$	$\frac{47}{44}$
15	45	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{15}{11}$	0	15	$\frac{1}{2}$	$\frac{319}{640}$	$\frac{159}{320}$	$\frac{61}{59}$
0	45	$\frac{1}{8}$	$\frac{29}{240}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{15}{13}$						
30	30	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{43}{60}$	$\frac{19}{15}$	30	0	$\frac{15}{16}$	$\frac{899}{960}$	$\frac{449}{480}$	$\frac{16}{15}$
15	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{59}{120}$	$\frac{29}{60}$	$\frac{8}{7}$	15	0	$\frac{13}{16}$	$\frac{779}{960}$	$\frac{389}{480}$	$\frac{123}{119}$
0	30	$\frac{5}{16}$	$\frac{99}{320}$	$\frac{49}{160}$	$\frac{46}{43}$	0	0	$\frac{21}{32}$	$\frac{1007}{1536}$	$\frac{503}{768}$	$\frac{303}{298}$

Πίνακας VII.

Στον Πίνακα VII που έχει φτιάξει γι αυτό το σκοπό δίνει τις πιθανότητες για την παρτίδα ισοδύναμων παικτών, στις τρεις στήλες με ταμπέλες, I, II και III, όπου στην πρώτη στήλη υποθέτει ότι ο παίκτης Α παίρνει το bisque, στην τρίτη ότι δεν το παίρνει και στην ενδιάμεση ότι δεν έχει ακόμα αποφασίσει εάν θα το πάρει ή όχι. Επισημαίνει ότι τα κλάσματα στην πρώτη στήλη είναι λίγο μεγαλύτερα από εκείνα στις άλλες και από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε γενικά, ότι είναι πάντα πιο επωφελές για τον Α να πάρει το «bisque» του αμέσως, παρά να το κρατήσει για μετέπειτα. Ο J. Bernoulli ασχολείται αρκετά με το ότι δεν έχει νόημα να καθυστερεί κάποιος να πάρει το bisque, όταν οι παίκτες παίζουν απλό game, χωρίς τα chase. Τα bisque όμως επισημαίνει πως παρουσιάζουν περισσότερο ενδιαφέρον σε συνδυασμό με τα chase. Έτσι είναι ενίοτε σκόπιμο να καθυστερήσει κάποιος να τα πάρει κι ακόμη άλλοτε είναι εντελώς αδιάφορο, οτιδήποτε κι αν κάνει. Με τα chase εντός παιχνιδιού, μπορεί κάποιος να είναι συγκριτικά καλύτερος απ' ότι άνευ αυτών, καθώς λογαριάζουμε την ειδική προϊστορία των αποτελεσμάτων που έχουν σε αυτά. Ο J. Bernoulli συζητάει έτσι ως προς την αδιαφορία. Υπό την ίδια πάντα λογική ανατρέχει και πάλι στον πίνακα VII που περιέχει και μια στήλη για την αξία του chase, σε κάθε περίπτωση. Βάσει αυτής της στήλης των chase, δίνει ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα ως προς το πότε είναι σκόπιμο να πάρει κανείς το bisque, όταν έχουμε εντός του παιχνιδιού και τα chase. Ο J. Bernoulli κρίνει γενικότερα ότι αν κάποιος έχει μεγαλύτερη δυνατότητα να κερδίσει ένα ειδικό chase (που δίνεται από αυτούς τους αριθμούς) θα πράξει καλύτερα να κρατήσει το bisque γι αργότερα, αν έχει λιγότερη θα πράξει καλύτερα να το πάρει, κι αν έχει ακριβώς τόση, μπορεί να πράξει όπως τον ευχαριστεί δίχως να κάνει καμιά διαφορά.

Στα παρακάτω άρθρα XX και XXI, αναφέρεται στα σέρβις. Διαπιστώνει ότι ο παίκτης που «σερβίρει» φαίνεται να έχει κάποιο πλεονέκτημα έναντι εκείνου που υποδέχεται, για δυο λόγους:

1) διότι το σέρβις είναι ένα σίγουρο χτύπημα, που γίνεται με την μπάλα στα χέρια, ενώ τα χτυπήματα που παίζονται κατόπιν, με την μπάλα στον αέρα, είναι δυνατόν να χαθούν

2) διότι όταν εκείνος που σερβίρει χάσει την μπαλιά, αυτό είναι chase, ενώ όταν τη χάσει ο παίκτης της υποδοχής, πάντοτε χάνει 15 πόντους (τουλάχιστον εφόσον η μπάλα μπει εντός της περιοχής του σέρβις, καθώς δεν θέλει να επεκταθεί και στα chase στην αντίθετη πλευρά, τη λεγόμενη hazard side).

Λίγο παρακάτω ξεχωρίζει η διαπίστωσή του ότι εφόσον ο πρώτος παίκτης δεν μπορεί να χάσει το αρχικό σέρβις, έπεται ότι δεν πρέπει να λογαριάζουμε αυτό το χτύπημα. Αντιθέτως, θα πρέπει να φανταζόμαστε όταν σερβίρει, πως είναι ήδη η σειρά του δευτέρου να απαντήσει. Έτσι διαπιστώνει πως στα χτυπήματα που πρόκειται να ανταλλάξουν, αυτός που σερβίρει έχει ένα στο οποίο δεν έχει κίνδυνο να χάσει, ενώ ο άλλος δεν έχει κανένα. Αν οι δυο παίκτες είναι ίσοι και καθένας θα μπορούσε να κάνει δέκα καλά χτυπήματα, για παράδειγμα, πέραν του αρχικού, τότε το πλεονέκτημα αυτού που σερβίρει έναντι του υποδεχόμενου, θα είναι 11 προς 10. Αλλά, αυτό το πλεονέκτημα αυξάνεται όσο οι παίκτες γίνονται ασθενέστεροι και μειώνεται στο μηδέν όσο γίνονται ικανότεροι.

Κατόπιν στο επόμενο άρθρο του XXI, βάζει στη συζήτηση και τα chase στην πλέον απλή εκδοχή τους. Φανταζόμαστε ότι τα chase βρίσκονται από τη μεριά εκείνου που σερβίρει και είναι πλάι στο δίχτυ, καθώς έτσι, όταν αλλάζουν μεριά, ο άλλος έχει τη δυνατότητα να νικήσει αν καταφέρει κάποια δεύτερη αναπήδηση σε οποιοδήποτε σημείο της ίδιας πλευράς του γηπέδου. Δεν δυσκολεύεται να τα υπολογίσει με τη γνωστή μέθοδό του, ενώ υπενθυμίζει ότι αυτά ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι δε γίνεται διάκριση μεταξύ ανάμεσα στα chase και ότι δεν παραδεχόμαστε chase από τη λεγόμενη hazard side, ειδάλλως μειώνεται σημαντικά το πλεονέκτημα αυτού που σερβίρει.

Στο τελευταίο άρθρο του XXII, γράφει πως δεν πρέπει να τελειώσει το γράμμα του, χωρίς να έχει προειδοποιήσει για ορισμένα λανθασμένα επιχειρήματα, στα οποία θα μπορούσε να υποπέσει κάποιος ως προς αυτό το θέμα. Αυτά μπορεί να τυφλώσουν με την απατηλή τους λάμψη και να σπείρουν αμφιβολίες για την ορθότητα των αρχών που καθορίζονται παραπάνω. Στο κλείσιμο που κάνει ξεχωρίζει μεταξύ άλλων η επιστροφή του στο παιχνίδι περισσότερων από 2 ανθρώπων, όπου θέλει να αναδείξει ακόμα καλύτερα το πώς και συμβαίνει συχνά οι άνθρωποι να σκέφτονται λανθασμένα. Γυρνάει στο παράδειγμα τριών παικτών, έστω σχετικής ατομικής δυναμικότητας 3, 2 και 1 και το αντιπαραβάλει με την ανάμιξη που γίνεται υπάρχουν τρία είδη κρασιών αντίστοιχης αξίας. Ο αριθμητικός μέσος των B και C θα ήταν 1 ½, μα ασφαλώς ο A δεν είναι 2 φορές ανώτερος, όπως είναι το 3 σε σχέση με το 1 ½. Έτσι δηλαδή δίνει ένα πολύ απλό παράδειγμα του πως μπορεί να έχουν εκτελεστεί καλώς οι αριθμητικές πράξεις, μα να έχει χρησιμοποιηθεί λάθος ο αριθμητικός μέσος.

Ο J. Bernoulli καταλήγει την Lettre à un amy… διαπιστώνοντας ότι είναι πολύ εύκολο, αν δεν είμαστε προσεκτικοί να κάνουμε λάθη σε όλες τις περιοχές της γνώσης μας κι ότι τα επιχειρήματα που κοινώς προβάλλονται στον κόσμο, δεν είναι καλύτερα και συχνά είναι πολύ χειρότερα, από όσα προανέφερε. Κλείνει γράφοντας:

«Κάθε μέρα βλέπουμε τους πιο γνωστικούς ανθρώπους να επιχειρηματολογούν με την καθαρή αναλογία. Όταν νομίζουν ότι καταλαβαίνουν τα πράγματα ξεκάθαρα, λαμβάνουν ως αυταπόδεικτα πράγματα που δεν είναι. Είναι μόνον εκείνοι των οποίων τα μυαλά έχουν φωτιστεί με τη χρήση των μαθηματικών, οι οποίοι είναι ικανοί να αποκαλύψουν αυτά τα σφάλματα» (Bernoulli, 1713/2006:393).

1.6.5 Επισημάνσεις ως προς το δεύτερο τμήμα της Lettre à un amy…

Το B τμήμα της επιστολής πάει πέρα από ένα τυπικό ατομικό αγώνισμα κάποιας σφαίρισης. Αυτό παρουσιάζει κάποιες διαφορές με τη σύγχρονη αντισφαίριση, μα και με άλλες σφαιρίσεις όπως η αντιπτέριση και επιτραπέζια αντισφαίριση, η πετοσφαίριση παραλίας (στα οποία γενικώς υφίστανται διπλά αγωνίσματα, κι επίσης η έναρξη γίνεται με σέρβις). Όπως προαναφέραμε περιληπτικά πρόκειται κυρίως για τα bisque και τα chase, που συνδέονται και μεταξύ τους, μα και με το κατόπιν συζητούμενο σέρβις, της άλλοτε δημοφιλούς Jeu de Paume.

Εφόσον έχουν πλέον συζητηθεί οι παραχωρήσεις ακόμα και κυμαινόμενων τιμών στα προνόμια πόντων, κάπου σε αυτό το σημείο που αρχίζουμε τη συζήτηση για το B τμήμα, ενδέχεται να νομίσει κανείς ότι έχουν ολοκληρωθεί οι προσφορές που μπορεί να κάνει ο ισχυρός παίκτης προς τον ασθενή, προκειμένου να παίξουν μια παρτίδα επί ίσοις όροις. Μια ιδιαίτερη επισήμανση που μπορούμε όμως να κάνουμε εν προκειμένω ως προς αυτά, σχετίζεται με τους αριθμούς των χτυπημάτων που ανταλλάσουν οι άνισοι παίκτες και κατ' επέκταση σχετίζεται και με τη χρονική διάρκεια της φάσεων. Ο J. Bernoulli δεν διαπιστώνει για παράδειγμα ότι οι φάσεις που παίζονται μεταξύ δυο εξίσου ισχυρών παικτών αποτελούνται από περισσότερα κατά μ.ο. χτυπήματα, συγκριτικά με τις φάσεις μεταξύ ενός ισχυρού κι ενός ασθενούς. Μια προσφορά – πρόκληση που μπορεί να κάνει ο ισχυρός προς τον ασθενή, είναι πως θα του δώσει τους πόντους της φάσης αν καταφέρει κι «αντέξει» απέναντί του για κάποιον μεγάλο αριθμό χτυπημάτων. Μπορεί βεβαίως να γίνει και προς τον ισχυρό πρόταση, ή αντιπρόταση. Ο J. Bernoulli λογαριάζει πολύ τους αριθμούς των φάσεων, τους οποίους και συνδέει με το συσχετισμό δυνάμεων των παικτών, μα δεν τον συνδέει με τους αριθμούς των χτυπημάτων που ανταλλάσσονται εντός καθεμίας φάσης. Πρόκειται για μια «παράλειψη» την οποία μπορούμε να συνδέσουμε και με την όπως προαναφέραμε εσφαλμένη αντίληψή του, ότι άπαξ και βρεθεί για τους άνισους παίκτες το κατάλληλο αριθμητικό πλεονέκτημα πόντων, δεν έχει σημασία ο αριθμός των game – set, που θα παίξουν πλέον επί ίσοις όροις.

Οι κοινοί παίκτες της εποχής της Jeu de Paume, οι οποίοι παίζουν σε κλειστό χώρο απ’ όπου δεν διαφεύγει η μπάλα, δεν σκέπτονται ενδεχομένως κιόλας την περίπτωση να χρεώσουν πόντους προτού «χαθεί» η μπάλα, ή αλλιώς ακόμα και να διακόψουν έτσι «πρόωρα» κατά κάποιο τρόπο μια φάση. Στην συζητούμενη προσφορά πόντων σε περίπτωση συμπλήρωσης «μεγάλου» αριθμού χτυπημάτων, δεν θα ήταν βεβαίως απαραίτητη η διακοπή, καθώς το παιχνίδι μπορεί να «διασωθεί» με την περαιτέρω συνέχισή του και τον καταλογισμό, ή όχι, επιπρόσθετων ενδεχομένως πόντων. Το β μέρος θα επιχειρήσουμε να το διερευνήσουμε, με τη βοήθεια κάποιας πιο ευνόητης, υπό τα σημερινά πλαίσια, συμπληρωματικής υπόθεσης. Θα την αναπτύξουμε πολύ λίγο και μάλιστα θα την απλουστεύσουμε κιόλας ιδιαιτέρως, ακολουθώντας τα χνάρια της ανάλυσης του J. Bernoulli. Χάριν συντομίας θα την αναφέρουμε κι ως υπόθεση «διάσωσης», για λόγους που θα εξηγήσουμε περαιτέρω**.** Στη σημερινή αντισφαίριση που διεξάγεται σε διαγραμμισμένα «ανοιχτά» γήπεδα, συμβαίνει κάμποσες φορές κάποιος παίκτης να μπορεί εμφανώς να επιστρέψει κάποιο χτύπημα εκτός γραμμής (κι ανίσχυρο ενδεχομένως), όμως αυτός να μη συνεχίζει έτσι. Να μην «διασώζει» το παιχνίδι, καθώς ίσως αρκείται στο να πάρει τους πόντους μόνον. Έστω πως κάποιος παίκτης της σημερινής αντισφαίρισης «βλέπει» ότι η μπάλα χτυπάει ελάχιστα εκτός γραμμής και παρά ταύτα, επιχειρεί να επιστρέψει την μπάλα στην απέναντι μεριά. Αυτή την προσπάθεια την ονομάζουμε εν συντομία «διάσωση» και υπάρχουν μερικοί πολύ καλοί λόγοι για να συμβεί. Ορισμένοι από αυτούς είναι:

α) να μην έχει εμπιστοσύνη ότι το είδε ορθώς ο ίδιος,

β) να μην το είδε ο αντίπαλος και το παιχνίδι να διεξάγεται δίχως διαιτησία,

γ) να μην το είδε η διαιτησία,

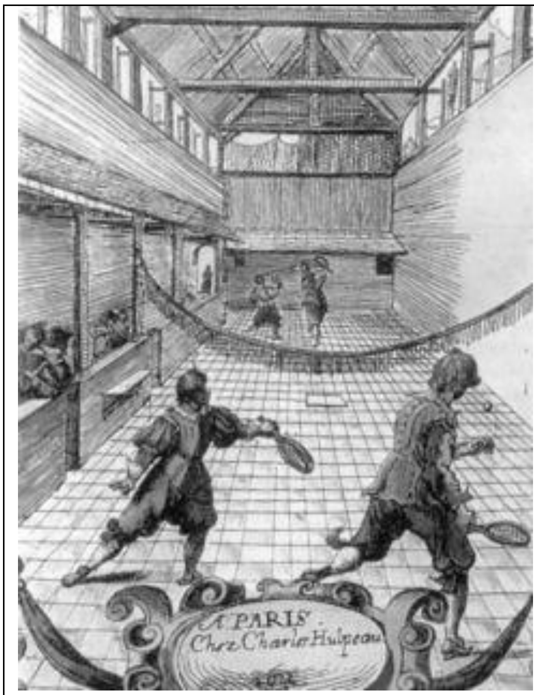
δ) να υπάρχει το λεγόμενο «hawk eye» και να το κατέγραψε, οπότε έτσι κι αλλιώς θα επαληθευθεί (το θεωρεί αξιόπιστο),

ε) να μην το κατέγραψε ούτε το hawk eye, (θεωρεί πως κάτι μπορεί να του ξεφύγει),

στ) να το κάνει καθώς «επιτρέπεται» από τον κανονισμό,

ζ) να θέλει να κάνει εξάσκηση ο ίδιος σε μια δύσκολη μπαλιά, να μην του αρέσει να διακόπτεται το παιχνίδι αν μπορεί να συνεχιστεί, να είναι υπέρ της βιωσιμότητας κ.α.

Η «διάσωση» προϋποθέτει το παιχνίδι να μπορεί να διεξαχθεί και σε χώρο που βρίσκεται λίγο έξω από τις γραμμές του γηπέδου, χώρος που στη σημερινή αντισφαίριση υπάρχει και στον οποίο πατάνε έτσι κι αλλιώς, οι άνθρωποι που παίζουν (Εικόνα 4). Στη Jeu de Paume που παιζόταν σε κλειστή αίθουσα, δεν υφίστατο αυτός ο επιπλέον χώρος (Εικόνα 3). Οπότε ακόμα κι όταν έπαιζαν περισσότεροι άνθρωποι, δεν πρόσθεταν χώρο, όπως συμβαίνει στα σύγχρονα διπλά. Η «διάσωση» συσχετίζεται έτσι με κάποιο επιπλέον παιχνίδι, όπως το πέραν του ατομικού αγωνίσματος παιχνίδι, στο οποίο περνάει με τα άρθρα XIII και XIV ο J. Bernoulli, αλλά και με τη σχέση χώρου κι ανθρώπων στο σύγχρονο παιχνίδι, που η ανάπτυξή της δεν εξαντλείται με την πράξη της πρόσθεσης – επέκτασης προς νέες εδαφικές περιοχές.



Εικόνα 3. Η Jeu de Paume τον $17^{ο}$ αιων.
(Πηγή: omnilogie.fr)

Εικόνα 4. Σύγχρονο γήπεδο τέννις
(Πηγή: www.tennistours.com)

Εκεί που παίζουν περισσότεροι από δυο άνθρωποι, ο J. Bernoulli τους αντιλαμβάνεται και τους αξιολογεί συνολικά. Όταν παίζουν εναντίον ενός, λογαριάζονται ως «ένας», ως ένα μέρος που παίζει έναντι σε ένα άλλο. Έτσι όμως λογαριάζονται κι αργότερα όταν παίζουν δυο εναντίον δυο, ως ένα μέρος εναντίον ενός και πάλι. Ο J. Bernoulli εξετάζει μόνον την περίπτωση κατά την οποία παίζουν μαζί ο πλέον ισχυρός με τον πλέον ασθενή, εναντίον των δυο ενδιάμεσης δυναμικότητας. Δεν συζητάει τις άλλες περιπτώσεις, όπως αυτήν να παίζουν μαζί ο πλέον ισχυρός με τον τρίτο σε ισχύ, εναντίον του πλέον ανίσχυρου με το δεύτερο σε ισχύ, ή εκείνη της «συμμαχίας» των δυο ισχυρότερων έναντι στους ασθενέστερους. Πολύ αργότερα, στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων ο Lloyd. Shapley συζητά τη σκοπιμότητα της συμμαχίας δυο ισχυρών ακόμα κι έναντι ενός ασθενούς, σε κάποιο παίγνιο σκοποβολής μπαλονιών (Μηλολιδάκης, 2009). Θα μπορούσαν κι αυτά να γίνουν επί ίσοις όροις, με την εύρεση κατάλληλου πλεονεκτήματος, αν μεταφέρουμε στις παρτίδες των «διπλών», τη λογική που διατυπώνει ο J. Bernoulli για τα μονά. Βεβαίως όμως και η πρόταση του L. Shapley, στο πλαίσιο κάποιας σφαίρισης, όπως και την εκδοχή της σκοποβολή προς ανθρώπους, παρουσιάζει περιορισμούς βιωσιμότητας. Υπό τέτοιες συνθήκες, στα διπλά είναι ακόμα πιο ευνόητο ότι, αν η ισχύς δεν μοιράζεται όπως εξετάζει ο J. Bernoulli, αλλά έχουμε συμμαχίες ισχυρών αφενός κι ασθενών αφετέρου, μπορεί να προκύπτει διαφορετικός αριθμός χτυπημάτων και κατ' επέκταση άλλη διάρκεια φάσης. Η επισήμανσή του ότι οι ισχυροί παίκτες διακρίνουν και σημαδεύουν τους πλέον ασθενείς εκ των αντιπάλων τους, υπό το φως της σημερινής θεωρίας παιγνίων, μοιάζει ως προτίμηση στη χρησιμοποίηση κυρίαρχης στρατηγικής. Όταν ο J. Bernoulli αναφέρεται σε αντίπαλους όχι ισοδύναμους, με αριθμητικό παράδειγμα, βρίσκεται σε μια λογική που τείνει προς την «αυστηρή κυριαρχία» κι όχι προς τις στρατηγικές minimax. Πάντως όμως, τότε παίζουν μαζί ο πλέον ισχυρός με τον πλέον ασθενή. Ακόμη και σήμερα όντως στα μικτά διπλά της αντισφαίρισης, οι ευρισκόμενοι-νες στην επίθεση, σημαδεύουν κατά κανόνα προς την αντίπαλη γυναίκα. Είτε επιτίθεται άνδρας, είτε επιτίθεται γυναίκα, σημαδεύει την αντίπαλη γυναίκα, που θεωρείται ασθενέστερη, άρα δεν έχουμε ξεφύγει ακόμη από τη διαπίστωση του J. Bernoulli. Δεν θα επεκταθούμε προς το παρόν στο ότι ο J. Bernoulli δεν αναφέρεται σε μεγάλους και μικρούς, σε άνδρες και γυναίκες κ.λπ., καθότι συζητάμε αλλού περισσότερο για τις αντίστοιχες αντιλήψεις που υφίστανται και σήμερα. Το πόσοι άνθρωποι «χωράνε» όμως, σε δεδομένο αγωνιστικό «χώρο» είναι ευνόητο ότι επιδέχεται μεγάλη συζήτηση.

Στο άρθρο XV, η προς game μετατροπή του ενδεδειγμένου πλεονεκτήματος πόντων, με τη χρήση λογαρίθμων, που δεν είχαν επινοηθεί βεβαίως στην αρχαιότητα, μα λίγες δεκαετίες πριν, για κάποιον που πρόλαβε και υπέδειξε βάσει αυτών το e, ήταν μάλλον «παιχνίδι». Έτσι ακολουθείται κι από δυο μικρά άρθρα – «ασκήσεις» μαθηματικών και πάλι, προκειμένου να περάσει κατόπιν στις «ιδιαιτερότητες» της Jeu de Paume, για τις οποίες μας μας βολεύει και πάλι η συμπληρωματική υπόθεση της «διάσωσης».

Το άρθρο XVIII ξεκινάει με τη συζήτηση για το bisque. Η «διάσωση» μπορεί να εκληφθεί ως bisque και για εκείνον που έστειλε την μπάλα εκτός, όπως και γι αυτόν που κάνει τη «διάσωση». Εκ μέρους εκείνου που έστειλε τη μπάλα εκτός μπορεί να εκληφθεί ως bisque καθότι συνεχίζει να παίζει και δεν αποκλείεται να μη χάσει σε πόντους εντέλει (ενώ αλλιώς θα έχανε τους πόντους σίγουρα). Εκ μέρους αυτού που κάνει τη «διάσωση» μπορεί να εκληφθεί ως bisque, εφόσον συνεχίζει να παίζει κι έχει την προοπτική να λογαριαστούν υπέρ του επιπλέον πόντοι (από τους σίγουρους). Ο πλέον βολικός λόγος από τους παραπάνω, είναι εν προκειμένω η ισχύς των κανονισμών. Έστω λοιπόν ότι ο κανονισμός της αντισφαίρισης προβλέπει πως όταν η μπάλα χτυπήσει εκτός γραμμής, λογαριάζουμε άμεσα τους πόντους όπως τους λογαριάζουμε, όμως το μέρος Α επιτρέπεται να συνεχίσει τη φάση, με την προοπτική να κατακτήσει επιπλέον πόντους. Το αν μπορεί πράγματι να κάνει τη «διάσωση», καθώς και το αν μπορεί πράγματι να κερδίσει και στη συνέχεια της φάσης, κρίνεται από το πόσο καλά θα παίξει στη συνέχεια. Εφόσον δεν υπάρχει εντέλει προβλεπόμενη «περίπτωση» να χάσει τους πόντους, που του «χαρίζει» ο αντίπαλος έχοντας στείλει την μπάλα εκτός γραμμής, είναι σκόπιμο να αποφανθεί την πραγματοποίηση κάθε εφικτής «διάσωσης» άμεσα, ώστε δίχως αμφιβολία να συνεχίσει αποφασιστικά το παιχνίδι σε κάθε περίπτωση. Ακόμα όμως κι αν είναι σίγουρο πως θα πάρει κανείς εντέλει τους πόντους άμα κάνει τη «διάσωση», θα υπάρχουν περιπτώσεις που απλά δεν θα μπορεί. Ως εκ τούτου θα ήταν ανώφελο να προσπαθεί κάποιος να επιστρέψει κάθε χτύπημα που πηγαίνει εκτός γηπέδου. Δεν θα ήταν μόνον σκέτη κερδοσκοπία, όπως ενδεχομένως είναι υπό τον παρόντα κανονισμό και το να μην επιστρέφει τις μπαλιές που μπορεί, μα θα ήταν ανοησία εκ μέρους του. Συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι παίζοντας με τα μαθηματικά ενδέχεται να συμφέρει κάποιον να κάνει τη «διάσωση» ακόμα και με ρίσκο να μην πάρει τους πόντους, οπότε έτσι να μεταφερθεί το ζήτημα αδιαφορίας στο σύγχρονο παιχνίδι. Ενδέχεται δηλαδή σε κάποιες περιπτώσεις να αποφαίνεται ότι θα είναι συγκριτικά πιο εύκολο το να πάρει τους επιπλέον πόντους με κάποια όχι μόνον εφικτή διάσωση, αλλά και με προοπτικές καλύτερες από όσες έχει στην αρχή της επόμενης φάσης. Ή να αποφαίνεται άλλοτε, ότι είναι συγκριτικά πιο δύσκολη, ή ενίοτε να βρίσκεται παντελώς αδιάφορος ανάμεσα στο να κάνει την «διάσωση» και στο να μην την κάνει. Μπορούμε έτσι να θέσουμε αρκετές προτάσεις σχετικές με την παντελή αδιαφορία ως προς τη «διάσωση» του παιχνιδιού. Για παράδειγμα το αν είναι σκόπιμο να την κάνει κάποιος, όταν με την μπαλιά που έχει πάει εκτός, έχουν συμπληρωθεί οι πόντοι με τους οποίους λήγει μαθηματικά το game, το set, ή η παρτίδα, όμως μπορεί, καίτοι νικητής, να συνεχίσει το παιχνίδι (με διακινδύνευση, ή όχι στο να χάσει τη νίκη του, που μπορεί να πάει, ή να μην πάει υπέρ του άλλου κ.α.). Υποθέσεις τέτοιου τύπου μπορούν κατ’ επέκταση να θεωρηθούν ως αναφερόμενες στη διάσωση της ζωής κάποιου και τη μετέπειτα συνέχειά της, ώστε να τους προσδώσει μεταφυσικές διαστάσεις, παρεμφερώς κάπως με το πώς έκανε ο Pascal στο γνωστό στοίχημά του σχετικά με την πίστη στο Θεό. Οι σφαιρίσεις, καθώς και τα τυχερά παίγνια, μπορούν όμως να συσχετίζονται και διαφορετικά απ' ότι θέλει να τις συσχετίσει κανείς με τα μεταφυσικά ζητήματα, ή και να μη συσχετίζονται. Στις παραπάνω σελίδες είναι που εκτός των πιθανοτήτων apriori και aposteriori, ο J. Bernoulli εισάγει στην ουσία και τη διερεύνηση των πιθανοτήτων εκ της λεγόμενης «αρχής της αδιαφορίας» και θέτει στη Jeu de Paume την εξέταση του ζητήματος της αδιαφορίας, πολύ πριν βέβαια τον Bentham, τον Edgeworth, Pareto κ.α. που το θέτουν ασφαλώς σε άλλα «πιο σοβαρά» πλαίσια.

Η «διάσωση» μπορεί όμως να είναι κι αμφίπλευρη. Αν για παράδειγμα το μέρος Α κάνει την πρώτη διάσωση υπό την προοπτική έστω του κέρδους επιπλέον πόντων, κι έπειτα από λίγες ανταλλαγές έστω, συμβεί να κάνει δεύτερη διάσωση το μέρος Β. Δεν θα αναπτύξουμε ούτε αυτή τη διπλή διάσωση περισσότερο απ' όσο μας βολεύει να πάμε στη συζήτηση των πιθανοτήτων για το chase, που δεν ισχύει στη σύγχρονη αντισφαίριση και που ο Hald εύλογα μάλλον αναφέρει εκ των προτέρων πως δεν θα συζητήσει. Θα περιορίσουμε μάλιστα τη «διάσωση» στις δυο στενόμακρες περιοχές στα πλάγια του μονού γηπέδου, που το συμπληρώνουν για το γήπεδο του διπλού.

Περνάμε έτσι στο άρθρο XIX όπου η συζήτηση που γίνεται περί της αδιαφορίας, πηγαίνει στην περίπτωση όπου έχουμε και bisque και chase. Δεχόμενοι θεωρητικά ότι κάποιος που παίζει μονό μπορεί, ή επιτρέπεται, να κάνει «διάσωση» μόνον εντός μιας εξ αυτών των περιοχών, που στη συνεχεία θα έχει και να την υπερασπίζεται. Ο J. Bernoulli προχωράει τη συλλογιστική του υποθέτοντας ότι συμβαίνει κάποιο chase για το ένα μέρος Α και κατόπιν συμβαίνει το ίδιο chase για το άλλο. Το ισοδύναμο για μας θα είναι η διπλή κι αμφίπλευρη διάσωση (θα παραλείψουμε την ενδιαφέρουσα διπλή – πολλαπλή και μονομερή). Πάμε στην περαιτέρω συλλογιστική του, όπου συνοπτικά μπορούμε ισοδύναμα να υποθέσουμε ένα σύγχρονο παιχνίδι, με τα δυο μέρη να υπερασπίζονται από ένα μονό γήπεδο συν μια πλάγια περιοχή έστω. Το αν είναι προς το συμφέρον του Α, να γίνεται το παιχνίδι σε μεγαλύτερο γήπεδο και για τα δυο μέρη, είναι κάτι που θα συνδεόταν με την συσχέτιση των δυνάμεών τους σε αυτό. Μεταφέροντας τη συζήτηση από τα επιπλέον αριθμητικά δεδομένα προς τον επιπλέον χώρο, μπορούμε κατ' αναλογία να συμπεράνουμε πως το Α θα το συμφέρει να κάνει τη διάσωση και να πάει το παιχνίδι σε μεγαλύτερο γήπεδο εφόσον του είναι συγκριτικά προνομιακό, δεν θα το συμφέρει εφόσον είναι συγκριτικά προνομιακό για το Β, ενώ θα αδιαφορεί εφόσον δεν είναι για κανένα.

Στο άρθρο XX που ο συγγραφέας καταπιάνεται με το πλεονέκτημα του κατέχοντος το σέρβις και στη μέση περίπου του άρθρου γράφει πως όταν είναι η σειρά του Α μέρους για σέρβις μπορούμε να φανταστούμε ότι είναι ήδη η σειρά του Β να απαντήσει. Αυτή η θεώρηση του διαφέρει μάλλον από μια σύγχρονη άποψη σύμφωνα με την οποία παίρνουν σειρά και οι δυο, καθώς το παίγνιο χαρακτηρίζεται πολλαπλό. Το ζήτημα δεν είναι βεβαίως απλό. Δυστυχώς όμως δεν επεκτείνεται πολύ στα σέρβις. Ο J. Bernoulli βασίζεται στην αρχή ότι όποιος ξεκινά με σιγουριά πλεονεκτεί και δεν του δίνει πολύ σημασία, καθότι μάλλον όπως καταλήγει το άρθρο, όταν οι παίκτες γίνονται πιο ικανοί στο σέρβις, το πλεονέκτημα τείνει στο μηδέν. Στη σύγχρονη εποχή η ικανότητα στο σέρβις μπορεί να καθορίζει τους παγκόσμιους πρωταθλητές-τριες, σε συνδυασμό με τον κανονισμό που επιτρέπει δυο σέρβις. Κατ' επέκταση θα μπορούσαν να είναι και τρία και να έχουμε ακόμα πιο πολλούς άσσους και περισσότερες άστοχες ρίψεις για παίκτες και θεατές. Απλώς συμπεραίνεται δίχως να προτείνεται, ούτε να υπονοείται σε κάθε περίπτωση ότι θα έπρεπε να είναι ένα. Δείχνει πάντως αρκετά προβληματικό το να έχουν άδεια για δεύτερο σέρβις οι άνδρες απέναντι στις γυναίκες, στα πλαίσια του μικτού διπλού. Γενικότερα μπορεί να τεθεί ως ζήτημα παραχώρησης αναπτυξιακών αδειών – δικαιωμάτων.

Στο επόμενο άρθρο XXI η συζήτηση για τα σέρβις εμπλουτίζεται με την εισαγωγή του chase και πάλι. Αντιστοίχως μπορούμε να εισάγουμε τη διάσωση και πάλι, η οποία λειτουργεί επίσης και σε αυτή την περίπτωση. Τα σέρβις αφενός καταλήγουν αρκετά συχνά για πολύ λίγο εκτός γραμμής κι αφετέρου το μέρος της υποδοχής είναι συγκριτικά πιο συχνά σε θέση να τα απαντήσει. Ο J. Bernoulli περιορίζεται για άλλη μια φορά σε αυτό το δεύτερο μέρος, αναφέρεται μόνον για ένα βολικό τύπο chase της μιας πλευράς που κατέχει το σέρβις, δεν αναφέρεται στα chase της λεγόμενης hazard side. Ότι είναι πολλές οι περιπτώσεις που δεν αναπτύσσει ο J. Bernoulli, δεν σημαίνει ότι δεν έχει στοχαστεί γι αυτές επαρκώς. Αντιθέτως ίσως, από την ασφαλώς έξω από τα καθιερωμένα εργασία του, θα πρέπει να σκεφθούμε πόσα πολλά του «λέει» η Jeu de Paume. Αναδεικνύει με μια πολύ βασική μέθοδο τη μαθηματική διάσταση αυτής της σφαίρισης κι όχι μόνον, ενώ ασφαλώς επίσης μπορούν να «μαθηματικοποιηθούν» περισσότερα στοιχεία της κι αλλιώς, καθώς δεν θα έβλαπτε κιόλας να γίνει κάτι τέτοιο. Οι σύγχρονοι αντισφαιριστές που παίζουν δίχως κανονισμό διάσωσης, διατρέχουν ηθικό κίνδυνο (moral hazard) και δεν ενεργούν με σκεπτικό βιώσιμης ανάπτυξης της σφαίρισής τους, δηλαδή ζητήματα που είναι μεγάλα και ενέχουν μαθηματικά, που έτσι αφήνονται εκτός του παιχνιδιού τους. Παρόλα αυτά μια σφαίριση, ακόμα κι αν βλάπτεται κιόλας περισσότερο από ένα γεωμετρικό σχήμα, δεν βλάπτεται μάλλον και τόσο δραματικά, όσο άλλοι τομείς της ανθρώπινης δράσης που έχουν αντιστοίχως ανυπολόγιστες συνέπειες.

Το άρθρο XXII που συνοψίζει τα προηγούμενα και κλείνει την επιστολή είναι επικεντρωμένο στα λογικά σφάλματα που μπορεί να κάνει κάποιος επί αυτού του θέματος.

Χαρακτηριστικό παράδειγμά του είναι αυτό με την ανάμιξη διαφορετικής αξίας κρασιών που λογαριάζεται διαφορετικά από την ανάμιξη διαφορετικής αξίας σφαιριστών, ως προς τους αριθμητικούς μέσους τους. Δεν θα έβλαπτε να μη λησμονούμε όμως ότι ακόμα και σήμερα, δεν είναι πάντοτε εξίσου ξεκάθαρα για όλους τους επιστήμονες τα σχετικά με τον αριθμητικό μέσο, που κατά περίπτωση αποτελεί αφηρημένη έννοια κι όχι ένδειξη πραγματικού τύπου. Για τους μεν τυπολόγους, είναι πραγματικός ο τύπος (είδος) και η ποικιλότητα μια ψευδαίσθηση, για τους δε εξελικτικούς, ο μέσος τύπος αποτελεί αφηρημένη έννοια και μόνον η ποικιλότητα είναι πραγματική. Δεν θα μπορούσαν να διαφέρουν περισσότερο οι δυο τρόποι εξέτασης της φύσης (Mayr, 2005).

Πολύ λίγο πριν από την εποχή που συγγράφεται η επιστολή (τότε που ασχολείται και με την προαναφερθείσα νομική υπόθεση), ο J. Bernoulli έχει αποπειραθεί, διαπιστωμένα πλέον ανεπιτυχώς, με τη δημοσίευση του «Parallelismus ratiocinii logici et algebraici» να συνδέσει τη λογική και την αλγεβρική αιτιολόγηση, πολύ περισσότερο απ’ όσο συνδέονται, ή έστω από όσο μπορούσε να τεκμηριώσει (Haaparanta, 2009). Επιχειρεί να εγκαταστήσει έναν παραλληλισμό ανάμεσα τους, μοναδικό βεβαίως. Έτσι εκεί διορθώνει μεν συνήθη λογικά σφάλματα των άλλων, όμως υποπίπτει κι ο ίδιος σε άλλα. Τα δικά του λογικά σφάλματα συνδέονται εν πολλοίς με το ότι ναι μεν στρέφεται προς τα ανθρώπινα, από την άλλη όμως η λατρεία του για τα μαθηματικά είναι τέτοια, που ενίοτε γράφει για τους ανθρώπους ως αν ήταν αντικείμενα. Ζει βέβαια σε μια άλλη εποχή, που για παράδειγμα δεν ισχύουν άλλες γεωμετρίες πέραν της Ευκλείδειας. Το «Parallelismus ratiocinii logici et algebraici» είναι για μια ακαδημαϊκή διατριβή στην οποία ο ίδιος οδηγούσε τη συζήτηση, ήταν ο *Praeses,* ο δε νεώτερος αδελφός του Johann, ως ακόλουθος αποκρινόμενος, ήταν ο Respondens. Ο παραλληλισμός του σχετίζεται με τα αντικείμενα, τη σημειωτική και τις λειτουργίες της λογικής και των μαθηματικών. Κατ’ αυτόν, τα αντικείμενα της λογικής είναι ιδέες πραγμάτων, τα αντικείμενα της των μαθηματικών είναι ιδέες ποσοτήτων. Παρόλα αυτά η δυαδική λογική δεν πρέπει να συγχέεται με τη δυαδική αριθμητική (Mano, 1992). Ο J. Bernoulli συνιστά την άμεση χρήση της άλγεβρας στην επιστήμη, υποστηρίζοντας ότι σε αυτή τα πάντα μπορούν να ποσοτικοποιηθούν και όλα αυτά κατόπιν μπορούμε να τα μεταχειριστούμε αλγεβρικά. Άλλωστε και η πρωτοποριακή μαθηματική επεξεργασία του στις πιθανότητες πηγαίνει προς αυτή την κατεύθυνση. Οι κανόνες που ισχύουν για αριθμούς ισχύουν και για λογικές έννοιες. όμως ισχύουν παράλληλα και λογικοί κανόνες οι οποίοι διαφέρουν κατά πολύ από εκείνους που ισχύουν για τους αριθμούς.

Το δεύτερο αξίωμα του Leibniz, $A \oplus A = A$, είναι μάλλον ο πιο εντυπωσιακός κανόνας που ανήκει σε αυτό το τελευταίο είδος, και που μέσα σε ένα κάπως διαφορετικό πλαίσιο, έμελλε να γίνει ο ακρογωνιαίος λίθος της Άλγεβρας της Λογικής του George Boole. Το συν μας προτρέπει να σκεφθούμε αυτή την πράξη ως μια συνήθη πρόσθεση, αλλά ο κύκλος γύρω του μας προειδοποιεί ότι δεν είναι ακριβώς σαν την πρόσθεση, καθότι αυτά που προστίθενται δεν είναι αριθμοί. Είναι προφανές ότι το αποτέλεσμα της ένωσης των αντικειμένων που ανήκουν σε μια συγκεκριμένη συλλογή δεν θα είναι τίποτε περισσότερο από την ίδια και πάλι συλλογή (Davis, 2007). Αντικειμένων υπό ευρεία έννοια, καθότι εν προκειμένω η πρόταση μπορεί να αναφέρεται και στους ανθρώπους, η δε συλλογή τους να είναι ο πληθυσμός μας. Βεβαίως η περίπτωση πρόσθεσης αριθμών είναι εντελώς διαφορετική: 2 + 2 = 4 και όχι 2. Δεν θα έβλαπτε να μη λησμονούμε ότι ούτε ο Bernoulli, ούτε κι ο Leibniz είναι επιστήμονες της λογικής της σημερινής εποχής, όσο κι αν αυτή τους οφείλει πολλά ως προς το που έχει φθάσει.

Ο J. Bernoulli συνδέεται πολύ με τη σκοπιά της Port-Royal, ότι κάθε ιδέα ενός πράγματος μπορεί μονοσήμαντα να ορίζεται από μια λέξη. Προήγαγε την άλγεβρα, όμως η λογική της Port-Royal από την οποία επηρεάστηκε, δεν είναι μάλλον το πλέον κατάλληλο δόγμα ιδεών, για κάποιο τόσο μεγαλόπνοο εγχείρημα. Δεν είναι εν προκειμένω σε θέση να αντιμετωπίσει ενδεχόμενα κατηγορήματα που δεν διαφωνούν με το περιεχόμενο του θέματος, αλλά δεν περιλαμβάνονται στην κατανόηση του. (Haaparanta, 2009). Ήδη όμως στην *Lettre à un amy…* έχουν διορθωθεί οι πιθανότητες σε σχέση με την νομική υπόθεση. Επίσης, διαπιστώνουμε αργότερα, στην Ars Conjectandi, πόσο καλά αυτός αντιλαμβάνεται πότε μπορεί κάποιος να νομίζει ότι ο θάνατος του ενός είναι η ζωή του άλλου, δίχως αυτό να ισχύει απαραιτήτως.

Θα μπορούσαμε βεβαίως να αναφέρουμε πολλές παραλείψεις, όπως για παράδειγμα ότι ενώ ο ίδιος υποστηρίζει τα «συγκεκριμένα μαθηματικά», δεν κάνει καμία αναφορά στη δυναμικότητα των γυναικών σε σχέση με τους άνδρες, για τους πιο μεγάλους παίκτες σε σχέση με τους πιο νέους (και ισοδύναμους έστω), που βεβαίως πρόκειται για συγκεκριμένα ζητήματα. Ακόμα και σήμερα όμως δεν έχουμε μάλλον προχωρήσει και τόσο όσο θα μπορούσαμε. Κάτι αντίστοιχο μπορούμε να ισχυριστούμε κι ως προς τη λογική, καθώς για παράδειγμα ο J. Bernoulli δεν δείχνει να ανησυχεί καθόλου μήπως δεν υπάρχει μοναδική κατάταξη των παικτών ως προς τη δυναμικότητά τους. Μήπως λόγου χάριν σε τρεις συνολικά παίκτες, ενδέχεται ενίοτε ακόμα και καθείς τους να παίζει καλύτερα από κάποιον έναν και χειρότερα από τον άλλο. Παρόλα τα σφάλματα που μπορεί να κάνει κι ο ίδιος, όπως κι εμείς που ερχόμαστε κατά πολύ εκ των υστέρων να τα επισημάνουμε, όχι ορθώς κατ’ ανάγκη, αυτός εν προκειμένω διορθώνει εντέλει πάρα πολλά σφάλματα της μέχρι τότε ανθρώπινης σκέψης.

Η *Lettre à un amy...* είναι ένα εξαιρετικό κείμενο που οδήγησε στη μαθηματική πιθανότητα και στο νόμο των μεγάλων αριθμών, όμως έχει βεβαίως κάποιες παραλείψεις κι αδυναμίες. Είναι κάπως άνισο να κάνει κάποιος στη σημερινή εποχή τέτοιου τύπου επισημάνσεις πάνω σε ένα αριστούργημα που έχει γραφεί τόσους αιώνες ως προς κάτι που πλέον έχει δοθεί ασύγκριτα μεγαλύτερη έμφαση. Πρόκειται για πολύ πρωτοποριακό κείμενο, που συνάμα έχει παραγνωριστεί.

1.7 Ars Conjectandi

Η *Ars Conjectandi ήταν η πλέον σπουδαία μαθηματική εργασία πάνω στις πιθανότητες έως την εμφάνιση της πραγματείας του Laplace πάνω στο ίδιο θέμα, έναν αιώνα αργότερα* (Daston & Galison, 1992· Hald, 1990). Οι διάδοχοί του J. Bernoulli αναγνώρισαν τη σημασία του οριακού θεωρήματός του και το έργο του συνεχίστηκε επιτυχώς από τον de Moivre (1718) και άλλους, αλλά φαίνεται ότι η συλλογιστική του J. Bernoulli παραγνωρίστηκε (Hald, 1990). Άλλοι ερευνητές επισημαίνουν πως με την Ars Conjectandi, ο J. Bernoulli ανέπτυξε μια θεωρία για την πρόοδο της επιστήμης μέσω εμπειρικών στοιχείων μια επαγωγική - συμπερασματολογική θεωρία (theory of inference). Η Ars Conjectandi είναι το πρώτο δημοσιευμένο κείμενο που προτείνει αντιστοίχιση των εμπειρικών στοιχείων με την έννοια της πιθανότητας, μια ιδέας που προς το παρόν αποτελεί το καθοριστικό χαρακτηριστικό της στατιστικής επιστήμης και είναι ακρογωνιαίος λίθος της σύγχρονης επιστήμης (Ekström, 2012).

Η στατιστική συμπερασματολογία που δομείται επί του αριθμητικού μέσου, των τυπικών αποκλίσεων κ.λπ. ήταν άγνωστη στους αρχαίους. Παρότι ο αριθμητικός μέσος όρος είναι μια σύνθεση των απλών αριθμητικών πράξεων που έχουν χρησιμοποιηθεί από την αρχαιότητα, ωστόσο, η χρησιμοποίηση της μέσης αριθμητικής τιμής, ως μέθοδος για να ληφθεί μια ακριβέστερη εκτίμηση από ότι εκ μίας μόνο παρατήρησης αποτελεί πιο πρόσφατη πρακτική. Επανέρχεται ως εκ τούτου συχνά κάποιο ζήτημα χρονικών πρωτείων και πάλι. Ακόμα κι αν κρίνουμε ως υπερβολική την απόδοσή τους στον J. Bernoulli πρωτίστως, ασφαλώς δεν θα μπορούσε κανείς βάσιμα να αρνηθεί τη σημαντικότητα της Ars Conjectandi ως προς το ξεκίνημα της στατιστικής συμπερασματολογίας. Φθάνουμε έτσι ακόμα και στον S. Laplace, που δεν πίστευε ότι το μέλλον υπαγορεύεται από κάποιο σχέδιο και απάντησε στο Ναπολέοντα ότι δεν είχε ανάγκη την προϋπόθεση του Θεού, ήταν όμως ντετερμινιστής όπως κι ο J. Bernoulli, βασίστηκε δε στο έργο εκείνου. Με την εργασία του Laplace διαπιστώνεται σίγουρα το πέρασμα προς τη στατιστική συμπερασματολογία, αν και ακόμα και γι αυτήν την τόσο σημαντική για τη σύγχρονη επιστήμη εξέλιξη της στατιστικής, υπάρχουν γνώμες ότι οφείλουμε να την πιστώσουμε καταρχήν στον J. Bernoulli.

Προκειμένου να φθάσει στην έννοια της αριθμητικής πιθανότητας, ο J. Bernoulli, συνδύασε κυρίως το 13 σελίδων κείμενο του Ch. Huygens με τις τελευταίες 20 σελίδες του «La logique, ou l’art de penser», οι οποίες διέφεραν από το υπόλοιπο έργο και συζητούσαν το θέμα της πίστης με θεολογικούς όρους κι ασφαλώς προσέφερε πολλαπλάσιο όγκο και κυρίως μαθηματικοποίηση (Ekström, 2012).

Το έργο προσφέρει ένα ιδιαίτερο δείγμα των ζωντανών πηγών, αλλά και του επιστημονικού σχολιασμού του συγγραφέα, που δεν περιορίζεται πλέον στην αντισφαίριση, όπως η προηγηθείσα επιστολή.

Από την αλληλογραφία του J. Bernoulli προκύπτουν κι ενδείξεις ότι ενδεχομένως δεν ήταν ικανοποιημένος με τη μαθηματική παρουσίαση της 4ης ενότητας κι ότι αυτός μπορεί να ήταν ο λόγος για την αναβολή της δημοσίευσης, μέχρι που αυτή έγινε μετά θάνατον (Dempster, 1966).

Στην Ars Conjectandi βρίσκονται αξιοσημείωτα λίγες σημαντικές αναφορές:

- Η 1η ενότητά της, έχει το De ratiociniis in ludo aleæ (1657) του Ch. Huygens.
- Η 2η ενότητα της, είναι μια γενικότερη συνδυαστική ανάλυση, που περιέχει αρκετά κοινά στοιχεία με άλλες εκείνης της εποχής, όπως την *Dissertatio de arte combinatoria* (1666) του Leibniz.
- Η 3η ενότητά της, έχει το La noble Venitienne ou la Bassette του J.Sauveur, (1679), απλώς ένα μικρό κείμενο για ένα χαρτοπαίγνιο, ανάμεσα στο πολλά συμπεριλαμβανόμενα παίγνια και προβλήματα.
- Η 4η ενότητά της έχει το La logique, ou l’art de penser (1662) των A. Arnauld & P. Nicole, που αποτελεί και αναφορά ως προς τον τίτλο της.

Εν προκειμένω, λόγω του ειδικότερου ενδιαφέροντός μας θα ασχοληθούμε λιγότερο με τις τρεις πρώτες ενότητες και περισσότερο με τη τέταρτη ενότητα, που αναγνωρίζεται γενικότερα ως η πλέον ενδιαφέρουσα, όπως κρίνει άλλωστε ο ανεψιός του Nicholas, καθώς κι ο A. Markov. Η σημασία του συγκεκριμένου έργου έχει επισημανθεί πολλάκις, ιδίως ως προς χρυσό θεώρημά του που αναπτύσσεται στο τέλος της. Και τα όσα προηγούνται όμως, ασφαλώς δεν είναι καθόλου άνευ σημασίας.

1.7. 1 Πρώτη ενότητα

Ο σχολιασμός του J. Bernoulli είναι εκτενέστατος, 3 – 4 φορές μεγαλύτερος κι από την αρχική εργασία του Ch. Huygens (Ekström, 2012). Βρισκόταν ένθετη σε μια ευρύτερη συλλογή μαθηματικών ασκήσεων (Exercitationes Mathematicae) του Frans Van Schooten, που συμπεριλάμβανε κι άλλα μικρά έργα. Εκατοντάδες προτάσεις αριθμητικής και γεωμετρίας και μια εργασία για τις κωνικές τομές, ήταν το ευρύτερο μαθηματικό πλαίσιο. Αρκετοί συγγραφείς, όπως ο A. Hald (1990) λογαριάζουν πάντως ως πρώτο κείμενο της θεωρίας πιθανοτήτων, αυτό το μικρής έκτασης κείμενο, το «De ratiociniis in ludo aleae». Κινείται δε στα χνάρια κάποιων πρακτικών κι εμπορικών βιβλίων της εποχής και βρίσκεται στη γραμμή μια παράδοσης από παλαιότερα βιβλία αριθμητικής με προβλήματα πρακτικά, είτε εμπορικά, που με τη σειρά τους είχαν χαρακτηριστικά από τα Αραβικά βιβλία άλγεβρας και την Ισλαμική μαθηματική κληρονομιά. Για παράδειγμα, ένα σύνηθες θέμα ήταν η λόγω θανάτου επίλυση επιχειρηματικής εταιρείας πριν από το τέλος, που προβλεπόταν στο αρχικό συμβόλαιο (Sylla, 2014). Δεν θα αναφερθούμε αναλυτικά στις 14 προτάσεις και τα 5 προβλήματα του Ch. Huygens που σχολιάζει πολύ πιο εκτενώς ο J. Bernoulli, αλλά μόνον σε κάποια ενδεικτικά αποσπάσματα.

Είναι χαρακτηριστικό τους, ότι δεν εξετάζουν αποκλειστικώς τα μερίδια των παικτών στο τέλος του παιχνιδιού, αλλά επιπλέον ίσως, τα μερίδια που είναι εύλογο να πληρώσει κάποιος ένας έστω νέος παίκτης για να εισέλθει σε αυτό, ή εναλλακτικά για να πάρει τη θέση άλλου, ο οποίος την παραχωρεί. Ως θεμελιώδης αρχή για τον Ch. Huygens και για τον J. Bernoulli, παραθέτουμε τη συνοπτική φράση που δίνει ο τελευταίος ως αξίωμα ή ορισμό που απορρέει από την αξία της προσδοκίας, όπως δίνεται από την πρόταση Ι της εργασίας του πρώτου. Καθένας μπορεί να προσδοκεί, ή πρέπει να λέγεται πως προσδοκεί, τόσα όσα θα αποκτήσει δίχως να αποτύχει (Bernoulli, 1713/2006).

Θα μπορούσε να αναφέρεται όπως και προηγουμένως στην αντισφαίριση, ή οποιαδήποτε άλλη σφαίριση, όπου αν συμβεί να καταξιωθεί κανείς, δεν θεωρείται τυχερός και μόνον. Όπως περίπου μια ήττα που μπορεί να επέλθει παρά την ελπίδα μιας νίκης, που όμως δεν είναι κι οπωσδήποτε σπουδαία. Πρόκειται για μια μεσότητα, υπό κάποια θεώρηση Αριστοτελική μεν, αλλά συνάμα και μαθηματική.

> *Μπορεί να ιδωθεί απ' ότι έχουμε πει ότι δεν χρησιμοποιούμε τη λέξη προσδοκία με την συνήθη έννοια, σύμφωνα με την οποία λέμε κοινώς ότι προσδοκούμε ή ελπίζουμε για το καλύτερο απ' όλα, καίτοι και τα χειρότερα πράγματα μπορούν να μας συμβούν. Εδώ γίνεται ο λογαριασμός της έκτασης με την οποία η ελπίδα για το καλύτερο είναι κράμα και μειώνεται από το φόβο να πάρουμε κάτι χειρότερο. Έτσι με την αξία της (valorem) πάντοτε εννοούμε κάτι ενδιάμεσο μεταξύ του καλύτερου που ελπίζουμε και του χειρότερου που φοβόμαστε*
>
> (Bernoulli, 1713/2006:134)

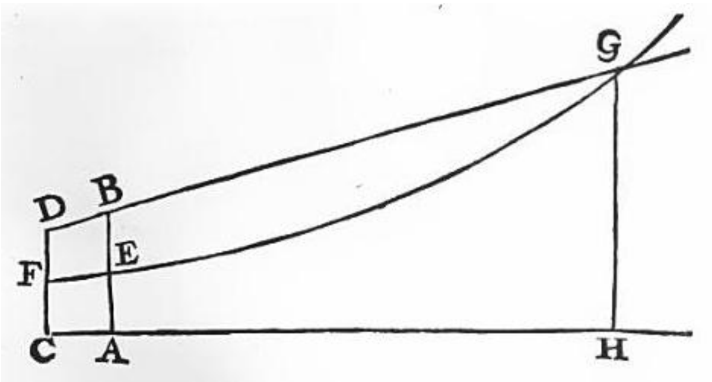
Στην πρόταση III ορίζεται από τον Ch. Huygens η θεμελιώδης αρχή του ιδίου, μα και του J. Bernoulli, αν ο αριθμός των περιπτώσεων στις οποίες μου συμβαίνει το a γεγονός είναι p κι αν ο αριθμός των περιπτώσεων που μου συμβαίνει το b είναι q, κι αν όλες οι περιπτώσεις μπορούν να συμβούν εξίσου εύκολα, τότε η προσδοκία μου είναι (pa + qb) / (p + q). «*Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν πολλοί παίκτες, συνυπολογίζοντας κι εμένα, όπως υπάρχουν και περιπτώσεις μαζί, δηλαδή p + q, κι ότι μια απλή περίπτωση συμβαίνει για κάθε παίκτη*» (Bernoulli, 1713/2006:135). Ο J. Bernoulli δείχνει πως το εννοεί, σχολιάζοντας ότι ο υπολογισμός είναι πολύ παρόμοιος με τον αριθμητικό κανόνα των μίξεων (regula alligationis),

Ο ίδιος τύπος (pa + qb) / (p + q) περνάει στην κατοπινή θεωρία παιγνίων, που γράφεται στην ίδια γλώσσα, αν κι εστιάζει πολύ περισσότερο στις διαφορετικές προσδοκίες. Η πρόταση IV παρουσιάζει επιπλέον παιγνιοθεωρητικό ενδιαφέρον. Καταρχήν προσφέρεται ως μια καλή βάση ανάλυσης των τυχερών παιγνίων, αλλά και μιας σφαίρισης υπό το σκεπτικό του J. Bernoulli. Υποτίθεται καταρχήν ότι κάποιος παίζει εναντίον άλλου, υπό τον όρο πως αυτός που θα συμπληρώσει πρώτος τρεις νίκες κερδίζει το στοίχημα, κι ότι έχει ήδη ο ένας κερδίσει τις δύο, έναντι μιας του άλλου. Έστω θέλει να ξέρει πόσα χρήματα παίρνει, αν συμφωνούν να μη συνεχίσουν το παίγνιο, αλλά να διαιρέσουν δίκαια τα χρήματα του στοιχήματος. Το ότι συμφωνούν να μη συνεχίσουν επαναλαμβάνεται και πάλι όπως και στην αρχή του κειμένου. Για να βρεθεί αυτό πρέπει να λάβουν υπόψη τον αριθμό των παιχνιδιών που υπολείπεται ο καθένας κι εν προκειμένω ο J. Bernoulli, σημειώνει ότι γενικά, δεν πρέπει τα περασμένα να τα λογαριάζουμε, για παίγνια που βρίσκονται εξ ολοκλήρου στο μέλλον. Ο J. Bernoulli που όπως γνωρίζουμε αντιλαμβάνεται πολύ καλά την αξία του a posteriori, επίσης επισημαίνει τη γελοία γνώμη των πολλών που σκέφτονται την καλοτυχία (fortune) ως κάποιου είδους συνήθεια, η οποία παραμένει σε κάποιο πρόσωπο για και κατά κάποιο τρόπο του δίνει σχεδόν το δικαίωμα να προσδοκεί τη συνέχιση παρόμοιας καλοτυχίας.

Υπό αυτές τις περιστάσεις χρειάζεται να εικάσουν οι παίκτες, αλλά και οι συγγραφείς, τι θα συνέβαινε αν θα συνέχιζαν. Ο J. Bernoulli αναφέρει όμως κιόλας ότι με το ενδεχόμενο a που υποδηλώνονται παραπάνω τα χρηματικά στοιχήματα, θα καταδείξει πολλά στο τελευταίο μέρος του βιβλίου. Αναφέρει πως ακόμα και τα αδιαίρετα θα μπορούμε να εκλάβουμε ως διαιρετέα, λαμβάνοντας υπόψη τον αριθμό των περιπτώσεων που μπορούν να χαθούν ή να κερδηθούν, να συμβούν ή να αποτύχουν να συμβούν. Κρίνει σύμφωνα με τη θεμελιώδη αρχή, πως αν κάποιος πρίγκηπας δίνει χάρη σε έναν από δυο εγκληματίες να ζήσει, τότε κατ' αυτό τον τρόπο κάποιος άνθρωπος μπορεί να λεχθεί πως είναι μισός νεκρός και μισός ζωντανός. Ο J. Bernoulli δεν έζησε τόσο ώστε να προλάβει την πολύ κατοπινή κβαντική επανάσταση και το γνωστό νοητικό πείραμα με τη «γάτα του Schrödinger». Η κβαντική διεμπλοκή του οποίου που ασφαλώς σχετίζεται με την αριθμητική πιθανότητα και διατυπώνεται με παρεμφερείς όρους. Στις φιλοσοφικές αναζητήσεις του ο πολύ κατοπινός Νομπελίστας Φυσικής Schrödinger στέκεται επίσης μπροστά στην ανάγκη για θρησκευτική πίστη και στην αδυναμία να την αποδεχθεί δίχως να προδώσει τις απαιτήσεις της διανόησης (Schrödinger, 1996). Αυτή κι άλλες εξελίξεις της φυσικής υπερβαίνουν βεβαίως κατά πολύ τις διατυπωμένες εικασίες του J. Bernoulli.

Κατόπιν, φθάνουμε σε κάποιο σημείο, όπου ο Ch. Huygens υπολογίζει την αξία - προσδοκία κάποιου παίκτη, δια μέσου της αφαίρεσης από την προσδοκία του άλλου. Ο J. Bernoulli επισημαίνει ότι αυτό δεν ισχύει πάντοτε. Ισχύει ενίοτε, όπως όταν το σύνολο των προσδοκιών μοιράζεται σε δύο παίκτες. Ήτοι, όταν τα αντίστοιχα συμβάντα και χωρίζονται και είναι συμπληρωματικά. Πρόκειται για κάτι που μπορεί να συνδεθεί και με τα λεγόμενα παίγνια μηδενικού αθροίσματος και με τις συναρτήσεις ωφελείας. Ως σχετικό παράδειγμα υποθέτει δυο καταδικασμένους σε θάνατο, που τους επιτρέπεται να παίξουν στα ζάρια τις ζωές τους και όποιος ρίξει την αθροιστικά μεγαλύτερη ζαριά να πάρει αναστολή, ή να την πάρουν αμφότεροι αν ρίξουν την ίδια. Υπολογίζει έτσι για τον καθένα την αναμενόμενη τιμή, ίση με 7/12, για να δείξει ότι η προσδοκία του ενός, δεν υπολογίζεται δια της αφαίρεσης της προσδοκίας του άλλου από την τιμή 1. Όπως διαπιστώνεται όχι βεβαίως εκ της ορολογίας και μόνον, παίγνια σαν το διάσημο πλέον «δίλημμα του κρατουμένου», ή όπως η «ασφάλιση» (αναφέρονται κι αργότερα) δεν απέχουν και πολύ από τη συλλογιστική του.

Στη συνέχεια του σχολιασμού του επί της ίδιας πρότασης, υποθέτει παίκτη που παίρνει τη θέση τριών παικτών για τη συνέχιση του παιγνίου και κλείνει γράφοντας ότι στην έκταση που κάποιο πρόσωπο έχει μεγαλύτερη προσδοκία νίκης, είναι δίκαιο να έχει κατάλληλα περισσότερη κατάθεση, αν θέλουν να παίξουν ως ισοδύναμοι. Δεν γράφει πως θέλουν οπωσδήποτε να παίξουν ως ισοδύναμοι. Και δεν αποκλείεται και να μη θέλουν, καθώς δείχνει η συνέχεια. Ο J. Bernoulli στο πρώτο μέρος δεν ενστερνίζεται απλώς τις μεθόδους της πραγματείας του Ch. Huygens, μα προσθέτει τη χρήση των απείρων σειρών και των λογαρίθμων (Bernoulli, 1713/2006). Βλέπουμε και τη χρήση της λογαριθμικής καμπύλης στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3.

Ο J. Bernoulli αναγνωρίζει γενικότερα στο έργο του τη σκοπιά των διοργανωτών οιωνδήποτε παιγνίων, πολύ περισσότερο από τον Ch. Huygens κι από οποιονδήποτε άλλο πριν από αυτόν. Αυτό είναι κλειδί κιόλας για το ότι έστω κι αν πιστεύει πως τα πάντα τα ορίζει ένας παντοδύναμος και παντογνώστης Θεός, αντιλαμβάνεται ότι είναι κάποιοι άνθρωποι που θέτουν τα τυχερά παίγνια για τα οποία γίνεται τόσος λόγος.

Με τα προβλήματα του Ch. Huygens ασχολήθηκε όχι μόνο ο J. Bernoulli μα και λίγο πολύ όλοι όσοι άρχισαν να ενδιαφέρονται για το νέο πεδίο (Hald, 1990). Σε αυτούς αξίζει να αναφέρουμε πως συγκαταλέγεται ενδεχομένως και ο φίλος του, τροχιστής φακών κατ' επάγγελμα, πρωτίστως όμως διαπρεπής φιλόσοφος και συγγραφέας μιας περίφημης «Ηθικής», B. Spinoza (http://cerebro.xu.edu/math/Sources/C. Huygens/C. Huygens.html). Ως προς την ανάγνωσή τους από τον J. Bernoulli, είναι κατατοπιστικό, όπως επισημαίνει και η E. Sylla να συγκρίνει κανείς αυτά τα προβλήματα παιγνίων του Ch. Huygens με την *Lettre à un amy*... του J. Bernoulli (Bernoulli, 1713/2006). Μια σημαντική ομοιότητα είναι πως κάθε παιχνίδι υποτίθεται ότι είναι δίκαιο, ήτοι ότι παίζεται στα ίσα. Μια προφανής διαφορά είναι πως ο J. Bernoulli υποθέτει ότι υπάρχουν πιθανώς διαφορές κι ως προς την ικανότητα, έτσι ώστε αν δεν προσφερθούν χάντικαπ, κάποιο μέρος μπορεί να νικά πολύ πιο συχνά από το άλλο. Επιπλέον όμως υπάρχει και το ζήτημα του κανονισμού ως προς την καθοριζόμενη ελάχιστη και την μέγιστη διαφορά προκειμένου να κατακτήσει κανείς τη νίκη. Νικάει κάποιο μέρος μόνον εφόσον φέρει τη διαφορά στους 2 πόντους, ή αναλόγως στα 2 game, μπορεί δε να την πάει μέχρι το πολύ 4. Οι προσεγγίσεις πριν τον J. Bernoulli, όπως αυτή του Pascal που εκκινεί από το μέγιστο συνολικό αριθμό πόντων, ή game που απαιτούνται μέχρι τη νίκη, δεν προέβλεπε τίποτα για το παιχνίδι που ενδέχεται να επιστρέφει επανειλημμένως στα ίσα. Η συμπερίληψη της Jeu de Paume στην σκοπιά του J. Bernoulli, εμπλουτίζει πολύ σημαντικά το νέο πεδίο.

1.7.2.Δεύτερη ενότητα

Στη δεύτερη ενότητα της Ars Conjectandi, ο συγγραφέας της περνάει στη συνδυαστική ανάλυση. Πριν από τον J. Bernoulli η συνδυαστική ήταν γνωστό πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων σε ένα καλώς καθορισμένο πείραμα, ήταν λιγότερο σαφές όμως ότι οι πιθανότητες μπορούσαν επίσης να μετρηθούν από ορισμένες τυχαίες αλληλουχίες με κάποιον αυθαίρετα ακριβή τρόπο (Polasek, 2000). Η συνδυαστική ανάλυση μπορεί να «συνδυαστεί» σχεδόν με οτιδήποτε, όπως άλλωστε και το παιχνίδι ως όρος, μπορεί να συσχετιστεί σχεδόν με οτιδήποτε. Η συνδυαστική ανάλυση της εποχής του J. Bernoulli όμως, δεν γνωρίζει για παράδειγμα την ανάπτυξη της γενετικής, που θα έλθει πολύ αργότερα και θα την χρησιμοποιήσει επίσης, γι αυτό την περιορίζουμε θεματικά σε κάτι που μπορεί να εκληφθεί ως πολύ πιο προσιτό σε αυτόν. Γι αυτόν και για τους σπουδαίους επιστήμονες της εποχής ο άνθρωπος συνδυάζει. Δεν έχουν και πολύ στο νου τους τον άνθρωπο ως προϊόν συνδυασμών. Προκειμένου να έχουμε ένα πλαίσιο αρκετά κοντά σε αυτό του J. Bernoulli, εν προκειμένω διατυπώνουμε έτσι και μια συμπληρωματική αναφορά που κρίνεται ότι είναι πολύ βολική, τουλάχιστον ως προς τις σφαιρίσεις που πραγματευόμαστε. Αναφερόμαστε στο Juggling που ενέχει και μπάλες και ανταγωνισμό. Πρόκειται άλλωστε για μια πρακτική που στη σύγχρονη εποχή συσχετίζεται ήδη από πολλούς μαθηματικούς με τη συνδυαστική ανάλυση την οποία πραγματεύεται ο συγγραφέας σε αυτή την ενότητα με τη συγκεκριμένη πρακτική. Στη συνέχεια του παρόντος κι αργότερα όταν θα φθάσουμε στον C. Shannon θα δειχθεί σε αρκετά σημεία η στενή σχέση τους. Το Juggling υπήρχε πιο παλιά από τη σύγχρονη επιστημονική συνδυαστική ανάλυση - αν δεν το θεωρήσουμε εξ αρχής ως έμπρακτη εφαρμογή της, τουλάχιστον από το 2000 π.χ στην Αίγυπτο.

Στην περίπτωση της συνδυαστικής του Bernoulli αναγνωρίζεται και η επιρροή του Leibniz, πέραν από τη μεγάλη επίδραση που άσκησε στα μαθηματικά του δυτικού πολιτισμού, το λεγόμενο “τρίγωνο του Pascal”, όπως ονομάστηκε από τον Montmort to 1708 και του αποδόθηκε μαζί με τη γένεση της μαθηματικής πιθανότητας. Το συγκεκριμένο τρίγωνο είχε μελετηθεί κι αιώνες πριν αυτόν από άλλους μαθηματικούς στην Ινδία, την Περσία, την Κίνα και την Ιταλία όμως ονομάστηκε έτσι χάρη στο έργο της μεγαλοφυίας του, την Traite du triangle arithmetigue (http://www.lib.cam.ac.uk/exhibitions/GreatCollections/). Είναι μάλλον πιο δικαιολογημένο να αποδίδεται στον Pascal το αριθμητικό τρίγωνο, παρά η αριθμητική πιθανότητα. Επαναλαμβάνεται όμως, ότι η απόδοση χρονικών πρωτείων ενδέχεται να είναι ένα πρόβλημα δίχως λύση. Προς ακόμη μεγαλύτερη επίρρωση αυτού του ισχυρισμού, είναι ότι οι λεγόμενοι αριθμοί Bernoulli που εμφανίζονται σε αυτό το 2^{ο} μέρος της Ars Conjectandi που δημοσιεύτηκε το 1713, έχουν δημοσιευτεί ένα χρόνο πριν το 1712 στην Ιαπωνία, καθώς έχουν επινοηθεί «ανεξάρτητα» κι από τον Ιάπωνα Seki Takakazu, ή και Seki Kōwa (Smith & Mikami, 1914). Μετά θάνατον και στην περίπτωση του, εφόσον είχε πεθάνει ήδη κι εκείνος, σχεδόν 3 χρόνια μετά το θάνατο του πρώτου. Είναι δύσκολο να εικάσουμε ως προς το αν αυτός θα ήταν κάποιος έκτος που θα έλυνε το πρόβλημα του βραχιστοχρονισμού του κυκλοειδούς, αν του είχε γνωστοποιηθεί, ούτε κι αν είκασε εντέλει ορθώς ο Leibniz θα τον συμπεριλάμβανε ορθώς ως έκτο.

Η Ars Conjectandi, σύμφωνα με τον A. Hald θα αποτελέσει το δηλοφιλέστερο βιβλίο συνδυαστικής κατά το 18$^{\text{ο}}$ αιώνα (Hald, 1990). Βρίσκεται σε αυτή τη δεύτερη ενότητά της, όπου ο J. Bernoulli περνάει στη συστηματική εξέταση του «δόγματος των διατάξεων και των συνδυασμών». Η εισαγωγή του είναι ως συνήθως αριστουργηματική. Ξεκινάει αναφερόμενος στην άπειρη ποικιλία, που είναι έκδηλη σε αμφότερα τα έργα της φύσης και στις ανθρώπινες δράσεις, και η οποία συνιστά την αρχική ομορφιά αυτού του σύμπαντος, που προέρχεται ξεκάθαρα από τη διαφοροποίηση στη σύνθεση, στην ανάμιξη και στη μετάθεση των μερών του, του καθενός με τα υπόλοιπα. Αναφέρει ότι καθώς είναι συχνά πολύ μεγάλη η πολλαπλότητα των πραγμάτων που συντρέχουν για να παραχθεί ένα φαινόμενο, δεν υπάρχει, ακόμα και για τους πλέον νουνεχείς, πιο σύνηθες σφάλμα, από αυτό που οι επιστήμονες της λογικής αποκαλούν ανεπαρκή απαρίθμηση των μερών. Ο J. Bernoulli δεν φαντάστηκε πως υπό κάποιες προϋποθέσεις η απαρίθμηση των δυνατών συνδυασμών, μπορεί να μην έχει ιδιαίτερη σημασία, όπως ανέδειξε πολύ μετά στη βιολογία ο Darwin, που εστίασε στους μηχανισμούς παραγωγής της ποικιλίας κι όχι στη μέτρησή της. Ή όπως ανέδειξε και στη γενετική ο Mendel, την ίδια εποχή με τον Darwin και δίχως να λάβει ο ένας υπόψη την εργασία του άλλου, που θα μπορούσε να είναι γι αμφότερους πολύτιμη. Στα έμβια όντα η γέννηση της ποικιλίας, κατ' επέκταση η ταξινόμησή τους κ.α. σχετικές διεργασίες διαφέρουν θεμελιωδώς από οτιδήποτε σχετίζεται με τα μη έμβια πράγματα (Mayr, 2008). Ο J. Bernoulli ασφαλώς δεν μπορεί να έχει υπόψη το Juggling από τη σκοπιά που ο Shannon αναφέρει ως σκοπιά του Darwin, για να διερωτηθεί κατόπιν ποια είναι η προέλευση του είδους ζογκλέρ (Shannon, 2006). Δεν μπορούμε όμως να υποθέσουμε εύλογα ότι ο Darwin, ο Mendel κ.α. θα έφθαναν και πάλι στις σπουδαίες ενοράσεις τους δίχως την πρόοδο των μαθηματικών και κατακτήσεών τους όπως η συνδυαστική, η αξιολόγηση των a posteriori δεδομένων, η αριθμητική πιθανότητα κι ο νόμος των μεγάλων αριθμών, που συντελέστηκαν από μαθηματικούς όπως ο J. Bernoulli.

Για τη σημερινή ανάγνωση της 2$^{\text{ης}}$ ενότητας της Ars Conjectandi είναι σκόπιμο να έχουμε στο νου μας, ότι ο J. Bernoulli σκοπεύει να φθάσει στο τελευταίο μέρος της, όπου ιστορικά δίνει την πρώτη απόδειξη του νόμου των μεγάλων αριθμών. Θαυμάζει δηλαδή την πολλαπλότητα στο μεγαλείο της φύσης και του ανθρώπου, μα δεν την θαυμάζει μόνον. Διευκρινίζει ότι δεν πρωτοτυπεί στα σχετικά με τη συνδυαστική ανάλυση, με την οποία έχουν ασχοληθεί αρκετοί διακεκριμένοι επιστήμονες, όπως οι Van Schooten, Leibniz, Wallis και Prestet. Συμπληρώνει όμως πως νομίζει ότι έχει κάποια καινούργια πράγματα να προσθέσει και πρώτα απ’ όλα μια γενική και εύκολη επίδειξη μιας ιδιότητας των σχηματικών αριθμών (figurative numbers) που θα επεξηγήσει παρακάτω (κεφάλαιο ΙΙΙ). Αναφέρει επιπλέον ο ίδιος γι αυτή τη 2η ενότητα, πως ξεχωρίζει τρία κύρια κεφάλαια (στα οποία θα σταθούμε λίγο περισσότερο κι επί του παρόντος). Είναι ένα για τις διατάξεις (κεφάλαιο Ι) , ένα άλλο για τους συνδυασμούς (κεφάλαιο ΙΙ), καθώς κι ένα ακόμα που τα εξετάζει μαζί (κεφάλαιο VII).

Ο J. Bernoulli αναφέρεται έτσι καταρχήν στις «διατάξεις των πραγμάτων» (permutationibus rerum) όπως καλεί τις παραλλαγές εκείνες που διατηρώντας την πολλαπλότητα των πραγμάτων, η σειρά και η θέση τους αλλάζουν κατά διαφόρους τρόπους. *«Έτσι, αν κάποιος ρωτήσει με πόσους τρόπους πολλά πράγματα μπορούν να μετατεθούν, ή να αναμιχθούν το ένα με το άλλο, έτσι ώστε κάποιος πάντα να τα λαμβάνει όλα και να αλλάζει μόνον την σειρά, ή την θέση τους, λέγεται τότε πως κάποιος ρωτά για τις διατάξεις αυτών των πραγμάτων. Εκ των πραγμάτων που διατάσσονται, εντούτοις, μπορούν να είναι διαφορετικά όλα, ή μόνον κάποια. Αυτό μπορεί βολικά να αναπαρασταθεί με τη χρήση γραμμάτων της αλφαβήτου, είτε μεταξύ τους διαφορετικών όλων, είτε με κάποια επαναλαμβανόμενα»* (Bernoulli, 1713/2006:194). Το παραπάνω ενδεικτικό απόσπασμα θα μπορούσε δίχως αλλαγή να εκφέρεται από κάποιον ζογκλέρ που μιλάει για τις μπάλες. είτε τα άλλα αντικείμενα που κυκλοφορεί. Μπορεί να μην έχει μεγάλη σημασία το ότι επιλέγει να τα αναπαραστήσει με διαφορετικά γράμματα κι όχι με διαφορετικά χρώματα. Ο Newton την ίδια περίπου εποχή, έχει ανακαλύψει δια μέσου πρισμάτων πως αναλύεται η ακτινοβολία του φωτός στα ορατά χρώματα, καθώς και πως αυτά συνδυάζονται στο λευκό, καταρρίπτοντας την Αριστοτελική δυαδική άποψη ότι αυτό ήταν χρώμα βασικό κιόλας μάλιστα, καθώς μαζί το μαύρο παρήγαγαν τα υπόλοιπα. Μάλιστα τον βοήθησε και η θύμηση των φάλτσων της μπάλας του tennis (Royal Society of London, 1705).

Ως φαινόμενο θα περιγραφεί κατόπιν και στην κλασική εξίσωση της ρευστομηχανικής, ή εξίσωση του Daniel Bernoulli. Η Νεύτωνια θεώρηση, αφενός μας δίδαξε και μας διδάσκει πως όλα αυτά τα πολλά χρώματα που βλέπουμε και η ποικιλία τους, μπορούν να προέρχονται από μια και μόνον πηγή, γνωρίζουμε δε πλέον ότι κι εκείνα που ακούμε εντάσσονται στο ίδιο ενιαίο ηλεκτρομαγνητικό φάσμα. Αφετέρου, η δημοσίευση των Principia του Νεύτωνα το 1687, με την πρόταση για εκμηχάνιση ολόκληρου του άψυχου κόσμου πάνω σε μαθηματική βάση, ενίσχυσε πολύ σημαντικά τη μηχανιστική προσέγγιση.

Έγινε του συρμού, περισσότερο παρά ποτέ, να ερμηνεύονται τα πάντα με τους όρους της φυσικής, δηλαδή με τις δυνάμεις και την κίνηση, όσο ακατάλληλη κι αν είναι μια τέτοια ερμηνεία για τα περισσότερα βιολογικά φαινόμενα (Mayr, 2008). Αν και δεν είχαν σπουδαίο ενδιαφέρον για τη βιολογία, ούτε ο Newton, ούτε ο Jacob Bernoulli, του τελευταίου η θεώρηση και η στροφή του μαθηματικού ενδιαφέροντος προς τις ανθρώπινες υποθέσεις, ήταν πολύ πιο κατάλληλη. Ο Δαρβίνος δεν θεώρησε βεβαίως σφαιρίσεις και παιχνίδια, θα συλλάβει δε την παραγωγή της ποικιλομορφίας και πιθανοκρατική ερμηνεία της εξέλιξης του ανθρώπου κι όχι μόνον, προτού κιόλας μαθηματικοποιηθούν από τον Μαρκόφ οι στοχαστικές διεργασίες. Βεβαίως όμως ο J. Bernoulli, και ο Newton που πιστώνεται και με την πρώτη γενίκευση του διωνύμου, καθώς και κάποιοι μετρημένοι στα δάκτυλα σπουδαίοι επιστήμονες της εποχής, μπορούσαν κάλλιστα να συνεννοηθούν μεταξύ τους. Ο J. Bernoulli παρακάτω άλλωστε, στο κύριο κεφάλαιο που συνεξετάζει μαζί συνδυασμούς και διατάξεις, συζητάει εκτενώς τους συνδυασμούς των γραμμάτων. Κάτι τέτοιο όπως θα δούμε πρόκειται να κάνει έπειτα από αυτόν κι ο Laplace, έπειτα κι ο Markov, καθώς και μετέπειτα ο C. Shannon. Θα αναφέρει πως σε ορισμένους συνδυασμούς, έχει σημασία η σειρά, ή η θέση, όπως για παράδειγμα δεν είναι το ίδιο το 12 με το 21 και τα γράμματα a,b,c, κατανοούνται ενίοτε ως να σχηματίζουν διαφορετικές τριάδες, κι έχει σημασία η σειρά με την οποία έχουν γραφεί, αν είναι abc, ή acb, ή bac κ.λπ.. Λίγη σημασία έχει ότι ο J. Bernoulli μεταχειρίστηκε γράμματα του Λατινικού αλφάβητου, ο A. Markov του Ρώσικου κι ο C. Shannon του Αγγλικού. Για όλους τους παραπάνω, κατά βάθος υπάρχουν σύμβολα που είναι μαθηματικά, έτσι όπως τα συζητά ο καθείς τους, που έχει οπωσδήποτε να συνεισφέρει και κάτι πολύ σημαντικό, ως προς την επιστημονική πρόοδο της εποχής που ζει.

Εξετάζουμε σταδιακά κι ως πλαίσιο αναφοράς το Juggling, έτσι όπως το έθεσε ο C. Shannon (1993) και θα αναπτύξουμε περισσότερο κατόπιν. Νομίζουμε ότι επί του παρόντος, μπορεί να αναδείξει με τον πλέον κατάλληλο τόσο την υφιστάμενη συνέχεια που ακολουθήθηκε καθώς εικαζόταν, μα και τα όσα πήγαν πέρα από την τότε συνδυαστική ανάλυση. Η ευρύτερη σχέση της τελευταίας με το Juggling, είναι σήμερα πολύ ζωντανή και μπορεί να δείχνει προφανής ακόμη και για κάποιον που δεν είναι ιδιαίτερα εξοικειωμένος με τίποτα από αυτά, ακόμη ίσως και με μια ματιά σε μια ζωντανή επίδειξη, ή ακόμα και σε ένα διάγραμμα καταστάσεων που είναι εφικτά για κάποιο δεδομένο αριθμό μπαλών, όπως αυτό που παραθέτουμε ενδεικτικά παρακάτω.

State	7	11	13	14	19	21	22	25	26	28
00111 (7)	3	4			5					
01011 (11)	2	X	4			5				
01101 (13)	1		X	4			5			
01110 (14)	0			X						
10011 (19)		2	3		X			5		
10101 (21)		1		3		X			5	
10110 (22)		0					X			
11001 (25)			1	2				X		5
11010 (26)			0						X	
11100 (28)				0						X

Διάγραμμα καταστάσεων στο Juggling
(Πηγή: http://www.danielclemente.com/linux/schart.html)

Κατόπιν ο J. Bernoulli μας εισάγει καταρχήν στις διατάξεις πραγμάτων που δεν διαφέρουν το ένα από το άλλο.

«Εφόσον κάποιος δεν μπορεί να εισέλθει στον αριθμό των διατάξεων ανάμεσα σε πολλά πράγματα, εκτός αν η ίδια πληροφορία κερδηθεί προηγουμένως για όλα τα άλλα πράγματα που είναι αριθμητικώς λιγότερα, είναι ξεκάθαρο ότι σε αυτό το ερώτημα είναι δέον να χρησιμοποιηθεί ο συνθετικός τρόπος, που σημαίνει είναι δέον να αρχίσουμε από τις πρώτες και απλούστερες υποθέσεις:

Ένα πράγμα, ή το γράμμα α μπορεί να ληφθεί, ή να τεθεί, κατά έναν τρόπο μόνον.

Με δυο πράγματα, ή τα γράμματα α και β, ή προηγείται το α κι έπεται το β, ή προηγείται το β κι έπεται το α. Έτσι αυτά τα δυο πράγματα έχουν δυο διατάξεις αβ και βα.

Κατόπιν τρία πράγματα α, β, γ μπορούν να διαταχθούν κατά τέτοιο τρόπο ώστε η πρώτη θέση να δοθεί στο α, ή στο β, ή στο γ. Αν το α είναι στην πρώτη θέση, τα υπόλοιπα δυο όπως προείπαμε, μπορούν να διαταχθούν κατά δυο τρόπους.»

(Bernoulli, 1713/2006:194)

Για άλλη μια φορά είναι ξεκάθαρο ότι τον ενδιαφέρουν καταρχήν οι αριθμοί, όπου δεν μπορεί να πάει κανείς στους μεγάλους, χωρίς να περάσει από τους μικρούς. Με βάση τη γνώριμη πλέον συμπληρωματική μας υπόθεση, δεν έχουμε κανένα πρόβλημα αν πρόκειται για κάποια ζογκλερικά props (μπάλες, κορίνες, diabolo, yo-yo και όλα τα «παιχνίδια» που χρησιμοποιούν οι ζογκλέρ στα κόλπα τους). Ένας ζογκλέρ παίζει κυκλοφορώντας τρεις πανομοιότυπες μπάλες μια πράσινη, μια πορτοκαλί, μια γαλάζια. Διατάσσονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε η πρώτη θέση να δοθεί στην α, ή στη β, ή στη γ, κι αν η α είναι στην πρώτη θέση, οι υπόλοιπες δυο, μπορούν να διαταχθούν κατά δυο τρόπους κ.ο.κ. Είναι ευνόητο επίσης ότι αντί για γράμματα θα μπορούσαμε να έχουμε τα χρώματα, πράσινο, πορτοκαλί, γαλάζιο. Τα πράγματα όμως στα οποία αναφέρεται ο συγγραφέας, ενδέχεται επίσης να είναι και υποκείμενα, όπως άνθρωποι, ή ομάδες ανθρώπων. Δεν έχουν εκ του φυσικού τους τέτοια χρώματα, όμως ενδέχεται να φορούν αντίστοιχες έγχρωμες φανέλες. Οπότε τρεις ομάδες έστω, μπορούν να παίζουν κάποια σφαίριση στην οποία μεταχειρίζονται την ίδια μπάλα και να διατάσσονται καταρχήν, ή κι εντέλει, έτσι ώστε η πρώτη θέση να δίνεται στην α, ή στη β, ή στη γ κ.λπ. Ακόμα και τα υποκείμενα μπορούν ως σύμβολα να είναι κάπως όπως οι μπάλες στα χέρια των ζογκλέρ, για κάποιον διοργανωτή αγώνων που τις «παίζει στα δάκτυλά του». Ο J. Bernoulli στην επόμενη Τρίτη ενότητα της Ars Conjectandi, έστω κι αν δεν συζητά πολύ τις πραγματικές, ή φανταστικές διαφορές των υποκειμένων, ως προς το φύλο, ή το χρώμα του δέρματος κ.λπ., δείχνει πως λαμβάνει πολύ υπόψη του τους διοργανωτές των αγώνων.

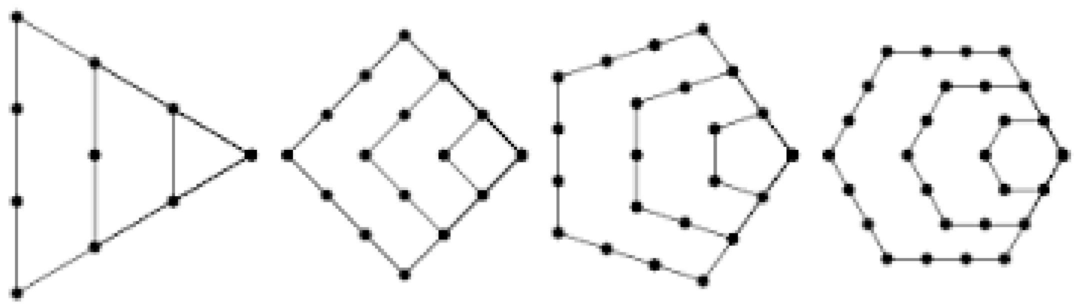
Στο επόμενο κύριο κεφάλαιο της 2ης ενότητας της Ars Conjectandi, είναι τα σχετικά με τους συνδυασμούς πραγμάτων, που τους ξεκινάει αναφέροντας πως:

> *«είναι συλλογές τέτοιες ώστε από κάποια δεδομένη πολλαπλότητα πραγμάτων, κάποια απομακρύνονται και συνενώνονται, δίχως να δίνεται προσοχή στη σειρά, ή τη θέση τους. Ως εκ τούτου, όταν ερωτάται από κάποιο δεδομένο αριθμό πραγμάτων, πόσες φορές μπορούν να ληφθούν, δυο, τρία, ή τέσσερα, έτσι ώστε όλα τα ίδια πράγματα να μη ληφθούν ποτέ πάνω από μια φορά, τότε λέγεται πως κάποιος ρωτά για όλους τους ποικίλους συνδυασμούς των δεδομένων πραγμάτων. Ο αριθμός των δεδομένων πραγμάτων που συνενώνονται καλείται εκθέτης του συνδυασμού. Έτσι, αν λαμβάνονται ανά δυο πράγματα τη φορά, ο εκθέτης θα είναι 2, αν βρίσκονται σε τριάρια το 3, αν βρίσκονται σε τεσσάρια το 4. Τα πράγματα που συνενώνονται σύμφωνα με αυτούς τους εκθέτες καλούνται ζεύγη, τριπλά, τετραπλά κ.λπ. ή δυάδες, τριάδες, τετράδες κ.λπ και παρομοίως μονά ή μονάδες, όταν τα πράγματα λαμβάνονται απλά και μηδεμονάδες (nullions) όταν δεν λαμβάνεται απολύτως τίποτα»*
>
> (Bernoulli, 1713/2006:202)

Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως κατά κάποιο τρόπο ήταν μισό βήμα από τον ορισμό του bit. Απλά δεν βρίσκει κάποιο σπουδαίο λόγο για να συνενώσει μονάδες και μηδεμονάδες, όπως ο C. Shannon κ.α. που ζουν κατόπιν στην εποχή του ηλεκτρισμού.

Πάντως και σήμερα και τότε, ένας ζογκλέρ μπορεί να κυκλοφορήσει δυο μπάλες δίχως να ρίξει καμία κάτω, άλλος μπορεί τρεις, κάποιος τέσσερις κ.ο.κ. και κάποιος τρίτος μια, ή και καμία. Εκτός από μέτρο των δυναμεών τους, όπως θα γραφόταν μάλλον υπό τους όρους της Lettre à un amy…, οι αριθμοί των προαναφερόμενων σφαιρών θα μπορούσαν να υποτεθούν ως οι εκθέτες που αποδίδει ο J. Bernoulli. Θα τους συναντήσουμε έτσι όταν αναφερθούμε παρακάτω λίγο εκτενέστερα στο Juggling και στη σχετική με τη συνδυαστική και συνάμα σύγχρονη μαθηματική σημειογραφία του, η οποία αναπτύσσεται έπειτα από τον C.Shannon, από μαθηματικούς και προγραμματιστές κυρίως. Συνεχίζοντας παρακάτω την εξήγησή του ο J. Bernoulli αναφέρει πως ορισμένοι αποκαλούν αυτές τις συλλογές συνδυασμούς, συν3σμούς, συν4σμούς κ.λπ., όλοι εκ των οποίων περιγράφονται με τη μόνη λέξη συνδυασμοί, παρόλο που αυτή η λέξη με πιο αυστηρή σημασία φαίνεται να σημαίνει συλλογές που συνενώνουν δυο πράγματα τη φορά. Γι αυτό, άλλοι προτιμούν να χρησιμοποιούν πιο γενικούς όρους, όπως σύμπλοκα, άλλοι πιο καταλλήλως τους αποκαλούν εκλογές - επιλογές ώστε να καταλαμβάνουν ίσως και τις συλλογές πραγμάτων στις οποίες σκέτα – μονά πράγματα λαμβάνονται εξ αυτών, ή ακόμα δεν λαμβάνεται κι εντελώς τίποτα. Εν προκειμένω έχουμε μια παρουσίαση που βρίσκεται στα χνάρια του Leibniz και συγκεκριμένα του πρώιμου έργου, από το 1666, του *Dissertatio de Arte Combinatoria* (Amunátegui, 2014).

Εντέλει, έστω και περιορισμένα, οφείλουμε να αναφερθούμε στους αριθμούς Bernoulli. Πρόκειται για μια σειρά ρητών αριθμών που συνδέονται πολύ με την «καθαρή» θεωρία αριθμών. Καταλήγει σε αυτούς έπειτα από τη μελέτη των λεγόμενων σχηματικών αριθμών, ήτοι αριθμοί που μπορούν να σχηματιστούν μέσα από διατάξεις σημείων που απέχουν ίσα διαστήματα μεταξύ τους εντός κανονικών σχημάτων (Σχήμα 4).



Σχήμα 4.

Οι συζητήσεις για τους «σχηματικούς αριθμούς» συνήθως ξεκινούν με τους λεγόμενους «τριγωνικούς αριθμούς». Τριγωνικοί αριθμοί είναι εκείνοι που μπορούν να παρασταθούν ως κάποια τριγωνική διάταξη ισαπεχόντων ημείων ή μονάδων. Οι τριγωνικοί αριθμοί (1,3,6,10,15…) αποτελούν επίσης την τρίτη στήλη του 7Χ7 Πίνακα VIII(Α), με πρώτη εκείνη των μονάδων και δεύτερη εκείνη των ακεραίων 1,2,3,.. Οι τετράδες, που ξεκινούν στην $4^{η}$ στήλη του παρακάτω πίνακα, δίνουν τη στήλη των σχηματικών αριθμών που καλούνται πυραμιδικοί αριθμοί (1,4,10,20,..), ήτοι αριθμοί που μπορούν να αναπαρασταθούν ως τετράεδρο αποτελούμενο από σημεία που ισαπέχουν σε 3 διαστάσεις. Ο J. Bernoulli προχωράει και στις περισσότερες από 3 διαστάσεις, όπου δεν μπορούν να παρασταθούν με ισαπέχοντα σημεία, η δε μεθοδολογία του όμως μπορεί να συνεχιστεί. Στην Ars Conjectandi ο J. Bernoulli δίνει κάποιον αντίστοιχο 12Χ12 πίνακα συνδυασμών ή σχηματικών αριθμών κι όπως επισημαίνει, όποιος έχει χρόνο μπορεί να τον επεκτείνει οσοδήποτε θέλει προς τα κάτω, ή προς τα δεξιά.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ

(A)

Αριθμός πραγμάτων προς συνδυασμό	Εκθέτες των συνδυασμών I	II	III	IV	V	VI	VII
1.	1	0	0	0	0	0	0
2.	1	1	0	0	0	0	0
3.	1	2	1	0	0	0	0
4.	1	3	3	1	0	0	0
5.	1	4	6	4	1	0	0
6.	1	5	10	10	5	1	0
7.	1	6	15	20	15	6	1
8.	1	7	21	35	35	21	7

(B)

Αριθμός πραγμάτων προς συνδυασμό	Εκθέτες των συνδυασμών I	II	III	IV	V	VI	VII
1.	1	0	0	0	0	0	0
2.	1	1	0	0	0	0	0
3.	1	2	1	0	0	0	0
4.	1	3	3	1	0	0	0
5.	1	4	6	4	1	0	0
6.	1	5	10	10	5	1	0
7.	1	6	15	20	15	6	1
8.	1	7	21	35	35	21	7

Πίνακας VIII.

Επιγράφει ένα ολόκληρο κεφάλαιο «οι θαυμαστές ιδιότητες των σχηματικών αριθμών», όπου παραθέτει δώδεκα, οι οποίες αναφέρει πως αποτελούν μια μικρή γεύση μόνον.

Όπως λόγου χάριν προκύπτει από τον Πίνακα VIII (B), το άθροισμα των όρων που βρίσκονται στο μεγάλο πλαίσιο ισούται με το άθροισμα μόνον των όρων του μικρού πλαισίου μιας παρακάτω σειράς, ενώ γενικεύεται βέβαια αντιστοίχως για οσοδήποτε μεγάλα πλαίσια. Ξεκινώντας με τους σχηματικούς αριθμούς και περνώντας προς τα αθροίσματα των εκθετών

καταλήγει στους πλέον ομώνυμούς του αριθμούς (Bernoulli numbers). Αυτοί οι αριθμοί που είναι οι συντελεστές των τελευταίων όρων για τα αθροίσματα των άρτιων δυνάμενων, μπορούν να υπολογιστούν από τον πίνακα καθότι το άθροισμα όλων των συντελεστών κάθε δεδομένης σειράς ισούται με τη μονάδα. Οι τιμές των αρχικών αριθμών Bernoulli είναι:
$B_0 = 1$, $B_1 = \pm 1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$, $B_5 = 0$, $B_6 = 1/42$, $B_7 = 0$, $B_8 = -1/30$.

Ο J. Bernoulli δείχνει τη χαρά που του προξένησε αυτή η ενόρασή του γράφοντας ότι χάρη στην αξιοποίηση του σχετικού πίνακα που είχε καταρτίσει, μέσα σε λιγότερο από μισό τέταρτο κατάφερε να λογαριάσει ότι το άθροισμα των εις τη δέκατη δυνάμεων των πρώτων χιλίων αριθμών αρχίζοντας από το 1, που ισούται όπως γράφει με 91,409,924,241,424,243,424,241,924,242,500.

1.7.3 Τρίτη ενότητα

Στο τρίτο μέρος ο J. Bernoulli ξεκινάει στην εισαγωγή του κιόλας να διευκρινίσει πόσο εκτιμά τα παραδείγματα προβλημάτων που του βρίσκονται κατά κάποιο τρόπο πρόχειρα, όμως μπορούν να κατατοπίσουν τον αναγνώστη καλύτερα κι από τη συνδυαστική ανάλυση του προηγούμενου μέρους. Πρόκειται να παραθέσει 24 προβλήματα που αναφέρονται σε διάφορα είδη παιγνίων που παίζονταν εκείνη την εποχή, μα κι από άλλα που δείχνουν να επινοήθηκαν προκειμένου να υποδείξει μεθόδους λύσης. Ο J. Bernoulli αρχίζει να ασχολείται με τα γνωστά παίγνια από το 16^{ο} πρόβλημα και μετά, δείχνει δε ότι αντιλαμβάνεται βαθειά, πολύ καλύτερα από κάθε άλλον τα παίγνια της εποχής του.

Στο πρόβλημα I κάποιος με 2 μάρκες μια άσπρη και μια μαύρη, κρυμμένες σε μια κληρωτίδα, προσφέρει ένα βραβείο σε 3 ανθρώπους, Α, Β, και Γ, υπό τον όρο ότι όποιος τραβήξει την άσπρη μάρκα θα κερδίσει το βραβείο κι ενώ αν αποτύχουν όλοι κανένας δεν θα κερδίσει το βραβείο. Διευκρινίζει πως ο Α τραβάει πρώτος και ξαναβάζει τη μάρκα, ο Β δεύτερος, ο Γ τρίτος κι ερωτά ποια είναι η τύχη του καθενός. Ακολουθεί η συνοπτική λύση του στην τελευταία παράγραφο της οποίας αναφέρει ότι η πιθανότητα του Α είναι 1/2 του Β είναι 1/4, του Γ είναι 1/8, σημειώνοντας εντέλει ότι «*έτσι ώστε απομένει επίσης κι 1/8 για εκείνον που προσφέρει το παιχνίδι*».

Εκτός δηλαδή από τους παίκτες που παίζουν το παιχνίδι που τους προσφέρεται, έχει στο νου του και κάποιους που το προσφέρουν. Μάλιστα όπως προκύπτει εδώ η τύχη τους είναι τόση όση κι εκείνου που τραβάει τελευταίος κι έχει συγκριτικά τη μικρότερη. Το πρόβλημα II το συνδέει ο ίδιος με το προηγούμενο. Ερωτά αν ο βραβευτής (brabeuta) του τυχερού παιγνίου, θέλοντας να αρνηθεί για τον εαυτό του κάθε δικαίωμα στο βραβείο, πει στους υπόλοιπους να το μοιράσουν μεταξύ τους αν κανείς δεν επιλέξει την άσπρη μάρκα, τότε ποιες θα είναι οι πιθανότητές τους. Δίνει αφενός την απλή για τα σημερινά δεδομένα απάντηση, όμως το πλέον σημαντικό ως προς εμάς είναι ότι θέτει τα πλέον ενδιαφέροντα, δύσκολα ερωτήματα. Παρατηρούμε σε αυτά τα πρώτα προβλήματα ότι η οργανωτική αρχή παίρνει ενδεχομένως μικρό μερίδιο, ή και καθόλου μερίδιο, δεν κρατάει για τον εαυτό της το μεγαλύτερο μερίδιο απαραιτήτως. Επιπλέον, προσφέρει βραβείο και δεν στηρίζεται στην τύχη, όπως οι άλλοι, ή τόσο όσο εκείνοι. Καθώς ο J. Bernoulli συχνά μεταχειρίζεται ποικίλους όρους δίχως να εννοείται απαραίτητα κάτι διαφορετικό, ο προηγουμένως βραβευτής, στο πρόβλημα III ονομάζεται άρχοντας (princeps). Στο ίδιο και το επόμενο πρόβλημα IV που αποτελεί συνέχειά του κι αφορά παιχνίδι 6 παικτών, βάζει αυτόν τον διοργανωτή να ευνοεί συγκριτικά αυτούς που χρονικώς παίζουν τελευταίοι. Με τη σημερινή ορολογία κάποιοι παίζουν προκριματικά παιχνίδια, ώστε ενδεχομένως αργότερα να συναντήσουν άλλους, που τελικά παίζουν σε επόμενες φάσεις. Ζητούνται πάλι οι υπό αυτούς τους όρους προσδοκίες - πιθανότητές τους, καθώς και το αν αποκτούν ίσο δικαίωμα προς το προσφερόμενο βραβείο, εφόσον ληφθούν υπόψη οι νέες ιδιαιτερότητες. Πολλά από τα πρώτα προβλήματά αφορούν το πώς ποικίλουν οι πιθανότητες σε παίγνια με τρεις και πλέον παίκτες που παίζουν σε σειρά.

Τίθενται προβλήματα με παίκτες που βλέπουν τις προσδοκίες τους να εκμηδενίζονται κι εύχονται να πουλήσουν τα δικαιώματά τους σε κάποιον από τους υπόλοιπους και το ερώτημα είναι η αξία πώλησης αυτών των δικαιωμάτων (όπως το υπ’ αριθμ. X).

Τα προβλήματα XVI και XVII σχετίζονται με την αξιολόγηση, το μεν για κάποιο παίγνιο ζαριών, το λεγόμενο Cinq et Neuf και το δε σε ένα ορισμένο είδος τυχερών παιγνίων που όπως διαπιστώνεται κατόπιν είναι κάποιο είδος αυτοσχέδιας ρουλέτας. Διαπιστώνουμε όμως, πέρα από τις λύσεις πόσο τον ενδιαφέρουν τα ποικίλα είδη παιγνίων όπου κι όπως μπορεί να τα βρει. «*Στη Γαλλία, τη Δανία, τη Σουηδία, το Βέλγιο, την κάτω Γερμανία και τις γειτονικές περιοχές παίζεται ένα είδος παιγνίου που λέγεται Cinq et Neuf,….Θυμάμαι μια φορά που είδα εδώ κατά τη διάρκεια του εβδομαδιαίου παζαριού, κάποιο γυρολόγο που εξηγούσε το παρακάτω είδος παιχνιδιού στην αγορά και προσήλκυε σε αυτό τους περαστικούς*» (Bernoulli, 1713/2006:274). Στην περίπτωση της παραπάνω ρουλέτας, προκύπτει εκ της λύσης ότι η πιθανότητα του παίκτη είναι μεγαλύτερη από εκείνη του γκρουπιέρη, και κατά συνέπεια αν τα βραβεία δεν αλλάξουν, εκείνος δεν πρόκειται να κερδίσει και πολλά.

Κατόπιν περνάει σε ένα χαρτοπαίγνιο το λεγόμενο Trijaques όπου επιδέχεται μπλοφάρισμα ώστε να αποτραπεί κάποιος αντίπαλος από το περαιτέρω παίξιμο. Όπως και να ’χει, δύσκολα μπορεί να αμφισβητηθεί ότι η προηγούμενη γνώση των προσδοκιών καθενός μπορούν να τον βοηθήσουν να ρυθμίσει και να κυβερνήσει τέτοιο μπλοφάρισμα (Bernoulli, 1713/2006).

Αναφέρει στη συνέχεια άλλη προσωπική μαρτυρία του, από κάποιον που του μοιράστηκε καλό χαρτί και παρόλα αυτά έχασε, οπότε κατόπιν μπαίνει ο ίδιος στην αρχική θέση του. Όπως αναφέρει θα περιγράψει μια μόνο υπόθεση τέτοια «ώστε η κατάσταση να είναι πλήρως ντετερμινιστική». Δεν επιδέχεται αμφιβολία ότι τον ενδιαφέρουν μάλλον το πώς μπορεί να μην είναι. Δεν συνάγεται καθόλου ότι κρατούσε γενικώς για τον εαυτό του τέτοιες ευκολίες. Έπειτα από τη λύση που δίνει διακρίνεται εύκολα πόσο απλοϊκό έβρισκε να υπολογίζει κανείς διάφορα τέτοια ζητήματα, κλείνει γράφοντας ότι επειδή φαίνεται ίσως πως επεκτείνεται υπερβολικά στα άνευ αξίας, αφήνει προς τον φιλοπερίεργο αναγνώστη τηνπεραιτέρω έρευνα και τον υπολογισμό.

Στο πρόβλημα XIX καλεί την υπόθεση οιουδήποτε είδους παιχνιδιού στο οποίο ο Οικονόμος, ή Διανομέας (Oeconomus seu Dispensator), ο με άλλα λόγια διοργανωτής, που παίζει κιόλας, έχει κάποιο πλεονέκτημα. Συνίσταται στο γεγονός ότι ο αριθμός των περιπτώσεων στις οποίες κερδίζει, είναι ελαφρά μεγαλύτερος από εκείνες στις οποίες χάνει και στο ότι ο αριθμός των περιπτώσεων στις οποίες παραμένει στο ρόλο του, είναι ελαφρά μεγαλύτερος από τον αριθμό στον οποίο ο ρόλος (η “μπάνκα”, η “κάσα”) μεταφέρεται σε άλλο παίκτη. Απαντάει σημειώνοντας τη δυσκολία που υπεισέρχεται όταν δοθεί προσοχή και στα μέλλοντα παίγνια, προκειμένου να αξιολογηθούν μαζί το πλεονέκτημα επί του παρόντος με την ελπίδα για πλεονέκτημα στο μέλλον και πόσο εύκολα μπορεί να σφάλει κανείς αν δεν προσέξει. Αναφέρεται με άλλα λόγια στην προεξόφληση του μέλλοντος, οπότε είναι σκόπιμο να έχουμε υπόψη τα όσα εκείνη την εποχή αντιλαμβάνεται ο ίδιος περί της σταθεράς e.

«Θυμάμαι μια φορά διατύπωσα το εξής επιχείρημα: αν το ίδιο πρόσωπο παρέμενε διαρκώς ο οικονόμος, θα είχε πάντα την κατοχή του ιδίου πλεονεκτήματος …. Μόλις προκύπτει κίνδυνος να χάσει την μπάνκα, τότε κατ' επέκταση αυτή η συνθήκη του, θα κρινόταν πως είναι χειρότερη» (Bernoulli, 1713/2006:288).

Σύμφωνα με τη συλλογιστική και τα πορίσματά του η οικονομική αξία του δικαιώματος του οικονόμου εξαρτάται από το αν θέλει να σταματήσει να παίζει και να πουλήσει το προνόμιό του σε άλλο παίκτη, ή αν θέλει να μεταβιβάσει το προνόμιό του και να συνεχίσει να παίζει ως κοινός παίκτης.

1.7.4 Τέταρτη ενότητα

Ο J. Bernoulli στο τέταρτο και πλέον περίφημο μέρος της Ars Conjectandi πραγματεύεται την εφαρμογή των πιθανοτήτων σε ανθρώπινες υποθέσεις. Κατατοπιστικό δείγμα των πρακτικών ζητημάτων στα οποία περνούσε, έπειτα από τα παίγνια των προηγούμενων ενοτήτων, είναι η διδακτορική διατριβή του ανεψιού του Nicholas, η οποία και βασίστηκε πάνω της. Όπως στα προβλήματα των παγνίων, έτσι και στα προβλήματα της πρακτικής ζωής, μπορούν να απαριθμηθούν διάφορες δυνατές περιπτώσεις, μαζί με τα επακόλουθα προσδοκώμενα οφέλη ή ζημιές. Ζητήματα όπως το προσδόκιμο ζωής, η ενοχή κάποιου κατηγορουμένου σε μια δίκη κ.λπ., μπαίνουν σε μαθηματικούς τύπους προκειμένου να υπολογιστεί το συνολικό αποτέλεσμα. Η διαπραγμάτευση τους επιπλέον καθίσταται εύλογα και κάπως πιο ακαδημαϊκή, σε σχέση με εκείνη των παιγνίων στις προηγούμενες ενότητες κι ακόμα περισσότερο σε σχέση με την *Lettre à un amy* …, που έβριθε αριθμητικών κι αλγεβρικών σημείων.

Προκαταρκτικά ως προς τη βεβαιότητα, την πιθανότητα, την αναγκαιότητα και την ενδεχομενικότητα των συμβάντων

Η εισαγωγική αρχή του πρώτου κεφαλαίου της πλέον ρηξικέλευθης ενότητας του έργου, είναι ως συνήθως ιδιαίτερα κατατοπιστική:

> *«Η βεβαιότητα κάποιου πράγματος θεωρείται είτε αντικειμενικά και καθ' αυτό, και δεν σημαίνει τίποτα άλλο παρά την πραγματική ύπαρξή του στο παρόν ή στο μέλλον, είτε υποκειμενικά, εξαρτάται από εμάς και συνίσταται στη μέτρηση της γνώσης μας επί αυτής της ύπαρξης. Οτιδήποτε υπό του ηλίου υπάρχει ή προέρχεται– το παρελθόν, το παρόν, ή το μέλλον – πάντοτε ενέχει καθεαυτό κι αντικειμενικά την ύψιστη έκταση βεβαιότητας»*

(Bernoulli, 1713/2006:315).

Λίγο παρακάτω, ορίζει ότι η πιθανότητα είναι ο βαθμός της βεβαιότητας, και διαφέρει από την τελευταία όπως το μέρος από το όλον (Probabilitas enimest gradus certitudinis, & ad hac differt à toto). Ακολούθως παραθέτει κάποια διαβάθμιση των αριθμητικών πιθανοτήτων, έτσι όπως σχεδόν βρίσκεται στον καθομιλούμενο λόγο ακόμη και σήμερα. Πρόκειται για ένα απόσπασμα που μπορεί να το προσπεράσει κανείς εύκολα ως αυτονόητο, όπως άλλωστε και τις αριθμητικές πιθανότητές του, όμως είναι αξιοθαύμαστο. Το σχηματοποιούμε κάπως και το παραθέτουμε εντός του παρακάτω πλαισίου, καθώς όπως αναφέρουμε στη συνέχεια,

α. συνεχίζει ασφαλώς να ισχύει το γενικό περίγραμμά του, ακόμη κι αν συμπληρωθεί ενδιάμεσα με λίγες προσθήκες.

β. ξεκαθαρίζει σε πολύ μεγάλο βαθμό τις αντιλήψεις του συγγραφέα ως προς το τι σημαίνει κατά τον ίδιο ο όρος πιθανότητα, και την επιστημική χροιά που αυτή διαθέτει.

Πιο πιθανό λέγεται το γεγονός που διαθέτει ένα μεγαλύτερο μέρος της βεβαιότητας μεταξύ των άλλων, αν και στην πραγματικότητα σύμφωνα με την συνηθισμένη χρήση της λέξης, λέγεται σκέτα πιθανό, εκείνο δηλαδή που η πιθανότητα του υπερβαίνει αισθητά το ήμισυ της βεβαιότητας.

Αμφίβολο ή αορίστο λέγεται κάτι του οποίου η πιθανότητα είναι περίπου ίση με το ήμισυ της βεβαιότητας. Έτσι, ένα πράγμα που διαθέτει 1/5 βεβαιότητας είναι πιο πιθανό από εκείνο που διαθέτει 1/10, μολονότι στην πραγματικότητα κανένα τους δεν είναι πιθανό.

Δυνατόν είναι εκείνο το οποίο έχει τουλάχιστον ένα χαμηλό βαθμό βεβαιότητας, ενώ το αδύνατον δεν έχει καθόλου, ή έχει απείρως μικρή βεβαιότητα. Δυνατόν είναι κάτι που έχει 1/20 ή 1/30 της βεβαιότητας.

Ηθικώς βέβαιο είναι εκείνο του οποίου η πιθανότητα είναι σχεδόν ίση με την πλήρη βεβαιότητα, έτσι ώστε η διαφορά είναι ανεπαίσθητη.

Ηθικώς αδύνατον είναι αυτό που έχει μόνο τόση πιθανότητα, όση στερείται το ηθικώς βέβαιο για να καταστεί απολύτως σίγουρο. Αν ηθικώς βέβαιο είναι κάτι που διαθέτει 999/1000 βεβαιότητα, τότε κάτι που διαθέτει 1/1000 βεβαιότητας είναι ηθικώς αδύνατο.

Αναγκαίο είναι εκείνο, που δεν μπορεί να αποτύχει να υπάρξει κατά το παρόν, το μέλλον, ή το παρελθόν, λόγω ακριβώς της αναγκαιότητας, φυσικής, υποθετικής, θεσμικής, ή συμβατικής (αν ένας παίκτης φέρει «έξι» με ένα ζάρι αναγκαία ανακηρύσσεται νικητής εφόσον οι παίκτες έχουν συμφωνήσει ότι η νίκη είναι συνδεμένη με τη ρίψη «έξι»). Ενδεχόμενο είναι εκείνο που (είτε εξαρτάται από την ελεύθερη βούληση κάποιου έλλογου πλάσματος, είτε εξαρτάται από την τύχη) μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει κατά το παρόν, το παρελθόν, ή το μέλλον, ξεκάθαρα εξαιτίας μακρινών μάλλον παρά άμεσων δυνάμεων.

Ο J. Bernoulli αντιλαμβάνεται το «ενδέχεται» πρωτίστως ως «μπορεί», σε όλες τις (αριθμητικές) διαβαθμίσεις και στις εκφάνσεις του γραπτού λόγου του. Η Ars Conjectandi είναι ο συλλογισμός κάποιου βαθυστόχαστου ανθρώπου, ο οποίος συμβαίνει να ασχολείται με κάποια σφαίριση της εποχής του, όπου τίποτα δεν είναι αναγκαίο και τα πάντα είναι προς εξέταση. Το «ενδέχεται» κατά τον κανόνα της αντισφαίρισης σύμφωνα με το προαναφερθέν παράδειγμα του σημαίνει ότι «μπορεί» να νικήσει ο Α ή «μπορεί» να νικήσει ο Β, υπό την προϋπόθεση ότι το παιχνίδι δε θα πηγαινοέρχεται συνεχώς στα ίσα. Δεν απαιτεί παρά το «μπορεί», καθώς κι ένα κύριο ρήμα, το «νικώ». Τα ενδεχόμενα νίκης είναι ταυτόσημα με ότι οι Pascal και Fermat καθορίζουν ως ευνοϊκές περιπτώσεις, όμως προκύπτει διαφορά ως προς τη ρευστότητα του «μπορεί». Ο αποκλεισμός του τρίτου ενδεχόμενου, βγάζει εν προκειμένω προσωρινά από τη μέση το «μπορεί», ως ρήμα απρόσωπο και το επαναφέρει ως απρόσωπο, είτε ως προσωπικό. Καταργεί την δυνατότητα αμφισημίας αφενός, διευκολύνει τους υπολογισμούς αφετέρου. Είναι εντυπωσιακό το πώς έχει συνταιριάξει τη δομή μιας σφαίρισης με τις πιθανότητες αφενός κι αφετέρου πως ανοίγει το δρόμο για το θεμελιώδες «χρυσό θεώρημά του», που βρίσκει εφαρμογή σχεδόν στα πάντα, μα και με το οποίο μπορεί να πει σχεδόν όλα. Τα μαθηματικά του πηγαίνουν πολύ βαθιά στη δομή του καθομιλουμένου λόγου.

Σύμφωνα με τις γραμματικές περιγραφές πολλών γλωσσών, μεταξύ των οποίων και της ελληνικής, το προσωπικό *μπορώ* δηλώνει ικανότητα (αυτό ονομάζεται δεοντική δυνατότητα - που περιλαμβάνει και την έκφραση του επιτρεπτού (Ostrom et al., 1991): Π.χ. μπορείς να εκτελέσεις και δεύτερο σέρβις εφόσον αστόχησες στο πρώτο, μπορώ να στείλω την μπάλα δεξιά ή αριστερά σου. Το απρόσωπο *μπορεί* δηλώνει πάντα επιστημική δυνατότητα (κάποια πιθανολογική έκφραση του τι είναι δυνατό να συμβεί, να συμβαίνει, ή να έχει συμβεί: *μπορεί να νικήσω, μπορεί και να μην νικήσω*). Αυτήν την τελευταία καταφέρνει να εκφράσει με μαθηματικό τρόπο ο J. Bernoulli. Καταφέρνει να κάνει με αριθμούς τις διακρίσεις από το τρίτο προς το πρώτο πρόσωπο του ρήματος κι αντίστροφα, δηλαδή να προσωποποιήσει και να αποπροσωποποιήσει. Λόγου χάρη και στη σημερινή ελληνική γλώσσα η αμφισημία μεταξύ δεοντικής κι επιστημικής ερμηνείας περιορίζεται μόνο στις περιπτώσεις που το κύριο ρήμα είναι σε γ΄ ενικό πρόσωπο και επομένως δεν είναι ξεκάθαρο αν συμφωνεί με ένα προσωπικό *μπορεί* (γ΄ ενικού προσώπου) ή αν τυχαίνει να ακολουθεί το ούτως ή άλλως τριτοπρόσωπο *μπορεί. Για παράδειγμα: Μπορεί να καπνίσει* (είτε «είναι ικανός/του επιτρέπεται να καπνίσει», είτε «είναι πιθανό να καπνίσει»). Δεν παρουσιάζεται όμως αμφισημία ούτε στο «μπορεί να καπνίσω», ούτε στο «μ*πορώ να καπνίσω*.

Όπως μπορούμε να συνάγουμε από πάρα πολλά αποσπάσματα των γραπτών του συγγραφέα, κατ’ αυτόν η έννοια της πιθανότητας έχει να κάνει με τη γνώση των πραγμάτων, με το μπορώ να γνωρίζω. Ο J. Bernoulli έκανε την ποσοτικοποίηση της, όμως πρωτίστως της δίνει υποκειμενική διάσταση. Πρόκειται για κάτι που ήταν ασύλληπτο ακόμα κι από τη διάνοια του G. Leibniz εφόσον κιόλας δεν του γνωστοποίησε τον τρόπο που αποδείκνυε το χρυσό θεώρημά του (Sylla, 1998). Μια σύζευξη αλλά και μια διάζευξη μεταξύ των αντικειμενικών και των υποκειμενικών πιθανοτήτων, που συνεχίζει ακόμη να γίνεται και που σχετίζεται επίσης με τη μεταγενέστερη θεωρία παιγνίων και την οικονομική θεωρία εν γένει, ξεκινά από το J. Bernoulli κι αποτελεί μέρος της μεγάλης συνεισφοράς του.

Η διάζευξή τους είναι για μια πολύ βολική διάκριση, όπως άλλωστε υποδεικνύει ορθώς η Daston (1995) στην προσπάθειά της να διακρίνει πότε και υπό ποιες συνθήκες προέκυψε η έννοια της πιθανότητας. Παρότι δεν είναι η μόνη διάκριση, όπως μάλλον υποστήριξε ο Ian Hacking, είναι όμως ίσως η πλέον κύρια διάκριση των πιθανοτήτων που υποδιαιρέθηκαν κατόπιν και σε περαιτέρω τύπους. Ο δε J. Bernoulli ήταν στην ουσία εκείνος που την ανέδειξε εξαρχής. Έτσι χωρίς να υπεισέλθουμε βαθειά στις περαιτέρω διακρίσεις έχουμε τις εξής:

- Οι αντικειμενικές (objective) πιθανότητες χρησιμοποιούνται για την περιγραφή ιδιοτήτων από τυχαίους μηχανισμούς, ή πειράματα, όπως παίγνια τύχης και για την περιγραφή τυχαίων συμβάντων σε πληθυσμούς. Π.χ. η περίπτωση γέννησης θηλυκού παιδιού, ή η περίπτωση θανάτου σε συγκεκριμένη ηλικία. Εκλαμβάνονται από τις σχετικές συχνότητες, ή τις συμμετρικές θεωρήσεις τους. Αυτές οι πιθανότητες ονομάζονται αλλιώς και στατιστικές (statistical), ή και αλεατορικές (aleatory) εκ του συγκεκριμένου τύπου παιχνιδιού, της alea.
- Οι υποκειμενικές, (subjective) πιθανότητες χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του βαθμού της πεποίθησης – πίστης, που δεν βασίζεται σε στοιχεία κατ’ ανάγκη στατιστικά. Για παράδειγμα, η περίπτωση νίκης της ομάδας κάποιο σε ένα μελλοντικό αθλητικό συμβάν. Τέτοιες πιθανότητες σχετίζονται με την ατελή μας γνώση κι ως εκ τούτης εμμέσως μόνον με τα πράγματα, ή τα συμβάντα ως προς τα οποία αναφέρονται ως δηλώσεις κι ονομάζονται αλλιώς προσωπικές (personal), ή και επιστημικές (epistemic) (Hald, 1990).

Η θεμελίωση της θεωρίας παιγνίων από τον J. Von Neumann, βασίζεται ιδιαίτερα στις υποκειμενικές πιθανότητες, έτσι όμως όπως τις προσλαμβάνει και τις προσαρμόζει ο τελευταίος και καθώς δομεί πάνω στην ατομική συνάρτηση ωφέλειας/χρησιμότητας που έχει επίσης προηγουμένως αναπτύξει ο ανεψιός του, ο D. Bernoulli. Με την πρωταρχική διάκριση αντικειμενικών και υποκειμενικών πιθανοτήτων, ασχολήθηκε εντωμεταξύ για να τη διατυπώσει ξεκάθαρα κι ο A. Cournot (1843).

Το κεφάλαιο κλείνει με το πώς η λεγόμενη καλοτυχία και η κακοτυχία, συνδέονται στον καθημερινό λόγο με ενδεχόμενα που απλώς υποτίθονταν εκ των προτέρων ότι μπορούσαν να επέλθουν με μικρότερη αριθμητική πιθανότητα (ακόμα κι από ανθρώπους που δεν γνώριζαν τι είναι αυτή, κατά την εποχή εκείνη καθώς και παλαιότερα).

Ars Conjectandi & σχέσεις με επιστήμη, αποδείξεις, αξιώματα

Ο συγγραφέας, στο δεύτερο κεφάλαιο, ξεκινάει γι άλλη μια φορά εντυπωσιακά καθώς γράφει στη δεύτερη κιόλας παράγραφο ότι «*το να κάνουμε εικασίες για κάτι, είναι το ίδιο με το* *με το να υπολογίζουμε την πιθανότητά του. Γι αυτό, η Ars Conjectandi, ή η στοχαστική ορίζεται ως η τέχνη της μέτρησης της πιθανότητας των πραγμάτων, ακριβώς αν μπορούμε, το να είναι δυνατόν να επιλέξουμε το καλύτερο, το πιο ικανοποιητικό, το πιο ήπιο και πιο εύλογο για τις κρίσεις και τις ενέργειές μας»* (Bernoulli, 1713/2006: 317-318).

Το Αγγλικό Λεξικό της Οξφόρδης περιλαμβάνει με μια αναφορά σε αυτό τον ελληνικό όρο «στοχαστική» από πηγή του 1662 (Bernoulli/Sheynin, 1713/2005). Καταρχήν λοιπόν, στο πλαίσιο των αρχαίων αγωνισμάτων, στοχαστικές ονομάζονταν οι ρίψεις προς συγκεκριμένο στόχο [όπως το Ολυμπιακό αγώνισμα του έφιππου στοχαστικού ακοντισμού ή τα σημερινά της σκοποβολής και της τοξοβολίας] σε αντίθεση με τις εκηβόλες ρίψεις [όπως η δισκοβολία, σφαιροβολία, κ.λπ.] Ο όρος όμως στοχαστικές, θα σημαίνει πλέον βασισμένες στο λογισμό πιθανοτήτων και καθιερώθηκε από τον Ladislaus Bortkiewicz , ο οποίος μάλιστα έθεσε κι ένα νόμο που τον ονόμασε ως νόμο των μικρών αριθμών (Bernoulli, 1713/2005). Με τον όρο στοχαστικές, σήμαινε την διατύπωση εικασιών υπό τη σημασία που διέθετε ο όρος στο Ars Conjectandi του J. Bernoulli. Στη σύγχρονη ορολογία συνδέεται αρκετά στενά με την κατοπινή επίσης σπουδαία εργασία του A. A. Markov στην οποία θα προχωρήσουμε αργότερα, οπότε θα αναφερθούμε και στις πέραν της περίσκεψης σημασία του συγκεκριμένου όρου. Κατόπιν παραθέτει ένα σύνολο 9 προτάσεων που απορρέουν από τον κοινό νου, μπορούν δε να χαρακτηριστούν δεοντολογικές και συνοψίζονται στον παρακάτω κατάλογο ως εξής:

1. Δεν πρέπει κανείς να χρησιμοποιεί εικασίες σε περιπτώσεις όπου είναι εφικτή η πλήρης βεβαιότητα.

2. Δεν πρέπει κανείς να βαρύνει το ένα ή το άλλο επιχείρημα. Πρέπει να ψάχνει για όλα τα δυνατά επιχειρήματα, ή στοιχεία που φαίνεται πως κατά κάποιο τρόπο αφορούν την όποια περίπτωση.

3. Πρέπει να δίνουμε προσοχή όχι μόνο στα επιχειρήματα που είναι χρήσιμα για την απόδειξη κάποιου πράγματος, μα επίσης και σε όλα εκείνα που μπορούν να προσκομιστούν για το αντίθετο, ώστε να τα συνυπολογίζει αμφότερα για να κρίνει ποια υπερισχύουν.

4. Για μια κρίση ως προς μακρινά και παγκόσμια συμβάντα, τα γενικά επιχειρήματα είναι επαρκή, όμως όταν πρόκειται για εικασίες σχετικά με άτομα πρέπει να συνυπολογίζονται και τα επιχειρήματα που είναι στενότερα κι ατομικά.

5. Σε περίπτωση αβεβαιότητας, η δράση πρέπει να αναστέλλεται ωσότου να έχουμε περισσότερη πληροφορία, όμως αν οι περιστάσεις δεν επιτρέπουν αργοπορία πρέπει να επιλέγεται η δράση που είναι η πιο κατάλληλη, πιο ασφαλής, πιο σοφή, είτε η πλέον πιθανή, ακόμη κι αν ουδεμία δεν είναι τέτοια κατά έννοια θετική.

6. Αυτό που μπορεί να είναι χρήσιμο σε κάποια περίπτωση και επιβλαβές σε καμία περίπτωση, είναι προτιμότερο από εκείνο που είναι χρήσιμο και επιβλαβές σε καμία περίπτωση.

7. Η αξία των ανθρώπινων δράσεων δεν πρέπει να κρίνεται από τα αποτελέσματά τους, εφόσον μερικές φορές ακόμη και οι πιο ανόητες δράσεις απολαμβάνουν τη μέγιστη επιτυχία, ενώ οι πλέον συνετές αποτυγχάνουν.

8. Στις κρίσεις μας πρέπει να είμαστε επιφυλακτικοί και δεν πρέπει να θεωρούμε ως σίγουρο κάτι που είναι μόνον πιο πιθανόν από κάτι άλλο, ούτε να υποβάλουμε αυτή τη γνώμη σε άλλους.

9. Δεδομένου ότι η απόλυτη σιγουριά παρατηρείται μόνον σπανίως, η αναγκαιότητα και η συνήθεια θέλουν αυτό που είναι ηθικώς σίγουρο, να θεωρείται ως απολύτως σίγουρο.

Ο J. Bernoulli, που διαπρέπει ακόμα και σε επιστημονικά πεδία που σήμερα θεωρούνται πολύ μακρινά, επεξηγεί τις παραπάνω 9 προτάσεις που δεν εκφέρονται ως άνωθεν εντολές, αλλά μάλλον ως διαπιστώσεις κάποιου που κατορθώνει να συνταιριάξει πολύ καλώς τους υποκειμενικούς με τους αντικειμενικούς παράγοντες. Αναφέρουμε ενδεικτικά, ότι είναι ο ίδιος ο επιστήμονας που αντελήφθη και υπέδειξε πώς να συγκρίνουμε κάποιους παίκτες της αντισφαίρισης, με αυτόν που συστήνει να μην κρίνουμε εκ του αποτελέσματος την αξία των ανθρώπινων δράσεων.

<u>Σχετικά με τα διάφορα είδη αποδείξεων & πως αξιολογούνται τα βάρη τους κατά τον υπολογισμό των πιθανοτήτων</u>

Ο συγγραφέας ξεκινάει το κεφάλαιο αναφέροντας πως θεωρεί διάφορους λόγους εκ των οποίων σχηματίζονται οι γνώμες και οι εικασίες μας, ώστε μπορεί να σημειώσει μια τρισχιδή διάκριση μεταξύ τους.

- κάποιοι από αυτούς υπάρχουν αναγκαία και ενδεχομένως παρέχουν στοιχεία,
- κάποιοι υπάρχουν ενδεχομένως και αναγκαία παρέχουν στοιχεία, και τέλος
- κάποιοι ενδεχομένως υπάρχουν και ενδεχομένως παρέχουν στοιχεία

Όπως σημειώνεται κι αλλού ο J. Bernoulli γνωρίζει καλά την αρχαία ελληνική γραμματεία και στο συγκεκριμένο κεφάλαιο ασχολείται κάπως γενικόλογα με τους διάφορους λόγους και τις διακρίσεις τους, που έχουν μάλλον Αριστοτελική προέλευση. Δίχως να λησμονούμε πως ο Αριστοτέλης (ούτε ο εκ των μαθητών του Πλάτωνα Καρνεάδης κι ουδείς άλλος αρχαίος) δεν έκανε τη μαθηματικοποίηση που έκανε πλέον εκείνος, μπορούμε να ανατρέξουμε στα Ηθικά Νικομάχεια του Αριστοτέλη (1975) και να κάνουμε την ταύτιση με τους «από των αρχών λόγους» (*Μη λανθανέτω δ’ ημάς ότι διαφέρουσιν οι από των αρχών λόγοι και οι επί τας αρχάς).*

Κατόπιν ο J. Bernoulli δίνει δυο παραδείγματα ως προς τα παραπάνω που συνδέονται με την ενδεχομενικότητα, είτε την αναγκαιότητα.. Στο πρώτο παράδειγμα αναφέρει ότι δεν του γράφει ο αδελφός τους και εικάζει τρεις λόγους γι αυτό. Κατά πρώτον, μια εξήγηση είναι ότι ο αδελφός του μπορεί να είναι τεμπέλης. Αν το δεχθεί ως εξ υποθέσεως αναγκαίο ότι ο αδελφός του είναι τεμπέλης, αυτό δίνει εξήγηση μόνον ενδεχομένως, καθότι ακόμη και οι τεμπέληδες ενίοτε γράφουν. Κατά δεύτερον, ότι ο λόγος είναι πως ο αδελφός μπορεί να μην του γράφει καθότι είναι νεκρός υφίσταται ενδεχομένως, εφόσον είναι αβέβαιο αν είναι ή δεν είναι νεκρός. Μα αν ήταν νεκρός κατ' ανάγκην δεν θα μπορούσε να του γράψει. Κατά τρίτον, ο αδελφός μπορεί να έχει, μπορεί και να μην έχει κάμποση σπουδαία δουλειά κι εφόσον ακόμα έχει σπουδαία δουλειά, θα μπορούσε, ή δεν θα μπορούσε να τον εμποδίσει να του γράψει. Στο επόμενο δεύτερο παράδειγμα που αναφέρουμε εν συντομία, επιχειρεί να μαντέψει τις προσδοκίες νίκης κάποιου παίκτη που ρίχνει δυο ζάρια θέλοντας να φέρει άθροισμα επτά.

Ο J. Bernoulli εισάγει επίσης και μια άλλη διάκριση στους «απ' αρχών λόγους», μεταξύ καθαρών και μικτών.

α. Οι καθαροί λόγοι δηλώνουν το καθένα τους κάτι με συγκεκριμένη πιθανότητα, δίχως να προσδίδει θετική πιθανότητα στο αντίθετό του

β. Οι μικτοί λόγοι δηλώνουν κάτι με συγκεκριμένη πιθανότητα προσδίδουν στο αντίθετό του πιθανότητα συμπληρωματική ως προς τη μονάδα.

Αργότερα επισημαίνει για τους τελευταίους πως δεν μπορεί να αποκρύψει εδώ ότι προβλέπει πολλά εμπόδια στις ειδικές εφαρμογές αυτών των κανόνων που μπορεί συχνά να οδηγήσουν σε ντροπιαστικά σφάλματα εάν δεν δοθεί προσοχή κατά τον διαχωρισμό τους. Ως εξήγηση προτίθεται να δώσει δυο παραδείγματα.

Στο πρώτο εξετάζει μια περίπτωση φόνου, συνδυάζοντας κάποια συγκεκριμένα επιχειρήματα ως προς το αν είναι ένοχος ο κατηγορούμενος Γράκχος, σύμφωνα με τις ενδείξεις. Προϋποθέτει ότι όλες οι δυνατές περιπτώσεις είναι εξίσου δυνατές και την υπόδειξη λύσης, σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας, που οδήγησε τον Laplace στην αρχή του ανεπαρκούς λόγου (Hald, 1990). Είναι δέον να προσδοθούν ίσες πιθανότητες σε καθεμία από τις διάφορες εναλλακτικές, όταν δεν υφίσταται κάποιος γνωστός λόγος για να προτιμήσουμε τη μια ή την άλλη. Στο δεύτερο παράδειγμα εξετάζει την περίπτωση ενός εγγράφου, που τίθεται προς αμφισβήτηση το αν έχει, ή όχι, δολίως προχρονολογηθεί. Ακόμα κι αν κάποιος αποδεχθεί την διάκριση των δικαστικών τεκμηρίων σύμφωνα με τις διακρίσεις των καθαρών ή μικτών λόγων, και των υπαρχουσών, ή μη υπαρχουσών αποδείξεων, οι απαιτούμενοι αριθμοί για να γίνουν οι υπολογισμοί εντός αυτού του μοντέλου είναι εντελώς απατηλοί (Daston, 1995). Μεταχειρίζεται την αξιολόγηση των στοιχείων σαν κάποιο περιορισμένο σύνολο ισοπίθανων αποτελεσμάτων, αν και είναι ο ίδιος ο J. Bernoulli εκείνος που όπως θα διαπιστώσουμε κατόπιν ρίχνει φως στο ότι για τις περισσότερες περιπτώσεις, οι αναλογίες με τα κέρματα και τα ζάρια που οδηγούν σε λίγα ισοπίθανα αποτελέσματα είναι απλοϊκή και απορριπτέα. Είναι αυτός ο ίδιος που από τον a priori κι εκ της συμμετρίας προσδιορισμό τους, πέρασε στον a posteriori εκ της παρατήρησης της σχετικής συχνότητας, αλλά κι εκ της αρχής της αδιαφορίας προς την οποία δείχνει και πάλι (Hald, 1998). Οπότε δεν θα έβλαπτε μάλλον να λάβουμε καλύτερα υπόψη πως συστήνονταν τα δικαστήρια της εποχής εκείνης και τις εν γένει συνθήκες τους. Ο J. Bernoulli αφήνει επίσης περιθώριο κάποιος να αισθάνεται βεβαιότητα που να μην ισούται αθροιστικά με τη μονάδα, κάτι που μπορεί να υποσκάπτει τα θεμέλια της θεωρίας αποφάσεων και της θεωρίας παιγνίων. Γράφει δηλαδή ότι μπορεί να συμβεί κάποιο πράγμα να έχει βεβαιότητα 2/3 ενώ το αντίθετό του να έχει 3/4. Εφόσον είναι θεμελιώδης αρχή της σύγχρονης μαθηματικής πιθανότητας ότι οι πιθανότητες σε μια δεδομένη κατάσταση εφόσον ληφθούν μαζί αθροίζονται στο 1, αυτό το αποτέλεσμα δείχνει παράξενο στους σύγχρονους αναγνώστες (Bernoulli, 1713/2006). Δεδομένου ότι σήμερα ορίζουμε παίγνια μηδενικού (σταθερού) αθροίσματος, τα παραπάνω μοιάζουν κατά κάποιον τρόπο, ως ο J. Bernoulli να διέκρινε παίγνια σταθερού και μη σταθερού αθροίσματος .

Σχετικά με τους δύο τρόπους διερεύνησης του αριθμού των περιπτώσεων και την προβληματική της διεξαγωγής των δοκιμών

Ο J. Bernoulli επισημαίνει ότι για να εικάσει κανείς ορθώς ως προς οτιδήποτε δεν απαιτείται τίποτα άλλο παρά ακριβής υπολογισμός του αριθμού των περιπτώσεων και εύρεση του πόσο πιο εύκολα μπορεί να προκύψει οτιδήποτε αντί άλλου τινός. Εδώ όμως προφανώς προκύπτει μια δυσκολία, καθότι αυτό επέρχεται εξαιρετικά σπάνια, αν κιόλας συμβαίνει πουθενά, εκτός από τα τυχερά παίγνια των οποίων οι πρώτοι επινοητές, θέλοντας να τα κάνουν δίκαια, πάσχισαν να τα θέσουν κατά τέτοιο τρόπο ώστε ο αριθμός των περιπτώσεων νίκης και ήττας να είναι προσδιορισμένος με σιγουριά και γνώση και οι περιπτώσεις καθαυτές να επέρχονται με την ίδια ευκολία (Bernoulli, 1713/2006).

Αναρωτιέται έτσι ποιος μπορεί να προσδιορίσει τις περιπτώσεις στις οποίες ο ένας ή ο άλλος μετέχων ενδέχεται να θριαμβεύσει, ή να ταπεινωθεί, σε παίγνια εξαρτώμενα πλήρως, ή εν μέρει, από την οξύνοια, ή την ευκινησία του σώματος. Αφού υποδείξει ότι ένας άλλος τρόπος είναι ανοιχτός σε μας για να βρούμε ότι ψάχνουμε, ήτοι να λογαριάζουμε a posteriori τα αποτελέσματα παρατηρήσεων παρομοίων συμβάντων, σε μεγάλο αριθμό περιπτώσεων, τότε όπως προαναφέραμε, πραγματοποιεί το κρίσιμο βήμα προς τα προβλήματα των εμπειρικών επιστημών.

Δεν επαναλαμβάνουμε τα σχετικά με το πόθεν γίνεται αυτό το κρίσιμο βήμα.

Τα παραπάνω έχουν σημασία ως προς τις αντιλήψεις του J. Bernoulli και τις ενοράσεις του που οδήγησαν προς το χρυσό θεώρημά του και των αριθμητικών πιθανοτήτων, έστω κι εν μέρει. Δεν συνηγορούν βεβαίως σήμερα υπέρ των ντετερμινισμού που υποστηρίζει με τον τρόπο του λίγο παρακάτω, έστω κι ελλείψει διαθέσιμων στοιχείων. Δεν παραβλέπεται βέβαια ότι στην έκταση που το μοντέλο ισοπίθανων ενδεχομένων (equiprobability model) είναι αποδεκτό ως μοντέλο για τα τυχερά παίγνια το συμπέρασμα του J. Bernoulli είναι ασφαλώς αληθές και ασφαλώς διακρίνει πολύ καλά ότι οι εξηγήσεις του παύουν να είναι ξεκάθαρες τόσο όσο στην συντριπτική πλειονότητα του έργου του.

Κατόπιν ο J. Bernoulli αποδίδει τα εύσημα στο συγγραφέα της «Τέχνης του Σκέπτεσθαι» (Ars Cogitandi) τον Antoine Arnauld και τη λογική της Port Royal. Όπως προαναφέρθηκε δεν κρίνεται και ως η πλέον επιτυχής επιλογή υπό τα σημερινά δεδομένα. Συσχετίζει κατόπιν την κατεύθυνση των εικασιών με το χειρισμό των παιγνίων. Ήτοι, αν για παράδειγμα αντικαταστήσουμε μια κληρωτίδα με αέρα, ή με το ανθρώπινο σώμα, όπου εμπεριέχονται αιτίες αλλαγών ή ασθενειών ακριβώς όπως στην κληρωτίδα περιέχονται σφαιρίδια, θα δυνάμεθα να προσδιορίσουμε με την παρατήρηση κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο, πόσο πιο εύκολα μπορεί σε αυτά τα πράγματα να επέλθει το ένα, ή το άλλο συμβάν.

Γράφει κατόπιν ότι και οι πιο αδαείς μπορεί να αντιληφθούν ότι όσες περισσότερες παρατηρήσεις έχουν για παρόμοια συμβάντα τόσο καλύτερα, όμως παραμένει προς διερεύνηση κάτι που ενδεχομένως κανείς μέχρι τότε δεν είχε διατρέξει ακόμη και στις σκέψεις του. Παραμένει να αναρωτηθούμε σχετικά με τον αριθμό των παρατηρήσεων που αυξανόμενος συνεχώς τελικά υπερβαίνει ένα δεδομένο βαθμό βεβαιότητας, ή αντιθέτως, αν το πρόβλημα παρουσιάζει ασύμπτωτη. Δηλαδή για το βαθμό βεβαιότητας που δε μπορεί ποτέ να ξεπεραστεί, ανεξαρτήτως του πόσο οι παρατηρήσεις πολλαπλασιάζονται. Αυτός ο αριθμός πρέπει να οριστεί εντός κάποιου εύρους, ήτοι να περιέχεται εντός δυο ορίων τα οποία μπορούν να γίνουν τόσο στενά, όσο θα ήθελε κανείς. Ανάμεσα στο 301/200 και στο 299/200, ή ανάμεσα στο 3001/2000 και στο 2999/2000, στα παραδείγματα που έχει προηγουμένως αναφέρει.

Εν προκειμένω διαφοροποιεί τον τρόπο σκέψης κατά τον οποίο η πιθανότητα ορίζεται με εμπειρικό τρόπο και έτσι το συνδυάζει με νέα θεωρία. Ο J. Bernoulli περιέγραψε πως προβλέποντας τα αποτελέσματα της παρατήρησης, αυτά θα προσεγγίζουν την θεωρητική πιθανότητα καθώς γίνονται περισσότερες δοκιμές, ενώ με βάση τον εμπειρικό τρόπο, η πιθανότητα ορίζεται αντίστροφα. Ωστόσο, προτού εκθέσει τη λύση του θέλει να υπερασπιστεί τον εαυτό του με λίγα λόγια για τις αντιρρήσεις σ’ αυτές τις προτάσεις που διατυπώθηκαν από ορισμένους μελετητές:

1. του αμφισβητούν ότι η αναλογία των λαχνών είναι ένα πράγμα, ενώ η αναλογία των ασθενειών ή των μεταβολών στον αέρα είναι κάτι άλλο. Ο πρώτος αριθμός είναι καθορισμένος αλλά ο δεύτερος αριθμός είναι ακαθόριστος και θολός. Απαντά λέγοντας ότι και οι δύο σε σύγκριση με τη γνώση μας είναι εξίσου ακαθόριστοι. Ωστόσο, δε μπορούμε να φανταστούμε κάποιο πράγμα που δημιουργήθηκε και ταυτόχρονα δε δημιουργήθηκε από το Συγγραφέα της φύσης: καθετί που έχει φτιάξει ο Θεός, καθορίζεται μ' αυτό τον τρόπο κι από το Θεό.

2. του αμφισβητούν ότι ο αριθμός των λαχνών είναι πεπερασμένος, ενώ είναι άπειρος αυτός των ασθενειών κ.λπ.. Απαντά πως είναι μάλλον τεράστιος παρά άπειρος, αλλά κι αν υποθέσουμε ότι είναι πράγματι άπειρος, παραπέμπει στο ότι η περιφέρεια του κύκλου έχει καθορισμένη αναλογία με τη διάμετρό του. Τίποτα δεν εμποδίζει το λόγο μεταξύ δυο απείρων αριθμών, να εκφράζεται με πεπερασμένους αριθμούς και να καθορίζεται από καθορισμένο αριθμό πειραμάτων - δοκιμών.

3. του προσθέτουν ότι ο αριθμός των ασθενειών δεν παρεμένει σταθερός αλλά νέες ασθένειες προκύπτουν κάθε μέρα. Απαντά πως δεν αρνούμαστε ότι οι ασθένειες μπορεί να πολλαπλασιάζονται καθώς περνά ο χρόνος, όμως κι εμείς μπορούμε να κάνουμε νέα πειράματα – δοκιμές.

Στο κλείσιμο αυτού του κεφαλαίου επισημαίνουμε πως η διαπίστωσή του ότι τα τυχερά παίγνια επινοούνται από κάποιους κι άρα δεν προκύπτουν κατά τύχη, μπορεί να θεωρηθεί καταπληκτική. Μπορεί να μας γεννήσει καταρχήν πάμπολλα εύλογα ερωτήματα, ως προς την επέκταση της συλλογιστικής του J. Bernoulli. Γιατί να επινοεί κανείς κάποιο παίγνιο τύχης, ή άλλο ένα παίγνιο τύχης, ή να μην επινοεί κάποιο παιχνίδι ικανότητας, ή άλλο ένα παιχνίδι ικανότητας, ή μιας άλλης ικανότητας; Είναι εύλογο να έχει αναρωτηθεί ο ίδιος γιατί κανείς επινοεί κάποιο παιχνίδι όπως τη Jeu de Paume, που έπαιζε και για το οποίο έγραφε. Ακόμη κι αν δεν είναι σημαντικές οι διαφορές που έχουν μεταξύ τους τα τυχερά παίγνια, λόγω του ότι ανάγονται πλέον σε πιθανότητες, δεν μπορούμε και για τα υπόλοιπα να ισχυριστούμε το ίδιο. Ήθελαν οι πρώτοι επινοητές των παιχνιδιών «ικανότητας» να τα κάνουν δίκαια; Αναφερόμαστε ιδίως στις σφαιρίσεις, μεταξύ των οποίων κι εκείνη που έπαιζε ο ίδιος και την θεώρησε κατά τρόπο μοναδικό, ενώ δεν πρόκειται βεβαίως γι αυτή και μόνον. Σήμερα επαφίεται σε μας συγκριτικά πολύ περισσότερο, αν στη διαλογή των παιγνίων που παίζουμε, ή και των στρατηγικών εντός τους, θα αναδείξουμε κάποιους τυχαίους παράγοντες, ή άλλους παράγοντες ικανοτήτων που διαθέτουν συγκεκριμένες πληθυσμιακές ομάδες και μεμονωμένα άτομα. Ο J. Bernoulli έψαχνε για αριθμητικά δεδομένα σχετικά με γεννήσεις και τους θανάτους και γενικώς έπασχε από έλλειψη στοιχείων, τα οποία σήμερα βρίθουν στις σφαιρίσεις, ακόμη κι αλλού. Λίγο πριν πεθάνει, γράφει σε αυτό το κεφάλαιο για το πώς κάποιος συμπεραίνει πόσο του απομένει να ζήσει. Γράφει για το Θεό, στον οποίο δεν αναφέρεται και συχνά, επί του παρόντος έργου του τουλάχιστον, δείχνοντας πόσο βαθειά πιστεύει. Συγχρόνως όμως θέτει κατά κάποιο τρόπο και θεμέλια για την αμφισβήτησή του, ως εκείνα που θα μεταχειριστεί ο Darwin ενάμιση αιώνα μετά.

Λύση του προαναφερθέντος προβλήματος

Η κύρια διερώτηση που θέτει κι απαντά ο J. Bernoulli αναφέρεται στο τι μας λέει η θεωρία πιθανοτήτων ως προς το μαθηματικό αντικείμενο της σχετικής συχνότητας. Την προσεγγίζει στον πειραματικό προσδιορισμό του προαναφερθέντος πειράματος, με τη κληρωτίδα κ.λπ., παραμερίζει δε την ακρίβεια και την αυστηρότητα των αριθμητικών υπολογισμών και προχωρά με τη χρήση ορίων. (Hald, 1990).

Υποθέτει πως έχουμε μια γενική κατάσταση κατά την οποία το αποτέλεσμα μπορεί να συμβαίνει σε γόνιμες περιπτώσεις r και να αποτυγχάνει σε στείρες περιπτώσεις s, κι αυτή εκπροσωπείται από τη διωνυμική κατανομή (r + s) = t. Ο J. Bernoulli κάνει την υπόθεση ότι υπάρχουν nt δοκιμές, εφόσον μπορούν να γίνουν επαρκώς πολλά πειράματα – δοκιμές, ώστε η αναλογία r / s, να μην είναι ούτε μεγαλύτερη από (r + 1) / t ούτε μικρότερη από (r - 1) / t. Κατόπιν θέτει την έκφραση $(r + s)^n / t$ ως επέκταση της σειράς. Στη συνέχεια δείχνει ότι ο μεγαλύτερος όρος περιλαμβάνεται μεταξύ δύο ορίων που μπορούμε να υπολογίσουμε και μπορούν να γίνουν όλο και μικρότερα, εάν έχουμε επαρκώς μεγάλη λήψη του αριθμού n.

Όπως έχει διατυπωθεί το θεώρημα, μας δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε τιμές των r, s καθώς και c, και στη συνέχεια να υπολογίσουμε πόσες παρατηρήσεις ή πειράματα θα απαιτηθούν (ήτοι σε ποια δύναμη της διωνυμικής) για να καταστεί c φορές πιο πιθανό η παρατηρούμενη αναλογία των αποτελεσμάτων να πέσουν μέσα στα όρια, παρά έξω. Για παράδειγμα, προκειμένου να κάνει τα όρια στενότερα, ο J. Bernoulli προτείνει τη λήψη λόγου 30/50, ή 300/500, αντί για 3/5. Αν το c λαμβάνεται ως 1.000 και εάν ο λόγος λαμβάνεται ως 30/50, τότε υπολογίζει πως θα χρειαστούν 25.550 πειράματα για να εξασφαλιστεί ότι είναι 1.000 φορές πιο πιθανό ότι η παρατηρούμενη αναλογία των αποτελεσμάτων θα πέσουν εντός του διαστήματος 31/50 και 29 / 50, απ' ότι εκτός. Αν το c οριστεί σε 10.000 υπολογίζει πως θα απαιτηθούν 31.258 πειράματα, αν το c οριστεί σε 100.000, τότε θα απαιτούνταν 36.966 πειράματα, μα και ούτω καθεξής μέχρι το άπειρο, προσθέτοντας συνεχώς 5.708 πειράματα, όταν πολλαπλασιάζεται με 10 η επιθυμητή πιθανότητα.

Το κεφάλαιο και το έργο καταλήγει με μια πολύ ιδιαίτερη δήλωση πίστης προς τη νομοτέλεια, ή «*ίσως λέω μοίρα*» όπως γράφει σχετικά με τις πεποιθήσεις του ως προς το αν οι παρατηρήσεις πάντων των ενδεχομένων μπορούσαν να συνεχιστούν διηνεκώς, ώστε η όποια πιθανότητα να καθίστατο πλήρης βεβαιότητα. Και το έργο του κλείνει: *«Δεν γνωρίζω αν ο ίδιος ο Πλάτων είχε αυτό στο νου του, στη θεωρία του για την αποκατάσταση των πάντων, σύμφωνα με την οποία το καθετί επανέρχεται έπειτα από έναν αμέτρητο αριθμό αιώνων στην πρότερή του κατάσταση. (*Bernoulli, 1713/2006:339).

Στην μεγαλειώδη σύλληψη του J. Bernoulli, μπορούμε να αναγνωρίσουμε μια πολύ ιδιότυπη σχέση με τον Πλάτωνα και κατά συνέπεια αυτή η αναφορά του είναι πολύ αξιοσημείωτη. Ο J. Bernoulli αποδεικνύει έτσι ότι η σχετική συχνότητα συγκλίνει προς συγκεκριμένη πιθανότητα p, ή κατά την ορολογία του, πως θα είναι ηθικώς βέβαιος ότι δεν μπορεί να αποκλίνει πολύ από αυτή την τιμή, αν ο αριθμός των επαναλήψεων είναι επαρκώς μεγάλος. Ο Ιταλός μαθηματικός και διάσημος τζογαδόρος Gerolamo Cardano είχε δηλώσει δίχως απόδειξη ότι οι προσεγγίσεις των εμπειρικών παρατηρήσεων τείνουν να βελτιώνονται με την αύξηση του αριθμού των παρατηρήσεων (Mlodinow, 2008). Αυτή η «απόδειξη» είναι μαθηματική, δεν αναπαριστά κάποιο φυσικό νόμο. Ο νόμος των μεγάλων αριθμών χρησιμοποιείται συχνότατα σε φυσικές και ανθρωπιστικές επιστήμες, όπου τον απηύθυνε καταρχήν ο συγγραφέας του. Έχει δε ιδιαίτερο ενδιαφέρον πως ο ίδιος, αλλά και ο μεγαλοφυής L. Euler μετά από αυτόν, ενδιαφέρθηκαν τόσο πολύ για τη θνητότητα και τη γονιμότητα των έμβιων και δη των ανθρώπων, εστίασαν καταρχήν στους αριθμούς, ενώ ο Darwin εστίασε στις διεργασίες και βάσει της πληθυσμιακής σκέψης του πήγε προς την εξελικτική θεωρία. Ο J. Bernoulli διακρίνει τις περιπτώσεις σε γόνιμες και στείρες κι εν προκειμένω πλησιάζει σε μια πολύ βασική συνιστώσα της εξελικτικής θεωρίας. Έχει όμως βεβαίως κατά νου τα αναμφιβόλως σπουδαία μαθηματικά του. Η πρώιμη εκδοχή αυτού του θεωρήματος είναι σήμερα γνωστή κι ως ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών, καθώς είναι λιγότερο αυστηρός από άλλη αντίστοιχη μεταγενέστερη εκδοχή του (Weisstein, 2015). Υπό τη σύγχρονη σημειογραφία, ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών αναφέρει πως για κάθε θετικό αριθμό ε ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\Big(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon \Big) = 0.$$

Δηλαδή όταν ο αριθμός των δοκιμών n τείνει στο άπειρο, ο δειγματικός μέσος συγκλίνει προς την αναμενόμενη τιμή (υπό τον ασθενή νόμο πιθανότατα, ενώ υπό τον ισχυρό σχεδόν σίγουρα). Ο νόμος των μεγάλων αριθμών μαζί με το κεντρικό οριακό θεώρημα συνιστούν ένα πολύ ισχυρό επιστημονικό εργαλείο για τη μελέτη διάφορων θεωρητικών και εφαρμοσμένων προβλημάτων των πιθανοτήτων και της στατιστικής. Το κεντρικό οριακό θεώρημα, που δηλώνει ότι κάτω από αρκετά γενικές συνθήκες, η κατανομή του αθροίσματος ενός μεγάλου αριθμού τυχαίων μεταβλητών μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μία κανονική κατανομή, τέθηκε από τον De Moivre το 1733 όταν βρισκόταν σε ηλικία 66 ετών, κατόπιν επισταμένης μελέτης της Ars Conjectandi (Schneider, 2006). O de Moivre πέτυχε να δώσει την κανονική προσέγγιση *του* P_N με p = ½ και ο Laplace γενίκευσε για κάθε τιμή p (Todhunter, 1865). Όπως συνέβη για παράδειγμα και με την πρώτη εργασία του Leibniz για τον απειροστικό λογισμό, κι όπως συχνά συμβαίνει με κάποια «πρώτη απόδειξη» η παρουσίασή της είναι δύσκολη και απλοποιείται κατά πολύ κατόπιν, από άλλους συνήθως. Αυτό ισχύει και στην περίπτωση της απόδειξης του χρυσού θεωρήματος. Για τους ίδιους λόγους που δεν εκθέσαμε αναλυτικά τα εκτενή μαθηματικά της επιστολής ως προς την αντισφαίριση επί του παρόντος κειμένου, δεν επαναλαμβάνουμε λεπτομερώς και τα μαθηματικά του «Νόμου των μεγάλων αριθμών». Αρκετοί ακόμη μαθηματικοί μετά και το Poisson συνέβαλαν στην εκλέπτυνση του, όπως καταρχήν ο P. Chebyshev κι ο πολύ διακεκριμένος μαθητής του A.A. Markov, στην εργασία του οποίου θα αναφερθούμε παρακάτω. Προσμετρώνται επιπλέον ο A.N Kolmogorov και ο A.Y. Khinchin που εντέλει έδωσε μια πλήρη απόδειξη του για ληφθείσες αυθαίρετα τυχαίες μεταβλητές, ενώ αξίζει να γίνει και μια ιδιαίτερη αναφορά στον E. Borel. O τελευταίος αφενός συνδέεται αφενός με μια εκλέπτυνση του χρυσού θεωρήματος που αναφέρεται με το όνομά του, ήτοι, ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών του Emile Borel (Borel's law of large numbers), μα και με τη θεωρία παιγνίων πριν το J.Von Neuman.

Κατά συνέπεια, στην πιο στοιχειώδη επεξήγηση της διωνυμικής κατανομής, (ή πιο καταλλήλως εν προκειμένω για την κατανομή Bernoulli), αντί για το πολύ σύνηθες παράδειγμα με τα στριψίματα «τίμιων» νομισμάτων, μπορεί ενδεχομένως να έχει περισσότερο ενδιαφέρον να υποθέσουμε «ισοδύναμους παίκτες» κάποιας σφαίρισης. Είναι κάτι που υπέθεσε άλλωστε κι ο ίδιος στην *Lettre à un amy* … ώστε να θεωρήσουμε πως αναφερόμαστε στη Jeu de Paume, ή κατ' επέκταση και σε άλλες σφαιρίσεις. Δηλαδή, ως τις πλέον σύγχρονες, ή τις εκάστοτε σύγχρονες σφαιρίσεις, εφόσον όμως μπορούμε να θεωρήσουμε ισοδύναμους παίκτες κατά έγκυρο τρόπο. Απαιτείται ασφαλώς να μη λησμονούμε ότι η αρχική υπόθεση του J. Bernoulli χρειάζεται και κάποιες προϋποθέσεις για να μπορεί σε γενικές γραμμές να ισχύει (όπως να μην είναι ανομοιογενείς οι παίκτες κ.λπ.). Προκειμένου να εκφράσουμε το χρυσό θεώρημα με όρους σφαιρίσεων ως αυτούς που χρησιμοποίησε ο J. Bernoulli, μπορούμε να διατυπώνουμε ακολούθως τις εξής υποθέσεις:

Υπόθεση 1.

Τα A και B μέρη, είναι κάποιοι υποθετικά ισοδύναμοι «παίκτες», που πρόκειται να παίξουν Jeu de Paume, ή μια οποιαδήποτε άλλη σφαίριση γενικότερα. Έχουν συμφωνήσει ότι θα παίξουν κάποια παρτίδα με ακριβώς 2 set, ή ακριβώς 2 game, ή έστω εντέλει κι ακριβώς 2 φάσεις, που είναι θεωρητικά ανεξάρτητες μεταξύ τους κι εκλαμβανόμενες ως διεργασίες Bernoulli. Θέτουμε ως εκ τούτου τον αριθμό 2 ως συντελεστή του διωνύμου.

Τύπος: $(r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$

Ερμηνεία. Τα Α και Β αναμένεται να κάνουν από μια νίκη τις διπλάσιες φορές, αναφορικά με το να χάσει σε αμφότερες το Α κι άρα να τις νικήσει το Β, ή με το να νικήσει σε αμφότερες το Α κι άρα να χάσει το Β. Το να νικήσουν από μια φορά αμφότερα τα μέρη υποδηλώνεται κι ως (1 : 2), το να χάσει το Α και τις δυο φορές υποδηλώνεται κι ως (0 : 2), το να νικήσει το Α και τις δυο φορές υποδηλώνεται κι ως (2 : 2).

Υπόθεση 2.

Τα παραπάνω μέρη θα παίξουν κάποια παρτίδα, ακριβώς 4 φάσεων έστω. Θέτουμε ως εκ τούτου τον αριθμό 4 ως συντελεστή του διωνύμου.

Τύπος: $(r + s)^4 = r^4 + 4r^3s + 6r^2s^2 + 4rs^3 + s^4$

Ερμηνεία: Μεταξύ των συμμετρικών ορίων του να χάσει κάποιο μέρος ακριβώς μία φάση (1 : 4) και του να χάσει ακριβώς αντίστοιχες τρεις (3 : 4), που βρίσκονται εκατέρωθεν του να χάσει ακριβώς δυο φάσεις (2 : 4), υπάρχουν 14 (6+4+4) πιθανές περιπτώσεις σε σύγκριση με τις 2 μόνο «ακραίες» περιπτώσεις, δηλαδή την (4 : 4) και την (0 : 4).

Υπόθεση 3.

Τα ίδια μέρη θα παίξουν κάποια πολύ μεγαλύτερη παρτίδα, ακριβώς n φάσεων έστω. Θέτουμε ως εκ τούτου τον αριθμό n ως συντελεστή του διωνύμου.

Τύπος: $(r + s)^n = r^n + nr^{n-1}s + ... + nrs^{n-1} + s^n$

Ερμηνεία: Είναι ακόμα περισσότερες οι περιπτώσεις όπου θα μοιραστούν σχεδόν εξίσου οι n φάσεις, ή τα game, ή τα set κ.λπ. σε σχέση με εκείνες τις «ακραίες» που θα βρεθούν εκτός ορίων.

Με βάση τα παραπάνω, αν όποιος χάνει μια φάση πληρώνει ως έπαθλο ένα νόμισμα προς εκείνον που νικά, τότε η διεξαγωγή πολύ μεγαλύτερου αριθμού φάσεων, ή και κατ' επέκταση game, set, match κ.λπ., όχι μόνον δεν επιφυλάσσει σε κανέναν σημαντικά έπαθλα - κέρδη, μα ίσα ίσα επιφυλάσσει σε αμφότερους μηδενικά.

Με την ποσοτικοποίηση των πιθανοτήτων και με το νόμο των μεγάλων αριθμών ο J. Bernoulli ανοίγει το δρόμο προς τους μετέπειτα, αυτούς που θέλουν οποιοδήποτε παίγνιο να καθίσταται «δίκαιο», μα και εκείνους που θέλουν να υπερβούν οποιοδήποτε «δίκαιο» παίγνιο. Ως δίκαιο θα υποτίθεται κατόπιν οποιοδήποτε παίγνιο έχει αναμενόμενη τιμή, το μηδέν.

1.8 Η επικαιρότητα των απόψεων του J. Bernoulli ως προς τις σφαιρίσεις

Η *Lettre à un amy…* ολόκληρη αναφέρεται στο πόσο αριθμητικό πλεονέκτημα έχει, ή οφείλει να έχει, κάποιος παίκτης που προηγείται, υπολείπεται, ή είναι στα ίσα, με τον αντίπαλό του, όταν είναι ισοδύναμος, ανώτερος, ή κατώτερός του, ως προς τις επιδόσεις τους, εφόσον μας είναι γνωστός, ή άγνωστος ο συσχετισμός δυνάμεων τους και άλλα τέτοια ζητήματα. Περιέχει όμως περισσότερη αριθμητική και άλγεβρα απ' όση εκθέσαμε, περισσότερα σχετικά με τη Jeu de Paume, ενώ βεβαίως μπορεί να συνοψιστεί ακόμα και σε πολύ μικρότερο κείμενο από όσο είναι το παρόν. Μπορούμε λοιπόν να συνοψίσουμε εύκολα σε λίγες γραμμές τη *Lettre à un amy…*, όπως τα συνόψισε κατόπιν ο ανεψιός του N. Bernoulli. Έχουμε επίσης κι από τον ίδιο, αφενός κάποια σύνοψη τους στο de Ludo Palmarum του επιστημονικού ημερολογίου του, καθώς και μια περαιτέρω συμπύκνωσή τους στις λίγες γραμμές του γραπτού κειμένου της προφορικής παρουσίασής του. Τη συμπύκνωσε σε λίγες γραμμές, αν δούμε τη γραπτή παρουσίαση της 32 θέσης του, αλλά όμως προφορικά την ανέπτυξε κιόλας ασφαλώς πολύ περισσότερο. Για την Ars Conjectandi, επίσης μπορεί να πει κάποιος ότι συνοψίζεται στην *Lettre à un amy…*, ή και στην αριστουργηματική εισαγωγή της μόνον, αν δεν νοιάζεται και τόσο για τη μαθηματική διατύπωση των όσων έχει συμπεριλάβει σε αυτή. Σε αυτή την εισαγωγή της *Lettre à un amy…*, που επισημαίνει τη σημασία του a posteriori καθώς κι εντέλει του χρυσού θεωρήματος του, που του πήρε τόσα χρόνια να το αποδείξει και ίσως εκ της μαθηματικής σκοπιάς του δεν το κατάφερε κιόλας τόσο καλά όσο θα ήθελε. Βρέθηκαν άλλοι μαθηματικοί όμως που δεν άφησαν να πάει χαμένη η εργασία του και έτσι η εξέλιξη κατά κάποιο τρόπο τον «δικαιώνει». Είναι ενδεχομένως εύκολο να κάνει κανείς εκ των υστέρων μια περίληψη των πολλών ετών της σκληρής πνευματικής εργασίας ενός σπουδαίου επιστήμονα, καθώς και μιας χρονικά προηγούμενης σπουδαίας ενόρασης του, στην οποία βασίστηκε προκειμένου να την εκφέρει ως ερευνητικό πρόγραμμα, παραλείποντας πάρα πολλά που ενδεχομένως δείχνουν περιττά. Τίθεται έτσι εύλογα το ζήτημα του τι έχει να μας πει ως προς τις ανταγωνιστικές σφαιρίσεις το ερευνητικό πρόγραμμα του J. Bernoulli και τι μπορούμε να συμπληρώσουμε κατόπιν.

Ακόμα κι αν υποθέσουμε ότι υπήρχαν, ειρωνείες ως προς την 32 θέση του είναι ευνόητο πως θα μπορούσε να την υπερασπιστεί πολύ καλά. Πολύ εύκολα θα αποστόμωνε όποιους θα επιχειρούσαν να αμφισβητήσουν την ορθότητά της, έχοντας όμως άγνοια περί χρυσού θεωρήματός, αριθμητικών πιθανοτήτων, κρίσεων a posteriori κ.α.. Όλα αυτά που σε εκείνον δεν έχουν περάσει φευγαλέα από το νου, μα τα κατέχει πολύ συγκροτημένα. Έπειτα από τόσα πολλά χρόνια, αυτό και κάθε τέτοιο σπουδαίο έργο, δεν κινδυνεύει από την ειρωνεία, κινδυνεύει από την παραγνώριση. Πολύ περισσότερη ειρωνεία απ' όση ενδέχεται να είχε συναντήσει ο διαπρεπής J. Bernoulli, αντιμετώπιζαν άλλωστε αναμφίβολα και οι αρχαίοι γεωμέτρες, για τα σχέδια που έκαναν, ούτε καν επί χάρτου καταρχήν, προτού καταξιωθεί για τα καλά η γεωμετρία κι αποκτήσει σπουδαία αίγλη. Βλέποντάς τους να σύρουν γραμμές, ακόμα και στο χώμα, δεν ήταν δύσκολο να χαρακτηριστούν ως χασομέρηδες από τους σύγχρονούς τους. Έπειτα από αιώνες δε, ο J. Bernoulli είναι γεωμέτρης περίφημος. Δεν κρίνεται ως χασομέρης, αν και κρίνεται ως ντετερμινιστής, ενώ ο Cardano αναφέρεται λίγο πολύ κι ως «τζογαδόρος». Κάποιες κρίσεις ως οι παραπάνω είναι κι αξιολογικές, εν μέρει τουλάχιστον, είναι δε αρκετά δύσκολο να αποφευχθούν. Αξιολογικές πρωτίστως κι όχι πραγματολογικές, είναι και οι συνήθεις κρίσεις επί των σφαιρίσεων.

Στο σύγχρονο οργανωμένο στοίχημα, επί σφαιριστικών και άλλων συμβάντων, εντός κι εκτός αθλητισμού ασφαλώς (π.χ. ως προς τα αποτελέσματα εκλογικών διαδικασιών, ή επίσης σε χρηματιστηριακές αγορές), αναφερόμαστε πολύ συχνά σε κάποιες εναρκτήριες τιμές, μεταβολές τιμών κατά τη διάρκειά των διεργασιών, καθώς και σε τιμές κλεισίματος. Η διαμόρφωση των τιμών είναι άλλωστε κεντρικό ζήτημα της οικονομικής επιστήμης και ιδιαίτερων κλάδων της όπως η μικροοικονομία. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει σήμερα κανείς (στο πλαίσιο του ζωντανού στοιχήματος), ότι π.χ. σε κάποιον αγώνα αντισφαίρισης που προσφέρεται με μια α αρχική απόδοση, η νίκη ενός Α μέρους στο τέλος της, σε κάποιο set, ή σε κάποιο game κ.λπ., καθώς κι ότι αυτή αλλάζει στιγμιαία σχεδόν, όποτε αλλάζει το σκορ. Όλα αυτά δεν γίνεται πολύ διαφορετικά απ’ ότι περιγράφει ο J. Bernoulli, ότι αλλάζουν οι πιθανότητες, ή οι προσδοκίες, ή όπως αλλιώς αναφέρουμε, τους όρους probabilita, sors κ.λπ. που μεταχειρίζεται εκείνος, εννοώντας τους κατά βάση ως αριθμούς.

Διαπιστώνουμε πως η *Lettre à un amy…* είναι γεμάτη αξιολογικές κρίσεις, που όμως δεν είναι πολύ συγκεκριμένες, υπό το σημερινό φως τουλάχιστον. Οι παίκτες του J. Bernoulli είναι ο Α κι ο Β. Σήμερα το tennis ως σφαίριση είναι πλέον μια από τις διεθνείς παραδόσεις, κι έχει διεθνείς κατατάξεις επίσης. Οι επ’ αυτού συγγραφείς όπως οι Dixit & Skeath μπορούν να αναφέρουν ως παράδειγμα πρώτα ονόματα της διεθνούς κατάταξης, τα οποία να τα αλλάζουν στην επόμενη έκδοση του βιβλίου τους, με άλλα πρώτα ονόματα που κρίνουν ότι διαχρονικά είναι πιο σπουδαία. Ο J. Bernoulli ενδιαφερόταν δεδηλωμένα για τα «συγκεκριμένα» μαθηματικά. Γνωρίζουμε ότι ενδιαφέρθηκε ιδιαίτερα για το προσδόκιμο ζωής, για την οποία υπήρχαν ήδη στοιχεία από τους πίνακες του J. Graunt, ενώ αντίστοιχο ενδιαφέρον είχαν επιδείξει και οι αδελφοί Huygens (Hald, 1990). Γνωρίζουμε ότι ο ανεψιός του Nicholas, ο οποίος πήρε απ’ αυτόν τη σκυτάλη, ασχολήθηκε με τα ποσοστά γέννησης αρσενικών και θηλυκών στο Λονδίνο. Υπάρχουν δηλαδή κάποια αρκετά συγκεκριμένα ζητήματα που τον απασχολούν, αυτόν κι όχι μόνον. Ζητήματα τα οποία έχουν στο νου τους, εκείνη την εποχή, όλοι οι πρωτοπόροι της στατιστικής κι όχι μόνο. Ο J. Bernoulli στα σχετικά με τη σφαίριση γραπτά του, για οποιουσδήποτε λόγους δεν αναφέρθηκε σε άνδρες και γυναίκες, σε νέους και ηλικιωμένους κ.λπ.. Η σύγχρονη εποχή προσφέρει πολύ περισσότερες ευκαιρίες συσχέτισης τέτοιων ζητημάτων.

Σήμερα είναι δεδομένες οι παγκόσμιες κατατάξεις ανδρών και γυναικών, ή εκείνες των βετεράνων, των παίδων κ.α.. Έχουμε δε σε πολλές σφαιρίσεις πολύ περισσότερα στοιχεία ως προς τις σχετικές δυνάμεις ολόκληρων κατηγοριών του ανθρώπινου πληθυσμού. Έτσι για παράδειγμα θα μπορούσε κάλλιστα να μεταφερθεί η συζήτησή της στο πόσο πλεονέκτημα έχει, ή οφείλει να έχει κάποια κατηγορία ανθρώπων Α, σε σχέση με άλλη κατηγορία Β, πάνω σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη δικαιολογητική βάση. Ενδεχομένως, λόγου χάριν, δεν είναι για μια τέτοια συζήτηση κατάλληλη δικαιολογητική βάση το φυσικό δίκαιο, στις διάφορες εκφάνσεις του. Μεταξύ άλλων έχει προχωρήσει πολύ και η στατιστική συμπερασματολογία, όχι μόνον πέρα από την εποχή του Bernoulli, μα και πέρα από την εποχή του Laplace. Πληθυσμιακά, μπορούν γενικότερα να συζητηθούν σήμερα πάρα πολλά ζητήματα στις σφαιρίσεις. Μπορούμε όμως να αναφερθούμε κι ενδεικτικά μόνον σε λίγες κύριες πληθυσμιακές κατηγορίες και στις σύγχρονες σφαιρίσεις, που υπό κάποια σκοπιά είναι όλες παρεμφερείς με τη Jeu de Paume.

Σήμερα για παράδειγμα το tennis (αντισφαίριση) είναι μια πασίγνωστη διεθνής σφαίριση για την οποία έχουμε παγκόσμια κατάταξη στους άνδρες και στις γυναίκες. Έχουμε επίσης και πάρα πολλά στοιχεία ως προς το συσχετισμό των δυνάμεών τους στα γήπεδα, ως προς τις οικονομικές ανταμοιβές τους κ.α.. Έτσι οι ερωτήσεις και οι απαντήσεις του J. Bernoulli, μπορούν να μεταφερθούν στη σύγχρονη εποχή. Πόσα game, ή και πόσα «αυτοκρατορικά νομίσματα» έχουν, οφείλουν να έχουν πλεονέκτημα, οι άνδρες, ή οι γυναίκες, στην αντισφαίριση, ή στην όποια σφαίριση παίζουν, ή μπορούν να παίζουν αμφότεροι. Μπορεί να σκεφθεί κανείς ότι είναι άλλη η σχετική «αντισφαιριστική» αξία των ανδρών και γυναικών, άλλη η σχετική «αντιπτεριστική» αξία τους κ.ο.κ. για καθεμία από τις γνωστές σφαιρίσεις. Μπορεί και να βγάλει συνολικά διαφορετική την αξία τους. Να λογαριάσει επίσης ότι έχουν άλλη βιολογική αξία, ότι η εργατική δύναμή τους έχει άλλη – διαφορετική αξία κ.ο.κ., Να συνυπολογίσει ότι αυτή αλλιώς λογαριάζεται σε πόντους και διαφορετικά σε οικονομικό χρήμα. Οι άνδρες και οι γυναίκες παίζουν πράγματι κάποιες σφαιρίσεις και για τη συμμετοχή τους πληρώνουν, ή και πληρώνονται κιόλας κάπως. Ο J. Bernoulli έχει θέσει τέτοια ζητήματα κι έχει απαντήσει κιόλας και σε πόντους και σε χρήματα μάλιστα, αναφορικά με τη Jeu de Paume της εποχής τους. Αξίζει τον κόπο να λάβουμε υπόψη μας τι γράφει, καθώς το σκεπτικό του μας είναι πολύτιμο, ακόμα κι αν το διαφοροποιήσουμε κάπως. Εν προκειμένω μπορούμε να υποθέσουμε πως συμπεριλαμβάνουμε στη σχετική αξία τους ως προς την τάδε σφαίριση, όπως έκανε ο J. Bernoulli με τη Jeu de Paume. Θα μπορούσαμε έτσι για παράδειγμα να διαπιστώσουμε ότι η αντισφαιριστική αξία της σημερινής No1 της γυναικείας παγκόσμιας κατάταξης αντιστοιχεί στο No 500 της ανδρικής. Αυτή είναι χονδρικά η εκτίμηση που έκανε ο άλλοτε No 200 της παγκόσμιας ανδρικής κατάταξης που νίκησε προ ετών τη μετέπειτα No1 Venus Williams και τη σημερινή No1 της παγκόσμιας γυναικείας κατάταξης αδελφή της Serena Williams ("Williams sisters discover men are better players", 1998). Κάποια τέτοια βάση είναι πιθανώς εύστοχη κι εύκολα εξακριβώσιμη εκ νέου, κρίνοντας όμως κι εκ του πως αυτό διεξάγεται. Βάσει ενός τέτοιου ισχυρισμού μπορεί κάποιος να υποστηρίξει ως προς τα οικονομικά έπαθλά τους, ότι δέον είναι να διαφέρουν αναλόγως. Άλλος μπορεί να υποστηρίξει την ισότητά τους, βάσει της αρχής «ίση ανταμοιβή για ίδια εργασία».

Κατά το παρελθόν έχουν διεξαχθεί στο tennis αρκετές αναμετρήσεις μεταξύ ανδρών και γυναικών διεθνούς κλάσης. Η πλέον γνωστή είναι εκείνη του τότε 55χρονου Bobby Riggs που είχε ισχυριστεί πως παρά την ηλικία του θα υπερτερούσε της τότε 26χρονης Billie Jean King, που ήταν η τελική νικήτρια (Wood, 2008). Πρόκειται για τον πλέον γνωστό και ως «η μάχη των φύλων» αγώνα. Ασφαλώς είχαν διεξαχθεί κι άλλες πιο πριν, όπως εκείνη του Bill Tilden έναντι της Suzanne Lenglen (που είχε υπερισχύσει συντριπτικά ο πρώτος), καθώς επίσης και πιο μετά, όπως εκείνη του Jimmy Connors έναντι της Martina Navratilova. Ήταν όμως όλες μάλλον άνισες, ως προς τη δυναμικότητα των αντιπάλων και δεν έπιασαν κάποιες σημαντικές παραμέτρους. Στο μέλλον ίσως διεξαχθούν ακόμα περισσότεροι τέτοιοι αγώνες επίδειξης, ή κι ακόμα και πιο σημαντικοί αγώνες.

Η Venus Williams εξελίχθηκε σε Παγκόσμια Πρωταθλήτρια, ενώ ακόμα πιο πρόσφατα διεκδίκησε και πέτυχε την ίση οικονομική ανταμοιβή με τον αντίστοιχο Παγκόσμιο Πρωταθλητή στο Wimbledon κ.α. μεγάλες διοργανώσεις. (Sreedhar, 2015). Σε παγκόσμια πρωταθλήτρια εξελίχθηκε και η αδελφή της, η Serena Williams (παραμένει μάλιστα σε αυτή τη θέση όσο γράφεται το παρόν κείμενο), έχει δε επίσης επηρεάσει σημαντικά την εξέλιξη του συγκεκριμένου αγωνίσματος κι όχι μόνον. Συνέτεινε καθοριστικά στην εισαγωγή της τεχνολογίας Hawk Eye, ενός συστήματος καμερών που εισήχθη ακόμα και στο ποδόσφαιρο προκειμένου να μην υπάρχουν αμφισβητήσεις πάντοτε ως προς το αν η μπάλα πέρασε ή όχι κάποια γραμμή και θα παρακάτω θα αναφερθούμε εκτενέστερα σε αυτή. Ασφαλώς και πριν επιτευχθεί η προαναφερθείσα οικονομική ισότητα, η Παγκόσμια Πρωταθλήτρια ανταμειβόταν με πολύ περισσότερα χρήματα από αυτά που θα εισέπραττε αν υπήρχε ενιαία Παγκόσμια κατάταξη. Προκύπτουν όμως δυο πληθυσμιακές κατηγορίες.

Τίθεται έτσι μεταξύ άλλων και το ζήτημα ποια θεωρείται ως ακριβοδίκαιη ανταμοιβή και διαίρεση στην πραγματικότητα, καθώς κι αν είναι οικονομική και μόνον. Σε ότι αφορά τις οικονομικές ανταμοιβές υπάρχουν αρκετές διαφορετικές γνώμες που ευνοούν τους μεν ή τις δε. Παραθέτουμε κατόπιν κάποιες από τις αιτιάσεις της Venus Williams από μια έκθεση που δημοσιεύθηκε στους Times κατά τις παραμονές ενός Wimbledon, που έγιναν αποδεκτές από τον τότε Βρετανό Πρωθυπουργό T. Blair και οδήγησαν σε απόφαση για ίσες ανταμοιβές κατά το επόμενο Wimbledon (Williams, 2006). Το κέρδισε η ίδια και της ζητήθηκε από UNESCO και τη WTA (Women's Tennis Association) να ηγηθεί καμπάνιας για τα ίσα δικαιώματα ανδρών και γυναικών στον αθλητισμό. Τα 1.12 εκατομμυρίων δολαρίων για τον R. Federer με τα 1.08 εκατομμύρια δολάρια για τη S. Williams είναι ενδεικτικά της προηγούμενης οικονομικής διαφοράς, αλλά και των απόλυτων τιμών τους.

Είναι επίσης αρκετά χαρακτηριστικό ότι σε αντίθεση με άλλες σφαιρίσεις, στο tennis υπάρχουν και δυο μεγάλες διαφορετικές διεθνείς ενώσεις. Μια για τους άνδρες, η Association of Tennis Professionals (ATP) από το 1972 (http://www.atpworldtour.com/) κι άλλη μια για τις γυναίκες που ιδρύθηκε το 1973 από την J.B. King, η Women's Tennis Association (WTA) (http://www.wtatennis.com/). Πρόκειται για την επιχειρηματολογία που συνετέλεσε στην πρόσφατη αλλαγή και τις σύγχρονες εξελίξεις.

> *«Νιώθω τόσο έντονα ότι η στάση του Wimbledon απαξιώνει την αρχή της αξιοκρατίας και μειώνει τα χρόνια σκληρής δουλειάς που έδωσαν οι γυναίκες για να γίνουν επαγγελματίες παίκτες του tennis. Κανένα άλλο αγώνισμα δεν έχει άνδρες και γυναίκες να ανταγωνίζονται για πρωτάθλημα Grand Slam στην ίδια σκηνή [γήπεδο], την ίδια στιγμή. Έτσι στα μάτια της κοινής γνώμης, των ανδρών και των γυναικών τα παιχνίδια έχουν την ίδια αξία. ... απολαμβάνουμε τεράστια και ίση διασημότητα, και πληρωνόμαστε για την αξία που παρέχουμε στους ραδιοτηλεοπτικούς φορείς και τους θεατές, όχι για το χρόνο που περνάμε στη σκηνή. Και, για την ιστορία, ο τελικός των γυναικών του Wimbledon το 2005 [ο τότε περσινός], διήρκεσε 45 λεπτά περισσότερο από ό, τι των ανδρών .... Το Wimbledon έχει δικαιολογήσει τη μεταχείριση των γυναικών ως δεύτερης κατηγορίας, διότι εμείς βγάζουμε περισσότερα στο τουρνουά. Το επιχείρημα είναι ότι οι κορυφαίες των γυναικών - που είναι πιο πιθανό να παίξουν διπλά παιχνίδια από ό, τι οι άνδρες συναδέλφους τους - κερδίζουν περισσότερα από τους κορυφαίους των ανδρών αν συνυπολογιστούν τα χρηματικά έπαθλα του απλού, του διπλού και του μικτού διπλού αγωνίσματος. Έτσι, όσο περισσότερο στηρίζουμε το τουρνουά, τόσο πιο άνισα θα πρέπει να αντιμετωπιζόμαστε! Όμως*

τα παιχνίδια του διπλού και του μικτού διπλού, είναι ξεχωριστά γεγονότα από τον ανταγωνισμό του απλού. Μήπως το Wimbledon υπονοεί ότι εάν οι κορυφαίες γυναίκες αποσυρθούν από τους αγώνες των διπλών, τότε θα αξίζουμε τα ίδια χρηματικά έπαθλα στο απλό; Και πώς τότε εξηγεί το All England Club ότι το χρηματικό έπαθλο του διπλού των γυναικών είναι σχεδόν 130.000 £ μικρότερο από το χρηματικό έπαθλο του διπλού των ανδρών;…»

(Williams, 2006)

Την εποχή που ο J. Bernoulli ασχολούταν με την Jeu de Paume, καμία σφαίριση δεν μπορούσε έμπρακτα να του παρέχει την μεγάλη ποικιλία στοιχείων που έχουμε στη διάθεσή μας στη σύγχρονη εποχή. Δεν ήταν ασφαλώς ξεκάθαρο όσο είναι σήμερα, ότι κάποιο παιχνίδι όπως το σημερινό tennis, διαφοροποιείται ανάλογα με την επιφάνειας διεξαγωγή του κι ως εκ τούτου καθίσταται και σχετικό το αν και πόσες φορές ανώτερος είναι κάποιος από άλλον. Μα και το αν και πόσο handicap θα απαιτούταν, π.χ. για κάποια δυνητικώς κοινή επιθυμητή εξισορρόπηση. Είναι κοινώς παραδεκτό πλέον ότι ορισμένοι τύποι επιφάνειας γηπέδου, ευνοούν κάποιους αντίστοιχους ειδικούς τύπους παικτών. Σύμφωνα με τη διεθνώς γνωστή ιστοσελίδα του tennis panorama (http://www.tennispanorama.com/archives/tag/100-greatest-of-all-time) και όχι μόνον, ο σπουδαιότερος παίκτης αντισφαίρισης όλων των εποχών προέρχεται από τη Βασιλεία της Ελβετίας, δεν είναι όμως ασφαλώς ο Jacob Bernoulli, αλλά ο πλέον διάσημος Roger Federer. Το ενδιαφέρον μας για εκείνον δεν συνδέεται με την υποκειμενικότητα των γνωμών, ή με τις μη επιστημονικές υποθέσεις ως προς την κοινή καταγωγή τους. Η Βασιλεία δεν «εξηγεί» τον J. Bernoulli και ενδεχομένως δεν εξηγεί παρομοίως το Federer κι όχι μόνον. Ο σύγχρονος παγκόσμιος πρωταθλητής, πάντως δεν είναι αγωνιστικά εξίσου αποτελεσματικός, στο γρασίδι, στο χώμα, στο ταρτάν, ή την όποια επιφάνεια διεξάγεται ο αγώνας, όπως άλλωστε ισχύει σχεδόν και για όλους τους υπόλοιπους.

Κάνοντας μεταφορά της συλλογιστικής του J. Bernoulli, αν για παράδειγμα έστω παρατηρούσε αυτόν, ή παρατηρούσε τον Ισπανό παγκόσμιο πρωταθλητή Nadal να κερδίζει κάποιον σημαντικά μεγαλύτερο αριθμό φάσεων σε χωμάτινη επιφάνεια (το αντίστοιχο των 200, ή 300 χτυπημάτων) συγκριτικά με τον αριθμό που κερδίζει στην επιφάνεια του γρασιδιού (το αντίστοιχο των 100 χτυπημάτων), αφήνονται πολύ λίγα περιθώρια ως προς την απόρριψη της συμπερασματολογίας του. Βάσει των αντίστοιχων διαθέσιμων στοιχείων μπορεί να κρίνεται λογικό το συμπέρασμα ότι εν προκειμένω ο Nadal είναι ο κυρίαρχος του αγωνίσματος των ανδρών στη χωμάτινη επιφάνεια, καθώς δείχνουν τα αποτελέσματα στις σχετικές διοργανώσεις όπως το Roland Garros, ενώ συγκριτικά υστερεί με τον R. Federer στο αγώνισμα επί γρασιδιού (Christenson, 2007). ‘Η κυριαρχία του καθενός στο γρασίδι και στο χώμα αντιστοίχως έγινε η αφορμή για τη ‘Μάχη των Επιφανειών¨, μια συνάντηση επίδειξης σε ένα γήπεδο με γρασίδι και χώμα κατά το ήμισυ, το Μάιο του 2007 (Clarey, 2007). Παραπέμπει βεβαίως και στην πιο παλιά μα κι ακόμα πιο διάσημη «Μάχη των φύλων» (Greenspan, 2013). Η διεισδυτική ματιά του J. Bernoulli θα μπορούσε να μας διαφωτίσει ιδιαιτέρως ως προς τη διάκριση των όποιων «αντικειμενικών» ή «υποκειμενικών» παραγόντων, ενώ γίνεται αντιληπτό ότι μια σφαίριση μπορεί να διεξάγεται με παραλλαγές, ή χωρίς αυτές, για πολλούς αιώνες. Για να κριθεί βεβαίως κάποιος παίκτης δύο ή τρεις φορές ισχυρότερος από άλλον, κατά τον τρόπο που το έκρινε στην αντισφαίριση της εποχής του ο J. Bernoulli, μα και να μεταφερθεί καταλλήλως στην εποχή μας, απαιτείται εν προκειμένω να ισχύει επίσης ότι η αντίστοιχη μέτρηση γίνεται επί της ίδιας ή παρεμφερούς επιφάνειας, αν όχι επί του ιδίου γηπέδου καταρχήν. Ο τύπος της επιφάνειας αποτελεί πλέον αναμφισβήτητο στοιχείο κι άλλωστε ότι μετράει ο «χώρος» σε κάθε περίπτωση, ενδέχεται μάλλον να εκληφθεί κι ως προφανές. Πέραν της επιφάνειας όμως θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ως προς την αξιολόγηση της σχετικής ισχύος των παικτών, ότι έχουν σημασία κι άλλα αντικειμενικά χαρακτηριστικά της αναμέτρησης, λιγότερο προφανή. Όπως για παράδειγμα οι τύποι των ρακετών - ή όπως επισημαίνουμε ιδίως – οι τύποι των σφαιρών, της μπάλας για κάθε σφαίριση. Αυτοί ορίζονται από συγκεκριμένες προδιαγραφές, όπως άλλωστε ορίζονται και οι επιφάνειες των αγωνιστικών χώρων, που παρόλα αυτά αναδεικνύουν όμως διαφορετικούς κατά περίπτωση τύπους παικτών. Που αποδίδουμε τη διαφοροποίηση της αποτελεσματικότητας που έχουν οι τύποι των παικτών στην εκάστοτε επιφάνεια; Κυρίως στην ταχύτητα του παιχνιδιού που διεξάγεται επί αυτής. Τέτοια διαφοροποίηση όμως μπορεί να σημειωθεί και με διαφορετικούς τύπους μπάλας. Αν δε είναι γενικότερα δύσκολο να έχουμε γήπεδα μισά – μισά, κατά πλάτος ή κατά μήκος μήπως, κάποια αντίστοιχη εναλλαγή στις οποιεσδήποτε μπάλες, δεν ήταν και δεν είναι. Θέλουμε όμως πάντα ταχύτερο παιχνίδι, ή πάντα βραδύτερο; Όχι πάντα καθώς δείχνεται σε διάφορες σφαιρίσεις και μεταξύ αυτών και στην αντισφαίριση που διεξάγεται σε ποικίλες επιφάνειες. Στην επιτραπέζια αντισφαίριση, στην πετοσφαίριση κ.α. ενδέχεται να θέλουμε βραδύτερο, στην ποδοσφαίριση, κ.λπ. ενδέχεται να θέλουμε ταχύτερο παιχνίδι. Μπορεί να θέλουμε βραδύτερα, ή ταχύτερα αντικείμενα, όπως μπορεί κατά περίπτωση να θέλουμε βραδύτερους, ή ταχύτερους ανθρώπους. Σε κάθε περίπτωση όμως, για τη συστηματική καταξίωση συγκεκριμένων πληθυσμιακών κατηγοριών, υπεύθυνοι είναι οι άνθρωποι κι όχι οι μπάλες.

Μπορεί έτσι εύκολα, ή κι επιπόλαια ακόμη κανείς να χαρακτηρίσει δίκαια τα αιτήματα των πρωταθλητριών για ίσες οικονομικές ανταμοιβές. Είτε να χαρακτηρίσει δίκαιη την υποστήριξη να υπάρχουν περισσότερες από 50% γυναίκες στις διοικήσεις των αθλητικών ομοσπονδιών http://www.isotita.gr/var/uploads/PRESS%20%28APO%20SEP%202010%29/2016/DT_20-01-2016_Synantisi%20me%20ton%20GGA.pdf. Είτε να χαρακτηρίσει δίκαιο το να αρθεί η απαγόρευση του Ιράν όπως ζητάει το Human Rights Watch και να επιτρέπεται στις γυναίκες να παρακολουθούν ως θεατές τους άνδρες να παίζουν (https://www.hrw.org/news/2016/02/04/beach-volleyball-and-womens-rights-iran). Μπορεί όμως επίσης επιπόλαια χαρακτηρίσει άδικα τα παραπάνω αιτήματα αναλογιζόμενος τα δισεκατομμύρια ανδρών που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο, όπου υπάρχει πολύ μεγαλύτερος ανταγωνισμός απ' ότι στο γυναικείο ποδόσφαιρο, μεγαλύτερος ανταγωνισμός ακόμα και στη διοίκησή του και στις εξέδρες. Στον πυρήνα των παραπάνω ζητημάτων βρίσκεται το αναπτυξιακό ζήτημα της ισότητας/ανισότητας στη συμμετοχή εντός των αγωνιστικών χώρων.

Έτσι για παράδειγμα υπό κάποιο σκεπτικό όπως αυτό του S. Gould, θα μπορούσαμε να καταλήξουμε σε λίγο πολύ σταθερούς συσχετισμούς της αντισφαιριστικής αξίας ανδρών και γυναικών. (Gould, 1996). Καταλήγοντας έτσι, θα γνωρίζουν πάνω κάτω τις θέσεις τους οι μεν και οι δε. Υπό κάποια τέτοια προοπτική, ο ίδιος ο S. Gould ενδεχομένως δεν θα ενέκρινε τη γνώμη οι γυναίκες να μάθουν τη θέση τους και το tennis να μείνει ως έχει, αντί να εξελιχθεί κι ως προς τις συγκρίσεις που παράγει. Ακόμα κι αν τον ερμηνεύουμε λάθος, δεν είναι απαραίτητο να συμφωνήσουμε μαζί του. Δεν εξαρτάται από άλλους το να προχωρήσουμε, εμπράκτως κάπως προς κάποια πιο δίκαιη εν προκειμένω, μα πρωτίστως πιο αναπτυξιακή αναδιάρθρωση. Εξαρτάται από τους ανθρώπους, κάποιους κι όχι όλους μάλλον, η ανάπτυξη όχι μιας – δυο σφαιρίσεων μόνον (της αντισφαίρισης είτε της αντιπτέρισης που διεξάγονται ως μικτές), μα ακόμη κι όλων των χρονολογημένων, ή ακόμη και την πραγματοποίηση καινούργιων που δεν αποκλείεται να προκύψουν. Δεν είναι απαραίτητο να επέλθει επαναστατικά, ούτε με σταδιακά βήματα. Δεν είναι αναγκαίο να γίνει, όμως δεν αποκλείεται κιόλας. Δεν παίζουμε τις σφαιρίσεις αναγκαία κι ούτε βεβαίως είναι απαραίτητο να τις διεξάγουμε προκειμένου να διαπιστώσουμε αν η πληθυσμιακή κατηγορία των ανδρών, των νέων κ.λπ. είναι ανώτερη στις επιδόσεις που απαιτούν αυξημένο βάρος, ταχυδύναμη κ.α. τέτοιες «ικανότητες», σε σύγκριση με τις αντίστοιχες πληθυσμιακές κατηγορίες των γυναικών, των ώριμων κ.λπ. Για τέτοιες συγκρίσεις άλλωστε έχουμε κι άλλα αγωνίσματα όπως η άρση βαρών, οι «κούρσες» 100μ κ.λπ. Στις σφαιρίσεις, όπου ως επί το πλείστον αναφερόμαστε σε έμβια υποκείμενα, που «χρησιμοποιούν» κάποια αντικείμενα για να παίζουν, είτε να διαγωνίζονται κ.ο.κ., διαθέτουμε αφάνταστα περισσότερες δυνατότητες, που μπορούμε να «αξιοποιήσουμε». Τις όποιες υφιστάμενες φυσιολογικές διαφορές, όπως ίσως αυτές των αρσενικών και θηλυκών του ανθρωπίνου είδους, που αναφέρουμε ενδεικτικά, μπορούμε και να τις μειώσουμε και να τις επαυξήσουμε. Ακόμα δηλαδή κι αν το ανθρώπινο είδος εμφανίζει ως προς το φύλο μεγαλύτερο διμορφισμό από τον αντίστοιχο του είδους των αλόγων, για παράδειγμα, τα οποία επίσης τα «χρησιμοποιούμε» για αγώνες δρόμων και σφαιρίσεων επίσης, κατατάσσουμε εμείς οι ίδιοι τους εαυτούς μας στα έλλογα ζώα. Αν είναι μεγαλύτερες συγκριτικά με τα άλογα, οι έμφυλες διαφορές του ανθρωπίνου είδους ως προς κάποιους αγώνες δρόμου κ.α. δεν είναι ασφαλώς και στο λογισμό. Οι «χρήσεις» των ανθρώπινων σωμάτων, όπως αυτές των σφαιρίσεων, «εκβάλλουν» εύλογα κάπως προς τη νοημοσύνη που έχουμε αναπτύξει σε τόσο μεγάλο βάθος χρόνου. Ή και την προσβάλλουν.

Κεφάλαιο 2. Το πέρασμα προς την τυχαιοθέτηση, την προσδοκώμενη χρησιμότητα και η σχέση του C. Shannon με το Juggling

Στη σύγχρονη εποχή μπορεί να γράφουμε για μια σφαίριση όπως η αντισφαίριση (tennis) και να τη μεταχειριζόμαστε ως παράδειγμα της θεωρίας παιγνίων, ή άλλων επιμέρους θεωριών που αναφέρονται κατά παρόμοιο τρόπο στις πιθανότητες, θεωρώντας χρήση τους ως περίπου αυτονόητη. Δεν ήταν όμως καθόλου έτσι την εποχή 300 χρόνια πριν, καθώς ακόμα και ως προς τα τυχερά παίγνια μόνον, ήταν λίγοι οι προνομιούχοι αυτής της γνώσης. Ανάμεσα σε αυτούς ήταν καταρχήν ο ανεψιός του Nicholas Bernoulli (1687 - 1759), ο οποίος δεν είναι εκείνος που φρόντισε να εκδοθεί, το έργο του θείου του, μα ασχολείται πολύ με αυτό, αρκετό καιρό πριν, και μετά από την έκδοσή του το 1713, από τους αδελφούς *Thurneysen*. Το ότι ο γιός του J. Bernoulli έγινε ζωγράφος και δεν έδωσε τη δέουσα σημασία στο χειρόγραφο του πατέρα, οι διαταραγμένες σχέσεις μεταξύ των επιστημόνων της οικογένειας Bernoulli, καθώς κι άλλοι παράγοντες, συνέβαλλαν ώστε η έκδοση των προαναφερόμενων έργων, να γίνει σχεδόν 8 χρόνια μετά το θάνατό του.

Ο Nicholas Bernoulli, αρχικά είχε αποφύγει την ενασχόλησή του, διότι όπως γράφει δεν ένοιωθε άξιος να αναμετρηθεί με τα έργα του θείου του (Sylla, 2006). Κάποια στιγμή όμως αρπάζει την ευκαιρία, η οποία του δίνεται στη συζήτηση της εποχής σχετικά με το λόγο στις γεννήσεις αρσενικών προς θηλυκών παιδιών στο Λονδίνο, θέλει δε να ελέγξει την υπόθεση ότι η αληθής τιμή αυτού του λόγου είναι 18 : 17 (Hald, 1990). Ήτοι, θέλησε να κάνει μια προσέγγιση πλησιέστερη από εκείνη του θείου του και τα αποτελέσματά της βρίσκονται σε μια επιστολή που έστειλε (στις 23 Ιανουαρίου 1713) προς τον de Montmort. Ο τελευταίος επίσης απέφυγε την αναμέτρηση με το έργο του J. Bernoulli, του οποίου αναγνώρισε το μεγαλείο. Ήταν δε κάποιος που είχε προσφερθεί να πληρώσει κιόλας, προκειμένου αυτή να εκδοθεί εντέλει. Σε αυτή την ίδια επιστολή ο πρώτος τον πληροφορεί, συν τοις άλλοις, ότι επιτέλους τυπώνεται στη Βασιλεία η «Ars Conjectandi». Ο Nicholas Bernoulli ασχολείται κατόπιν και διατηρεί πολύ μεγάλη επικοινωνία όχι μόνον με τον de Montmort, μα και με επιστήμονες όπως, ο de Waldegrave, ο G. Cramer, καθώς και με τον έτερο ανηψιό, κι εξάδελφό του ιδίου, τον Daniel Bernoulli. Αυτοί συνδέονται στενά με τις πολύ σημαντικές και για τη θεωρία παιγνίων έννοιες, όπως την τυχαιοθέτηση (randomising) και τη στρατηγική minimax, καθώς και με την προσδοκώμενη χρησιμότητα (expected utility). Στις επιστολές τους ασχολούνται επισταμένως με παίγνια όπως το «Her», μα και με την Jeu de Paume, ενώ εντέλει αναδύεται κάπως έτσι και το παράδοξο της Αγ. Πετρούπολης (N. Bernoulli, 1709).

Ανεξάρτητα από το ενδιαφέρον ή και την πρόοδο που σημειώθηκε στο παράδοξο της

Αγίας Πετρούπολης, αν προσέξει κανείς την αλληλογραφία του Nicholas Bernoulli διαπιστώνει ότι η γνωστή σφαίριση της εποχής, εξακολουθεί να συζητείται. Επιπλέον τα προαναφερθέντα και άλλα σηματικά μπορούσαν, ή μπορούν να συνδεθούν και να διατυπωθούν στο πλαίσιο της Jeu de Paume και των σφαιρίσεων εν γένει.

2.1 Nicholas Bernoulli

Παρότι ο J. Bernoulli δεν πρόλαβε να δώσει πολλά παραδείγματα της Ars Conjectandi σε πολιτικά, ηθικά, οικονομικά ζητήματα, ο ανηψιός του Nicholas κατόπιν, εισηγήθηκε αρκετές εφαρμογές του. Δεν ήταν όμως αποκλειστικά και μόνον η προώθηση του έργου του μεγάλου θείου του, εκείνη που τον κατέστησε ως εκ τούτου για κάποια κρίσιμα μάλιστα χρόνια την πλέον ηγετική φυσιογνωμία ως προς την μελέτη των πιθανοτήτων (Seneta, n.d.). Ο τίτλος της, «De Usu Artis Conjectandi in Jure», μα και το περιεχόμενο της διδακτορικής μελέτης του Nicholas Bernoulli, δεν αφήνει περιθώρια αμφιβολιών για την παραδεγμένη κι από τον ίδιο επίδραση του Jacob (N. Bernoulli, 1709). Ο έτερος θείος του Johan, στις επιστολές προς το Leibniz απέδιδε τα εύσημα στο ταλέντο και την εργατικότητα αυτού του ανεψιού του.

Ο Nicholas Bernoulli έλαβε κι έγραψε εκατοντάδες επιστολές επιστημονικού περιεχομένου από και προς ορισμένους από τους πλέον διακεκριμένους επιστήμονες της εποχής του και ήταν όπως θα δειχθεί εν μέρει και κατόπιν, κομβικός σύνδεσμος για τις μετέπειτα εξελίξεις. Ο Nicholas Bernoulli καταρχήν έδωσε μια ολοκληρωμένη λύση στο λεγόμενο «πρόβλημα της διάρκειας του παιχνιδιού», το οποίο το πιο δύσκολο θέμα στην θεωρία πιθανοτήτων πριν από το 1750 σύμφωνα με τον A. Hald (Hald, 1990). Ήτοι, το 5ο πρόβλημα του Ch. Huygens, που αφορά τον προσδιορισμό της πιθανότητας στη λεγόμενη «χρεοκοπία του τζογαδόρου» (όπου δυο έστω παίκτες έχουν συγκεκριμένο πλούτο και παίζουν κατ' εξακολούθηση υπό κάποιες συγκεκριμένες πιθανότητες νίκης p και q, με $p + q = 1$, ώσπου δηλαδή κάποιος παίκτης χρεοκοπεί, στο όριο κάποιου δεδομένου αριθμού επαναλήψεων n). Πρόκειται για το πρόβλημα που έλυσε καταρχήν ο θείος του και επέκτεινε ο ίδιος. Ζητήματα όπως αυτά δεν σχετίζονται απαραίτητα με τα τυχερά παίγνια αποκλειστικώς, έστω κι αν με τον καιρό, αργότερα πάλι έγινε μια θεωρητική στροφή ξανά προς αυτά. Κατά τον τρόπο που είχε υποδείξει ο J. Bernoulli μπορούν να συσχετιστούν με τις σφαιρίσεις, ώστε εντάσσονται σε αναγνωρίσιμα πλαίσια, που τα πρότυπά τους δεν θεωρούνται ως αμιγώς τυχερά.

Στις αρχές του 18ου αιώνα πολλοί φυσικοί και κοινωνικοί επιστήμονες ερμήνευαν τις άρτι ευρεθείσες κανονικότητες στη φύση, αλλά και στη δημογραφία, ως απόδειξη θεϊκού σχεδίου. Πρώτο παράδειγμα τέτοιας αιτιολόγησης, το 1712, από τον J. Arbuthnott. Τα δεδομένα του αποτελούνταν από τον αριθμό των αρσενικών και θηλυκών γεννήσεων, στο Λονδίνο, ετησίως, για 82 διαδοχικά έτη. Η εξήγησή του ήταν ότι ο σοφός Δημιουργός φέρνει στον κόσμο περισσότερα αρσενικά από θηλυκά, και σε σχεδόν σταθερή αναλογία, ώστε να αποζημιώσει για το μεγαλύτερο ποσοστό θανάτων των ενήλικων αρσενικών (Hald, 1998). Υπό μοντέρνα ορολογία ο Arbuthnott ελέγχει τη μηδενική υπόθεση $p=1/2$ έναντι της υπόθεσης ότι $p>1/2$ και απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση, λόγω του χαμηλού επιπέδου σημαντικότητας. Ο Nicholas Bernoulli συμπληρώνει την ανάλυσή του, δείχνοντας ότι το μεγαλύτερο μέρος της διακύμανσης του ετήσιου αριθμού των γεννήσεων αρσενικών μπορεί να ερμηνευθεί ως διωνυμική κατανομή με $p = 18/35$. Αυτό είναι το πρώτο παράδειγμα ταιριάσματος διωνυμικής σε δεδομένα (Hald, 1998). Ο Nicholas Bernoulli παρομοιάζει την κατανομή του ετήσιου αριθμού των γεννήσεων αρσενικών με το ρίξιμο 14.000 ζαριών, το καθένα με 18 άσπρες και 17 μαύρες όψεις. Δεν γράφει όμως θεολογικές παραδηλώσεις της ανάλυσής του.

Αυτό που κατά κάποιο τρόπο «στοίχειωσε» τον Nicholas Bernoulli, ήταν ένα ζήτημα που έθεσε ο ίδιος, το λεγόμενο «Παράδοξο της Αγ. Πετρούπολης» («St. Petersburg Paradox»). Και σε αυτό, η παρουσίαση γίνεται σε πλαίσιο τυχερών παιγνίων, ως επί το πλείστον. Ο υπολογισμός της ελκυστικότητας μιας κατάστασης με κριτήριο την προσδοκώμενη αξία, ήταν η επικρατούσα μέθοδος εκτίμησης, μέχρι που ο Nicholas Bernoulli (το 1713), έδειξε με αυτό το παράδοξο, πως η προσδοκώμενη αξία ενός περιουσιακού στοιχείου δεν αποτελεί και το μοναδικό κριτήριο αξιολόγησής του. Ήτοι, όρισε κάποιο παίγνιο, που οι αποδόσεις του αυξάνονται ακριβώς με τον ίδιο ρυθμό που μειώνονται οι πιθανότητες επιτυχίας, ώστε κατά συνέπεια η προσδοκώμενη αξία του, να τείνει στο άπειρο. Αυτό πρακτικά σήμαινε πως έτσι, η προσδοκώμενη αξία αποκλείεται να αποτελεί το μοναδικό κριτήριο εκτίμησης για τη λήψη αποφάσεων. Το παράδοξο συνίσταται στο ότι παρόλο που η προσδοκώμενη αξία είναι άπειρη, τα περισσότερα άτομα για να συμμετέχουν σε αυτό το παίγνιο, δεν θα πλήρωναν κάποιο άπειρο, μα κάποιο σχετικά μικρό ποσό. Αυτό έπειτα άλλωστε, επιχειρηματολόγησε καταρχήν κι ο G. Cramer.

Παρότι το πρόβλημα τέθηκε νωρίτερα από τον Nicholas Bernoulli, ο Daniel Bernoulli (1700 – 1782) στον οποίο γνωστοποιήθηκε, ήταν εκείνος που το δημοσίευσε αργότερα μαζί με την λύση που πρότεινε στο «*Commentaries of the Imperial Academy of Science of Saint Petersburg*» (Hald 1990). Γι αυτό άλλωστε πήρε αυτή την ονομασία. Θα το εξετάσουμε πιο κάτω εκτενέστερα σε διάφορες φάσεις των προτεινόμενων λύσεών του, μάλιστα και στο πλαίσιο των σφαιρίσεων και της έντονης όπως διαπιστώθηκε συσχέτισής τους με τα τυχερά παίγνια. Είναι πολύ ενδιαφέρουσες οι απαντήσεις που δόθηκαν στο συγκεκριμένο πρόβλημα που σηματοδότησε το πέρασμα από την προσδοκώμενη αξία (expected value), προς την προσδοκώμενη χρησιμότητα (expected utility). Ο Nicholas Bernoulli μάλιστα, δεν έμεινε πλήρως ικανοποιημένος από τις «ηθικές προσδοκίες» και τις ευρύτερες απαντήσεις που δόθηκαν από τους Gabriel Cramer και Daniel Bernoulli. Η τελευταία ιδίως, έτυχε κατόπιν μιας ευρύτερης αναγνώρισης και περαιτέρω επέκτασης στις οικονομικές θεωρίες από τον J. Von Neumann, η οποία και συζητείται ακόμη ευρέως, ανεξάρτητα από την παραδοχή, ή μη, της γενικής ισχύος της.

Ο Nicholas Bernoulli ήθελε να δει τη λύση ενός μαθηματικού προβλήματος, αλλά ήταν τόσο δύσκολο ώστε είχε να περιμένει 242 χρόνια μέχρι που να ωριμάσει αρκετά η «στοχαστική» για να του δώσει μια ανάλογα καλή μεταχείριση, μια τραχιά (rough) πρώτη προσέγγιση από τον «νόμο των μεγάλων αριθμών» του Feller το 1945(Seneta, n.d.).

Ο A. Hald (1990) επισημαίνει εξ αρχής, ασκώντας κριτική στην εκ του Todhunter ιστορία των πιθανοτήτων, που γράφτηκε το 1865 (προ των αναγνώσεων του A. Markov), ότι έδωσε έμφαση σε αποδείξεις κι αποτελέσματα που πλέον δείχνουν αδιάφορα, παραλείποντας άλλα που σήμερα έχουν σπουδαία σημασία και σε αυτά αναφέρει πρώτα απ' όλα, τον Jacob και μαζί επίσης τον Nicholas Bernoulli. Παρακάτω αφιερώνει ειδικό κεφάλαιο κι ένα χρονολογικό κατάλογο με τις εντυπωσιακές συνεισφορές του Nicholas Bernoulli από το 1709 ως το 1713. Ο Nicholas Bernoulli ανοίγει προς τον de Montmort μια συζήτηση για την αντισφαίριση, που έμελε να είναι γόνιμη κι ενδελεχής, που την κλείνει και με μια περαιτέρω γενίκευση. Υποθέτει ότι η πιθανότητα του Α να κερδίσει κάποια πλήρη φάση (πόντο) στα αριθμημένα ως μονά ή ζυγά game ισούται με p_1 και p_2 αντίστοιχα, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η πιθανότητα νίκης του εξαρτάται από το αν σερβίρει, ή όχι (Hald, 1990). Την χρονιά του 1713, σε ηλικία 26 χρονών, ήταν πολύ μπροστά στη θεωρία πιθανοτήτων από τον Montmort, όπως ανοιχτά παραδέχεται εκείνος, που απορροφάται πλέον από την προσπάθεια συγγραφής μιας ιστορίας των μαθηματικών. Ήταν επίσης μπροστά κι από τον de Moivre, όμως αποσύρθηκε για διάφορους λόγους από το πεδίο, σε αυτή την τόσο νεαρή ηλικία (Hald, 1990). Οι συζητήσεις του ως προς την Jeu de Paume και οι εξελίξεις που σημειώθηκαν ως προς την ανάδυση στρατηγικών, προηγούνται της ανάμιξης του D. Bernoulli και της συζήτησης σχετικά με τη συνάρτηση χρησιμότητας.

2.2. De Montmort

«Είμαι έκπληκτος που δεν έχετε μιλήσει καθόλου γι' αυτό το παιχνίδι στο βιβλίο σας. Είναι αλήθεια ότι, η έρευνα παρομοίων προβλημάτων δεν είναι

εύκολη, μα είναι αρκετά περίεργη και δεν θα αποτύχει να βρει κάποια χρήση».

Επιστολή του Mr. Nicholas Bernoulli στον Mr. de Montmort

(Bernoulli, 1711:19)

Η πλέον πρώιμη αλληλογραφία ανάμεσα στον Pierre Remond de Montmort και κάποιο μέλος της οικογένειας των Bernoulli είναι μια επιστολή στις αρχές του 1703, από τον de Montmort προς τον Johann Bernoulli, με τον οποίο κατόπιν επικοινωνούσαν σποραδικά τα επόμενα χρόνια (Bellhouse & Fillion, 2014). Το 1709 ο de Montmort έστειλε ένα αντίτυπο της πρώτης έκδοσης *του αναφερόμενου στις πιθανότητες βιβλίου του* «Essay d' Analyse sur les Jeux de Hazard» που είχε εκδοθεί 1 χρόνο πριν (Pierre Remont de Montmort, n.d.). Στην απάντηση δε μαζί με τα σχόλια του τελευταίου, έλαβε κι ένα αντίτυπο της διδακτορικής διατριβής του ανεψιού του Nicholas που αναφερόταν σε εφαρμογές των πιθανοτήτων, οπότε έτσι αρχίζουν και τη μεταξύ τους αλληλογραφία. Ο Nicholas Bernoulli επισημαίνει από τις πρώτες επιστολές του προς τον de Montmort (10 Νοεμβρίου1711) ότι ο άλλος θείος του, πέραν από την «Ars Conjectandi», έχει αφήσει κι ένα χειρόγραφο γραμμένο στα Γαλλικά, όπου αναφέρεται στην Jeu de Paume. Συνοψίζει πολύ περιληπτικά το περιεχόμενό της και ξεκινά και πάλι τη συζήτηση για την αντισφαίριση με το χαρακτηριστικό τρόπο που αναφέρεται παραπάνω.

Ο de Montmort λαμβάνει έτσι τέσσερα προβλήματα σχετικά με την Jeu de Paume που προέρχονται από την Lettre a un ami …, τα οποία όμως είναι διατυπωμένα σε 1-2 γραμμές το καθένα. Ο Nicholas Bernoulli, του αναφέρει πως του τα στέλνει με το σκεπτικό να αναζητήσει αν θέλει τις λύσεις τους, ώστε να διαπιστώσουν εάν συμφωνούν με εκείνες του θείου του. Δεν επαναλαμβάνουμε αυτές τις περιλήψεις για τις οποίες κατόπιν και λύσεις προτείνονται και διευκρινίσεις ζητούνται.

Ο de Montmort του απαντά (1 Μαρτίου 1712) και του γράφει επίσης ότι τα προβλήματα ως προς την αντισφαίριση και το Her, τα κοινοποίησε και προς δυο άλλους ενδιαφερόμενους. Πρόκειται για τον γειτονικό προς αυτόν Αββά de Monsoury, ενώ ο άλλος ονομάζεται Mr. Waldegrave. Ο τελευταίος πρόκειται κατόπιν να προτείνει τη θεωρούμενη κι ως πρώτη υπόδειξη για τη σκοπιμότητα της τυχαιοθέτησης (randomization), που πολύ κατόπιν γενικεύεται στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων.

Ο de Montmort προσθέτει αργότερα ότι οι προαναφερθέντες του έχουν επίσης στείλει αρκετά μακροσκελείς υπολογισμούς ως προς το πρώτο από τα προβλήματα σχετικά με την Jeu de Paume, των οποίων οι αριθμητικοί υπολογισμοί είναι ακριβείς, αλλά έχουν κι εν γένει δυσκολίες στις μεθόδους τους και γι αυτό δεν τους συμπεριλαμβάνει στην επιστολή του.

Προτού προχωρήσει στις δικές του απαντήσεις, γράφει πως απαιτείται περισσότερο φως και κάποιες διευκρινίσεις, όπως το τι μπορεί να σημαίνει, αναφορικά με τη Jeu de Paume, η φράση «ο Πέτρος είναι δυο φορές ανώτερος από τον Παύλο», που του αναφέρει στο πρώτο πρόβλημα. Γνωρίζουμε βέβαια πλέον πως προκύπτει εκ της Lettre a un ami… όμως διαπιστώνεται ότι ακόμα και δεκαετίες κατόπιν, δεν είχε πρόσβαση στη σκέψη του J. Bernoulli, κάποιος τόσο εντόνως ενδιαφερόμενος για το νέο πεδίο (που έχει για παράδειγμα αφιερώσει 80 σελίδες στα παιγνίδια τα σχετικά με το Bassete, έναντι των αντίστοιχων 18 σελίδων του J. Bernoulli).

Κάποιες διευκρινίσεις αφορούν απλώς επεξηγήσεις που απλώς θα τον βοηθούσαν να δώσει υπολογιστικά ορθή απάντηση. Ορισμένες όμως επισημάνσεις του de Montmort, προς απάντηση των προβλημάτων του Nicholas και κατ' επέκταση του J. Bernoulli, σχετικά με την αντισφαίριση έχουν επίσης πολύ έντονο και πολύπλευρο ενδιαφέρον. Αποτελούν κάποιο πολύ καλό συμπλήρωμα της αρχικής επιστολής του τελευταίου και εν προκειμένω από αυτές ξεχωρίζουμε ιδίως τις επισημάνσεις που συνδέονται με το τρίτο και το τέταρτο πρόβλημα, που περιέχουν συσχετίσεις δυνάμεων ανάμεσα σε περισσότερους από δυο παίκτες. Αναφέρονται δε αντιστοίχως στο προσφερόμενο πλεονέκτημα από το δυνατό προς τον αδύναμο και στην αναμέτρηση των δυο εναντίον ενός. Ως προς το τρίτο πρόβλημα που του έχει προταθεί ο de Montmort αναφέρει ότι ο ισχυρότερος συνηθίζεται να προσφέρει στον αδύναμο πολλά και διάφορα είδη πλεονεκτήματος, όπως το να παίζει εξ ολοκλήρου από τη μια μεριά του γηπέδου και πολλά άλλα, τα οποία απαιτείται όλα να προκαθοριστούν. Επ' αυτών αντιλαμβάνεται κι αυτός ότι δεν θα ήταν το ίδιο πράγμα, για παράδειγμα, να προσφέρει κάποιος ως πλεονέκτημα τρία από τα έξι game, με το να προσφέρει 30 πόντους σε κάθε game. Ο de Montmort κάνει ενδιαφέρουσες επισημάνσεις αναφερόμενος στο τέταρτο πρόβλημα (έτσι όπως του έχει προταθεί), όπου παίζουν δυο εναντίον ενός, με δεδομένους συσχετισμούς δυνάμεων ανάμεσά τους, όπου παρατηρεί: «*Αυτό το πρόβλημα, μπορώ να πω, φαίνεται να περιλαμβάνει μία ανακρίβεια*» (Bellhouse & Fillion, 2014). Χωρίς να έχει υπόψη του τη σκοπιά του J. Bernoulli, ο οποίος γράφει κάπως από τη σκοπιά του ενός για το παιχνίδι των δυο και άνω, ο Montmort συζητά για τους δυο που συνδυάζονται καλώς ή όχι. Διαπιστώνει κάτι που όπως αντιλαμβανόμαστε μπορεί να ισχύει και γενικότερα. Ήτοι, ότι κάποιες φορές δυο παίκτες λιγότερο ισχυροί από άλλον τρίτο, μπορούν να παίξουν εναντίον του δίχως μειονέκτημα, καθώς κι ότι αντιθέτως δυο παίκτες όχι λιγότερο ισχυροί από άλλον, ενδέχεται να παίξουν με μειονέκτημα εναντίον του, σύμφωνα με το αν εκείνοι γνωρίζουν ή δεν γνωρίζουν πώς να συμπαίζουν. Είναι ένα άλλο ταλέντο, διαφορετικό από εκείνο του καθενός που παίζει καλά όταν είναι μόνος.

Παρά τις διευκρινίσεις που ζητά ο de Montmort ως προς τα προβλήματα, προτείνει τις δικές του λύσεις και διευκρινίζει επίσης ο ίδιος πως όταν κατόπιν πράξεων καταλήγει ότι ένας παίκτης οφείλει να προσφέρει στον άλλο πλεονέκτημα κάποιο μη ακέραιο αριθμό πόντων, εννοεί ότι πρέπει επιπλέον να κάνουν και μια κλήρωση, ενώ αν φθάσει σε κάποια αριθμητική ρίζα δεν μπορεί κιόλας να πραγματοποιηθεί επακριβώς η υπολογισθείσα αποζημίωση. Οι παραπάνω διαπιστώσεις του δείχνουν κάπως ελλιπή κατανόηση των ζητημάτων που έθετε ο J. Bernoulli στη Lettre a un ami…, που είναι δικαιολογημένες εν μέρει, εκ του ότι δεν έλαβε υπόψη του κάποιο βαθύ σκεπτικό, αλλά περιλήψεις κι ασκήσεις προς επίλυση. Μια επιπλέον ενδιαφέρουσα επισήμανση σχετίζεται με το ότι κάνει κάποιο πλήρη παραλληλισμό των παρτίδων της αντισφαίρισης με παρτίδες από κάποιο άλλο παίγνιο, το Petit palet. Πρόκειται για ένα παίγνιο στο οποίο οι παίκτες ρίχνουν - στρίβουν κέρματα, ή πλακωτές πέτρες, προς κάποιο στόχο που έχει τεθεί επί του εδάφους, ή σε τραπέζι κι ο παίκτης με τα περισσότερα κέρματα ή πέτρες επί του στόχου νικά (Bellhouse & Fillion, 2014).

Μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι κι εκείνος αντιλαμβάνεται τις παρτίδες ανεξάρτητα κάπως με τη σφαίριση, ή εν γένει το παίγνιο στο οποίο αναφέρονται. Ήτοι, πως δεν θα είχε πρόβλημα να δεχθεί ότι παρτίδες αντίστοιχες με αυτές της Jeu de Paume θα μπορούσαν να υφίστανται σε άλλη σφαίριση. Αναφέρουμε για παράδειγμα την καλαθοσφαίριση, όπου δεν υφίστανται game είτε set, κι επίσης δεν νικά όποιος επιτύχει το στόχο περισσότερες φορές, καθότι ισχύουν και «δίποντα» και «τρίποντα», ενώ σε καμία από τις δημοφιλείς ολυμπιακές σφαιρίσεις δεν ισχύουν και τα δύο (δηλαδή δεν έχουν scoring system με game αλλά κι αριθμητικούς συντελεστές).

2.3 De Waldegrave

Λίγα χρόνια έπειτα από το θάνατο του J. Bernoulli γίνεται κατά μαθηματικό τρόπο αντιληπτό ότι η τυχαιοθέτηση (randomizing), μπορεί σε συγκεκριμένες περιπτώσεις να έχει επιθυμητά αποτελέσματα. Στην αλληλογραφία ανάμεσα στον N. Bernoulli, τον de Montmort, αλλά και τον κύριο «de Waldegrave», ο τελευταίος έκανε το έτος 1713 μια σχετική υπόδειξη, την οποία παραδέχθηκαν και οι υπόλοιποι ως ορθή. Σε αυτήν καθίστανται σαφή τα οφέλη της μίξης των επιλογών εντός μιας συμπεριφοράς που χαρακτηρίζεται maxmin κι έμελλε έπειτα από δυο σχεδόν αιώνες να αποτελέσει τη βάση για να τεθεί από το J. Von Neumann η κεντρικής σημασίας έννοια της μικτής στρατηγικής.

Όπως λέει ο N. Θεοχαράκης (2015), ως προς τις απαρχές της θεωρίας παιγνίων, αυτές μπορούν να αναζητηθούν και στον de Waldegrave. Η λύση της τυχαιοθέτησης από εκείνον αφορούσε και πάλι καταρχήν κάποιο πρόβλημα που είχε τεθεί επί ένα παίγνιου της τράπουλας, του «Her», αν και θα μπορούσε επίσης να είχε τεθεί κι επί σφαίρισης, όπου σήμερα εφαρμόζεται και συζητείται κατά κόρον. Τα συγκεκριμένο παίγνιο της τράπουλας φάνηκε πιο πρόσφορο από την αντισφαίριση ως προς την ανάδειξη της παραπάνω έννοιας – λύσης. Ανεξάρτητα κι από το ότι θα μπορούσε να συμβεί αλλιώς, δεν είναι δύσκολο πλέον να αντιληφθεί κανείς ότι αυτό ισχύει λόγω της δομής του ενός και του άλλου, όπως ήδη προς τα εν γένει παίγνια είχε ενορατικά επισημάνει ο J. Bernoulli. Εμπίπτει με άλλα λόγια στην περίπτωση παιγνίου που ο επινοητής του το θέλησε δίκαιο, το έθεσε δε έτσι ώστε να μην έχει σημαντικό ούτε και προφανές πλεονέκτημα – προνόμιο, μήτε εκείνος που παίζει πρώτος, μήτε ο άλλος που παίζει δεύτερος. Υπό τους δεδομένους κανόνες του συγκεκριμένου παιγνίου προσφυγή στην τυχαιοθέτηση θα απαιτούταν μόνον στην όχι και τόσο συνήθη περίπτωση που ανάμεσα στους δεκατρείς αριθμούς-φιγούρες της τράπουλας, συνέβαινε να έχει το «εφτά» ο ένας και το «οκτώ» ο άλλος παίκτης. Σε αυτή την περίπτωση, στην ουσία μεταπίπτει στο «Matching pennies», που ανέδειξαν οι J. Von Neumann & O. Morgenstern (1944) ως υπόδειγμα προς ανάλυση. Απαιτείται πάντως πολύ πιο σπάνια να τυχαιοθετεί κανείς τη συμπεριφορά του στο «Her», συγκριτικά με το πόσο απαιτείται σε μια τυπική παρτίδα κάποιας σφαίρισης, ως «Matching pennies» έστω. Με τη συγκεκριμένη λύση στο προαναφερθέν χαρτοπαίγνιο, αργότερα, δέκα χρόνια πριν τη δημοσίευση του βιβλίου των J. Von Neumann & O. Morgenstern, ασχολήθηκε επίσης κι ο R.A. Fisher (1934) στην εργασία του με θέμα *«Randomisation, and an Old Enigma of Card Play»* («Τυχαιοθέτηση κι ένα Παλαιό Χαρτοπαικτικό Αίνιγμα»). Έτσι σίγουρα έκτοτε έχουμε όχι μόνον τη θεώρηση των παιχνιδιών «ικανότητας» ως παιγνίων τύχης, μα και πλέον εντός αυτών την εξέταση της τυχαιοθέτησης ως ιδιαίτερης στρατηγικής, η οποία παραδοσιακά εκλαμβανόταν ως ικανότητα. Εφόσον η πιθανότητα κάποιου να νικήσει εξαρτάται όχι μόνον από την τύχη αλλά επίσης κι από τις αποφάσεις που λαμβάνονται από τους παίκτες, το παίγνιο ονομάζεται στρατηγικό παίγνιο στη σημερινή ορολογία (Hald, 1990).

Μπορούμε ως εκ τούτου να θεωρήσουμε ασφαλώς ότι ο χαρτοπαίκτης που θα παίξει σύμφωνα με την υπόδειξη του Waldegrave ακολουθεί μια στρατηγική. Όχι βέβαια όμως πως δεν είναι στρατηγικές οι αποφάσεις αυτών που συμμετέχουν σε μια σφαίριση, όπως τη σύστησε ο J. Bernoulli, συσχετίζοντας συνολικά αυτήν και την τύχη. Οι συσχετισμένες με την τύχη στρατηγικές δεν είναι άσχετες με τις ήδη συσχετισμένες με την τύχη σφαιρίσεις.
Στην αλληλογραφία των παραπάνω τριών γύρω από τα διάφορα παίγνια, προκύπτουν κι άλλα ενδιαφέροντα ζητήματα (Bellhouse & Fillion, 2014). Ζητήματα όπως:

1. Ως προς την έννοια της αδιαφορίας. Ο de Waldegrave σε αντίθεση με τους υπόλοιπους συζητητές του δείχνει πως έχει καλή αντίληψη της αδιαφορίας

(μεταξύ αυτών που κατόπιν θα ονομαστούν καθαρές στρατηγικές)

2. Ως προς την ύπαρξη ή όχι κυκλικότητας στην ανάλυση του παιγνίου. Στην πραγματικότητα πρόκειται για κάποια παλινδρόμηση προς το άπειρο και μάλλον σκέτα αντιπαρατίθενται παρά συζητούν ως προς την ιδέα.
3. Ως προς τι συνιστά λύση σε κάποιο παίγνιο. Ο N. Bernoulli που ισχυρίζεται κάτι παρεμφερές με ότι σήμερα καλούμε λύση minimax, ενώ αντίθετα ο de Waldegrave κι ο de Montmort ισχυρίζονται ότι η λύση είναι αδύνατη. Δείχνουν να ενστερνίζονται μάλιστα και τη θεωρητικώς άκομψη υπόθεση ότι αν ο αντίπαλος δεν ξέρει να παίζει πρέπει να τον εκμεταλλευτούν.

Ο de Waldegrave είχε επίσης υποδείξει κι ένα άλλο πρόβλημα που μπορεί να συσχετιστεί με τις σφαιρίσεις, το λεγόμενο κι ως «πρόβλημα του Waldegrave», ή και «problem of the pool», που δεν αναπτύσσεται εν προκειμένω καθώς καλύπτεται από τις περαιτέρω εξελίξεις.

2.4 Gabriel Cramer

Ο Nicholas Bernoulli αλληλογραφεί μεταξύ άλλων και με τον Gabriel Cramer που μνημονεύεται ακόμη πολύ συχνά στη γραμμική άλγεβρα, χάρη στην ομώνυμη μέθοδο (γνωστός κι ως κανόνας του Cramer). Πρόκειται για το θεώρημα που δίνει τη λύση σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αριθμό αγνώστων ίσο με τον αριθμό εξισώσεων, καθώς το σύστημα γράφεται με τη μορφή πινάκων και λύνεται με τη βοήθεια οριζουσών.

Ο G. Cramer εκφράζει ως κεντρική ιδέα, ότι οι άνθρωποι αξιολογούν τα χρήματα κατ' αναλογία προς τη χρησιμότητα που μπορούν να αποκομίσουν από αυτά (Χουμανίδη και Καραγιάννης, 1986). Διατυπώνει την παραδοχή – υπόθεση ότι κάθε ποσό πάνω από 10 εκατομμύρια, ή (για λόγους απλότητας) πάνω από 2^{24} δουκάτα θεωρείται από αυτόν αξίας ίσης με 2^{24} δουκάτα ή, ακόμα καλύτερα, ότι ποτέ δεν πρόκειται να κερδίσει περισσότερα από αυτό το ποσό, και δεν έχει σημασία το πόσο καιρό παίρνει ώσπου το κέρμα να πέσει με τα γράμματα προς τα πάνω. Στην περίπτωση αυτή, υπολογίζει την προσδοκία

$$1/2 \cdot 1 + 1/4 \cdot 2 + 1/8 \cdot 4 + \ldots\ldots + 1/2^{25} \cdot 2^{24} + 1/2^{26} \cdot 2^{24} + 1/2^{27} \cdot 2^{24} + \ldots =$$
$$1/2 + 1/2 + 1/2 \ldots\ldots (24 \text{ φορές}) + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 12 + 1 = 13$$

Ο G. Cramer περιορίζει έτσι κατ' αυτό τον τρόπο την αξία της ηθικής προσδοκίας και το ισοδύναμο που πρέπει να πληρωθεί γι αυτή, στα 13 δουκάτα. Κρίνει πως είναι ένα αποτέλεσμα που του φαίνεται λογικό, στο περίπου έστω, και καθώς κανείς εχέφρων άνθρωπος δεν θα πήγαινε παραπέρα από τα 20 δουκάτα. Κρίνει ότι το να καθίσταται άπειρο το ποσό με τη χρήση αριθμητικών υπολογισμών, δεν συμφωνεί με την κοινή αντίληψη των πραγμάτων.

Ο Nicholas Bernoulli βρίσκει μερικώς μόνον ικανοποιητική την απάντησή του, καθότι πέραν των αριθμητικών υπολογισμών επί της γεωμετρικής προόδου δεν εξηγεί πότε και πως κανείς είναι βέβαιος για κάποιο ενδεχόμενο, ή συμμετρικά, πως το αποκλείει. Η πρόταση του Cramer πάντως προωθήθηκε από αυτόν και προς τον εξάδελφό του.

2.5 Daniel Bernoulli

Ο Daniel Bernoulli, ξάδερφος του Nicholas, έδωσε (το 1738) μια εξήγηση για το «Παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης», εισάγοντας για τα καλά την αρχή της προσδοκώμενης χρησιμότητας. Κωδικοποίησε την έννοια της προσδοκώμενης χρησιμότητας ως μια επαναστατική προσέγγιση της έννοιας του κινδύνου και «επεσήμανε ότι οι άνθρωποι δεν μεγιστοποιούν αναμενόμενες αποδόσεις, αλλά προσδοκώμενη χρησιμότητα». Η ιδέα του ήταν ότι η «χρησιμότητα», του ατόμου, όταν λαμβάνει κάποιο κέρδος, διαφέρει από το μέγεθος του κέρδους. Τα άτομα ενδιαφέρονται για την προσδοκώμενη χρησιμότητα των κερδών του περιουσιακού στοιχείου και όχι για την προσδοκώμενη αξία των κερδών. Πιστώνεται επίσης για την αναγνώριση της έννοιας των φθινουσών αποδόσεων (κάθε πρόσθετη μονάδα αξίζει λιγότερο από την τελευταία).

Ο Daniel Bernoulli, από τις αρχές της δεκαετίας του 1730, έχει ήδη εκφράσει και χρησιμοποιήσει την έννοια της οριακής χρησιμότητας κι επιπλέον θεωρείται ως εκείνος που για πρώτη φορά στην ιστορία της οικονομικής αναλύσεως, εφάρμοσε Αναλυτική Γεωμετρία και Διαφορικό Λογισμό. Η ανάλυσή του όμως αναφέρεται όχι στην οριακή χρησιμότητα ενός μεμονωμένου αγαθού, αλλά του εισοδήματος ενός ατόμου. Αντικείμενο της αναλύσεώς του είναι η αξία που έχει ένα τυχερό παιχνίδι για κάποιο άτομο. Τι θα ήταν «σωστό» να πληρώσει το άτομο για να συμμετάσχει στο παιχνίδι.

Την ανάλυση του D. Bernoulli ακολουθούν κατόπιν ο de Laplace και ο Siméon Denis Poisson. Ο Daniel Bernoulli, για να επιλύσει το Παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης, εισήγαγε λοιπόν την αρχή της φθίνουσας οριακής χρησιμότητας του πλούτου. Η πρώτη πλήρης αξιωματική θεμελίωση της στην θεωρία παιγνίων των John von Neumann & Oskar Morgenstern, έγινε πολύ αργότερα το 1944. Στηρίζεται σε πολλές περιπτώσεις στις επιπρόσθετες προϋποθέσεις ότι η πιθανότητα είναι «υποκειμενική», όπως εκτιμάται δηλαδή από το άτομο, γιατί η μαθηματική πιθανότητα στηρίζεται πάνω στο «νόμο των μεγάλων αριθμών», καθώς ακόμα και στο ότι αυτή η πιθανότητα μπορεί να μετρηθεί. Έκτοτε τα άτομα μπορεί να δίνουν υποκειμενικές πιθανότητες και σε μη επαναλαμβανόμενα γεγονότα και συνήθως δεν διακρίνουμε ανάμεσα στους δυο τύπους εκτίμησης πιθανότητας (Nicholson, 2008). Έτσι συναντάται και πάλι το έργο του Jacob με το έργο του Daniel Bernoulli, που αμφότεροι δεν είναι καθόλου αμέτοχοι ως προς τη χρήση του λογισμού και της γεωμετρίας στην οικονομική επιστήμη. Σύμφωνα με τους θεμελιωτές της θεωρίας παιγνίων, εφόσον οι προτιμήσεις του ατόμου πληρούν κάποια αξιώματα μπορούν να παρασταθούν από μια πραγματική συνάρτηση, η οποία ορίζεται από δεδομένες πιθανότητες και είναι η συνάρτηση προσδοκώμενης χρησιμότητας (expected utility function).

Ιδιαίτερα δριμεία κριτική στη συνάρτηση χρησιμότητας έχει ασκηθεί από τους Tverski & Kahneman (2007). Ο τελευταίος έχει τιμηθεί με Νόμπελ Οικονομίας, περιέχει δε ένα κεφάλαιο με τον εύγλωττο τίτλο τα «Σφάλματα του D. Bernoulli» στο βιβλίο του «Σκέψη αργή, σκέψη γρήγορη» κι έχει αφιερώσει στη μνήμη του πρώτου (Kahneman, 2013). Σε αυτό γράφει ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση του Daniel Bernoulli έδειξε γιατί οι φτωχοί άνθρωποι αγοράζουν ασφάλεια και γιατί οι πλούσιοι την πωλούν. Επισημαίνει πως είναι εντυπωσιακό ότι η ανάλυσή του για τις στάσεις έναντι του κινδύνου στις προτιμήσεις πλούτου παραμένει επίκαιρη έπειτα κι από αιώνες. Κρίνει όμως πιο αξιοθαύμαστη τη μακροβιότητά της, λόγω των σοβαρών ελαττωμάτων της, που δεν βρίσκονται στα όσα υποστηρίζει ρητά, μα στα όσα αγνοεί, ή υποθέτει σιωπηρά. Προσφέρονται δυο υποθετικά παραδείγματα προς επίρρωση του ισχυρισμού του.

1. Ο Α και ο Β έχουν τον ίδιο πλούτο, έστω από 5 εκατομμύρια έκαστος

Χθες ο Α είχε 1 εκατομμύριο κι ο Β είχε 9 εκατομμύρια. Είναι εξίσου ευτυχισμένοι;

2. Ο Α έχει πλούτο 1 εκατομμυρίου και ο Β πλούτο 4 εκατομμυρίων. Προσφέρεται στον καθένα η επιλογή μεταξύ:

α) μια επισφαλούς προοπτικής να καταλήξει με πλούτο 1 ή 4 εκατομμύρια και

β) μιας ασφαλούς εκδοχής να καταλήξει με 2 εκατομμύρια στα σίγουρα.Είναι και για τους δυο εξίσου καλές προοπτικές;

Η συνάρτηση χρησιμότητας του Daniel Bernoulli δέχεται συχνά κριτικές πως ορίζεται για θετικές τιμές μόνο (ενώ στον πραγματικό κόσμο οι απώλειες είναι επίσης σημαντικές) και πως δεν είναι ίδια για όλους τους ανθρώπους (καθώς εξαρτάται κι από άλλους όρους εκτός από την περιουσιακή τους κατάσταση). Σύμφωνα με κάποιους αναλυτές αυτές οι κριτικές μεταφέρονται και προς τη θεωρία παιγνίων, ενώ κατά άλλους αυτή τις αντιμετωπίζει καλώς.

Το Παράδοξο Αγ. Πετρούπολης εντός πλαισίου σφαίρισης

Υποθέτουμε καταρχήν ότι δυο φερόμενα ως ισοδύναμα μέρη Α και Β συμφωνούν να παίξουν κάποιο δίκαιο παιχνίδι, όπως αυτό ορίστηκε προηγουμένως, με αναμενόμενη τιμή μηδέν. Οι μονάδες αναφοράς που σχετίζονται με το μηδέν, μπορούν προφανώς να είναι τα δουκάτα στα οποία τέθηκε αρχικώς το ζήτημα, ή οποιαδήποτε άλλα τυπικώς εννοούμενα οικονομικά νομίσματα. Ήτοι, μπορούν να είναι όπως ως οι δραχμές που ετυμολογικά σχετίζονται με κάτι που μπορεί να δράξει κανείς στην παλάμη του, ή με τα τάλαντα που σχετίζονται με τα ταλέντα, εν προκειμένω τα ανθρώπινα. Ως γνωστόν όμως πλέον, θεωρητικώς θα μπορούσαν επιπλέον να εννοηθούν κι ως πόντοι, σύνολα πόντων, game κ.λπ. Τα εννοούμε δηλαδή ως έπαθλα, ώστε να διαθέτουν μια ευρύτερη σημασία ακόμη και για μη τυπικούς παίκτες. Εφόσον μέναμε στο δίκαιο παίγνιο με την αναμενόμενη τιμή μηδέν, διαφαινόταν ότι ακόμα κι αν το παιχνίδι επαναληφθεί κάμποσες φορές, δεν επρόκειτο να κερδίσει κανένα μέρος, κάποια αξιοσημείωτη διαφορά νομισμάτων. Υποθέτουμε όμως στη συνέχεια, ότι τα έπαθλα του παιχνιδιού αλλάζουν έτσι ώστε ανάλογα με το αν θα σημειώσει ή όχι επιτυχία στην επόμενη φάση, οπότε πρόκειται να σημειώσουμε

Α = +11 νομίσματα, Β = -1 νομίσματα

Το Α μέρος θα κερδίσει 11 νομίσματα σε περίπτωση επιτυχίας, αλλιώς θα χάσει μόνο 1 νόμισμα.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η αναμενόμενη τιμή αυτού του παιγνίου είναι:

1/2 EU(A) +1/2 EU(B) = 1/2 (+11 νομίσματα) + 1/2 (-1 νόμισμα) = 5 νομίσματα.

Αν το παιχνίδι επαναληφθεί κάμποσες φορές, το Α μέρος θα κερδίσει σχεδόν βεβαίως κάποιο αριθμό νομισμάτων. Θα είναι μάλιστα ενδεχομένως πρόθυμο να πληρώσει και κάτι στο Β για τη συμμετοχή του στο παιχνίδι, εφόσον αυτό του χαρίζει ικανοποίηση. Το παραπάνω παίγνιο είναι εξ ορισμού δίκαιο, μόνον αν το Α προσφέρει ως αρχικό δικαίωμα συμμετοχής 5 νομίσματα. Αν του προσφέρει λιγότερο, για την ικανοποίηση που του προσφέρει έστω, το παιχνίδι, δεν είναι δίκαιο. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι συχνά ο κόσμος αρνείται να συμμετάσχει σε δίκαια παίγνια. Πρόκειται για κάτι κομβικό ως προς την κατανόηση των εξελίξεων στη θεωρία της αβεβαιότητας. Τα άτομα δεν είναι γενικώς και πάντοτε διατεθειμένα να παίξουν δίκαια παιχνίδια. Στα προς συζήτηση παιχνίδια προϋποτίθεται επίσης ότι δεν αποδίδουν χρησιμότητα άλλη πέρα από τα έπαθλά τους κι ως εκ τούτου η επισήμανση ότι στοιχηματίζουν με «άδικες» πιθανότητες δεν μειώνει την ισχύ της πρότασης. Μπορούμε να υποθέσουμε λογικά ότι αντλούν χρησιμότητα από τις συνθήκες που συνδέονται με τη συμμετοχή τους στο παιχνίδι. Επομένως και να διαχωρίσουμε την καταναλωτική πλευρά του παιγνίου από την πλευρά του καθαρού κινδύνου (Nicholson, 2008).

Οι ενασχολούμενοι με τις σφαιρίσεις ενδεχομένως στοιχηματίζουν στο παιχνίδι τους, σχεδόν όπως οι άνθρωποι που σε ορισμένες περιπτώσεις είναι διατεθειμένα να στοιχηματίσουν κάποιο μικρό ποσό στο στρίψιμο ενός κέρματος, όχι όμως μια ολόκληρη περιουσία.

Έτσι σε κάποια σφαίριση όπως η Jeu de Paume του J. Bernoulli, μπορούμε να συνδυάσουμε ζητήματα όπως το πρόβλημα των πόντων, αυτό της διάρκειας του παιχνιδιού, και εν προκειμένω το «Παράδοξο της Αγ. Πετρούπολης» που προέκυψαν κατά την ανάπτυξη του λογισμού πιθανοτήτων. Έτσι περνάμε σε αυτό που διαπιστώνεται μετά το θάνατό του Jacob, το οποίο τέθηκε από τον έναν ανεψιό του, τον Nicholas και την υπόδειξη λύσης του που προτάθηκε από τον άλλο ανεψιό τον Daniel.

Μεταφέροντας αυτό το παράδοξο σε κάποια σφαίριση όπως η Jeu de Paume, μπορούμε να συνδέσουμε την υπόθεση των παραπάνω μερών που έστω παίζουν μέχρι να νικήσει το ένα τους, το Α έστω, κι αν αυτό συμβεί στη n-οστή φάση, …παρτίδα κ.λπ, λογαριάζονται υπέρ του 2^n νομίσματα. Αν και το παιχνίδι ενδέχεται εντελώς θεωρητικά να μη λήξει ποτέ, να λήξει έπειτα από απεριόριστο αριθμό επαναλήψεων, ή να λήξει και μετά το φυσικό θάνατο των αρχικών παικτών που αντικαθίστανται από άλλους, μπορούμε ασφαλώς να καταγράψουμε τις πρώτες επαναλήψεις του. Αν συμβολίσουμε ως A_i το έπαθλο που λογαριάζεται υπέρ του ενός, του Α, μόλις νικήσει στην i-οστή φάση,..παρτίδα κ.λπ., έχουμε:

$A_1 = 2p.$, $A_2 = 4p.$, $A_3 = 8p$….. $A_n = 2^n p.$

Η πιθανότητα να νικήσει για πρώτη φορά στην i-οστή φάση είναι $(1/2)^i$

Πρόκειται με άλλα λόγια για την πιθανότητα να νικήσει για i-1 φάσεις το Β και μετά να νικήσει στην τελευταία το Α.

Οι πιθανότητες των επάθλων της παραπάνω εξίσωσης υπολογίζονται έτσι ως εξής:

$p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/4$, $p_3 = 1/8$….. $p_n = 1/2^n$.

Κατά συνέπεια η προσδοκώμενη τιμή του παραδόξου της Αγίας Πετρούπολης είναι άπειρη.

$= 2(1/2) + 4(1/4) + 8(1/8) + … = 1 + 1 + 1 + … = +\infty$

Κάπως έτσι μπορούμε να μεταφέρουμε το παράδοξο στη σφαίριση, που έχει συζητηθεί από το J. Bernoulli, του οποίου τη σκοπιά έχει υπόψη ο Nicholas Bernoulli που δεν ικανοποιείται από τις απαντήσεις της εποχής, καθότι μάλλον δεν εξετάζουν επαρκώς την μεριά των διοργανωτών. Οι G. Cramer και D. Bernoulli απαντούν ότι κανένας δεν θα δεχόταν να παίξει άπειρα νομίσματα με τις πιθανότητες εναντίον του. Εκτός αυτού όμως, κανείς ίσως δεν θα δεχόταν να διοργανώσει τη σφαίριση, μη διαθέτοντας άπειρα νομίσματα να αποζημιώσει τους άλλους, καθώς ούτε κι άπειρα νομίσματα μπορεί να ζητήσει από αυτούς ως ποσό συμμετοχής τους. Έτσι εφόσον η προσδοκία ενός παιχνιδιού αποκλίνει, μπορούμε να θεωρήσουμε ως συμπληρωματική προϋπόθεση ότι το παιχνίδι μπορεί να παιχτεί γι άπειρο χρόνο, εφόσον όμως στην πραγματικότητα δεν είναι άπειρος ο αριθμός των φορών που παίζεται το παιχνίδι, η προσδοκία συγκλίνει σε μια πολύ μικρότερη τιμή. Οπότε αν παίζεται από κάποιο μεγάλο αριθμό ανθρώπων, μπορεί κατά κάποιο τρόπο να υπολογιστεί η προσδοκία από κάποιο δείγμα, άρα η όλη υπόθεση οδεύει και πάλι προς τους νόμους των μεγάλων αριθμών.

2.6 Andrei Markov

Ο A. Markov ως συνδετικός κρίκος με το έργο του J. Bernoulli και το ιστορικό πλαίσιο της ανάδυσης των στοχαστικών αλυσίδων.

Σε ευρύτερο πλαίσιο, στοχαστικές διεργασίες ονομάζονται εκείνες που είναι εγγενώς μη ντετερμινιστικές και οι οποίες δεν είχαν μελετηθεί πριν την εποχή του J. Bernoulli. Τότε κυριαρχούσε σχεδόν απόλυτα ο ντετερμινισμός, στον οποίο πίστευε με τον τρόπο του κι εκείνος, οπότε πλέον μπορούμε να τις θεωρήσουμε ως απαραίτητο συμπλήρωμά τους. Τα χρονικά μαθηματικά μοντέλα είναι είτε αιτιοκρατικά - ντετερμινιστικά (deterministic), είτε στοχαστικά (stochastic). Αν το αποτέλεσμα κάποιας μεταβολής σ’ ένα σύστημα μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα τότε το σύστημα λέγεται ντετερμινιστικό. Στην πράξη και ειδικότερα στις κοινωνικές επιστήμες τα πράγματα είναι διαφορετικά (Bartholomew, 1966).

Η κατανόηση της επέκτασης του νόμου των μεγάλων αριθμών προς την άνευ ντετερμινισμού πιθανοκρατία των αλυσίδων Markov, έχει μεγάλη σημασία για τις περαιτέρω εξελίξεις σε πολλά επιστημονικά πεδία. Η σημασία της στοχαστικότητας είναι επίσης πολύ σημαντική για την κατανόηση της εξελικτικής θεωρίας, γι αυτό και είναι επιπροσθέτως εντυπωσιακός, ο μη μαθηματικός τρόπος σύλληψής της από το Darwin καταρχήν. Με τον όρο στοχαστικές σήμαινε την διατύπωση εικασιών, υπό τη σημασία που διέθετε ο όρος στην "Ars Conjectandi" του Bernoulli. Ο όρος πλέον όμως είναι περισσότερο συνδεδεμένος με το όνομα του A. Markov (1856 – 1922), που έθεσε τις βάσεις για ένα νέο κλάδο της θεωρίας πιθανοτήτων. Αυτός ο κλάδος επεκτείνεται εύλογα και προς τη θεωρία παιγνίων. Επιπλέον, όπως ο νόμος των μεγάλων αριθμών δεν σχετίζεται μόνον με ανθρώπινα ζητήματα, το ίδιο ισχύει και για τις στοχαστικές ανελίξεις, όπως συχνά αναφέρονται.

Πριν από τον A.A. Markov, η έρευνα των στοχαστικών διεργασιών, αναφερόταν μόνον σε ανεξάρτητα μεταξύ τους συμβάντα. Ο Poisson είχε μεν προχωρήσει προς τις διεργασίες συνεχούς χρόνου, με αφετηρία βεβαίως τις αντίστοιχες διεργασίες διακριτού χρόνου του J. Bernoulli, δεν έφθασε όμως ούτε εκείνος στις στοχαστικές εξαρτημένων συμβάντων. Στη θεωρία των πιθανοτήτων, μια διεργασία Poisson (Poisson process) είναι μια στοχαστική διεργασία που μετρά τον αριθμό των γεγονότων και τα χρονικά σημεία στα οποία αυτά τα γεγονότα συμβαίνουν, μέσα σε κάποιο δεδομένο χρονικό διάστημα. Ο χρόνος μεταξύ κάθε ζεύγους διαδοχικών συμβάντων έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και υποτίθεται πως καθένας από αυτούς τους ενδιάμεσους "χρόνους αφίξεων" υποτίθεται ότι είναι ανεξάρτητος από τους υπόλοιπους. Ως ενδεικτικά παραδείγματα αφίξεων (κι αναχωρήσεων) που περιγράφονται καλώς από αυτή την κατανομή, μπορούμε να θεωρήσουμε τις γεννήσεις (και θανάτους) , τις τηλεφωνικές κλήσεις που δέχεται ένα τηλεφωνικό κέντρο, αλλά επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε και συνεχόμενους πόντους που σημειώνονται π.χ. κατά τη διάρκεια μιας σφαίρισης συγκεκριμένης χρονικής διάρκειας. (που ενδεχομένως λήγει και βάσει χρονομέτρου, όχι βάσει πόντων).

Ο Markov κατόρθωσε να συμπεριλάβει πάρα πολλά στις ομώνυμες αλυσίδες του. Κατόπιν αυτών, κάθε διεργασία Bernoulli με δυο δυνατές καταστάσεις, ή κι ευρύτερα κάθε σχήμα Bernoulli με περισσότερες, μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση αλυσίδας Markov. Απλά θεωρούμε ότι η επόμενη κατάσταση είναι ανεξάρτητη ακόμα κι από την παρούσα κατάσταση, επιπλέον της ανεξαρτησίας της από κάθε προηγούμενη κατάσταση (κι άρα στον σχετικό πίνακα μεταβατικών πιθανοτήτων, οι γραμμές που θα είναι ίδιες).

Στη θεωρία των πιθανοτήτων, μοντέλο Markov καλούμε κάθε στοχαστικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για να μοντελοποιήσει τυχαίες αλλαγές, σε συστήματα όπου υποτίθεται ότι οι μελλοντικές καταστάσεις τους, εξαρτώνται από την ενεστώσα κατάσταση μόνον κι όχι από την αλληλουχία των προηγουμένων.

Αν θέλουμε να βρούμε παραπλήσιες θεωρήσεις των καταστάσεων, είναι σκόπιμο να αναφέρουμε ότι ο Αυστριακός φυσικός και φιλόσοφος Ludwig Boltzmann (1844-1906) ήταν ένας από τους πρώτους που είχε δει ότι μια εις βάθος κατανόηση της θερμοδυναμικής των αερίων θα μπορούσε να επιτευχθεί μέσω του λογισμού πιθανοτήτων. Στο μοντέλο του, από το 1877, ο χώρος καταλαμβάνεται και καθορίζεται εντελώς από έναν πεπερασμένο αριθμό σωματιδίων που το καθένα βρίσκεται σε μία από τις πεπερασμένου αριθμού «καταστάσεις» (Shannon, 1993). Ο L. Boltzmann θα ταυτίσει την εντροπία με ένα «μέτρο ενδεχομενικότητας» μέσω της σχέσης

$S = k \log W$

Με αυτό τον διάσημο τύπο, η μη αντιστρεπτότητα θα εκφράζεται πλέον με την εξέλιξη από μια λιγότερο πιθανή σε μια περισσότερο πιθανή κατάσταση. Με τον Markov, οι καταστάσεις ορίζονται και κατηγοριοποιούνται πολύ καλώς. Έχουμε καταστάσεις προσιτές, καταστάσεις σε επικοινωνία, βασικές και μη βασικές, αμείωτες, περιοδικές κι απεριοδικές, μεταβατικές κι επαναλαμβανόμενες, απορροφητικές και μη απορροφητικές, εργοδικές (ήτοι, απεριοδικές και θετικά επαναλαμβανόμενες) κ.α.. Οι τελευταίες, οι εργοδικές, (όρος που εισήχθη από τον Boltzmann) θα χρησιμοποιηθούν μεταξύ άλλων από τον C. Shannon, κατά πολύ ευφυή τρόπο. Γίνεται έτσι η αρχή με τις αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου, που είναι το πλέον απλό από τα ομώνυμα μοντέλα Markov, ενώ πλέον για όλα τους έχουν γραφεί πολλά. Εν προκειμένω θα αρκεστούμε σε κάποιες από τις πτυχές που σχετίζονται με το θέμα μας, και κυρίως με το πώς κάποιες τυπικές γλωσσικές δομές, μπορούν να φωτίσουν τις βασικές δομές των σφαιρίσεων, που επίσης είναι ενδεχομένως γλώσσες κατά κάποιο τρόπο.

Για να παρέχουμε ένα σύντομο ιστορικό πλαίσιο της ζωής και του έργου του Markov, μα και της σχέσης του με το έργο του J. Bernoulli, χρειάζεται να πάμε πάλι πίσω δύο αιώνες πριν από τη γέννηση του. Τότε η Ρωσία κυβερνιόταν από τον Pyotr Alekseevich Romanov, δηλαδή τον τσάρο και αυτοκράτορα Πέτρο τον Α΄, τον επονομαζόμενο και Μέγα Πέτρο, που θεωρείται ως ο μεγάλος μεταρρυθμιστής της. Ο Μέγας Πέτρος έπειτα από πολλά ταξίδια στην Ευρώπη, έκανε πολλές δυτικότροπες μεταρρυθμίσεις, ενώ μετέφερε και την πρωτεύουσα από τη Μόσχα, στην Αγία Πετρούπολη, όπου ίδρυσε μια περίφημη Ακαδημία Επιστημών. Μεταξύ των πρώτων μελών της ήταν ο Leonard Euler, Jakob Hermann, ο Nicholas και ο Daniel Bernoulli, και Christian Goldbach (Basharin et al., 2004).

Οι προαναφερόμενοι σπουδαίοι επιστήμονες, σχετίζονταν αμέσως, ή εμμέσως και με τον J. Bernoulli, όπως και μεταξύ τους. Η διαδοχή τους στην Ακαδημία Επιστημών της Πετρούπολης, απ’ όπου αναδείχθηκαν επιστήμονες όπως ο Pafnuty Chebyshev (1821-1894), ο ίδιος ο A. Markov, ο Andrey Kolmogorov (1903 – 1987) κ.α. μπορεί να κριθεί επιτυχής Αντιθέτως μάλλον, η διαδοχή του Πέτρου στο θρόνο των Romanov δεν ήταν τόσο επιτυχής, μάλιστα δε την εποχή που έζησε ο Markov, ήταν σφοδρός πολέμιός τους. Ο A. Markov οργάνωσε ακόμα κι επετειακή γιορτή για τους 200 χρόνους από την ανακάλυψη του νόμου των μεγάλων αριθμών. Αυτή η επέτειος της Ars Conjectandi, ήταν γεγονός με το οποίο ενεπλάκησαν κι άλλοι σημαντικοί επιστήμονες της εποχής, όπως ο Alexander Alexandrovich Chuprov (ή Tschuprov) (1874 – 1926), καθώς θα δούμε κατόπιν. Η επιστολή (με ημερομηνία 27 Ιανουαρίου 1913) προς αυτόν έχει ως εξής:

Αξιοσέβαστε Alexander Alexandrovich

Το ερώτημα της αναγκαιότητας να σημαδέψουμε τη 200η επέτειο του νόμου των μεγάλων αριθμών έχει τεθεί στην Ακαδημία των επιστημών και οργανώθηκε μια επιτροπή για να συζητηθεί τι μπορούμε να κάνουμε. Η επιτροπή θα συναντηθεί σε μια μέρα ή δυο, στο μέρος μου.
Η συζήτηση αφορά τη μετάφραση στα Ρώσσικα της Ars Conjectandi, ή έστω του 4ου κεφαλαίου της το οποίο ακόμη και σήμερα δεν έχει χάσει ενδιαφέρον. Εντούτοις, θα ήθελα να οργανώσω μια διάσκεψη με τη συμμετοχή των αντιπροσώπων της στατιστικής, συμπεριλαμβανομένων κι εκείνων που δεν είναι μέλη της Ακαδημίας των Επιστημών.
Ασφαλώς ιδέες περί του νόμου των μεγάλων αριθμών, υπό τη σύγχρονη σκοπιά του, θα ποικίλουν όμως πολύ δύσκολα διαφιλονικείται ότι το θεώρημα του Jacob Bernoulli είναι η βάση του.
Ένας από τους ανθρώπους που μπορώ να βασιστώ, ίσως ακόμα και το μόνο πρόσωπο, είσαι εσύ. Γι αυτό, απευθύνομαι σε σένα με το ερώτημα: τι σκέφθεσαι γι αυτή την ιδέα;

Επιπλέον, η συμμετοχή διαφόρων οργανισμών δια της μορφής των αντιπροσώπων τους, μου φαίνεται δυνατή.

Πιστά δικός σας
A. Markov

Η απάντηση δεν περιλαμβάνεται στις πάνω από 100 επιστολές της συστηματικής αλληλογραφίας τους από το 1910 ως το 1917, όμως γνωρίζουμε ότι προσφέρθηκε κι εκείνος. Επρόκειτο και γι αντίδραση προς τον εορτασμό από την κυβέρνηση της 300ης επετείου του οίκου των Ρομανόφ, στα χρόνια λίγο πριν από την Σοβιετική επανάσταση.

Ο Markov ενδιαφερόταν ιδιαιτέρως για την πολιτική και το δημόσιο βίο (Basharin et al., 2004). Όταν η η ρωσική εκκλησία αφόρισε τον Leo Tolstoy, ζήτησε να απελαθεί κι ο ίδιος επίσης, όπως και συνέβη, ή όταν εκλέχθηκε στην Ακαδημία ο Maxim Gorky κι ο Τσάρος Νικόλαος ο 2ος άσκησε βέτο στην εκλογή του, ανακοίνωσε πως θα αρνηθεί οποιαδήποτε μελλοντική απονομή τιμής από τον Τσάρο, ο δε Anton Chekhov παραιτήθηκε κιόλας.

Καθ’ όλη την επαγγελματική του σταδιοδρομία, ο Markov είχε μια πολύ έντονη δημόσια εχθρότητα με τον συνάδελφό του Pavel Nekrasov (Hayes, 2013). Σε κάποιο γράμμα προς τον Markov, είναι σαφές πως δεν τον εκτιμούσε ούτε κι ο Evgeny Slutsky που ως και οικονομολόγος μεταξύ άλλων, εξελίχθηκε κατόπιν σε έναν από τους πλέον αναγνωρίσιμους ακόμα και σήμερα Ρώσους επιστήμονες (Slutsky, 2010). Ο Markov όμως είχε πραγματικά πολύ μεγάλη διαμάχη εναντίον των ιδεών του. Ο Nekrasov είχε ξεκινήσει αρχικώς ως θεολόγος, προσπάθησε να μεταχειριστεί τα στατιστικά στοιχεία και τις πιθανότητες για να παράσχει θεμέλιο στην πίστη του προς το δόγμα της ελεύθερης βούλησης. Γράφοντας επί του θέματος αυτού πρώτα το 1898 κι έπειτα το 1902 (κείμενο που φέρεται πως είναι περί τις 1.000 σελίδες) ισχυρίστηκε, εσφαλμένα όπως αποδείχθηκε, ότι ο νόμος των μεγάλων αριθμών μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε ανεξάρτητες μεταβλητές. Ο ισχυρισμός του ήταν εν ολίγοις ο εξής: Οι εθελούσιες ενέργειες – εκφράσεις της ελεύθερης βούλησης – είναι σαν τα ανεξάρτητα συμβάντα της θεωρίας πιθανοτήτων, δίχως αιτιακούς συνδέσμους μεταξύ τους. Τα δεδομένα που συλλέγονται από τους κοινωνικούς επιστήμονες, ακολουθούν το νόμο των μεγάλων αριθμών κι ως εκ τούτου, οι υποκείμενες ενέργειες των ατόμων είναι ανεξάρτητες κι εθελούσιες (Hayes, 2013). Ήτοι, ότι και ο Θεός καθορίζει τα πάντα ντετερμινιστικά αφενός κι αφετέρου οι άνθρωποι διαθέτουν ελεύθερη βούληση. Ο Markov, κατάφερε να αποδείξει ότι ο νόμος των μεγάλων αριθμών μπορεί να εφαρμοστεί και σε εξαρτημένες μεταβλητές, έτσι δε έφθασε στη θεώρηση των ομώνυμων αλυσίδων. Καταρχήν έθεσε το ζήτημα των εξαρτημένων μεταβλητών και του νόμου των μεγάλων αριθμών κατά το 1906. Άρχισε με την πλέον απλή περίπτωση – κάποιο σύστημα με δυο καταστάσεις. Υπό την προϋπόθεση ότι όλες οι μεταβατικές πιθανότητες, από την μια κατάσταση στην άλλη κι από την καθεμία στον εαυτό της, έδειξε ότι καθώς εξελίσσεται το σύστημα στη διάρκεια του χρόνου, προκύπτει επίσης αριθμητική σύγκλιση. Αυτά όμως έδειχναν μάλλον υπερβολικά θεωρητικά, εκείνη την εποχή.

Κατά τα επόμενα χρόνια επέκτεινε και γενίκευσε την απόδειξη, δείχνοντας ότι εφαρμόζεται σε ευρύτερα μοντέλα, με την αποκορύφωση του 1913, που μεταχειρίστηκε για το σκοπό του τη διαδοχή φωνηέντων και συμφώνων σε δυο Ρωσικά λογοτεχνικά έργα. Μια σημαντική αφορμή υπήρξε, όταν ο Chuprov έγραψε το 1910 για τις μαθηματικές κατασκευές που ξεκίνησαν με το θεώρημα του Bernoulli και στις γενικεύσεις από τους Laplace, Poisson, Chebysev και λίγο κατόπιν ανέφερε τον Nekrasov (Basharin, et al., 2004). Ο A. Markov του έστειλε μια κάρτα στην οποία δήλωσε έκπληκτος, καθώς κι ότι θεωρούσε τον τελευταίο ως «διαστροφή των μαθηματικών».Ο Chuprov απάντησε εύλογα ότι απλή αναφορά έκανε και πως δεν συνέκρινε τα επιστημονικά διαμέτρηματά τους. Ο Markov όμως, ήταν γενικότερα αρκετά οξύς στις κριτικές του. Έτσι αφιέρωσε κάμποσο χρόνο κι έκανε μια μνημειώδη εργασία για την αλληλουχία γραμματικών χαρακτήρων - συμβόλων, φωνηέντων και συμφώνων, καταρχήν στα πρώτα 20.000 γραμματικά σύμβολα από το έργο «Ευγένιος Ονιέγκιν» (ξεκίνησε το 1825 και συνεχίστηκε ως το 1832), του Alexander Pushkin. Έκανε κατόπιν και μια ακόμα πιο εκτεταμένη εργασία στα πρώτα 100.000 γραμματικά σύμβολα πάνω στο έργο «Τα παιδικά χρόνια του εγγονού Μπαγκρόφ» (1858), του επίσης Ρώσσου συγγραφέα Sergey T. Aksakoff (Link, 2006). Μια ενδιαφέρουσα επισήμανση εν προκειμένω, είναι ότι οι αρχαίοι Έλληνες, που δεν ανέπτυξαν ούτε συνδυαστική, ούτε αριθμητικές πιθανότητες, φέρονται ως οι πρώτοι που διαχώρισαν τους χαρακτήρες των γραμματικών συμβόλων σε φωνήεντα και σύμφωνα (Χρηστίδης, 2012). Μεταχειρίζονταν όμως ως γνωστόν αυτά τους ίδιους αυτούς χαρακτήρες, αφενός ως γράμματα κι αφετέρου ως αριθμούς. Επιπλέον δεν διέθεταν χαρακτήρα για το μηδέν (Mlodinow, 2008).

Το έργο του A. Markov πήγε σε άλλο επίπεδο τις υποθέσεις περί των γραμματικών χαρακτήρων. Ο D. Link (2006) που το μετέφρασε από τα Ρώσικα στα Γερμανικά και στα Αγγλικά διατυπώνει κάποιες εικασίες για τις πηγές έμπνευσής του, αφού πρώτα αναφέρει ότι οι εμπνεύσεις για το πείραμα του Markov είναι δύσκολο να ανακατασκευαστούν, επειδή ειδικότερα δεν τις υπαινίσσεται καθόλου.

Πάντως την εξέταση διαφόρων συνδυασμών από τα γράμματα της αλφαβήτου την παρουσίασε κατά την επέτειο της Ars Conjectandi. Ο J. Bernoulli, που αναφέρεται στην βιβλιογραφία, στο δεύτερο κεφάλαιο της, κάνει όπως διαπιστώνεται κάτι αρκετά σχετικό, καθώς μεταχειρίζεται συνδυασμούς από τα γραμματικούς χαρακτήρες στο πλαίσιο που προαναφέραμε. Τους μεταχειρίζεται βέβαια περισσότερο ως αριθμούς, οπότε εύλογα και δεν επεκτείνεται ως εκεί που επεκτάθηκε ο A. Markov, ή και μετά από αυτόν ο C. Shannon. Μια από τις πρώτες πρακτικά ‘χρήσιμες‘ εφαρμογές του έργου του Markov, η πιο σημαντική μάλλον, ήρθε πράγματι λίγες δεκαετίες αργότερα από τον C. Shannon, που εστίασε στην προβλεψιμότητα και στην έκπληξη, ώστε δια της εντροπίας να συνθέσει τη θεωρία της πληροφορίας, κι όχι μόνον. Αμφότεροι ήσαν σπουδαίοι σκακιστές, τάσσονταν κατά της χρησιμοθηρίας, παρά την τεράστια χρησιμότητα των εργασιών τους για πάρα πολλούς.

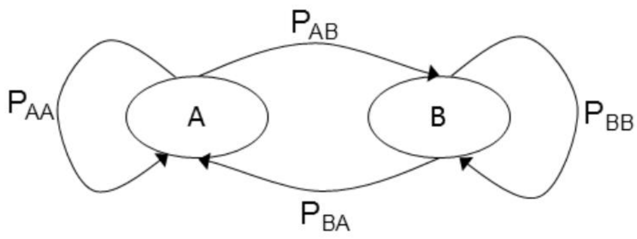
2.6.1 Εισάγοντας τις αλυσίδες Markov στις σφαιρίσεις

Αν αναζητάει κάποιος εφαρμογές των μοντέλων Markov στις σφαιρίσεις, μπορεί να βρει πάμπολλες. Υπάρχουν μοντέλα Markov, φανερά είτε κρυφά, αυτόματα είτε ελεγχόμενα, στις κυκλοφορίες των σφαιρών εντός του παιχνιδιού, στις χρηματικές ροές που σχετίζονται με αυτές κ.α. Ενδιαφέρουσες είναι εξ ορισμού και οι μη τετριμμένες κυκλοφορίες που μπορούμε να συστήσουμε λαμβάνοντας υπόψη τα μοντέλα Markov. Δεν παύουν να αποτελούν δυνατότητες του ανθρωπίνου είδους, ακόμα κι αυτές που δεν πρόκειται να επενδυθούν με την ευρύτερη ανθρώπινη προσοχή, ούτε με οικονομικό χρήμα. Λόγω της ανάγνωσης του J. Bernoulli από τον Markov, έχει κάπως ιδιαίτερο ενδιαφέρον ότι μπορούμε να εξετάσουμε τις Μαρκοβιανές αλυσίδες, στο ευρύτερο πλαίσιο των σφαιρίσεων, όπου τέθηκε η αριθμητική πιθανότητα από τον πρώτο. Μπορούμε δηλαδή κάλλιστα να εξετάσουμε τις αλυσίδες Markov στην Jeu de Paume και γενικότερα σε όλες σχεδόν τις γεωγραφημένες και χρονολογημένες ανταγωνιστικές σφαιρίσεις.

Η ανεξαρτησία που παραδεχόμαστε στις διεργασίες Bernoulli δεν είναι καθολικός κανόνας, αν και είναι πάρα πολλά τα όσα εμπίπτουν σε αυτή. Η αρχή της ανεξαρτησίας μεταξύ δυο έστω συμβάντων καθιστά εύκολο τον υπολογισμό των πιθανοτήτων την εμφάνιση αμφοτέρων, με τον απλό πολλαπλασιασμό τους. Στο παράδειγμα του J. Bernoulli αν η πιθανότητα νίκης σε κάποια φάση είναι 0.6, η πιθανότητα νίκης σε δυο φάσεις είναι 0.6 * 0.6 = 0.36. Δεν εμπίπτουν όλα τα συμβάντα στην αρχή της ανεξαρτησίας, με προφανές παράδειγμα ότι οι καιρικές συνθήκες κάποιας μέρας, δεν είναι ανεξάρτητες από αυτές της προηγούμενης. Παρομοίως το αποτέλεσμα της κάθε φάσης σε μια σφαίριση, μπορεί να μη σχετίζεται και τόσο, ή να είναι εντελώς ανεξάρτητο με το αποτέλεσμα της επόμενης. Ακόμα και λόγω του δεδομένου ισχύοντος κανονισμού της, που προκαθορίζει ότι το μέρος που εκτέλεσε το πρώτο σέρβις θα εκτελέσει και το δεύτερο, είτε κερδίσει τη φάση το ίδιο, είτε την κερδίσει το άλλο. Άλλος κανονισμός όμως, όπως της πετοσφαίρισης για παράδειγμα, μπορεί να υποδεικνύει διαφορετικά. Καθορίζει ότι το μέρος που εκτελεί το «πρώτο» σέρβις, θα εκτελέσει και το επόμενο, δεύτερο έστω, μόνο αν κερδίσει τη φάση το ίδιο. Όμως αν την κερδίσει το άλλο μέρος, θα εκτελέσει εκείνο το επόμενο σέρβις. Κι ασφαλώς ως προς το σέρβις, θα μπορούσε να ισχύει στην αντισφαίριση αυτό που ισχύει για την πετοσφαίριση, ή κι αντιστρόφως, αυτό που ισχύει στην πετοσφαίριση να ισχύει στην αντισφαίριση. Δεν κρύβουν όμως απαραιτήτως σοφία όλα, ούτε και είναι εξίσου ικανοποιητικά όλα όσα ισχύουν στις διάφορες σφαιρίσεις κι όχι μόνον. Ούτε όλα είναι κακώς κείμενα όμως κι αν έχουμε υπόψη τις αλυσίδες Markov μπορούμε ενίοτε να κρίνουμε πολύ καλύτερα. Επισημαίνουμε ότι η εξάρτηση δεν είναι επίσης καθολικός κανόνας, όπως και η ανεξαρτησία όμως, είναι πάρα πολύ σημαντική. Προκειμένου να δώσουμε κάποιο παράδειγμα αλυσίδας Markov μπορούμε να υποθέσουμε τα εξής:

1. Μια ρίψη τύπου Α ακολουθείται από άλλη ρίψη τύπου Α με πιθανότητα p_{AA}.
2. Μια ρίψη τύπου Α ακολουθείται από άλλη ρίψη τύπου Β με πιθανότητα $1 – p_{AA}$.
3. Μια ρίψη τύπου Β ακολουθείται κι από άλλη ρίψη τύπου Β με πιθανότητα p_{BB}.
4. Μια ρίψη τύπου Β ακολουθείται από άλλη ρίψη τύπου Α με πιθανότητα $1 – p_{BA}$.

Χωρίς να αγνοούμε ότι οι παραπάνω τύποι ρίψεων παρουσιάζουν ενδιαφέρον να εξεταστούν σε σχέση με τα διάφορα είδη συναρτήσεων (ενρίψεις, επιρρίψεις, αμφιρρίψεις κ.α.), μεταφέρουμε στην συνέχεια τους μεταφέρουμε στην πετοσφαίριση όπου ισχύουν, ή σε οποιαδήποτε σφαίριση, καθώς μπορούν να ισχύουν σε όλες, απλά βάσει κανονισμού. Προκειμένου μάλιστα να υποδηλώσουμε την πιθανότητα διατήρησης, ή αλλαγής του τύπου της επίθεσης χρησιμοποιούμε και τους αντίστοιχους δείκτες.



$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{bmatrix}$$

Σχήμα 5.

Είναι καταρχήν ευνόητο πως θα μπορούσαμε να βάλουμε επικεφαλίδες «τύπος Α» και «τύπος Β» σε κάθε αντίστοιχη οριζόντια σειρά, όπως και σε κάθε κάθετη στήλη του πίνακα. Ο παραπάνω γράφος (Σχήμα 5) και ο πίνακας μετάβασης (transition matrix) P μπορούν κάλλιστα να αναπαριστούν ότι:

1. Το Α μέρος επιτίθεται κι αν η προσπάθειά του είναι επιτυχής, «κερδίζει» το δικαίωμα

εκτέλεσης του σέρβις της επόμενης επίθεσης, που μένει στο ίδιο το Α, με πιθανότητα p_{AA}.

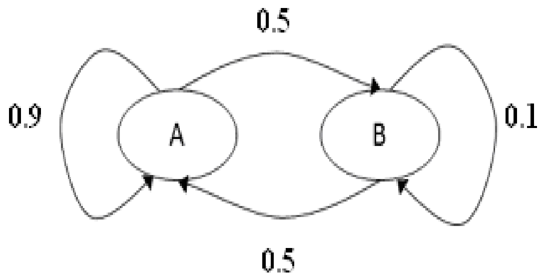
2. Το Α μέρος επιτίθεται κι αν η προσπάθειά του είναι ανεπιτυχής, «χάνει» το δικαίωμα εκτέλεσης του σέρβις της επόμενης φάσης, που περνάει στο Β, με πιθανότητα p_{AB}.
3. Το Β μέρος επιτίθεται κι αν η προσπάθειά του αν είναι επιτυχής, «κερδίζει» το δικαίωμα εκτέλεσης του σέρβις της επόμενης φάσης, που μένει στο ίδιο το Β, με πιθανότητα p_{BB}.
4. Το Β μέρος επιτίθεται κι αν η προσπάθειά του είναι ανεπιτυχής, «χάνει» το δικαίωμα εκτέλεσης του σέρβις της επόμενης φάσης, που περνάει στο Α, με πιθανότητα p_{BA}.

Εντέλει, το τι είναι όμως μια επιτυχής ρίψη μπάλας, στην οποία αποδίδουμε συγκεκριμένες πιθανότητες, είναι κάτι που μπορούμε να το εξετάσουμε κάπως ευρύτερα. Η πλέον συνήθης θεώρηση της επιτυχίας, είναι εκείνη που υποθέτει ότι βρίσκει κάποιον καθορισμένο στόχο, η μια και μόνη μπάλα που ρίχνει κάποιος μοναδικός παίκτης και είναι ευνόητη η σημασία της στο «πλαίσιο» οποιασδήποτε από τις δημοφιλείς σφαιρίσεις όπως προηγουμένως. Αναγνωρίζουμε όμως γενικότερα πάρα πολλές δυνατότητες, οι τύποι Α και Β να προσδιορίζονται σε σχέση:

- με διαφορετικούς παίκτες, ή σύνολα παικτών, που ρίχνουν υπό αντίστοιχες πιθανότητες P_A και P_B, (κι όπως προαναφέραμε, είναι η πλέον συνήθης περίπτωση που χρησιμοποιείται και σαν παράδειγμα στη θεωρία παιγνίων),
- με διαφορετικές αξίες, που αναγνωρίζουμε πως συνδέονται με τις όποιες επιτυχίες, υπό αντίστοιχες πιθανότητες P_A και P_B (κάποιος μπορεί να έχει μεγαλύτερα, ή μικρότερα ποσοστά ευστοχίας, όταν η κατά τα άλλα ίδια ρίψη έχει άλλους συντελεστές αξίας),
- με διαφορετικούς χρόνους, κατά τους οποίους ρίχνεται κάποια μπάλα, υπό αντίστοιχες πιθανότητες P_A και P_B, (κάποιος μπορεί να έχει άλλα αρχικά κι άλλα τελικά ποσοστά ευστοχίας),
- με διαφορετικούς χώρους, στα οποίους ρίχνεται μια μπάλα, υπό αντίστοιχες πιθανότητες P_A και P_B (άλλα ποσοστά για άλλα γήπεδα, όπως προς το χώμα και προς το γρασίδι),
- με διαφορετικούς στόχους, προς τους οποίους ρίχνεται κάποια μπάλα, υπό αντίστοιχες πιθανότητες P_A και P_B, (άλλα ποσοστά για τον τάδε και τον δείνα στόχο).
- με διαφορετικά αντικείμενα που ρίχνεται, αποκρούεται, ή διαμεσολαβείται κάποια μπάλα, υπό αντίστοιχες πιθανότητες P_A και P_B. (όπως για ρακέτες, γάντια, δίκτυα κ.α)

- με διαφορετικές μπάλες, που ρίχνονται από κάποιο σύνολο παικτών, ή ακόμα κι από τον ίδιο παίκτη, υπό αντίστοιχες πιθανότητες PA και PB, (όπως για μεγαλύτερη και μικρότερη μπάλα).

Εν ολίγοις, μπορούμε σε σχέση με έστω δυο προσδιορισμένες ρίψεις, να υποθέσουμε διαφορετικές αριθμητικές πιθανότητες, για πολλούς και διάφορους λόγους. Κατά συνέπεια, να θεωρήσουμε κιόλας, περισσότερες από μια αξίες, συνδεόμενες με περισσότερες από μια μπάλες, που βάλλονται προς περισσότερους από έναν στόχους, από περισσότερους από έναν παίκτες, κ.ο.κ.. Να τονίσουμε ότι στις σημερινές δημοφιλείς ανταγωνιστικές σφαιρίσεις, απουσιάζει έστω κι ένα υπόδειγμα περισσότερων από μια μπαλών που να βάλλονται προς κάποιο ένα έστω στόχο, καθώς δεσπόζει το υπόδειγμα της μιας μπάλας που βάλλεται προς έναν, από τους κατά κανόνα δυο και ίδιους στόχους. Αυτό, όταν θα αναφερθούμε κατόπιν πιο εκτενώς στο Juggling και θα το συσχετίσουμε με ένα υπόδειγμα επιλογής, που το προσπερνά κανείς γρήγορα, προκειμένου να προχωρήσει στα πιο δύσκολα, νομίζουμε πως θα εξηγήσει πολλά για τη σημασία που δείχνει να έχει σε αυτές ο χρόνος και πρωτίστως ο χώρος. Ακολούθως προχωράμε σε ένα απλό αριθμητικό παράδειγμα, προκειμένου να είναι όσο το δυνατόν πιο σαφείς κατόπιν οι δυνατότητες από τη διαφοροποίηση στους τύπους των ρίψεων, έστω και πάλι για έναν οποιοδήποτε από τους παραπάνω «λόγους» (Σχήμα 6). Υποθέτουμε ότι έστω το διάγραμμα (Σχήμα 6) κι ο πίνακας μετάβασης (transition matrix) P έχουν τα εξής δεδομένα και την ακόλουθη ερμηνεία



$$P=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Σχήμα 6.

1. Η ρίψη τύπου Α ακολουθείται από ρίψη τύπου Α, με ποσοστό 90%.
2. Η ρίψη τύπου Α ακολουθείται από ρίψη τύπου Β, με ποσοστό 10%.
3. Η ρίψη τύπου Β ακολουθείται από ρίψη τύπου Β, με ποσοστό 50%.
4. Η ρίψη τύπου Β ακολουθείται από ρίψη τύπου Α, πάλι με ποσοστό 90%.

Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση του συστήματος. Έχει για παράδειγμα γίνει μια τυχαία κλήρωση, ή καλύτερα έχει ολοκληρωθεί κάποια αρχική δοκιμασία, που τη χαρακτηρίζουμε ως «προκαταρκτική» και ξέρουμε το αποτέλεσμά της.

Έστω λοιπόν πως είναι γνωστό ότι κάποια «προκαταρκτική» ρίψη, ή αλλιώς το χτύπημα $X^{(0)}$, έχει οδηγηθεί σε μια ρίψη τύπου Α. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να έχουμε ένα διάνυσμα, όπου η ένδειξη «τύπος Α» θα έχει την τιμή 1 (100%) και η ένδειξη «τύπος Β» θα έχει την τιμή 0:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε κατόπιν να προγνώσουμε ότι στο επόμενο χτύπημα, που είναι «κανονική» ρίψη όπως κάποιο σέρβις λόγου χάριν, κι όχι «προκαταρκτική», (έπεται δηλαδή εκείνης που προέκυψε ως αποτέλεσμα κλήρωσης, ή «ειδικής» δοκιμασίας) θα είναι με ποσοστό 90% μια ρίψη τύπου Α, ενώ θα είναι με ποσοστό 10% μια ρίψη τύπου Β. Αυτή η κατάσταση του συστήματος, έστω στο πρώτο σέρβις, ή αλλιώς στο $X^{(1)}$, περιγράφεται ως εξής:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Η κατάσταση στο $X^{(2)}$, που είναι κανονική ρίψη, όπως και οι επόμενες, προγιγνώσκεται κατά τον ίδιο τρόπο:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.86 & 0.14 \end{bmatrix}$$

Ήτοι, προγιγνώσκουμε ότι η 2η κανονική ρίψη θα είναι τύπου Α με ποσοστό 86% (καθότι έχουμε 0.9 * 0.9 + 0.1 * 0.5 = 0.81 + 0.05 = 0.86). Αλλιώς, η $2^{η}$ κανονική ρίψη θα είναι τύπου Β με ποσοστό 14% (καθότι 0.1 * 0.5 + 0.9 * 0.1 = 0.05 + 0.09 = 0.14). Μπορούμε να συνεχίσουμε έτσι προς τα περαιτέρω χτυπήματα 3, 4,…κ.ο.κ., μάλιστα έτσι κάπως δομείται και η προσομοίωση Monte Carlo. Ο γενικός κανόνας για το n – οστό χτύπημα μας δίνεται ως εξής:

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n-1)} P, \qquad \text{ή αλλιώς} \qquad \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(0)} P^{n}$$

Στο παράδειγμά μας τα προγνωστικά της κατάστασης στις περαιτέρω ρίψεις καθίστανται ανακριβή, όμως τείνουν προς κάποιο συγκεκριμένο διάνυσμα που το ονομάζουμε διάνυσμα σταθερής κατάστασης. (αντιστοιχεί στην υπόθεση πως τα μέρη θα συνέχιζαν να παίζουν εσαεί). Το διάνυσμα σταθερής κατάστασης ορίζεται ως:

$$\mathbf{q} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{x}^{(n)}$$

Συγκλίνει σε ένα αυστηρά θετικό διάνυσμα μόνο αν ο P είναι κανονικός πίνακας μετάβασης (δηλαδή, υπάρχει τουλάχιστον ένα P^n με όλες τις καταχωρήσεις μη-μηδενικές).

Δεδομένου ότι το q είναι ανεξάρτητο από τις αρχικές συνθήκες, θα πρέπει να παραμένει αμετάβλητο όταν μετασχηματίζεται από τον P. Ήτοι, καθίσταται ιδιοδιάνυσμα (με ιδιοτιμή 1), και σημαίνει ότι μπορεί να προέρχεται από το P. Ήτοι:

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\
\mathbf{q}P &= \mathbf{q} \\
&= \mathbf{q}I \\
\mathbf{q}(P - I) &= \mathbf{0} \\
&= \mathbf{q}\left(\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \mathbf{q}\begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εφόσον έχουμε:

$$-0.1q_1 + 0.5q_2 = 0$$

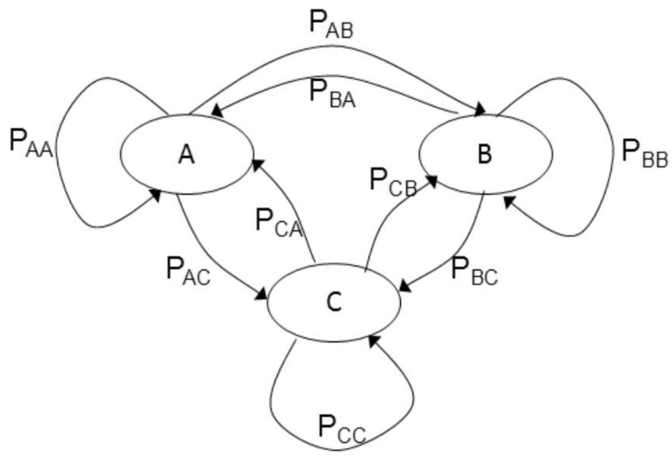
κι επίσης γνωρίζουμε ότι πρόκειται για διάνυσμα πιθανότητας, οπότε έχουμε επίσης:

$$q_1 + q_2 = 1.$$

Λύνοντας το σύστημα με τις δυο εξισώσεις έχουμε την κατανομή για τη σταθερή κατάσταση:

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.833 & 0.167 \end{bmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι μακροχρόνια, αν δεν διακόπτονταν το παιχνίδι, το 83.33% των ρίψεων θα αναμενόταν να είναι τύπου Α. Το υπόλοιπο 16.7% θα αναμενόταν να είναι ρίψεις τύπου Β (παρά το ότι έχουμε ενίοτε ρίψη τύπου Β να ακολουθείται από ρίψη τύπου Β επίσης, κατά ποσοστό 50%, ανεξάρτητα δε πάντοτε από τον τύπο της αρχικής προκαταρκτικής ρίψης). Επίσης δεν περιοριζόμαστε απαραιτήτως σε δυο καταστάσεις.



$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & p_{BB} & p_{BC} \\ p_{CA} & p_{CB} & p_{CC} \end{bmatrix}$$

Σχήμα 7.

Εξυπακούεται πως μπορούμε να περάσουμε προς αντίστοιχους γράφους (Σχήμα 7) και πίνακες σε τρεις καταστάσεις, όπως βέβαια αντί για κυκλοφορίες μπαλών, να έχουμε μεταβολές καιρού, ροές χρήματος κ.λπ.

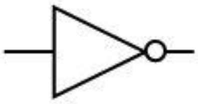
2.7 Ο Claude Shannon, η επικοινωνία και το Juggling

2.7.1 Από τη δυαδική λογική προς τα ηλεκτρονικά κυκλώματα

Την εποχή που έζησε ο Markov, και πολύ περισσότερο την εποχή που έζησε ο J. Bernoulli, το φαινόμενο του ηλεκτρισμού δεν ήταν κατανοητό, τόσο τουλάχιστον όσο ήταν στην εποχή που έζησε κάποιος πιο σύγχρονος σπουδαίος επιστήμονας, ο Αμερικάνος Claude Elwood Shannon. Αυτός μεγαλούργησε επίσης ως προς τη δυαδική λογική, επέδειξε δε και πολύ μεγάλο ενδιαφέρον για την αβεβαιότητα, για τη μείωσή της και τη μέτρησή της (ή αλλιώς ότι πλέον στην επιστήμη καλείται ως «πληροφορία»). Εν προκειμένω, μας αφορά επιπλέον λόγω του ενδιαφέροντός του ως προς τις σφαιρίσεις και ειδικότερα το Juggling, που μπορεί βεβαίως να σχετιστεί με τον ανταγωνισμό, κατά ιδιαίτερο τρόπο. Σύμφωνα και με κάμποσα άλλα αποτυπώματα της σκέψης τους, αν οι συγκεκριμένοι δυο επιστήμονες ζούσαν την ίδια εποχή θα είχαν μεταξύ τους να συζητήσουν πολλά. Ο Shannon ήταν μαθηματικός και ηλεκτρολόγος μηχανικός. Διέπρεψε στον τομέα της τεχνητής νοημοσύνης, ενώ η εργασία του στη θεωρία της πληροφορίας έχει βρει εφαρμογή και σε άλλους τομείς όπως η γλωσσολογία, η φωνητική, η θεωρία του Χάους και η κρυπτογραφία. Θεμελίωσε τη θεωρία της πληροφορίας και ανέδειξε την πληροφορία σε μετρήσιμο μέγεθος κι έτσι έθεσε έτσι τα θεμέλια για τα τηλεπικοινωνιακά δίκτυα και συνεισέφερε ιδιαίτερα στο να αναπτυχθεί η σημερινή Κοινωνία της Πληροφορίας.

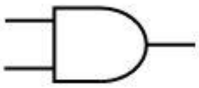
Ο Shannon εισήγαγε μια άλγεβρα Boole με δυο τιμές, που ονομάστηκε «άλγεβρα διακοπτών» («switching algebra») και απέδειξε ότι οι ιδιότητες των δισταθών ηλεκτρικών κυκλωμάτων διακοπτών μπορούν να εκφραστούν με αυτή την άλγεβρα (Mano, 1992). Επρόκειτο για την εργασία που εκπόνησε για την απόκτηση τίτλου master, υπό τον τίτλο "A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits" (1938). Πρόκειται για μια από τις σημαντικότερες εργασίες του αιώνα της, όπως έγραψε κι ο διάσημος για τη θεωρία των πολλαπλών νοημοσυνών H. Gardner (1987). Σύμφωνα με αυτή πολλά μαθηματικά προβλήματα που μπορούν να λυθούν με τη χρήση μόλις δύο συμβόλων (1 και 0), αντιστοιχίζονται με ηλεκτρικά διακοπτόμενα κυκλώματα. Το σύμβολο 1 μπορεί έτσι να υποτεθεί ως ένας διακόπτης που είχε ενεργοποιηθεί, ενώ το σύμβολο 0, ως ένας διακόπτης που είχε απενεργοποιηθεί. Επιπλέον, εκτός αυτών των απλών δηλώσεων "ναι" και "όχι", έδειξε επίσης ότι οι διακόπτες θα μπορούσαν να συνδέονται με τρόπο που να τους επιτρέπει να εκτελούν πιο πολύπλοκες λογικές πράξεις, όπως του ΚΑΙ (AND), του Ή (OR), του ΟΥΤΕ (NOR) κ.α. Με άλλα λόγια, σε αυτή τη θέση του ισχυρίστηκε ότι ο τρόπος που μπορούμε να κάνουμε μια υπολογιστική μηχανή «να σκεφθεί», είναι να χρησιμοποιήσουμε δυαδικό κώδικα, συνδέοντας διακόπτες κι εφαρμόζοντας ως προς το αποτέλεσμα, τη λογική της άλγεβρας Boole. Η ιδέα του τέθηκε αμέσως σε εφαρμογή στο σχεδιασμό των συστημάτων των τηλεφωνικών κέντρων, και πράγματι πλέον έτσι σκέφτονται όλοι οι σύγχρονοι υπολογιστές.

Μας ενδιαφέρει εν προκειμένω καθότι κατ' επέκταση μπορούμε να μεταχειριστούμε ακόμα και τα ίδια σύμβολα για την απεικόνιση των λογικών και των ηλεκτρονικών εν συνεχεία κυκλωμάτων, ώστε για παράδειγμα να συζεύξουμε, ή να διαζεύξουμε, «άνδρες» και «γυναίκες», ή «νέους» και «γέρους», ή ακόμα και την «Α μπάλα» και τη «Β μπάλα», σε κάποια σφαίριση που παίζουμε, ή θα θελήσουμε να παίξουμε. Ήτοι, μπορούμε να μεταχειριστούμε βασικές λογικές πύλες, όπως οι παρακάτω, ώστε να φτιάξουμε λογικά κυκλώματα (Σχήμα 8):



ΟΧΙ

Input	Output
I	F
0	1
1	0

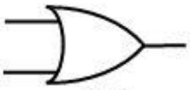


ΚΑΙ

Inputs		Output
A	B	F
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

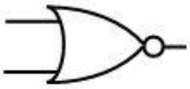
ΟΧΙ-ΚΑΙ

Inputs		Output
A	B	F
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0



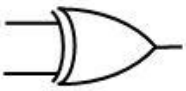
'Η

Inputs		Output
A	B	F
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1



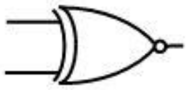
ΟΥΤΕ

Inputs		Output
A	B	F
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0



Inputs		Output
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟ-Ή



Inputs		Output
A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟ-ΟΥΤΕ

Σχήμα 8.

Μεταχειριζόμαστε έτσι για παράδειγμα συνδυαστικά κυκλώματα, (που η έξοδός τους εξαρτάται μόνο από τις τιμές εισόδου τους), αλλά κι ακολουθιακά κυκλώματα (που η έξοδός τους είναι συνάρτηση των τιμών εισόδου αλλά και της προηγούμενης κατάστασης του κυκλώματος). Τα λεγόμενα flip flop είναι τα πλέον στοιχειώδη εκ των τελευταίων. Με αυτά ελέγχεται η κυκλοφορία του ηλεκτρικού ρεύματος, ώστε για παράδειγμα να φέρνουμε σε μια, ή περισσότερες οθόνες, κάποιες εκδοχές σφαιρίσεων, που όμως δεν βασίζονται στη λογική των κυκλωμάτων flip flop για να κυκλοφορήσουν τις μπάλες τους και στην εκτός οθονών πραγματικότητα. Κάλλιστα βρίσκει εφαρμογή και αν θέλουμε μεταφέρεται αυτούσια, ώστε για παράδειγμα μια ομάδα Α να αμύνεται με γυναίκες και να επιτίθεται με άνδρες προς μια ομάδα Β που να επιτίθεται με γυναίκες και να αμύνεται με άνδρες και βάσει αυτού, οι του παραδείγματος άνδρες και γυναίκες (ή οι μεγάλοι και οι μικροί κ.λπ.), να θεωρούνται ισότιμοι όσο το 1 και το 0 στο bit. Η πραγματικότητα των σφαιρίσεων που αναπαράγονται ποικιλοτρόπως μέσα από τηλεοράσεις, video game, η/υ κ.λπ., δείχνει ενδεχομένως πολύ πιο πεζή από τη φαντασία του Shannon. Μια χαρακτηριστική ως προς το θέμα μας κατάληξη τέτοιων συνθέσεων με ηλεκτρονικά κυκλώματα, είναι ο σχεδιασμός σφαιρίσεων ως ηλεκτρονικών παιχνιδιών. Είναι πολύ ενδεικτικό ότι ως ηλεκτρονικά παιχνίδια, οι διάφορες γνωστές σφαιρίσεις, μπορούν να είναι σχεδόν πανομοιότυπες, δηλαδή να μην διαφέρει και τόσο το handball με το ping – pong (το οποίο «αντέγραφε» το λεγόμενο pong, που ήταν εκ των πρώτων ηλεκτρονικών παιχνιδιών). Υπάρχουν ορισμένες ενδεικτικές λυχνίες, μια από τις οποίες θα ανάβει και αυτή, καθώς κινείται δεξιά κι αριστερά συμβολίζει την μπάλα. Η ταχύτητα με την οποία κινείται αυτή η «μπάλα» καθορίζεται από τη συχνότητα του ρολογιού. Ο παίκτης πρέπει να πατήσει κάποιο κουμπί για να αρχίσει η μπάλα να κινείται. Αν ο παίκτης αργήσει πολύ να πατήσει το κουμπί, η «μπάλα» εξαφανίζεται (το φως σβήνει) (Mano, 1992). Εκτός του ότι οι διάφορες σφαιρίσεις ως έχουν, υλοποιούνται ως ηλεκτρονικά παιχνίδια κατά παρόμοιο τρόπο, μια άλλη ενδιαφέρουσα διαπίστωση είναι πως τα τελευταία συχνά απευθύνονται στο κοινό των σφαιρίσεων, τις οποίες τείνουν να αντιγράφουν ως έχουν και πάλι (με μεγάλη επιτυχία στα γραφικά και ως προς κάποιες τέτοιες διαστάσεις τους, μα δίχως να συλλαμβάνουν καθόλου άλλες).

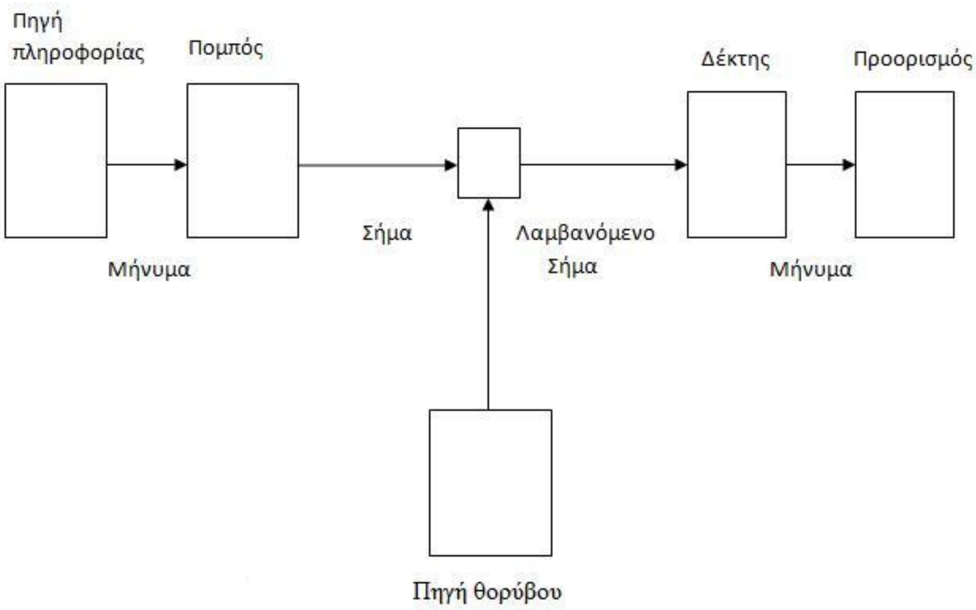
Η εργασία του Shannon ως προς τα κυκλώματα ήταν μόλις η αρχή, καθώς αναγνωρίζεται ως ακόμη πιο σημαντική η ιδέα του για τη θεωρία της πληροφορίας που διατύπωσε λίγα χρόνια αργότερα. Ενδιάμεσα έκανε το διδακτορικό του σε σχέση με τη βιολογία, με θέμα «Μια Άλγεβρα για τη θεωρητική Γενετική» καθώς συν τοις άλλοις, ήταν πεπεισμένος για την ορθότητα της εξελικτικής θεωρίας του Darwin. Αυτή και πολλές άλλες εξαιρετικές ιδέες του, για τα επικοινωνιακά δίκτυα, για το matching pennies κ.α, έχουν σπουδαίο ενδιαφέρον ως προς τις δομές και τις στρατηγικές των ανταγωνιστικών σφαιρίσεων και θα τις δούμε κατόπιν ενδεικτικά. Περιοριζόμαστε για ευνόητους λόγους, καθώς όπως και με τον J. Bernoulli κ.α., η παραγωγή των επιστημονικών δημοσιεύσεων είναι τεράστια και δεν μπορεί να εξαντληθεί επί του παρόντος, ενώ επιπροσθέτως αποτελεί αφορμή για περαιτέρω έρευνα.

2.7.2 Μια Μαθηματική Θεωρία της Επικοινωνίας – Θεωρία Πληροφοριών

Στη «Μαθηματική Θεωρία Της Επικοινωνίας» ο Shannon πρότεινε την ιδέα της μετατροπής κάθε είδους δεδομένων (όπως εικόνα, ήχο, κείμενο) σε μηδενικά και μονάδες, σε bit, ώστε χωρίς την εργασία του Shannon, ακόμα και το διαδίκτυο όπως το γνωρίζουμε, δεν θα μπορούσε να έχει δημιουργηθεί (Lewbel, 2001). Η θεωρία της επικοινωνίας, ή, σε ευρύτερες εφαρμογές της, η θεωρία πληροφοριών, ασχολείται με την ανακάλυψη των μαθηματικών νόμων που διέπουν τα συστήματα έχουν σχεδιαστεί για να επικοινωνούν, ή να χειρίζονται την πληροφορία. Όπως θα επισημάνει ο Shannon, ενώ τα κεντρικά αποτελέσματα κυρίως παρουσιάζουν ενδιαφέρον για τους μηχανικούς της επικοινωνίας, μερικές από τις έννοιες της, έγιναν αποδεκτές και βρήκαν χρησιμότητα σε τομείς όπως η ψυχολογία και γλωσσολογία. Όπως αναφέρει κιόλας, η πληροφορία ερμηνεύεται με την ευρύτερη έννοια, για να περιλάβει τα μηνύματα που εμφανίζονται σε οποιαδήποτε από τα κοινώς εννοούμενα μέσα επικοινωνίας, αλλά ακόμα και τα σήματα που εμφανίζονται στις νευρικά δίκτυα των ζώων και του ανθρώπου. Εν προκειμένω λοιπόν επεκτεινόμαστε σε περιοχές που δεν του ήσαν παντελώς άγνωστες. Πάντως, η έννοια της πληροφορίας δεν πρέπει να συγχέεται με την έννοια του στοιχείου. Τα στοιχεία είναι τα κύρια συστατικά από τα οποία αντλούνται, ή αποτελούνται οι πληροφορίες. (Τασόπουλος, 2005)

Αναφέρουμε εν προκειμένω ότι οι αρχές της σύγχρονης θεωρίας της επικοινωνίας εντοπίζονται σχεδόν δυο αιώνες πριν. Γύρω στο 1823 γίνεται μια πολύ σημαντική διερεύνηση της ηλεκτρικής επικοινωνίας, πιο συγκεκριμένα η σχετική με τον ηλεκτρικό τηλέγραφο εργασία του S. Morse και του πλέον κατηργημένου σχεδόν, αλλά διάσημου διεθνούς κώδικά του, στον οποία στέκεται κι ο Shannon (Shannon, 2006). Στον κώδικα του Μορς έχουμε μόνον τελείες και παύλες αντί των αρκετά περισσοτέρων γραμματικών χαρακτήρων, υπάρχουν δε επίσης κενά μεταξύ γραμμάτων και μεγαλύτερα κενά μεταξύ λέξεων. Σκέφθηκε δε ο επινοητής του να αποδώσει στα πιο κοινά γράμματα με σύντομους συνδυασμούς από τελείες και παύλες, στα δε σπανιότερα, πιο μακρούς συνδυασμούς, ώστε κατάφερε ένα πολύ σημαντικό πρώτο βήμα στην αποτελεσματική κωδικοποίηση μηνυμάτων.

Ο Αμερικάνος εφευρέτης Thomas Alva Edison, εκ των παιδικών ηρώων του Shannon, βελτίωσε περαιτέρω το σύστημα, αποδίδοντας σημασία όχι μόνο στις μεταβολές τις διεύθυνσης του ρεύματος, μα και στις αυξομειώσεις της έντασής του. Ο Shannon (2006) στο «A Mathematical Theory of Communication» αναφέρεται επίσης στα σημαντικά άρθρα του Nyquist που μιλά ευθέως για μετάδοση ευφυίας από τηλέγραφο και του Hartley που ορίζει το ποσό της πληροφορίας ως το λογάριθμο του αριθμού των ξεχωριστών μηνυμάτων. Ο Hartley χρησιμοποιεί το H για τον συμβολισμό του ποσού πληροφορίας που σχετίζεται με n επιλογές, που για καθεμία εκ των οποίων διατίθενται s σύμβολα, ώστε φτιάχνει την παρακάτω εξίσωση, $H = n \log s$. Ο Shannon πρόσεξε ότι δεν αφήνονταν στα s σύμβολα η δυνατότητα να έχουν άνισες πιθανότητες εμφάνισης, ή ότι ήταν δυνατόν να υπάρχει μια πιθανή εξάρτηση μεταξύ των n διαδοχικών συμβόλων. Είναι άρα ευνόητη πλέον και η σημασία του ξεχασμένου J. Bernoulli, καθώς και του μεταγενέστερου A. Markov, το έργο του οποίου γνώριζε ο Shannon αν κι εκείνος δεν ήταν τόσο γνωστός εκτός Σοβιετικής Ένωσης. Ήταν δε έπειτα κι ο A. Kolmogorov που αναγνώρισε και υπέδειξε αμέσως, και στους Αμερικανούς συναδέλφους του, την αξία που είχε το έργο του Shannon (Shannon, 2006). Στην εισαγωγή του ο Shannon γράφει πως το θεμελιώδες πρόβλημα της επικοινωνίας είναι η αναπαραγωγή σε ένα σημείο, ενός μηνύματος που επιλέγεται σε ένα άλλο σημείο, είτε με ακρίβεια, είτε κατά προσέγγιση. Το πρωτεύον χαρακτηριστικό του πραγματικού μηνύματος, είναι πως πρόκειται για κάτι που έχει επιλεγεί από ένα σύνολο πιθανών μηνυμάτων κι έτσι ο σχεδιασμός ενός επικοινωνιακού συστήματος πρέπει να γίνει έτσι ώστε αυτό να λειτουργεί για κάθε δυνατή επιλογή κι όχι μόνον για το μήνυμα που πράγματι θα επιλεγεί.



Σχήμα 9.

Για το επικοινωνιακό σύστημα της παραπάνω εικόνας, ο Shannon εξηγεί ποια είναι τα πέντε τμήματα από τα οποία αποτελείται. Η πηγή πληροφορίας παράγει το μήνυμα, ή την ακολουθία μηνυμάτων που πρόκειται να αποσταλούν στο σημείο λήψης. Ο πομπός ενεργεί πάνω στο μήνυμα κατά τρόπο ώστε να παράγει ένα σήμα που είναι κατάλληλο για την αποστολή μέσα από το κανάλι. Το κανάλι είναι απλώς το μέσο που χρησιμοποιείται για την εκπομπή του σήματος. Ο δέκτης συνήθως εκτελεί την αντίστροφη λειτουργία εκείνης που εκτελείται στον πομπό, δηλαδή ξαναφτιάχνει από το σήμα το μήνυμα. Ο προορισμός είναι το πρόσωπο (ή το πράγμα) στο οποίο απευθύνεται το μήνυμα (Σχήμα 9). Ο Shannon γράφει κατόπιν τι χρειάζεται για να διερευνηθούν ορισμένα γενικά προβλήματα που αφορούν συστήματα επικοινωνίας όπως το εικονιζόμενο παραπάνω. «*Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο είναι καταρχήν απαραίτητο να αναπαρασταθούν ως μαθηματικές οντότητες τα διάφορα εμπλεκόμενα στοιχεία. Αυτές οι οντότητες πρέπει να είναι κατάλληλα εξιδανικευμένες σε σχέση με τα φυσικά τους ανάλογα*» (Shannon, 1993).

Αυτή η συλλογιστική μπορεί βεβαίως να μεταφερθεί και στις σφαιρίσεις, όπως ενδεικτικά θα δούμε παρακάτω, αυτή την ίδια συλλογιστική που ακολουθεί και όταν καταπιάνεται με την ανάλυση του Juggling. Οι μαθηματικές οντότητές του πραγματικά είναι θαυμάσιες και είναι ιδιαιτέρως κατάλληλες όχι μόνον σε σχέση με τα ηλεκτρικά κυκλώματα, στα οποία αναφέρεται καταρχήν. Ο συγγραφέας, δίνει την ταξινόμησή των επικοινωνιακών συστημάτων σε τρεις κύριες κατηγορίες:

α) τα διακριτά (ασυνεχή), με τυπική περίπτωση την ενσύρματη τηλεγραφία, όπου το μήνυμα είναι μια ακολουθία γραμμάτων και το σήμα μια ακολουθία από τελείες, παύλες και κενά.

β) τα συνεχή, με τυπική περίπτωση την τηλεόραση, όπου το μήνυμα και το σήμα αντιμετωπίζονται ως συνεχείς συναρτήσεις.

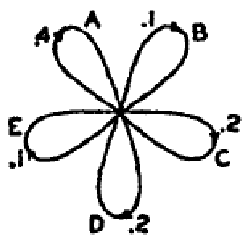
γ) τα μικτά, με τυπικό παράδειγμα την εκπομπή ομιλίας PCM (μια κωδικοποίηση στην οποία η τιμή που προκύπτει από τον κβαντισμό του σήματος είναι ομοιόμορφα δομημένη με διαστήματα), όπου εμφανίζονται διακριτές και συνεχείς μεταβλητές.

Ο Shannon στο κλείσιμο της εισαγωγής του στα επικοινωνιακά συστήματα, γράφει ότι θα εξετάσει καταρχήν τα ζητήματα των διακριτών συστημάτων, καθώς αυτά βρίσκουν εφαρμογή όχι μόνον στη θεωρία της επικοινωνίας, μα και στη θεωρία των η/υ, στη σχεδίαση τηλεφωνικών συναλλαγών (όπου πράγματι εφαρμόστηκαν άμεσα), καθώς επίσης και σε άλλα πεδία (όπως αυτά που μας ενδιαφέρουν εν προκειμένω). Σημειώνει επιπροσθέτως, ότι η θεωρία αυτών διαμορφώνει τα θεμέλια τόσο για τα συνεχή, όσο και για τα μικτά, οπότε εν συνεχεία προχωράει στα διακριτά συστήματα. Με αυτά θα ασχοληθεί συγκριτικά περισσότερο κι εκείνος, εμείς δε σχεδόν αποκλειστικώς και συνοπτικά εν προκειμένω, καθώς θα σταθούμε σε αυτά που μας αφορούν πρωτίστως. Ο Shannon αναφέρεται στο πως περιγράφεται μαθηματικά μια πηγή πληροφορίας και πόση είναι η ποσότητα πληροφορίας σε bit ανά δευτερόλεπτο από μια δοθείσα πηγή. Το κύριο σημείο είναι η επίδρασης της γνώσης των στατιστικών χαρακτηριστικών της πηγής στην μείωση της απαιτούμενης χωρητικότητας του καναλιού, με την κατάλληλη κωδικοποίηση της πληροφορίας. Ήτοι, στα διακριτά συστήματα όπως η τηλεγραφία, τα μηνύματα αποτελούνται από ακολουθίες γραμμάτων που όμως δεν είναι εντελώς τυχαίες κι έτσι φθάνει στο ότι οι διακριτές πηγές εκφράζονται ως στοχαστικές διεργασίες. Μα κι αντιστρόφως, ότι κάθε στοχαστική διεργασία που παράγει μια διακριτή ακολουθία συμβόλων μέσα από ένα πεπερασμένο σύνολο, μπορεί να θεωρηθεί ως διακριτή πηγή. Δεδομένου ότι έχουμε αναφερθεί προηγούμενα στη εξέταση των γραμματικών συμβόλων από τον A. Markov, μα και στις σχέσεις που μπορούμε να αναπτύξουμε με τις απλές ρίψεις έστω, σκιαγραφούμε απλώς τη συλλογιστική του Shannon.

Στο παράδειγμα A, που δίνει καταρχήν, παίρνει 5 γράμματα A, B, C, D, E που επιλέγονται με πιθανότητα 0.2, οι δε διαδοχικές επιλογές είναι ανεξάρτητες, ώστε οδηγείται σε μια αλληλουχία, όπως στο τυπικό παράδειγμα αυτής που δίνει, την οποία κατασκεύασε με τη χρήση ενός πίνακα τυχαίων αριθμών και αντιστοιχεί σε προσέγγιση μηδενικής τάξεως.

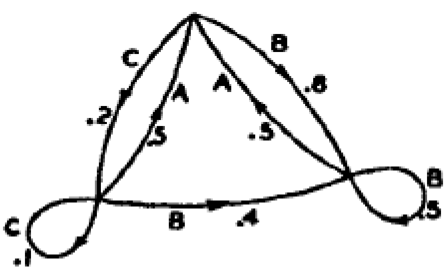
BDCBCECCCADCBDDAAECEEA
ABDDAEECACEEBAEECBCEAD

Στο παράδειγμα Β, καθώς τα γράμματα οποιασδήποτε γλώσσας δεν είναι ισοπίθανα, τους αποδίδει κάποιες άνισες πιθανότητες, τις 0.4, 0.1, 0.2, 0.2 και 0.1 όπως απεικονίζονται και στο σχετικό γράφημα που ο ίδιος παραθέτει αργότερα (Σχήμα 10). Εφόσον οι διαδοχικές επιλογές παραμένουν ανεξάρτητες, δίνει ένα νέο τυπικό παράδειγμα αναμενόμενης ακολουθίας, που αντιστοιχεί σε προσέγγιση πρώτης τάξεως.

	AAACDCBDCEAADADACEDA EADCABEDADDCECAAAAAD

Σχήμα 10.

Στο παράδειγμα Γ, οι διαδοχικές επιλογές γραμματικών χαρακτήρων έχουν άνισες πιθανότητες και δεν είναι ανεξάρτητες. Εξαρτώνται στην απλούστερη περίπτωση από τον προηγούμενο ένα τελευταίο γραμματικό χαρακτήρα (αν όχι κι από περισσότερους). Η στατιστική δομή τους περιγράφεται όπως είδαμε από ένα σύνολο πιθανοτήτων μετάβασης p_i (j), τις πιθανότητες το τάδε γράμμα i να ακολουθείται από το δείνα γράμμα j. Ισοδύναμα μπορούμε να εξετάσουμε τις πιθανότητες, τις σχετικές συχνότητες δηλαδή, των διαφόρων «διγραμμάτων» p (i,j) οπότε πηγαίνουμε σε προσέγγιση δευτέρας τάξεως (εφόσον προχωρήσουμε σε τριγράμματα πηγαίνουμε και σε προσέγγιση τρίτης τάξεως). Δίνει κατόπιν ένα αντίστοιχο τυπικό παράδειγμα (Σχήμα 11).

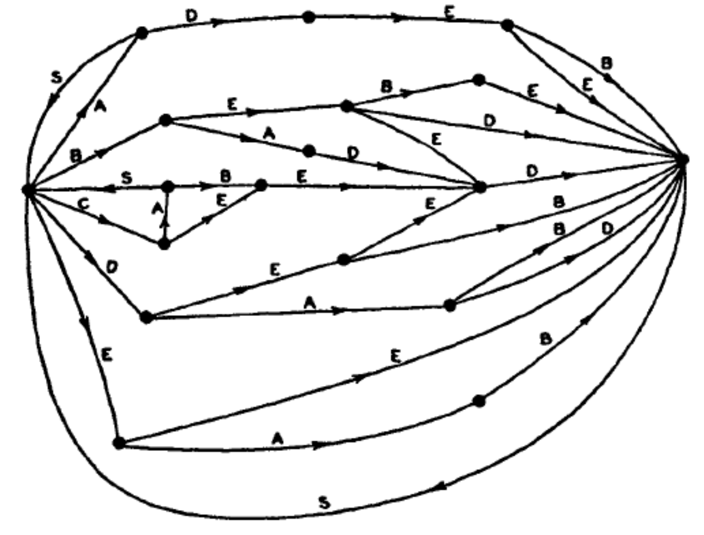
	ABBABABABABABABBBABBBBBAB ABADABABBBACACABBABBDBABB ABACBBDABA

Σχήμα 11.

Στο παράδειγμα Δ, περνάει σε στοχαστικές διεργασίες που παράγουν κείμενο το οποίο αποτελείται πλέον από μια ακολουθία λέξεων. Υποθέτει μια γλώσσα που διαθέτει έστω 5 γράμματα A, B, C, D, E, από τα φτιάχνονται 16 λέξεις με τις αντίστοιχες πιθανότητες

.10 A	.16 BEBE	.11 CABED	.04: DEB
.04 ADEB	.04 BED	.05 CEED	.15 DEED
.05 ADEE	.02 DEED	.08 DAB	.01 EAB
.01 BADD	.05 CA	.04 DAD	.05 EE

Υποθέτει έπειτα ότι οι διαδοχικές λέξεις επιλέγονται ανεξάρτητα και διαχωρίζονται μεταξύ τους με ένα κενό. Δίνει μετέπειτα ένα αντίστοιχο τυπικό παράδειγμα μηνύματος



DAB EE A BEBE DEED DEB ADEE ADEE EE DEB BEBE BEBE BEBE ADEE BED DEED DEED CEED ADEE A DEED DEED BEBE CABED BEBE BED DAB DEED ADEB

Σχήμα 12.

Ο Shannon απλοποιεί πολύ τα πράγματα στο τελευταίο γράφημα που δείχνει περίπλοκο, γράφημα με το οποίο εξηγεί τις εργοδικές και τις μικτές πηγές, καθώς και τα κυκλώματα, δηλαδή τις κλειστές σειρές γραμμών με βέλη προς τον ίδιο προσανατολισμό (Σχήμα 12). Εξυπακούεται ότι και στις λέξεις δεν περιορίζεται σε προσεγγίσεις μηδενικής τάξεως, αφού υφίστανται και μεταξύ τους συσχετίσεις όπως αυτές μεταξύ των γραμματικών χαρακτήρων (όπως αναφέρει άλλωστε αργότερα). Ο Shannon επισημαίνει ότι τέτοιες τεχνητές γλώσσες χρησιμεύουν στην κατασκευή απλών προβλημάτων και παραδειγμάτων, προκειμένου να διευκρινισθούν διάφορες δυνατότητες. Προσθέτει δε ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε μια φυσική γλώσσα με τη βοήθεια μιας σειράς απλών τεχνητών γλωσσών. Επιπλέον δίνει ένα εντυπωσιακό παράδειγμα, στο οποίο ένα αδόμητο σύνολο γραμμάτων με την εφαρμογή των παραπάνω καταλήγει σε λέξεις με δομή, που προσεγγίζει όλο και περισσότερο εκείνη της αγγλικής γλώσσας. Έπειτα από αυτά περνάει στην εξήγηση των εννοιών της εντροπίας και της πληροφορίας και την μέτρησή του, οι οποίες εξηγούνται ακόμα πιο απλά στο «Information theory» *(«Θεωρία Πληροφοριών»)* (Shannon, 1993).

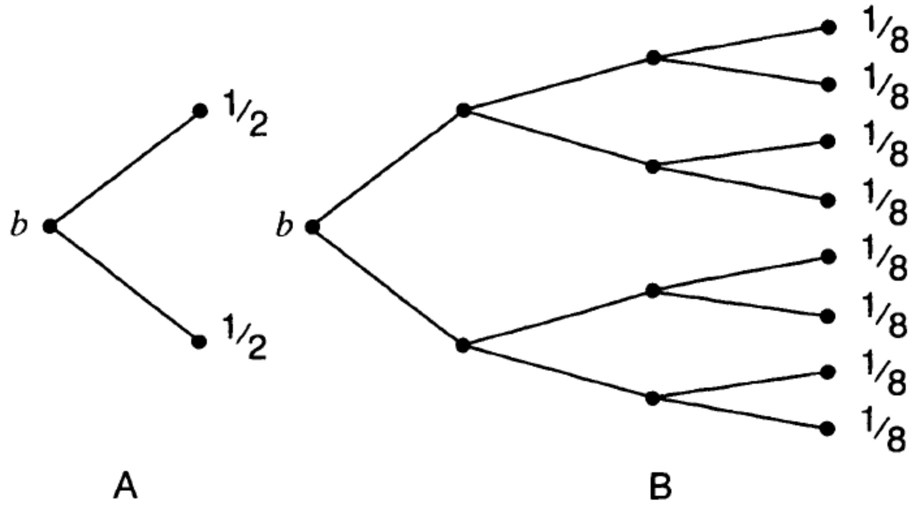
Ο Shannon ήταν ο πρώτος που συνειδητοποίησε τη σχέση ανάμεσα στην εντροπία και στην πληροφορία. Δηλαδή ότι όπως κατά τη θερμοδυναμική η εντροπία αποτελεί ένα μέτρο του πλήθους των πιθανών μικροκαταστάσεων ενός συστήματος, η εντροπία κατά τη θεωρία της πληροφορίας του αποτελεί ένα μέτρο του πλήθους των πιθανών 'μεταφράσεων' που περιέχει ένα μήνυμα, το οποίο δεν είναι ανάγκη να έχει νόημα. Η εντροπία, κατά Shannon, έχει ως μονάδες τα bits (στο δυαδικό σύστημα). Ο ίδιος αναφέρει ως παράδειγμα επιλογής το στρίψιμο του νομίσματος, μα θα μεταχειριστούμε άλλο παράδειγμα για να μεταφέρουμε την έννοια στο γνώριμο πλαίσιο των ανταγωνιστικών σφαιρίσεων. Επιστρέφουμε έτσι κατά κάποιο τρόπο στο βαθμό βεβαιότητας του J. Bernoulli και στην αρχή των αριθμητικών πιθανοτήτων, προτού περάσουμε στο Juggling του Shannon.

Ασφαλώς για την εντροπία και την πληροφορία υπάρχουν πολύ πιο συνηθισμένα παραδείγματα, τόσο από την Jeu de Paume, που όμως «συναντήθηκε» με τις πιθανότητες κατά τη γέννησή της, όσο κι από το Juggling που συγκινούσε τον ίδιο. Οι μικροκαταστάσεις της Jeu de Paume, είναι ενδεχομένως αρκετά μεγάλες, μα δεν θα έβλαπτε να λάβουμε υπόψη μας ότι οι γεφυρώσεις τους με τις μακροκαταστάσεις είναι έτσι κι αλλιώς ζήτημα, ακόμη και σήμερα, στη φυσική επιστήμη, σύμφωνα με το στόχο του Boltzman. Κατά την όχι και τόσο μακρινή εποχή του άλλωστε, ακόμη δεν είχε γίνει γενικά αποδεκτό από τους φυσικούς ότι η ύλη αποτελείται από άτομα. Το τελευταίο σήμερα είναι κοινώς αποδεκτό, όμως η κβαντομηχανική που σχετίζεται με το ατομικό και το υποατομικό επίπεδο, έχει ακόμη διενέξεις με τη γενική σχετικότητα του μακρόκοσμου.

Στο παράδειγμά μας εν προκειμένω θεωρούμε και πάλι την Jeu de Paume ως διεργασία Bernoulli, όπου οι δυνάμεις των αντιπάλων δεν είναι απαραιτήτως ίσες, ή απαραιτήτως άνισες. Η εντροπία του αγνώστου αποτελέσματος της αναμέτρησής τους σε μια επικείμενη παρτίδα, ή game, ή στην πιο μικρή φάση, μεγιστοποιείται όταν τα αντίπαλα μέρη είναι ισοδύναμα. Δηλαδή, όταν τόσο το Α όσο και το Β έχουν ίσες πιθανότητες νίκης 1/2. Αυτή είναι η κατάσταση της μέγιστης αβεβαιότητας, καθώς έτσι έχουμε τη μέγιστη δυσκολία πρόβλεψης του αποτελέσματος της επικείμενης αναμέτρησης. Το αποτέλεσμα της κάθε παρτίδας εφόσον πρόκειται για παρτίδα, game εφόσον πρόκειται για game κ.ο.κ, θεωρούμε έτσι πως μας δίνει ένα bit πληροφορίας. Είναι χαρακτηριστικό της εντροπίας, ότι είναι μέγιστη όταν οι πιθανότητες είναι ίσες. Τότε το μήνυμα, εν προκειμένω το αποτέλεσμα της αναμέτρησης, εμπεριέχει τη μέγιστη δυνατή ποσότητα πληροφορίας (ή ισοδύναμα, στα πλέον συνήθη πλαίσια, το μέγιστο δυνατό ρυθμό μετάδοσής της). Ο Shannon αναπαριστά την επιλογή που εμπεριέχεται στο bit της πληροφορίας σχηματικά, με το πολύ κατάλληλο γι αυτές τις περιπτώσεις δυαδικό δενδρόγραμμα. Το σημείο b σε αυτό, είτε η επάνω, είτε η κάτω γραμμή μπορεί να επιλεγεί με πιθανότητα ½ για καθεμία από τις δυνατότητες. Αν υπάρχουν

Ν τέτοιες δυνατότητες, με πιθανότητα ½ η καθεμία, η ποσότητα της πληροφορίας μας δίνεται από τον τύπο $\log_2 N$.

Στο παρακάτω σχήμα θέτει Ν = 8, που σημαίνει ότι υπάρχουν 8 δυνατότητες, καθεμία με πιθανότητα ίση με 1/8 (Σχήμα 13). Μπορεί έτσι να αναπαριστά την πιθανότητα ½ που έχει κάποιος τάδε συγκεκριμένος παίκτης, να χάσει έστω από τον δείνα ισοδύναμό αντίπαλό του σε 3 διαδοχικές φάσεις, ή την πιθανότητά ½ του να νικήσει και στους 3 γύρους μιας διοργάνωση που λαμβάνει μέρος μεταξύ οκτώ συνολικώς συμμετεχόντων για τους οποίους δεν γνωρίζουμε τίποτα, ή κάποιο άλλο συνδυασμό τέτοιων αποτελεσμάτων, όπως να κάνει με συγκεκριμένη σειρά 2 νίκες και 1 ήττα, ή να κάνει έτσι 1 νίκη και 2 ήττες. Σε κάθε περίπτωση από τις παραπάνω, το να μάθουμε, συνδέεται με το $\log_2 8 = 3$.



Σχήμα 13.

Ωστόσο, αν γνωρίζουμε ότι οι αντίπαλοι δεν είναι ισοδύναμοι και η αναμέτρησή τους δεν είναι δίκαιη, αλλά επέρχεται νίκη του Α, ή νίκη του Β, με αντίστοιχες πιθανότητες p και q, όπου $p \neq q$, τότε υπάρχει μικρότερη αβεβαιότητα. Θεωρούμε έτσι πως το ένα μέρος είναι πιο πιθανό να νικήσει απ' ότι το άλλο. Η μειωμένη πλέον αβεβαιότητα, ποσοτικοποιείται ως χαμηλότερη εντροπία. Ήτοι, κατά μέσο όρο, λαμβάνουμε λιγότερο από ένα bit πληροφορίας, κάθε φορά που παίζουν τα ανισοδύναμα μέρη. Ο τύπος στην περίπτωση άνισων πιθανοτήτων είναι λίγο πιο περίπλοκος. Πιο συγκεκριμένα, όταν οι επιλογές έχουν αντίστοιχες πιθανότητες $p_1, p_2, \ldots. p_n$, η ποσότητα της πληροφορίας, μας δίνεται τότε από τον τύπο

$H = - (p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 + \ldots + p_n \log_2 p_n)$.

Υπάρχουν όμως κι ακραίες περιπτώσεις, όπως αν θεωρήσουμε πως πρόκειται για μια αναμέτρηση που δεν πρόκειται ποτέ να νικήσει το Α, ή μια αναμέτρηση που δεν πρόκειται ποτέ να νικήσει το Β μέρος. Έτσι, δεν έχουμε καθόλου αβεβαιότητα, άρα η εντροπία είναι μηδέν. Γενικά ο τύπος για την ποσότητα της πληροφορίας δίνει τιμές που κυμαίνονται από το

0 – όταν ένα από δυο ενδεχόμενα είναι σίγουρο πως θα συμβεί (έχει πιθανότητα 1) – έως τη μέγιστη τιμή του $\log_2 N$, όπου όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα (έχουν πιθανότητα 1/N). Τα παραπάνω ανταποκρίνονται διαισθητικώς στην ελάχιστη πληροφορία που παράγεται από κάποιο ειδικό συμβάν (ότι είναι ήδη σίγουρο πως θα επέλθει) και στη μέγιστη πληροφορία, ή αλλιώς μέγιστη προηγούμενη του συμβάντος αβεβαιότητα. Στη συνέχεια ο Shannon υποδεικνύει ότι κάποιες από τις παραπάνω ιδέες μπορούν να γίνουν καλώς κατανοητές αν αναλογιστούμε ένα παιχνίδι όπου επιχειρείται ο προσδιορισμός ενός πράγματος με συγκεκριμένο αριθμό ερωτήσεων, που απαντώνται μόνον με «ναι», ή «όχι».

Σύμφωνα με την παραπάνω θεωρία, κάθε ερώτηση μπορεί, δια μέσου της απαντήσεώς της, να μας παρέχει από μηδενική πληροφορία, έως $\log_2 2$, ή ισοδύναμα, ένα bit πληροφορίας (ανάλογα με το αν οι πιθανότητες του «ναι» και «όχι» στις απαντήσεις είναι πολύ άνισες, ή περίπου ίσες). Για να πάρουν τη μεγαλύτερη ποσότητα πληροφοριών, οι ερωτώντες θα πρέπει να κάνουν ερωτήσεις που κατά το δυνατόν να διαιρούν το σύνολο των πιθανών αντικειμένων, σε δύο εξίσου πιθανά υποσύνολα. Κατά παρόμοιο τρόπο, το σύνολο των πιθανών απαντήσεων στις διάφορες διοργανώσεις τύπου κυπέλου (single elimination), ως γνωστόν κι όπως ήδη προαναφέραμε, διαιρείται συνεχώς σε ίσα υποσύνολα ώσπου να καταλήξει σε ένα μοναδικό νικητή. Κατά τον τρόπο που μπορούμε με 20 γύρους να φθάσουμε στον τελικό νικητή από σχεδόν 1.000.000 διαγωνιζόμενους, μπορούμε και να καταλήξουμε ρωτώντας για μια συγκεκριμένη πόλη ανάμεσα από σχεδόν ένα εκατομμύριο άλλες δυνατότητες, εφόσον σε κάθε περίπτωση $\log_2 1.000.000 \approx 20$. Το αν βεβαίως μετράμε αυτό που θέλουμε να μετρήσουμε είναι άλλο ζήτημα, είτε πρόκειται για την συγκεκριμένη πρακτική διεξαγωγής διοργανώσεων, είτε πρόκειται για παιχνίδι ερωτήσεων τύπου ναι – όχι και διαιρούμε γεωγραφική περιοχή σε υπο-περιοχές για να καταλήξουμε στην πόλη.

Ο Shannon αντιλαμβανόμενος πολύ καλά τα σχετικά με τις δομές των τεχνητών γλωσσών και δια της προσέγγισης των φυσικών γλωσσών με αυτές, εξετάζει εντέλει πολύ διεξοδικά και πολλά περαιτέρω ζητήματα όπως ο πλεονασμός, ο θόρυβος, η χωρητικότητα ενός καναλιού, στα οποία δεν επεκτεινόμαστε επί του παρόντος. Επισημαίνουμε όμως τη γονιμότητα της αναφοράς στις δομές των γλωσσών. Υπενθυμίζουμε εκτός από τον A. Markov, ότι έχουμε επί τούτου και το Darwin, που σημείωνε ότι *η* δημιουργία διαφορετικών γλωσσών και διαφορετικών ειδών, καθώς και οι αποδείξεις ότι και οι δύο έχουν αναπτυχθεί μέσω μιας σταδιακής διαδικασίας, περιέργως είναι παράλληλες (Darwin, 1998). Ο Shannon, πέραν της μαθηματικής ιδιοφυίας του, διέθετε μεταξύ άλλων και μια πολύ καλή γνώση της βιολογίας. Επισημαίνουμε ότι ο Darwin αντιλήφθηκε πολλά και κατέληξε στο μηχανισμό της φυσικής επιλογής, δια μέσου και της τεχνητής επιλογής, (τις διασταυρώσεις διαφορετικών ειδών ζώων από εκτροφείς κ.α.). Όπως οι δομές των προφορικών και γραπτών γλωσσών μπορούν να είναι και είναι τεχνητές, θα ήταν μάλλον περίεργο να μην είναι κάπως παράλληλες με αυτές και οι δομές των σφαιρίσεων, αν δεν τις θεωρήσουμε κιόλας ως γλώσσες επίσης. Ήτοι, γλώσσες με τις οποίες επικοινωνούν οι ενασχολούμενοι με αυτές, μα κι από τις οποίες αποκλείονται όσοι κι όσες αποκλείονται από τις ίδιες.

2.7.3 Συσχέτιση στρατηγικών και δομών δια της αριθμητικής

Μια από τις πολύ ενδιαφέρουσες ως προς το θέμα μας εργασίες του Shannon, είναι καταρχήν το σχετικό με τις «παιχνιδομηχανές», («Game Playing Machines», Shannon, 1955). Εκεί κάνει μια τρισχιδή διάκριση των παιχνιδιών, που έχει ως βάση τη γνώση μας γι αυτά. Ξεκινάει με απλά παίγνια, όπως η Τρίλιζα που τα εντάσσει σε μια πρώτη κατηγορία για την οποία οι η/υ είναι αλάνθαστοι, συνεχίζει με παίγνια όπως το Σκάκι και το Hex, που εντάσσονται σε μια δεύτερη κατηγορία όπου οι υπολογιστές μπορούν να είναι πιο αποτελεσματικοί από το μέσο άνθρωπο ως αντιπαλο παίκτη, ή θα λέγαμε κι από τον καλύτερο κιόλας όπως ορθά προέβλεπε, για να καταλήξει σε παίγνια όπως το Matching Pennies, που τα ενέτασσε στην πλέον ενδιαφέρουσα τρίτη κατηγορία. Έγραψε για τα παίγνια της δεύτερης κατηγορίας και σχεδίασε μάλιστα κάποια από τις πρώτες μηχανές που έπαιζε σκάκι, όντας ο ίδιος πολύ δεινός σκακιστής. Αναδεικνύει την ισχύ της αξιολόγησης των κομματιών που αναγνωρίζει κάθε δεινός παίκτης. Έγραψε όμως και για τα παίγνια της τρίτης κατηγορίας σε σχέση με τους η/υ. Στην εργασία «Μια Μηχανή Ανάγνωσης; της Σκέψης» («A Mind Reading (?) Machine») (1953) ο Shannon βασίζεται σε μια μηχανή του D.W. Hagelbarger προκειμένου να φτιάξει μια δική του μηχανή που να παίζει το παλαιόθεν γνωστό παίγνιο «Matching Pennies». Είναι πολύ σύνηθες στις σφαιρίσεις, να μεταχειρίζεται κανείς αυτό το παίγνιο, ως ανάλογο της ρίψης μιας μπάλας (όπως κάνουν π.χ. οι Dixit & Skeath, J. Polack, H Varian) και συχνά προκειμένου να δοθεί ως παράδειγμα ισορροπίας Nash, μοναδικής συνήθως.

Ο Shannon αναφέρει πως αυτό το παιχνίδι έχει συζητηθεί εκ της παιγνιοθεωρητικής γωνίας από τους von Neumann και Morgenstern, κι εκ της της ψυχολογικής άποψης του Edgar Allen Poe στο "κλεμμένο γράμμα» (The Purloined Letter) (Poe, 1845). Δηλώνει πως αρκετά παραδόξως προσεγγίζει το στόχο με την μέθοδο παιξίματος του Poe, παρά του von Neumann. Σημειώνουμε πως πράγματι οι von Neumann και Morgenstern ασχολήθηκαν ιδιαιτέρως με matching pennies και το είχαν συνδέσει με άλλο λογοτεχνικό έργο, θέτοντας ως «ήρωα» τον *Sherlock Holmes* του A. Conan Doyle. Το παιχνίδι σε αυτά και άλλα λογοτεχνικά έργα είναι το ίδιο, ενώ υπό όρους σφαιρίσεων αφορά κάποιους αντίπαλους που ο κάποιος θέλει να μαντέψει τις ενέργειες του αντιπάλου κι εκείνος θέλει ακριβώς το αντίθετο.

Στη στρατηγική του παραπάνω μηχανήματος, ο Shannon αναζητά τύπους υποδειγμάτων - μοτίβων στη συμπεριφορά του αντιπάλου ανθρώπου. Εάν μπορεί να βρει αυτά τα μοτίβα, τα θυμάται και υποθέτει ότι ο παίκτης θα ακολουθήσει αυτά τα μοτίβα την επόμενη φορά που θα ανακύπτει η ίδια κατάσταση. Κατ' αντιδιαστολή με τις Μαρκοβιανές διεργασίες όπου στην εκάστοτε παρούσα κατάσταση δεν υπάρχει καθόλου μνήμη των προηγουμένων, εν προκειμένω η μνήμη είναι πολύ ισχυρή. Το μηχάνημα περιλαμβάνει επίσης κι ένα στοιχείο τύχης, που ενεργοποιείται ωσότου βρεθούν υποδείγματα, ή ωσότου, τα υποτιθέμενα υποδείγματα επαναληφθούν τουλάχιστον δύο φορές (οπότε τείνουν στο να κατασταθούν μοτίβα).

Οι τύποι των ενθυμούμενων μοτίβων περιλαμβάνουν το αποτέλεσμα δύο διαδοχικών περιπτώσεων παιξίματος και το αν άλλαξε την επιλογή του στο ενδιάμεσό τους, ή κατόπιν αυτών. Θυμάται για παράδειγμα, αν ο αντίπαλος μόλις κερδίσει κατόπιν παίζει ίδια, οπότε την επόμενη φορά που ο αντίπαλος θα κερδίσει, υποθέτει πως δεν θα αλλάξει την επιλογή του. Υπάρχουν οκτώ πιθανές περιπτώσεις και για κάθε μια από αυτές, ο παίκτης μπορεί να κάνει δύο πράγματα Οι οκτώ περιπτώσεις είναι:

Ο παίκτης νικά	παίζει ίδια	& νικά.	Τότε ίσως παίζει ίδια ή διαφορετικά.
Ο παίκτης νικά	παίζει ίδια	& χάνει	Τότε ίσως παίζει ίδια ή διαφορετικά.
Ο παίκτης νικά	παίζει διαφορετικά	& νικά.	Τότε ίσως παίζει ίδια ή διαφορετικά.
Ο παίκτης νικά	παίζει διαφορετικά	& χάνει	Τότε ίσως παίζει ίδια ή διαφορετικά.
Ο παίκτης χάνει	παίζει ίδια	& νικά.	Τότε ίσως παίζει ίδια ή διαφορετικά.
Ο παίκτης χάνει	παίζει ίδια	& χάνει	Τότε ίσως παίζει ίδια ή διαφορετικά.
Ο παίκτης χάνει	παίζει διαφορετικά	& νικά.	Τότε ίσως παίζει ίδια ή διαφορετικά.
Ο παίκτης χάνει	παίζει διαφορετικά	& χάνει	Τότε ίσως παίζει ίδια ή διαφορετικά.

Καθεμία από αυτές τις περιπτώσεις αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό κελί στη μηχανική μνήμη. Εντός κάθε κελιού δηλώνονται δύο πράγματα:

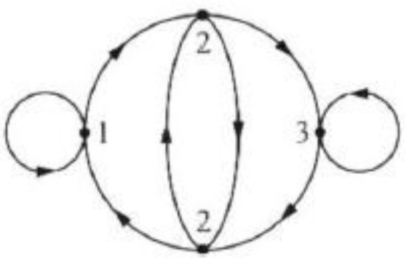
(1) αν η τελευταία φορά που προέκυψε αυτή η κατάσταση, ο παίκτης έπαιξε ίδια ή διαφορετικά

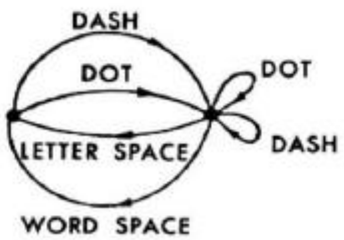
(2) εάν η συμπεριφορά που αναφέρεται στο (1), ήταν, ή όχι μια επανάληψη της ίδιας συμπεριφοράς στην αμέσως προηγούμενη παρόμοια κατάσταση.

Κατόπιν ο Shannon εξετάζει ως παράδειγμα την παραπάνω δεύτερη περίπτωση που ο αντίπαλος άνθρωπος μόλις νικάει παίζει τα ίδια, μα κατόπιν χάνει, ή αλλιώς την «νικάει, παίζει ίδια, χάνει». Υποθέτουμε ότι την τελευταία φορά που η κατάσταση αυτή συνέβη στο παιχνίδι, ο παίκτης έπαιξε "διαφορετικά". Τότε το "διαφορετικά" καταγράφεται στο μέρος (1) αυτού του κελιού μνήμης. Εάν η προηγούμενη φορά που προέκυψε αυτή η κατάσταση ο παίκτης έπαιξε επίσης "διαφορετικά», το μέρος (2) των κελιών της μνήμης αυτό δηλώνεται ως επανάληψη. Το μηχάνημα θα υποθέσει, εφόσον προκύψει η κατάσταση αυτή και πάλι, ότι αυτό είναι ένα καθορισμένο μοτίβο στην συμπεριφορά του παίκτη και θα παίζει αντίστοιχα. Εάν ο παίκτης άνθρωπος δεν επαναλαμβάνεται, η μηχανή θα παίζει βασιζόμενη στο τυχαίο στοιχείο της, οπότε και πάλι δεν μπορεί να νικηθεί εύκολα. Ο παίκτης άνθρωπος, μόνο αν γνωρίζει εκ των προτέρων ή αποκρυπτογραφήσει τη στρατηγική της μηχανής (κάτι που είναι πολύ δύσκολο) αναμένεται να νικά με λόγο 3 : 1, που δεν θεωρείται και μεγάλος. Αν ο άνθρωπος γνωρίζει εκ των προτέρων και θέλει να ξεγελάσει τη μηχανή, απαιτείται να ακολουθήσει δις το ίδιο μοτίβο στρατηγικής ώστε η μηχανή να εκλάβει ότι θα επαναλάβει και πάλι το ίδιο, οπότε ο παίκτης να το αλλάξει. Κάτι τέτοιο είναι εξαιρετικά δύσκολο, λόγω των υπολογιστικών απαιτήσεων και της μνήμης που απαιτούνται για να νικήσει κάποιος άνθρωπος τη μηχανή. Δεν θα επεκταθούμε εν προκειμένω στην ανωτερότητα των υπολογιστών στο σκάκι κι όσα έγραψε επ’ αυτών, όντας πρωτοπόρος του κι εξαιρετικά δεινός σκακιστής ο ίδιος. Η πραγματικότητα στις σφαιρίσεις είναι πως δεν απαιτούνται, ούτε κι επιδεικνύονται τόσες, ή τέτοιες υπολογιστικές και μνημονικές δυνατότητες, από τη μεριά των ανθρώπων ως παικτών. Όπερ σημαίνει επιδέχονται περισσότερες απαιτήσεις υπολογισμών και μνήμης. Αφετέρου όμως στις σφαιρίσεις, για τους υπολογιστές, είτε για τους κατασκευαστές τους, κατά κάποιο τρόπο είναι πιο δύσκολα τα πράγματα απ’ ότι είναι στο σκάκι,. Διαπιστώνεται εν προκειμένω πάντως, ότι κάποια διάταξη αριθμών μπορεί να εκφράζει στρατηγική από τη μια μεριά, και από την άλλη να εκφράζει δομή παιχνιδιού. Με άλλα λόγια, μια φράση όπως «η μπάλα περνάει από τον/την Α προς τον/την Β, έπειτα επιστρέφει, ή περνάει προς τον/την Γ, μετέπειτα Δ, κ.ο.κ…» μπορεί να αναφέρεται σε κάποιο στρατηγικό σχέδιο επίθεσης, ή άμυνας αφενός, κι αφετέρου να αναφέρεται στο πως παίζεται κάποια σφαίριση, βάσει των κανονισμών της. Ο παίκτης άνθρωπος απέναντι στη μηχανή συνθέτει κάποια στρατηγική με τις επιλογές του, ο δε Shannon φτιάχνοντας τη μηχανή, συστήνει το παιχνίδι, ή πάντως παίζει «όχι υπό τους ίδιους όρους». Στα σχετικά με το Juggling καθίσταται περαιτέρω σαφές πόσα πολλά εννοεί και στο πως διαιρεί το χρόνο, όπως περίπου ο γεωμέτρης που διαιρεί το χώρο.

ΑΠΟ ΤΟ SHANNON & ΚΛΕΜΜΕΝΟ ΓΡΑΜΜΑ ΕΩΣ ΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ Α ΤΟΥ JACQUES LACAN

Έχουμε αναφερθεί προηγούμενα στις μαρκοβιανές στοχαστικές αλυσίδες και στο πως στην απλή περίπτωση της ρίψης σφαίρας ως αντικειμένου, η πιθανότητα μετάβασης από μια κατάσταση s_1 σε μια κατάσταση s_2, μπορεί να συνδεθεί με ποικίλα χαρακτηριστικά του αντικειμένου (σφαίρας), του υποκειμένου (ρίπτοντος), του στόχου κ.λπ.
Το λεγόμενο «αντικείμενο α», στην περίπτωση του Jacques Lacan κ.α. σχετίζεται δια μέσου της ανάγνωσης του Shannon, με τις Μαρκοβιανές στοχαστικές διεργασίες και πάλι. Στο σεμινάριο του την άνοιξη του 1955 για το «Κλεμμένο γράμμα», δεν αναφέρει συγκεκριμένα ως πηγή του τον Shannon που προηγείται (ακόμα κι αν δεν είναι η άμεση πηγή του, που πάντως δεν είναι η Μ. Βοναπάρτη). Ο J. Lacan δεν αποκάλυψε τα ονόματα των επιστημόνων της "κυβερνητικής" που έστρεψαν την προσοχή του στην ιστορία του Poe, μα και ποτέ δεν προσπάθησε να αποκρύψει την κεντρικότητα της κυβερνητικής στην εκ νέου επεξεργασία του έργου του Freud (Liu, 2010). Ο J. Lacan, δια του αντικειμένου α, κηρύσσει γενικότερα την επιστροφή στον Freud. Υπενθύμιζε ότι η δική του ανακάλυψη είναι το αντικείμενο α. Δηλαδή, δεν είναι ούτε το σημαίνον, ούτε το ασυνείδητο, ούτε η δομή. Το ζήτημα τίθεται ίσως κάπως πιο περίπλοκα από τον ίδιο τον J. Lacan , καθώς κι από τους Jacques Derrida (1930 – 2004), Slavoj Žižek (1949 -)κ.α. διάσημους στοχαστές, που κατόπιν σχολιάζουν επί των δεδομένων αρχών. Αναφερόμαστε ακροθιγώς, καθότι απλοποιούνται αρκετά, εφόσον έχουν κατανοηθεί στοιχειωδώς τα έργα των A. Markov και του Shannon. Επιπλέον, εφόσον κάποιος δεν ενστερνίζεται την άποψη ότι οι σφαιρίσεις μας πηγάζουν εξ ολοκλήρου από τις ιδιότητες των σφαιρών με τις οποίες παίζονται, αναδύονται διάφορες ενδιαφέρουσες απαντήσεις, κι ερωτήσεις κυρίως, ως προς τη προέλευσή τους, αν ικανοποιούν ανάγκες, αν καλώς, ή κακώς, αναπαριστούν κάτι κ.α.



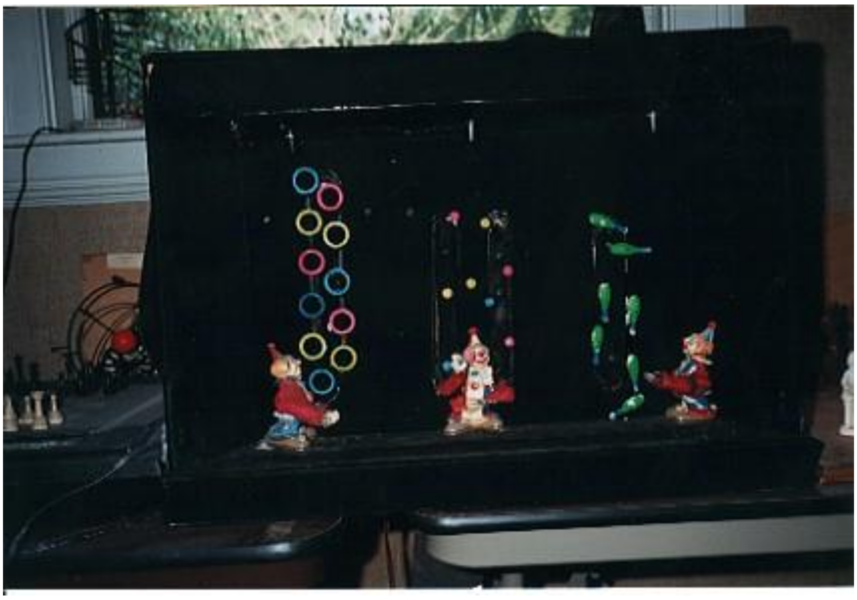


Σχήμα 14.

Βλέπουμε αριστερά το σχέδιο του Lacan κατά την παρουσίαση του Σεμιναρίου για το «Κλεμμένο Γράμμα» και δεξιά το προηγηθέν αντίστοιχο Σχέδιο του Shannon στη θεωρία της πληροφορίας.

2.7.4 Ο Shannon και το Juggling

Όταν πλέον διαβάζει κανείς κάτι που αναφέρεται, εμμέσως έστω, στα τυχερά παίγνια, το παράδειγμα αναμένεται να του είναι οικείο, όπως π.χ. η ρίψη ζαριών, ή κι αν δεν είναι, το προσπερνάει και λαμβάνει υπόψη του τα αριθμητικά δεδομένα μόνον, από τα οποία μπορεί να λογαριάσει πιθανότητες. Οι ανταγωνιστικές σφαιρίσεις ως γενικότερο παράδειγμα είναι ενδεχομένως λιγότερο οικείο «πλαίσιο» για κάποιους, έστω κι αν γι άλλους είναι σχεδόν εξίσου οικείο με αυτό των τυχερών παιγνίων. Το πλαίσιο του Juggling (των ζογκλερικών κόλπων) ενδέχεται συγκριτικά να ξενίζει, αρκετά πιο πολλούς. Όπως δεν είναι απαραίτητο να παίξει κάποιος όλα τα τυχερά παίγνια για να έχει μια ιδέα για το τι πρόκειται, κάτι παρόμοιο μπορεί να γίνει και με το Juggling. Μπορεί δηλαδή ενδεχομένως ακόμα και να το σκεφθεί νοερώς περισσότερο παρά να το δοκιμάσει στην πράξη (δεν πρόκειται βεβαίως για σύσταση ως προς την καλύτερη κατανόηση). Βασιζόμαστε έτσι εν προκειμένω, για το ξεπέρασμα τέτοιων δυσκολιών, στο ενδιαφέρον ενός τόσο καταξιωμένου επιστήμονα, όπως ο Shannon, που δεν αρκούταν στη συγγραφή κειμένων για την περίπτωση του Juggling. Εν προκειμένω, δεν θα το εκθέσουμε λεπτομερώς, παρά μόνον σε γενικές γραμμές και με γνώμονα την ανάπτυξή του και το πώς σημειώθηκαν οι εξελίξεις που μας ενδιαφέρον σε αυτό.



Εικόνα 5. Το διόραμα του Shannon (Πηγή: https://www2.bc.edu/~lewbel/toys1.jpg)

Ο Αμερικάνος μαθηματικός που μεταξύ άλλων έχει κατασκευάσει ένα διόραμα (Εικόνα 5) όπως κι ένα ρομπότ σχετικά με το Juggling, γράφει ένα άρθρο για το Scientific American, που παρουσιάζεται με το γενικότερο τίτλο «Claude Shannon's no-drop Juggling diorama» και αναφέρεται καταρχήν στη συγκεκριμένη κατασκευή του (Shannon, 1993). Ο πυρήνας του, είναι το επιστημονικό άρθρο, «Scientific Aspects of Juggling» («Οι Επιστημονικές Όψεις του Juggling»), όπου περιέχει ένα θεώρημα στο οποίο σχετίζει το πόσες μπάλες παίζει κάποιος, με το πόσο καιρό καθεμία βρίσκεται στον αέρα, αναφερόμενος στο λεγόμενο uniform Juggling. Θεωρεί όχι ένα πρόσωπο με δύο χέρια μόνον, αλλά ότι υπάρχουν αρκετά «χέρια», ή ότι θα μπορούσαν να υπάρχουν κι αρκετοί διαφορετικοί εμπλεκόμενοι άνθρωποι. Το θεώρημα όπως εξηγείται περαιτέρω, αφορά πέντε ποσότητες, τον αριθμό των χεριών, τον αριθμό των μπαλών, τον κενό χρόνο όταν το χέρι δεν έχει τίποτα σε αυτό, το χρόνο επαφής και τον χρόνο της πτήσης. Όπως σημειώνει, αυτά τα πέντε πράγματα που όλα συνδέονται μεταξύ τους με μια πολύ απλή σχέση, για την οποία λέει πως δεν θα ήταν συναρπαστική για κανένα εκτός από κάποιους ζογκλέρ με κλίση στα μαθηματικά. Βεβαίως όμως, υπάρχει πλέον μια πάρα πολύ μεγάλη και διαρκώς επεκτεινόμενη επιστημονική βιβλιογραφία ως προς το Juggling. Επιπλέον, τα υποδείγματα που αναδείχθηκαν στο Juggling από τους μαθηματικούς που ασχολήθηκαν με αυτό έπειτα από το Shannon, μπορούν να θέσουν σε άλλη βάση την συζήτηση των υποδειγμάτων στις ανταγωνιστικές σφαιρίσεις. Οι τελευταίες σχετίζονται εύλογα με το εν λόγω Juggling πολύ ιδιαιτέρως, πέραν του ότι εκείνο μπορεί κάλλιστα να ενταχθεί σε αυτές. Παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον εντός αυτών των πλαισίων, πολλά ζητήματα όπως ο ανταγωνισμός, η συνεργατικότητα, ο συντονισμός, η πολλαπλότητα.

Το άρθρο ξεκινάει με τη διαπίστωση ότι επίσημοι κανονισμοί για «το παιχνίδι των αριθμών» είναι δύσκολο να βρεθούν, με κανένα τρόπο τόσο καλώς ορισμένοι, όσο οι κανονισμοί των σφαιρίσεων, ή εν γένει, όπως γράφει των συμβάντων του στίβου και των γηπέδων (track and field events). Το παιχνίδι των αριθμών είναι για τους τεχνίτες που αποσκοπούν στην τελειότητα κι αποσκοπούν να διατηρήσουν στον αέρα όλο και περισσότερα αντικείμενα. Αναφέρεται κατά αντιδιαστολή με την κωμωδία, σύμφωνα με την ορολογία του Juggling. Πρόκειται για μια πολύ σημαντική διάκριση που εν δυνάμει μεταφέρεται αυτούσια και σε όλες τις ανταγωνιστικές σφαιρίσεις. Προσπερνάμε έτσι καταρχήν στη σχεδόν δισέλιδη περιγραφή κάποιων γενικών χαρακτηριστικών που σχετίζονται κυρίως με το διόραμα που έχει κατασκευάσει.

Ο Shannon ξεκινάει το επιστημονικό άρθρο του με κάποιο απόσπασμα από το λογοτεχνικό έργο του Robert Silverberg, «Lord Valentine's Castle» και επαναβεβαιώνει πως θα προσπαθήσει να μην ξεχνά την ποίηση, την κωμωδία και τη μουσική του Juggling. Δηλώνει πως θα συζητήσει κάποιες από τις πολλές διαστάσεις του Juggling στο μικροσκοπικό πλανήτη μας, από την άποψη του Darwin (Ποια είναι η προέλευση του είδους ζογκλέρ;), του Newton (Ποιες είναι οι εξισώσεις της κίνησης;), του Faraday (Πώς μπορεί να μετρηθεί;) και του Edison (Μπορεί η Αμερικάνικη επινοητικότητα να κάνει τα πράγματα πιο εύκολα;)

Εικόνα 6. Τοιχογραφία στον τάφο του Beni-Hassan (Πηγή: www.juggling.org)

Αναφέρει ότι στον πλανήτη Γη, το Juggling ξεκίνησε πριν από πολλούς αιώνες και σε πολλούς διαφορετικούς και απομακρυσμένους μεταξύ τους πολιτισμούς. Αρχίζει την ενδεικτική ιστορική αναδρομή του με την πλέον αρχαία και γνωστή τοιχογραφία στον αιγυπτιακό τάφο του Beni-Hassan, που χρονολογείται από το 1900 π.Χ. (Εικόνα 6). Αυτή εύλογα δεν απουσιάζει από καμία σχετική ιστορική αναδρομή, κι αναπαριστά τέσσερις γυναίκες, που κάθε μια κάνει Juggling. Ακόμα κι αν δεν έχει κάποιος καλή αίσθηση της ανθρώπινης εξέλιξης και του παιχνιδιού, υπάρχουν πράγματι αρκετές αποδείξεις για το Juggling σε διάφορους χρόνους και τόπους, ικανές να πείσουν και τον πλέον δύσπιστο ως προς την ιστορικότητά του. Το Juggling έχει αναπτυχθεί ανεξάρτητα από πολύ νωρίς στην Ινδία, την Ανατολή, και στην Αμερική, στους πολιτισμούς των Ινδιάνων και των Αζτέκων. Η Τόνγκα, το νησί της Νότιας Θάλασσας, έχει μια μακρά παράδοση στο Juggling. Ο George Forster, ένας επιστήμονας σε κάποιο από τα ταξίδια του Captain Cook έγραψε για ένα κορίτσι σε αυτό, που έπαιζε κάνοντας Juggling με πέντε κολοκύθες, για τουλάχιστον ένα τέταρτο της ώρας. Στη συνέχεια ο Shannon παραθέτει στην Αγγλική γλώσσα το παρακάτω απόσπασμα από το «Συμπόσιο» του Ξενοφώντα,

«εκ τούτου δή ηὔλει μὲν αὐτῇ ἡ ἑτέρα, παρεστηκὼς δέ τις τῇ ὀρχηστρίδι ἀνεδίδου τοὺς τροχοὺς μέχρι δώδεκα. ἡ δὲ λαμβάνουσα ἅμα τε ὠρχεῖτο καὶ ἀνεῤῥίπτει δονουμένους συντεκμαιρομένη ὅσον ἔδει ῥιπτεῖν ὕψος ὡς ἐν ῥυθμῷ δέχεσθαι αὐτούς. καὶ ὁ Σωκράτης εἶπεν: ἐν πολλοῖς μέν, ὦ ἄνδρες, καὶ ἄλλοις δῆλον καὶ ἐν οἷς δ' ἡ παῖς ποιεῖ ὅτι ἡ γυναικεία φύσις οὐδὲν χείρων τῆς τοῦ ἀνδρὸς οὖσα τυγχάνει, γνώμης δὲ καὶ ἰσχύος δεῖται. ὥστε εἴ τις ὑμῶν γυναῖκα ἔχει, θαρρῶν διδασκέτω ὅ τι βούλοιτ' ἂν αὐτῇ ἐπισταμένῃ χρῆσθαι».

Αυτό το απόσπασμα, ο Shannon το κρίνει πολυεπίπεδα ενδιαφέρον, αρχίζοντας με πρώτο το επίπεδο του ζογκλέρ, καθότι εφόσον το κορίτσι έκανε στην πραγματικότητα Juggling με δώδεκα τροχούς (στεφάνια), πρόκειται για εκπληκτικό κατόρθωμα - στους είκοσι τρεις αιώνες έκτοτε, κανείς δεν έχει φτάσει σε αυτό το ρεκόρ. Η υψηλότερη επίδοση της εποχής, είναι από το μεγάλο Ρώσο ζογκλέρ, S. Ignatov, που συνήθως έκανε με εννέα και μερικές φορές με έντεκα στεφάνια. Σε αυτόν αφιερώνει μια εικόνα στο άρθρο του, ενώ βέβαια πρόκειται για τον έναν εκ των τριών του διοράματός του, στους οποίους αποδίδει μια ιδιαίτερη αναγνώριση. Στο διόραμα βρίσκεται επίσης κι ο E. Rastelli, που μάγευε με τις μπάλες το κοινό, κάνοντας Juggling ακόμα και με δέκα (τον οποίο και ξεχωρίζει ιδιαίτερα, τουλάχιστον ως προς την ακρίβεια των κινήσεων). Συμπληρώνεται επιπλέον κι από το M. Virgoara, που κατάφερνε να κυκλοφορεί εφτά κορύνες εκτελώντας cascade (το οποίο εξηγείται παρακάτω, μαζί με άλλα βασικά υποδείγματα). Γι αυτούς τους ζογκλέρ διασώζονται ακόμη και βίντεο από τα κατορθώματα τους, όπως βεβαίως επίσης και γι άλλους μεταγενέστερους, που επιβεβαιώνουν το βαθμό δυσκολίας των επιτελέσεών τους. Ο Shannon σχολιάζει ότι δεν θα μπορούσε να ζητήσει καλύτερους μάρτυρες από το μέγα φιλόσοφο Σωκράτη και τον περίφημο ιστορικό Ξενοφώντα, οι οποίοι θα μπορούσαν αμφότεροι να λογαριάζουν ως το δώδεκα και να ήταν προσεκτικοί παρατηρητές. Συμπληρώνει δε ότι σε ένα άλλο επίπεδο, είναι διασκεδαστικό να σημειωθεί πως ο Σωκράτης, ξεφεύγει από τη διάσημη μαιευτική μέθοδό διδασκαλίας του, κάνοντας μια σαφή δήλωση, για την οποία θα ήταν καλύτερα να είχε κλείσει το στόμα του. Καθότι αν είχε, σταματήσει λίγες λέξεις πριν από το τέλος, θα μπορούσε να ήταν πρόδρομος του κινήματος της ισότητας των γυναικών.

Μπορούμε να επισημάνουμε ότι προτού αναφερθεί στο Juggling ο Ξενοφών, έχει ήδη γράψει πως δεν κρίνει μόνον από τα σοβαρά ζητήματα, γνώμη με την οποία ασφαλώς δεν διαφωνούσε ο Shannon. Σε ένα παρακάτω απόσπασμα από το «Συμπόσιο», η ίδια κοπέλα γράφει και διαβάζει επί του κυκλικού τροχού «των κεραμεικών». Σήμερα οι ζογκλέρ συνηθίζουν να εκτελούν πολλά και διάφορα τέτοια κόλπα ισορροπώντας επί μονότροχων. Ο ίδιος ο Shannon άλλωστε κατάφερνε όχι μόνο να ισορροπεί, μα να κάνει έτσι και Juggling. Δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο ιστορικός εννοεί ότι η κοπέλα διάβασε κι έγραψε ισορροπώντας επί του τροχού, όχι οριζοντίως, μα καθέτως κι εν είδει μονότροχου. Οι αρχαίοι έλληνες δεν είχαν επινοήσει καν το δίτροχο ποδήλατο. Δεν είναι παράλογο όμως να εικάσουμε ότι στην περίπτωση που αυτή έκανε ότι κάνουν οι σύγχρονοι ζογκλέρ, αυτό και πάλι πιθανώς θα εκλαμβανόταν ως κάποια επιδεξιότητα αξιοθαύμαστη μεν, που όμως δεν την έχουν σχεδόν όλοι, όπως κρίνεται πλέον το δίτροχο ποδήλατο, πολλούς αιώνες κατόπιν. Δεν θα μπορούσαμε βεβαίως επίσης να πιστώσουμε στους αρχαίους έλληνες, την ανακάλυψη του μονότροχου ποδηλάτου, λόγω αυτής της ενδεχόμενης «χρήσης» του τροχού των κεραμέων, από τη συγκεκριμένη κοπέλα. Ακόμα κι αν ήταν εξακριβωμένα αυτός κι όχι ο άλλος, ο πιο πιθανός, μα και πιο εύκολος τρόπος της. Ισχύει όμως ότι οι μπάλες επίσης επιδέχονται πάρα πολλές «χρήσεις» και «τρόπους». Όπως και οι τροχοί γενικώς, λόγω των αξόνων συμμετρίας τους κιόλας, που θα τους αναφέρει ο Shannon. Ή, όπως και οι τροχοί των κεραμέων ειδικότερα, μπορούν να προσδώσουν στην ύλη τους πολλά και διάφορα σχήματα. Σημασία έχουν στους τρόπους και στις χρήσεις τους, εκείνα που προάγονται, όπως κι αυτά που δεν προάγονται. Στο ίδιο έργο που είναι λιγότερο διάσημο από το αντίστοιχο «Συμπόσιο» του Πλάτωνα, ο Ξενοφών αναφέρει επίσης, ότι ο Σωκράτης δεν αρνείται ότι είναι αξιοθαύμαστη η γραφή και η ανάγνωση πάνω σε ένα τροχό που γυρίζει, αλλά δεν βρίσκει ότι μπορεί να παρουσιάζει ηδονή αυτό και άλλα «κόλπα». Κατόπιν ο Shannon περνάει σε μια σύντομη περιγραφή του Juggling κατά την περίοδο του Μεσαίωνα.

Κάποια ακόμα πιο εμπεριστατωμένη έρευνα στην ιστορία του Juggling, αλλά κι αναγνώριση της συμβολής του Shannon, γίνεται από τον Οικονομολόγο Καθηγητή A. Lewbel (Εικόνα 7). Ο σπουδαίος μαθηματικός επισημαίνει ότι οι ζογκλέρ είναι από τους πλέον ευάλωτους, από τους πιο εκτεθειμένους στο λάθος, ανάμεσα σε όλους τους διασκεδαστές (Lewbel, 2001). Οι μουσικοί και οι ηθοποιοί συνήθως μπορούν να καλύψουν εύκολα τα ολισθήματά τους, όμως όταν κάποιος ζογκλέρ κάνει λάθος δεν επανορθώνεται έτσι απλά. Αυτή η μεγάλη έκθεση στο λάθος, έχει ίσως οδηγήσει στη διάκριση μεταξύ των κωμικών και των τεχνικών ζογκλέρ. Στο Juggling έχουν επίσης υπάρξει πολλές ταλαντούχες γυναίκες, όπως είναι η L. Brunn, η Trixie ως «παιδί – αστέρι», μα αναφέρεται επίσης και μια γυναίκα από την Tonga να εκτελεί το πολύ δύσκολο, με οκτώ μπάλες, υπόδειγμα shower (που εξηγείται επίσης παρακάτω).

Εικόνα 7. Εικόνες από ζογκλερικά κόλπα ανά τους αιώνες (Πηγή: Lewbel, 2001)

Με την έλευση των διαφόρων ηλεκτρονικών μέσων (ραδιόφωνο, κινηματογράφος και τηλεόραση), τα βαριετέ και τα τσίρκα ήταν καταδικασμένα και το Juggling άρχισε να παρακμάζει. Αντίθετα, κάποιες διάσημες πλέον ανταγωνιστικές σφαιρίσεις παρατηρούμε πως επωφελήθηκαν ιδιαιτέρως. Αυτό διήρκεσε αρκετές δεκαετίες, και πολλοί από τους μεγάλους ζογκλέρ προσπάθησαν να πάρουν άλλους δρόμους, κατόπιν όμως επακολούθησε κάποια αναγέννηση αυτής της αρχαίας πρακτικής. Ιδίως μεταξύ των νεαρών ατόμων, και φοιτητικών ομάδων που δημιουργήθηκαν σε διάφορα πολύ γνωστά Πανεπιστήμια. Σε αντιδιαστολή και πάλι με τις διάσημες σφαιρίσεις, δεν υπάρχει μεγάλη αγορά για επαγγελματίες, όμως το Juggling παραμένει ως μια πρόκληση για την ερασιτεχνική ψυχαγωγία. Δεν περιορίζεται στον έναν άνθρωπο απαραιτήτως, καθώς μπορούν να συνδυάζονται και δυο, ή ακόμα κι αρκετά μεγαλύτερος αριθμός, σε πιο περίπλοκες συνθέσεις. Ο ίδιος ο Shannon διαπιστώνει κατά την εποχή που γράφει στο άρθρο ότι το Juggling φαίνεται να ελκύει τους ανθρώπους με κλίση προς τα μαθηματικά – πολλοί ερασιτέχνες ζογκλέρ είναι προγραμματιστές υπολογιστών, προεξέχοντες στα μαθηματικά, ή στη φυσική και τα σχετικά».

Επίσης φαίνεται πως πρόκειται για ικανότητα στην οποία μπορούν να τα καταφέρουν καλά πολύ νέοι άνθρωποι. Δείχνει να ισχύει ότι η ικανότητα του Juggling μπορεί να έχει τα παιδιά- θαύματα της, με τον ίδιο τρόπο όπως και η μουσική, τα μαθηματικά και το σκάκι (όπως είναι αντίστοιχα ο Mozart, ο Gauss, κι ο Capablanca). Επιπλέον, φαίνεται πιθανό ότι η ηλικία κορύφωσης της ικανότητας για Juggling μπορεί να είναι αρκετά μικρή, καθώς είναι για σπορ όπως η γυμναστική και το κολύμπι, στα οποία βέβαια μπορούν να ενταχθούν και οι σφαιρίσεις.

Καθώς η εργασία του Shannon για το Juggling παρακίνησε για την θεωρητική και πρακτική ενασχόληση με αυτό, αρκετών ανθρώπων, επιστημόνων και παικτών, αποτελεί κατάλληλη εισαγωγή σε αυτό. Στη συνέχεια αναπτύχθηκε πολύ μεγάλη σχετική βιβλιογραφία, καθώς και πολλά καινούργια υποδείγματα (μοτίβα, εφόσον επαναλαμβπου δεν τα είχε αντιληφθεί ούτε ο ίδιος, καθώς και το λεγόμενο siteswap. Εν προκειμένω μας ενδιαφέρουν δευτερευόντως ίσως, αυτά καθαυτά τα νέα υποδείγματα, που δεν είχαν συνειδητοποιηθεί επί τόσους αιώνες. Στις ανταγωνιστικές σφαιρίσεις άλλωστε, μπορούμε να θέσουμε αρκετά περισσότερα, όμως δεν είναι αυτοσκοπός η κατάρτιση κάποιου μακροσκελούς καταλόγου. Δεν ενδιαφερόμαστε πρωτίστως να αναφέρουμε ποια είναι, ούτε όπως μπορούμε και να υποδείξουμε και κανένα άλλο ακόμη πιο νέο υπόδειγμα, καθώς βεβαίως και μια σημειογραφία αντίστοιχη του siteswap. Η σημασία του siteswap μπορεί να θεωρηθεί ανάλογη με εκείνη της ταξινόμησης στη βιολογία κι αλλού, όπου ενδεχομένως να μην έχει οδηγήσει στην ανακάλυψη νέων ειδών, μα βοηθάει προς μια πιο σφαιρική αντίληψη σε κάποια ζητήματα. Ποια είναι τα «είδη» και γιατί είναι τόσα πολλά, ή ποια είναι η ποικιλία τους και πιο συγκεκριμένα από πού προέρχεται, ή προς τι μπορεί να αποβλέπουν όλα αυτά τα πολλά και διάφορα είδη. Μας αφορά ως εκ τούτου περισσότερο τι μπορεί να σημάνει το να αντιληφθούμε τη δυνατότητα σύστασης πάρα πολλών υποδειγμάτων. Το γιατί γίνεται ότι γίνεται έτσι όπως γίνεται, μα και πως μπορούμε να το κάνουμε καλύτερα, θεωρητικά και πρακτικά. Όπως η μακρόχρονη ιστορία του Juggling δεν εμπόδισε τη βαθειά άγνοια επ' αυτού, έτσι ενδέχεται να συμβαίνει και με την ιστορία των οιωνδήποτε σφαιρίσεων. Η ιστορία της καθεμίας και όλων τους, μπορεί να μην έχει να πει και πολλά ουσιαστικά κι ενδέχεται μάλιστα, να μη φθάσει ποτέ να πει αρκετά. Ο Shannon μπορεί κάλλιστα να θεωρηθεί πως άλλαξε την ιστορία του Juggling, που πλέον προσφέρεται πιο εμπλουτισμένο, σε υποδείγματα τουλάχιστον. Από την άλλη είναι και πολλά αυτά που δεν ξέρουμε και δεν θα μάθουμε, λόγου χάριν για τις γυναίκες που το εξασκούσαν στην αρχαιότητα. Το Juggling μπορεί να το αρχίσει κάποιος περνώντας μια μπάλα από το ένα χέρι στο άλλο κι εν συνεχεία δεν αποκλείεται να το εξελίξει σε βαθμό που να μπορεί να εκτελέσει όλα σχεδόν τα γνωστά πρότυπα, που πραγματικά είναι πάρα πολλά. Ακόμα και με μια ματιά σε μια σχετική κάρτα πλέον, αντιλαμβανόμαστε ότι μπορεί κάποιος να αρχίσει από τα πιο απλά και υποτυπώδη ζογκλερικά με μια δυο μπάλες, ή άλλα props και να συνεχίσει εκτελώντας όλο και πιο δύσκολα κομμάτια. Γίνεται κατά αναλογία όπως περίπου αρχίζει από ένα δυο μουσικά κομμάτια για να εξελιχθεί. Θεωρητικά ενδέχεται μάλιστα να γράψει κανείς κομμάτια τα οποία δεν μπορεί να παίξει ο ίδιος, όμως να θελήσει να τα παίξει άλλος, ή κιόλας άλλοι πολλοί. Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε επιπλέον, πως και ακόμη πιο πολλοί θα ήσαν διατεθειμένοι να τα παρακολουθούν συστηματικά. Δεν έχουμε ενδείξεις για πολυπληθές κοινό στο Juggling, όπως έχουμε για τη μουσική, ή το θέατρο και πολύ περισσότερο όπως έχουμε για τις ανταγωνιστικές σφαιρίσεις.

Είναι ευνόητη η ομοιότητα με τη μουσική αγωγή κάποιου, ενδεχομένως και του ιδίου ανθρώπου, έστω κι αν εν προκειμένω το Juggling πάει προς τη φυσική αγωγή. Στη μουσική, μια αρχή γίνεται πάντοτε με κάποια απλά κομμάτια, στη δε εξέλιξη μπορεί κάποιος να εκτελεί πολύ περισσότερα, ή ακόμα και να συνθέτει. Παρομοίως στο Juggling, έχει τη δυνατότητα επίσης κάποιος να συνθέσει, διάφορα κομμάτια, με μπάλες πανομοιότυπες, ή με διαφορετικές, στις οποίες συνοψίζουμε τα πολλά και διάφορα αντικείμενα, τα οποία μπορεί να μεταχειριστεί. Γιατί να συνθέσει και γιατί να εκτελέσει το α, ή το β Juggling κομμάτι κάποιος; Όπως το γιατί να συνθέσει κάποιο μουσικό σκοπό ο συνήθως ένας μουσικοσυνθέτης, το γιατί να το ενορχηστρώσει ο επίσης ένας συνήθως μαέστρος, το γιατί να το εκτελέσουν οι συχνά περισσότεροι εκτελεστές και το γιατί να το παρακολουθήσουν ενίοτε ακόμα περισσότεροι κι άλλοτε κανένας, είναι ερωτήματα που δεν θα αναλυθούν σε βάθος επί του παρόντος. Συνδέονται όμως με την οικονομία και ευρύτερα με την ανάπτυξη των ανταγωνιστικών σφαιρίσεων που είναι το θέμα μας. Οι αυριανές σφαιρίσεις, όπως το αυριανό θέατρο και η αυριανή μουσική, ενδέχεται να μην έχουν γραφτεί χθες, ούτε και να γραφθούν αύριο, μα να γράφονται σήμερα.

2.7.5 Τα Εργαλεία κι ο Χώρος των Ζογκλέρ και των Σφαιριστών

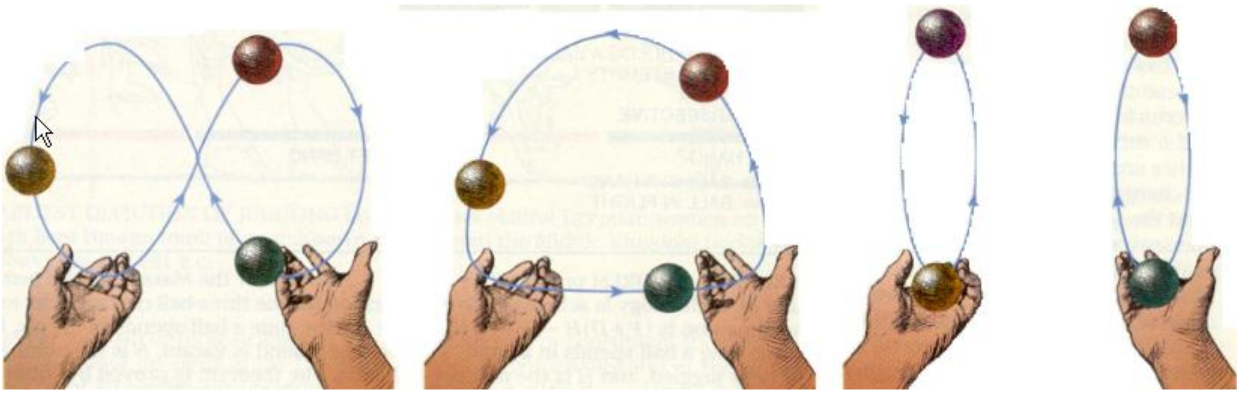
Ο Shannon ξεκινάει αναφέροντας ότι όπως οι μάγισσες έχουν την καμπάνα, το βιβλίο και το κερί, έτσι και οι ζογκλέρ έχουν κατά κύριο λόγο τρία βασικά εργαλεία που χρησιμοποιούν στα κόλπα τους. Αυτά είναι οι μπάλες, τα στεφάνια και τις κορύνες, για τα οποία μας έχει λίγο πολύ εισάγει δια των εγκωμίων προς τους πρωταγωνιστές του διοράματός του. Κατόπιν προχωράει σε κάποιες ιδιαιτερότητες που έχουν αυτά τα αντικείμενα, πέραν των ομοιοτήτων τους, καθώς και σε κάποια άλλα δευτερεύοντα εργαλεία. Δεν παραλείπει να αναφερθεί στους Flying Kamazarov Brothers που κάνουν κόλπα με όπλα, αλλά και επικίνδυνα αντικείμενα όπως για παράδειγμα με ένα αλυσοπρίονο, το οποίο δουλεύει στην μέγιστη ταχύτητα. Έτσι έρχεται σιγά σιγά προς έναν κόσμο που τον ξέρει συγκριτικά καλύτερα απ’ όσο ξέρει το Juggling. Γράφει πως την στιγμή που ένα αντικείμενο φεύγει από το χέρι ενός ζογκλέρ τότε μπαίνει σε έναν κόσμο μαθηματικής ανάλυσης, ένας κόσμο που είναι ανεξάρτητος από τον έλεγχο του ζογκλέρ, αλλά υπακούει σε πολλούς νόμους και θεωρήματα, όπως των Newton, Euler, Poinsot και του Poincare. Μοιάζει λίγο απίθανο όλοι αυτοί οι μαθηματικοί να έκαναν ποτέ ένα cascade με τρεις μπάλες έστω, αλλά οι διαφορικές τους εξισώσεις περιγράφουν όχι μόνο τις κινήσεις των πλανητών και των δορυφόρων, αλλά και τις κινήσεις στο ρόπαλο ενός ζογκλέρ. Προχωρώντας προς το θεώρημά του, περνάει έτσι από το τι μπορούμε να μάθουμε από τις μηχανικές αρχές για την κίνηση της κορύνας. Το κέντρο βάρους της θα ακολουθεί μια παραβολική πορεία, η συσχέτιση μεταξύ ύψους και χρόνου μπορεί να δοθεί από την σχέση $h = 1/2\ gt^2$, όπου το h είναι το ύψος στην κορυφή της τροχιάς. επί την σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 32ft/sec^2$. Για παράδειγμα αν ένας ζογκλέρ πετάξει μια μπάλα 2 πόδια (2ft) ψηλά στον αέρα και την πιάσει έχοντας το χέρι του στο ίδιο σημείο από αυτό που την πέταξε, ο χρόνος κατά τον οποίο η μπάλα θα βρίσκεται στον αέρα, υπολογίζεται από τον ίδιο τύπο, στα επτά δευτερόλεπτα (7 sec). Η οριζόντια απόσταση δεν έχει σημασία, καθώς ο χρόνος που θα χρειαστεί για να έρθει στο ίδιο ύψος, από αυτό που ξεκίνησε, εξαρτάται μόνο από το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει. Δεν αλλάζει είτε το πιάσει ο ίδιος στο σημείο που βρίσκεται, είτε το πετάξει σε κάποιον άλλο ζογκλέρ έξι πόδια μακριά από αυτόν, αφού η κάθετη απόσταση που θα διανύσει και στις δυο περιπτώσεις είναι ίση. Εν προκειμένω όμως μπορούμε να επισημάνουμε ότι ο Shannon οπωσδήποτε δεν σφάλει ως προς το νόμο της Φυσικής, που διέπει βεβαίως και το Juggling, άλλωστε παρακάτω θα ασχοληθεί λίγο περισσότερο με το «πόσο ζυγίζουν οι ζογκλέρ», στο ίδιο έξοχο πνεύμα του. Το Juggling στο ίδιο σημείο, ή ακόμα και η απόσταση των έξι ποδιών, σημαίνουν πολύ λίγες απαιτήσεις χώρου. Μπορεί πράγματι κάποιος ζογκλέρ να στέκει στο «ίδιο σημείο» και να διαιρεί το χρόνο με τις μπάλες που κυκλοφορεί, όμως το να αγνοήσει το χώρο δεν ενδείκνυται πάντοτε. Κάτι τέτοιο μπορεί ως σφάλμα να παρομοιαστεί με αυτό των γεωμετρών που αγνοούσαν το χρόνο και αντιλαμβάνονταν στατικά τα σχήματά τους, ώστε δεν αντιλήφθηκαν πρώτα απ' όλα πως λαμβάνει χώρα η εξέλιξη των ειδών, ακόμα και του ανθρώπου. Δεν εννοούμε βεβαίως πως έπεσε τόσο εύκολα σε κάποια τέτοια παγίδα ο Shannon, πρόκειται όμως για κάτι μπορεί να υποπέσει πολύ πιο εύκολα κάποιος λιγότερο γνωστικός. Η παραγνώριση της διάστασης του χώρου, δεν αφορά όμως μόνον το Juggling, μα δείχνει πως αφορούσε κι ολόκληρη την οικονομική επιστήμη. Για πολύ καιρό υπέθετε τις επιχειρήσεις ως σημεία, που έχουν τους κύκλους εργασιών τους, ενδεχομένως όχι και πολύ διαφορετικά από τους ζογκλέρ που κυκλοφορούν τις μπάλες τους. Θεωρητικά λοιπόν μπορούμε να υποθέσουμε πάρα πολλούς ανθρώπους να συντονίζονται κατά ποικίλους τρόπους, με κάποιες αστοχίες κιόλας, καταλαμβάνοντας περισσότερο χώρο, καθώς ίσως να υποθέσουμε χώρο γι άλλους λίγους ανθρώπους που τους παρακολουθούν. Δείχνει μάλλον πολύ πιο κοντά στην απόδοση της πραγματικότητας όμως να συμπεριλάβουμε κι ανθρώπους που ανταγωνίζονται πολύ πιο έκδηλα μεταξύ τους, κι αυτούς δείχνουν πως θέλουν να παρακολουθούν πολύ άλλοι άνθρωποι, ή και οι ίδιοι, ως θεατές. Ο Shannon σημειώνει κατόπιν ότι τα τρία αγαπημένα ζογκλερικά εργαλεία είναι πολύ ενδιαφέροντα, όσον αναφορά το ελλειψοειδές της αδράνειάς τους. Η σφαίρα έχει την αδράνεια ίση και στους τρεις άξονες, ο τροχός (το στεφάνι) έχει τους δύο άξονες ίσους και τον άλλον πολύ μικρότερο και η κορύνα, που ως εργαλείο είναι και το πιο πρόσφατο όλων, έχει τους δύο άξονες ίσους και τον άλλον πολύ μεγαλύτερο, κάτι που της προσδίδει σχετικώς και κάποιο επιπλέον ενδιαφέρον.

Οι σφαιριστές των τυπικών ανταγωνιστικών σφαιρίσεων, έχουν αντιστοίχως τα δικά τους εργαλεία. Πρόκειται ως επί το πλείστον για σφαιρικές μπάλες, διαφόρων μεγεθών, βαρών και άλλων χαρακτηριστικών που είναι πολύ γνωστά, μα και πολύ εύκολα μπορεί να τα πληροφορηθεί κανείς για οποιαδήποτε σφαίριση. Διαπιστώνεται όμως μάλλον κάποια φτώχεια. Καθώς αν για κάποιο κόλπο στο Juggling με μπάλες, είναι εύλογο να προτιμάται ένας τύπος ώστε να διευκολύνει στο χρονισμό, στις άλλες περιπτώσεις η μοναδικότητα του τύπου της σφαίρας οιασδήποτε σφαίρισης, δεν δικαιολογείται εξίσου καλώς. Επιπλέον, ως προς το σχήμα για παράδειγμα, υπάρχουν και κάποιες λίγες εξαιρέσεις δημοφιλών σφαιρίσεων, όπως το πτερό της αντιπτέρισης, ή το μακρόστενο σχήμα της μπάλας του ράγκμπι, που βεβαίως δεν συνεπάγονται από μόνα τους κάποια συγκριτική ανωτερότητα τους. Αυτά είναι κάπως όπως τα λαστιχένια κοτόπουλα κ.α. τέτοια αντικείμενα (props), που αναφέρει ο Shannon, ότι επίσης μπορούν να μεταχειριστούν και μεταχειρίζονται οι ζογκλέρ.

Με αντικείμενα όπως τα παραπάνω μπορεί να αναδεικνύεται καλύτερα ότι εκτός από τις σφαίρες μπορούμε να μεταχειριστούμε κι άλλα σχήματα, όμως πράγματι τότε μπορεί να σταθεί κανείς στο ερώτημα γιατί να μεταχειριστούμε ειδικότερα κάτι σαν το συγκεκριμένο μακρόστενο σχήμα, ή το συγκεκριμένο πτερό; Τυποποιώντας τα μπορούν να είναι ίδια για όλους, όπως είναι και οι σφαιρικές μπάλες. Μπορούμε και να επισημάνουμε ότι παρά τη διαφοροποίηση του σχήματος, στο ράγκμπι και στην αντιπτέριση, δεν έχουμε απαραιτήτως και τη πλέον καλή μεταχείριση γυναικών και ανδρών, παιδιών και ηλικιωμένων κ.λπ. Γίνεται κατά συνέπεια συζήτηση κι ως προς το γιατί να μείνουμε στο σφαιρικό σχήμα, μα και προς το γιατί να φύγουμε από αυτό. Καθίσταται ευνόητο έτσι ότι ο καθένας ίσως μπορεί να προτείνει πολλά και διάφορα σχήματα, η μελέτη των οποίων άπτεται της γεωμετρίας, όπως η μελέτη του βάρους τους συνδέεται με τη φυσική, ή όπως η μελέτη της μεταβολής συνδέεται με το διαφορικό λογισμό, όμως δεν θα έβλαπτε μάλλον να έχουμε κατά νου και τους ανθρώπους.

Επιπλέον στις σφαιρίσεις γενικώς, υπάρχουν μάλλον δευτερεύοντα αντικείμενα, με τα οποία ρίπτονται οι μπάλες, όπως διάφορες ρακέτες και ρόπαλα, τα ίδια ή άλλα αντικείμενα με τα οποία υποδεχόμαστε τις μπάλες, ή που μας προστατεύουν όπως τα γάντια των τερματοφυλάκων και οι κάσκες, αντικείμενα που συνιστούν στόχους όπως τα γκολπόστ και τα δίχτυα, τα οποία ως γνωστόν στέκουν κι ενδιάμεσα σε κάμποσες σφαιρίσεις κ.λπ. Σε αυτά τα δευτερεύοντα αντικείμενα επίσης, μπορεί να επεκταθεί η παρατηρούμενη καθυστέρηση, καθώς έχουν τυποποιηθεί όπως και οι μπάλες αντιγράφοντας το ένα το άλλο, χωρίς μάλλον κάποια ιδιαίτερη επιμέλεια. Με σκέτη σκοπιμότητα μάλλον, το να διαφοροποιούνται ενδεχομένως για να διαφοροποιηθούν. Εφόσον ισχύει αυτό, το να ρίχνει κανείς με ρακέτα της αντιπτέρισης, που διαφέρει από τη ρακέτα της αντισφαίρισης, στο χτύπημα το πτερού της αντιπτέρισης, που διαφέρει από το μπαλάκι της αντισφαίρισης, εντός των αντίστοιχων γηπέδων κ.λπ. ενδεχομένως να μη διαφέρει και τόσο όσο συνήθως νομίζεται. Ασφαλώς μπορούν να γραφούν χιλιάδες σελίδες ως προς την ανάπτυξη τέτοιων αντικειμένων στις σφαιρίσεις. Παρόλα αυτά, μπορεί να αντιληφθεί κανείς από άλλη σκοπιά πόση ένδεια παρουσιάζουν. Επιπλέον, η διάσταση του χώρου που τα «περιέχει», στις ανταγωνιστικές σφαιρίσεις είναι πρωτίστου ενδιαφέροντος. Σε αυτές η διαίρεση του χώρου προηγήθηκε κατά πολύ της διαίρεσης του χρόνου. Ο χώρος διαθέτει συγκριτικά πολύ πιο μεγάλη σημασία στις ανταγωνιστικές σφαιρίσεις απ' ότι στο Juggling, όμως οι διαιρέσεις του παρουσιάζουν επίσης πολύ μεγάλη ένδεια. Είναι για παράδειγμα προφανές καταρχήν, ότι οι επινοητές αυτών και οι διαχειριστές τους, τα θέλουν συμμετρικά κατά κανόνα, κάπως όπως και οι επινοητές των τυχερών παιγνίων. Κατ' αντιδιαστολή με εκείνους όμως, νομιμοποιούν έτσι την ανισότητα των ευκαιριών εκείνων που δεν λαμβάνουν υπόψη.

2.7.6 Τα Βασικά Υποδείγματα και το Uniform Juggling

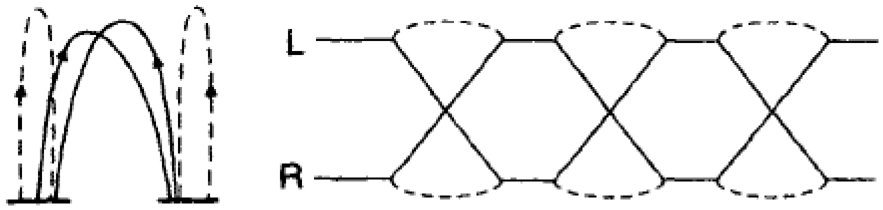


Εικόνα 8α Εικόνα 8β Εικόνα 8γ
Υπόδειγμα Cascade Υπόδειγμα Shower Υπόδειγμα Fountain

Εικόνα 8. Τα βασικά υποδείγματα στο Juggling (Πηγή: Beek & Lewbel, 1995a).

Ο Shannon ξεκινά να γράφει για τα βασικά υποδείγματα του Juggling, επικαλούμενος μια δήλωση για τη σαγήνη του ρυθμού των τριών δευτέρων ενός μεγάλου μουσικού της Jazz, του G. Krupa, ενώ αναφέρει επίσης και το F minor Etude του Chopin. Η εκτέλεση του Juggling απαιτεί ρυθμό που συχνά δίνεται από τη μουσική. Η αναπαράσταση του μουσικού ρυθμού των τριών δεύτερων μπορεί να γίνει απο έναν ζογκλέρ χρησιμοποιώντας τρεις μπάλες σε δύο χέρια. Αυτό είναι το πρώτο μοτίβο το οποίο μαθαίνουν οι περισσότεροι άνθρωποι καθώς είναι το πιο βασικό και έχει πάρα πολλές παραλλαγές όπως και το χτύπημα της καμπάνας. Κατόπιν δείχνει σε ένα σχεδιάγραμμα κάποιο απλό υπόδειγμα cascade με τρεις μπάλες, στο οποίο οι ζογκλέρ παραλλάσσουν ως προς το ύψος ρίψης, το άνοιγμα των χεριών κι ακόμα αντιστρέφουν τη διεύθυνση της κίνησης (Εικόνα 8α). Γίνονται ρίψεις κάτω από τα πόδια, αναπηδήσεις στο πάτωμα, ρίψεις πίσω από την πλάτη και πολλές άλλες παραλλαγές. Τις κάνουν με μπάλες, στεφάνια, κορύνες και σχεδόν οτιδήποτε, ενώ έχουν γραφτεί κι ολόκληρα βιβλία πάνω στο θέμα.

Ο συγγραφέας όμως πέρα από τα σχεδιαγράμματά του, σε αντίθεση μάλλον με πολλούς άλλους ειδήμονες, δεν παραλείπει να συμπεριλάβει το μάλλον άνευ πρακτικής αξίας, αλλά όχι άνευ θεωρητικής σπουδαιότητας παράδειγμα των δυο αντικειμένων, στα ισάριθμα ανθρώπινα χέρια. Είναι η απλούστερη περίπτωση που μπορεί να γίνει μια επιλογή σε κάθε ρίψη, ή να ανταλλάξει κανείς τις μπάλες, ή να τις κυκλοφορήσει στα ίδια τα χέρια (Εικόνα 9). Είναι εν προκειμένω αυτή η επιλογή, για την οποία έχει για παράδειγμα αναφερθεί και στη «Μηχανή Ανάγνωσης; της Σκέψης», όπως βέβαια κι αλλού,. Δεν διαφέρει ενδεχομένως σημαντικά απ’ ότι έχει στο νου του ο J. Bernoulli, μα και τόσοι επιστήμονες και μαθηματικοί πρωτίστως, που έχουν εντρυφήσει στη δυαδικότητα, ακόμα όμως και εντός κάποιων άλλων διαφορετικών πλαισίων ο καθένας. Πάνω σε αυτή την επισήμανσή του ως προς το παράδειγμα της επιλογής, φαίνεται να πλησιάζει πολύ κοντά στο να ορίσει αυτός μια σημειογραφία σαν την κατοπινή του siteswap.



Εικόνα 9. Η επιλογή στο Juggling κατά τον Shannon

Έπειτα αναφέρεται στο υπόδειγμα shower με τρεις μπάλες (Εικόνα 8β), που εκτελείται μεν επίσης με τρεις μπάλες, οι οποίες όμως δείχνουν σαν να κυκλοφορούν σε έναν κύκλο και μετέπειτα περνάει στις τέσσερις μπάλες και το υπόδειγμα fountain (Εικόνα 8γ). Εν προκειμένω έχουμε απεικονίσει αυτά τα υποδείγματα στην πλέον απλή εκδοχή τους, καθώς θα επανέλθουμε σε αυτά όταν αναφερθούμε στο siteswap, όπου καθίσταται και προφανής η σχέση τους με τη συνδυαστική ανάλυση. Ακολούθως ο Shannon περνάει σύντομα προς την πολυπλεξία, στο multiplex Juggling, όπου δυο, ή περισσότερες μπάλες, μπορούν να πιάνονται από το ένα χέρι ταυτοχρόνως. Στους διαγωνισμούς του 1979, αναφέρει πως κάποιος έκανε Juggling κατ' αυτό τον τρόπο, με εφτά μπάλες. Το multiplex Juggling καθαυτό είναι πολύ ενδιαφέρον και γραφικό, όμως είναι αξιοσημείωτα ευκολότερο από τον πιο συνήθη τύπο και το ζητούμενο δεν είναι η ευκολία σε κάθε περίπτωση. Η Διεθνής Ένωση των Ζογκλέρ (IJA) έκρινε σκόπιμο να μην συμπεριλαμβάνει το multiplex Juggling στους διαγωνισμούς της (στο παιχνίδι των αριθμών). Παρατηρούμε δηλαδή μια κάποια διαφορά, λειτουργούμε δε και κάπως αντίθετα απ' όταν έχουμε την ταυτόχρονη ρίψη επτά ζαριών, για παράδειγμα, όταν την θεωρούμε ισοδύναμη με επτά διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού. Ενδιαφερόμαστε μάλιστα για τα αποτελέσματά τους στην πρώτη, ενώ εν προκειμένω ενδιαφερόμαστε κυρίως για τις διεργασίες. Αυτά θα ήγειραν δύσκολες ερωτήσεις στο θεωρητικό πλαίσιο του J. Bernoulli και του 17^{ου} αιώνα εν γένει, αναφορικά με την ανάλυση της πολλαπλότητας, της συγχρονικότητας και του πόθεν εκπορεύονται.

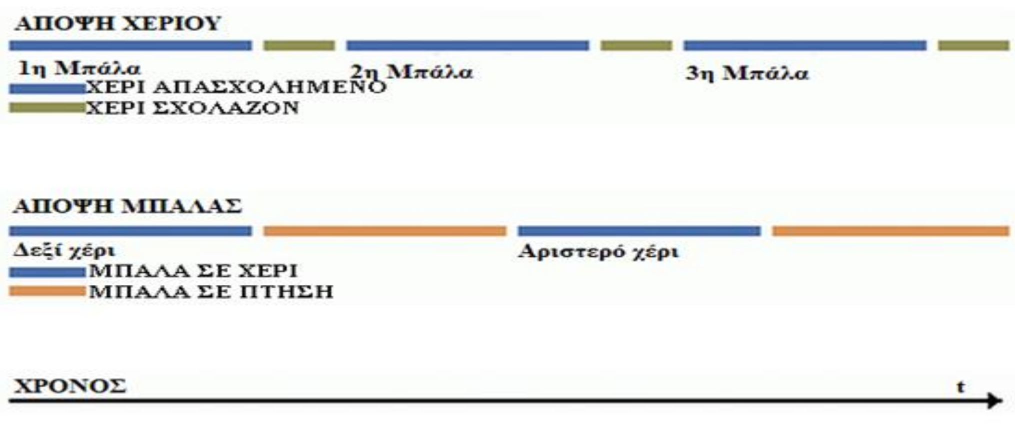
Ο Shannon ορίζει το ομοιόμορφο (uniform) Juggling, ως εκείνο που γίνεται δίχως πολυπλεξία κι έχει ίσους όλους τους χρόνους D (κάθε χρονικό διάστημα που η μπάλα παραμένει στο χέρι του ζογκλέρ - το D εκ του Dwell), ίσους όλους τους χρόνους F (κάθε χρονικό διάστημα που η μπάλα βρίσκεται στον αέρα – το F εκ του Flight) και ίσους όλους τους χρόνους V (κάθε χρονικό διάστημα που το χέρι του ζογκλέρ παραμένει άδειο – το V εκ του Vacant). Το uniform Juggling περιλαμβάνει μερικά από τα πιο συνήθη βασικά μοτίβα, αυτά που εκτελούνται με μικρούς ή και πιο μεγάλους μονοψήφιους αριθμούς αντικειμένων, από τη μεγάλη πλειονότητα των ενασχολούμενων. Αυτή η προτίμηση εξηγείται καλά, καθώς έτσι όλα τα χέρια κάνουν το ίδιο, ρίχνουν τις μπάλες στο ίδιο ύψος, τις κρατάνε το ίδιο και εκείνες ίπτανται το ίδιο χρονικό διάστημα. Έπειτα ο Shannon κάνει την υπέροχη συσχέτιση του ζογκλέρ με το γεωμέτρη που έχουμε προαναφέρει και διευκρινίζει ότι τα θεωρήματά του ως προς το uniform Juggling, αναφέρονται στη χρονική περίοδο που θα έπαιρνε σε μια μπάλα να περάσει από όλα τα χέρια. Έτσι έπειτα δίνει επί του θέματος, το πλέον γνωστό θεώρημά του.

Θεώρημα 1^{o} . Σε ένα uniform Juggling όπου ο χρόνος που το χέρι του ζογκλέρ έχει την μπάλα συμβολίζεται με **D (Dwell)**, ο χρόνος που το χέρι του ζογκλέρ είναι κενό συμβολίζεται με **V (Vacant)** και ο χρόνος που η μπάλα είναι στο αέρα συμβολίζεται με **F (Flight)** ισχύει :

$$\frac{F+D}{V+D} = \frac{B}{H},$$

Στον ίδιο τύπο, B (Balls) είναι ο αριθμός των μπαλών και H (Hands) ο αριθμός των χεριών.

Το θεώρημα μπορεί να προκύψει από την εξέταση ενός πλήρους κύκλου Juggling πρώτα από τη σκοπιά της μπάλας, έπειτα από τη σκοπιά του χεριού, και κατόπιν εξίσωση των δύο χρόνων. Πρόκειται για μια εφαρμογή ενός χρήσιμου τεχνάσματος, καθώς υπολογίζεται κάτι με δύο διαφορετικούς τρόπους και θεωρούμε κατόπιν ότι τα δυο αποτελέσματα πρέπει να είναι ίσα. Στην περίπτωσή μας είναι ο χρόνος Juggling, σε άλλο παράδειγμα μπορεί να είναι οικονομικό χρήμα, όπως κατά τον υπολογισμό του Α.Ε.Π. ως εισόδημα, ή ως δαπάνη. Το χέρι που έχει την μπάλα, το αναφέρουμε ως απασχολημένο, το άδειο ως σχολάζον. Η Εικόνα 10 βοηθά στην καλύτερη κατανόηση του τι εννοείται



Εικόνα 10. Η άποψη του χεριού και η άποψη της μπάλας κατά δεδομένο χρόνο t. (Πηγή: http://www.juggling.org/papers/science-1/).

Προκύπτει, όπως δείχνεται και στο διάγραμμα, η σκοπιά του χεριού και η σκοπιά της μπάλας. Η σκοπιά του χεριού αναφέρεται σε απασχολημένα χέρια, (ή χέρια με μπάλες) και σχολάζοντα χέρια, (ή χέρια δίχως μπάλες). Η σκοπιά της μπάλας αναφέρεται σε μπάλες στα χέρια, (ή μπάλες πιασμένες) και μπάλες στον αέρα, (ή μπάλες σε πτήση). Ο Shannon επισημαίνει ότι κατά μια έννοια αυτό το θεώρημα μοιάζει ασήμαντο, δηλώνει όμως μια αναλογία και γράφει πως είναι πιο ευφυές απ' όσο φαίνεται. Το 1ο Θεώρημά του, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το εύρος τιμών των πιθανών περιόδων για ένα δεδομένο κόλπο και ένα δεδομένο χρόνο πτήσης της μπάλας. Ο ζογκλέρ μπορεί να αλλάξει τον χρόνο της περιόδου, αλλάζοντας το μέγιστο ύψος που πετάει τις μπάλες, δηλαδή αυξάνοντας το D (ώστε να αυξάνεται η περίοδος), ή μειώνοντας το D (ώστε να μειώνεται η περίοδος). Το μέγιστο πλήθος τιμών για έναν δοσμένο χρόνο πτήσης της μπάλας, βρίσκεται θέτοντας D = 0 για να βρούμε την ελάχιστη τιμή, ή θέτοντας V = 0 για να βρούμε την μέγιστη τιμή. Η αναλογία αυτών των δύο άκρων είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο πτήσης της μπάλας και εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των μπαλών και των χεριών. Επομένως στο uniform Juggling για ένα «κόλπο» με δεδομένο χρόνο πτήσης της μπάλας, οι πιθανές τιμές της περιόδου είναι $\frac{B}{(B-H)}$.

Όταν χρησιμοποιούμε συγκριτικά περισσότερες μπάλες, έχουμε μικρότερο εύρος τιμών. Στην πραγματικότητα όμως το εύρος τιμών θα είναι ακόμα μικρότερο καθώς δεν μπορούμε να μηδενίσουμε το **D,** ούτε το **V.** Αυτό το $1^{ο}$ θεώρημα λέει γενικότερα πολλά πράγματα για την απασχόληση των χεριών, που εκτελούν μια συντονισμένη εργασία. Μπορεί να θεωρηθεί ως εξίσου προφανές ότι κάποια αναμέτρηση ανταγωνιστικής σφαίρισης που διεξάγεται με δυο μπάλες, αντί μίας θα απασχολεί περισσότερους ανθρώπους στον ίδιο χώρο. Καθίσταται βέβαια προφανές αν εν προκειμένω αντιλαμβάνεται κανείς το παιχνίδι με τις δυο μπάλες, όπως κι ότι αυτό δεν μπορεί να γίνει με οσεσδήποτε μπάλες, καθώς άλλωστε ισχύει για το Juggling και συνδέεται γενικώς με το ζήτημα της απασχόλησης. Κατόπιν δίνονται άλλα δυο θεωρήματα, που μας καθοδηγούν επίσης προς το κατοπινό siteswap.

Θεώρημα $2^{ο}$. Αν το B και το H είναι μεταξύ τους σχετικά πρώτοι (δηλαδή δεν έχουν κοινό διαιρέτη) τότε υπάρχει ένα μοναδικό uniform Juggling. Οι μπάλες μπορούν να αριθμηθούν απο το 0 έως το B-1, καθώς και τα χέρια απο το 0 έως το H-1, με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε μπάλα να προάγεται δια των χεριών σε μια κυκλική ακολουθία και κάθε χέρι να πιάνει τις μπάλες σε κυκλική ακολουθία.

Θεώρημα $3^{ο}$. Εφόσον το B και το H δεν είναι σχετικά πρώτοι , έστω ότι το n είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους για το οποίο ισχύει ότι B = np και H = nq (οπου p και q είναι σχετικά πρώτοι). Τότε υπάρχουν πάρα πολλοί τύποι Juggling, τόσοι όσοι και οι τρόποι να διαμεριστεί το n σε ένα άθροισμα ακεραίων.

Ο Shannon κατόπιν αναφέρει για παράδειγμα την συνηθισμένη περίπτωση των δύο ζογκλέρ, όπου έχει τρεις μπάλες, ή κορύνες ο καθένας, οπότε έχουμε B = 6 και H = 4. O μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι το 2, το οποίο μπορεί να γραφτεί κι ως άθροισμα θετικών ακέραιων, δηλαδή 2, ή 1 + 1. Η περίπτωση του 2 αντιστοιχεί στο να ξεκινήσουν οι ζογκλέρ ταυτόχρονα. Έτσι σε κάθε ρίψη υπάρχουν δύο επιλογές: η ρίψη να γίνει από τον καθένα προς τον εαυτό του, ή η ρίψη να γίνει προς τον άλλον ζογκλέρ. Στο ομαδικό Juggling συνήθως χρησιμοποιείται και μουσική ώστε οι ζογκλέρ να μπορούν να συγχρονίζονται μέσω του ρυθμού της μουσικής. Η άλλη περίπτωση, το 1 + 1, αντιστοιχεί σε δύο ζογκλέρ εκτός συγχρονισμού. Δεν υπάρχει τρόπος να περαστούν τις κορύνες από το ένα ζεύγος χεριών στο άλλο, χωρίς να παραβιαστεί η συνθήκη του ομοιομορφίας.

Κατόπιν, ο Shannon γράφει ότι οι αριθμοί των διαμερίσεων που μπορούν να γίνουν αυξάνουν ραγδαία καθώς φαίνεται κι από τον πίνακα που δίνει για τους αριθμούς μέχρι το 10.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
αρ. διαμερίσεων	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

Έπειτα προχωράει στις αποδείξεις των θεωρημάτων του και μετέπειτα αναφέρεται στο jugglometer, ένα όργανο για σχετικές μετρήσεις, στη «ζύγιση» των ζογκλέρ, στη γρήγορη αύξηση της δυσκολίας στο Juggling, καθώς και στο Juggling με αναπήδηση, θέματα τα οποία παραλείπουμε ως πιο στενού ενδιαφέροντος. Θέλουμε να σταθούμε για λίγο περισσότερο στη σκοπιά της μπάλας. Αυτή ενδεχομένως είναι συγκριτικά λιγότερο κατανοητή και γι αυτό τη μεταφέρουμε στις σφαιρίσεις ως εξής: Υποθέτουμε για παράδειγμα έστω μια μπάλα, της πετοσφαίρισης, της καλαθοσφαίρισης, ή άλλης σφαίρισης, με την οποία παίζεται κάποιο παιχνίδι της, έστω ωριαίο και μεταξύ ανδρών. Αυτό παίζεται σε κάποιο γήπεδο από αυτά που διεξάγονται οι αναμετρήσεις της και στο οποίο έπειτα από κάποια επίσης ωριαία ανάπαυλα. Μπαίνουν κατόπιν γυναίκες έστω, για να παίξουν ωριαία την ίδια σφαίριση, με την ιδίου τύπου μπάλα που παίζουν και οι άνδρες. Μετέπειτα από τη δεύτερη παρόμοια ανάπαυλα, μπαίνουν για να παίξουν ξανά άνδρες κ.ο.κ.. Σύμφωνα με τη σκοπιά της μπάλας, παίζουν άνδρες-γυναίκες-άνδρες με χρόνους της μιας ώρας, όπως σχεδόν κάποιος ζογκλέρ που παίζει το δεξί-αριστερό-δεξί, με χρόνους των λίγων δευτερολέπτων. Κι όπως ακριβώς ο ζογκλέρ μπορεί να «σπάσει», να διαμερίσει στο μισό, ή σε άλλο κλάσμα, τα δευτερόλεπτα και να παίζει πάλι δεξί-αριστερό-δεξί, έτσι και μπορεί να διαμεριστεί σε κάποιο επιθυμητό κλάσμα, η ώρα που η σφαίριση θα παιχθεί άνδρες-γυναίκες-άνδρες. Εφόσον ο χρόνος διαμεριστεί σε κατάλληλα μικρά μέρη τότε οι άνδρες και γυναίκες παίζουν στο ίδιο γήπεδο και συγχρόνως.

Μεταφορικά μπορούμε να πούμε για τις ανταγωνιστικές σφαιρίσεις, ότι στην καλύτερη περίπτωση οι άνδρες και οι γυναίκες ως «χέρια», λειτουργούν ξεχωριστά και με διαφορετικό αριθμό μπαλών. Ή ότι η μπάλα περνάει από τους άνδρες στις γυναίκες και πηγαίνει προς αυτές πολύ αργά, ενώ επιστρέφει από αυτές πολύ σύντομα (αν υποτεθεί πως υπάρχει συνεργασία). Σε καμία περίπτωση πάντως, λαμβάνοντας υπόψη τα βασικά υποδείγματα, δεν παρατηρείται καθόλου το cascade (δεν συντονίζονται κατά τον πλέον δόκιμο τρόπο στο Juggling).

2.7.7 Η σημειογραφία siteswap

Ο Shannon δεν υπέδειξε νέα υποδείγματα Juggling, τα οποία δεν έχουμε λόγο να υποθέσουμε ότι θα περιφρονούσε, όπως βέβαια δεν υπέδειξε ούτε υποδείγματα για τις ανταγωνιστικές σφαιρίσεις. Σύμφωνα και με τον Arthur Lewbel (2001), ο Shannon πλησίασε στην επινόηση του siteswap. Στη δεκαετία του 1970, όταν δηλαδή του είχε ζητηθεί από το επιστημονικό περιοδικό «Scientific American» για να γράψει το άρθρο σχετικά με το Juggling, εκτός από το περίφημο θεώρημα, το σχέδιο του άρθρου του περιείχε μια προσπάθεια να μετρήσει τον αριθμό των διαφορετικών πιθανών υποδειγμάτων. Καθώς έκανε και πολλά άλλα πράγματα, δεν αναθεώρησε ποτέ το άρθρο, όπως του ζήτησε το περιοδικό.

Πολλά νέα μοτίβα έγιναν αντιληπτά έπειτα από λίγα χρόνια, όταν ένας άλλος επιστήμονας και juggler, ο Paul Klimek του Πανεπιστημίου της California, επινόησε μια σημειογραφία του Juggling. Ακολούθησαν πολύ σύντομα ανάλογες προσπάθειες από επιστημονικές ομάδες άλλων πανεπιστημίων, όπως αυτή του Πανεπιστημίου του Cambridge, που έδωσαν στο θέμα πολύ περισσότερη δημοσιότητα. Όπως δηλώνει ο επίσης μαθηματικός και juggler C. Wright, πήγε ο ίδιος εκείνη την εποχή σε ένα συνέδριο ζογκλέρ στη Βρετανία, αλλά δεν άρχισε εξηγεί τη θεωρία μιλώντας, μα απλώς έδειξε μερικά από τα καινούργια μοτίβα που είχαν ανακαλύψει. Οι υπόλοιποι «κόλλησαν», άρχισαν να προσπαθούν να μάθουν τα καινούργια κόλπα και μέσω αυτής της διαδικασίας άρχισε να τους λέει πώς λειτουργούν τα πράγματα (Φαφούτη, 2015). Οι εξηγήσεις του Juggling δεν περιορίζονται στα μαθηματικά, καθώς ενίοτε φθάνουν ακόμη και στην κβαντομηχανική. Προέκυψαν εξαιρέσεις που δεν μπορούσαν να εξηγηθούν παρά μόνο με τη συνδρομή της. Οπως εξηγεί και πάλι ο ίδιος, όταν κάποιος κάνει ρίψεις με το κάθε χέρι εναλλάξ, άρα όταν το ένα χέρι έχει την μπάλα, το άλλο χέρι είναι άδειο, η λογική πρόταση που προκύπτει είναι: τα χέρια είναι πάντα γεμάτα τον μισό χρόνο και έχουν την μπάλα εναλλάξ. Το ζήτημα όμως είναι πως όταν έχει κανείς τέσσερις έστω μπάλες και τις πετάξει όλες στον αέρα, τότε και τα δύο χέρια είναι άδεια. Για να λυθεί αυτό το πρόβλημα «εισήχθη» ένα νοητό μπαλάκι - ένα μπαλάκι «βαμμένο αόρατο», που ονομάστηκε «αντιμπαλάκι» (κατά το «αντισωματίδιο» της κβαντικής φυσικής που έχει την ίδια συμπεριφορά). Αυτό θεωρείται πως με την αρνητική του ενέργεια εξουδετερώνει το μπαλάκι που κανονικά θα έπρεπε να υπάρχει στο ένα χέρι, τη στιγμή που και τα δύο χέρια εμφανίζονται άδεια. Δεν είναι δε η ομάδα του Cambridge η μόνη που κατέληξε σε αυτό το παράδοξο - το «αντιμπαλάκι» ήταν ακριβώς η αιτία για την οποία ο Paul Klimek είχε ονομάσει τη μαθηματική θεωρία του «Quantum Juggling» («Κβαντική Ζογκλερική»). Όπως προκύπτει και από τα σχετικά διαγράμματα, το αντίστοιχο του αντισωματιδίου δείχνει να είναι το ίδιο με ένα συνηθισμένο μπαλάκι, που όμως κινείται προς τα πίσω στον χρόνο. Πέραν του παραδόξου, αν ακολουθήσει κανείς αυτή τη συλλογιστική, πρόκειται για τον πιο ξεκάθαρο τρόπο εξήγησης, σε κάτι που αλλιώς θα έπρεπε να θεωρηθεί εξαίρεση. Είναι δε πολύ απλοϊκό να κρίνει κανείς ότι πρόκειται περί εικασιών κτισμένων στον αέρα, όντας βέβαιος για τον αριθμό των μπαλών που αντιλαμβάνεται ο ίδιος. Όταν δηλαδή κάποιος νομίζει πως υπάρχει μια έστω επιπλέον μπάλα, εκεί που δεν υπάρχει στην πραγματικότητα, πρόκειται για κάποια περίπτωση φαντασίωσης. Εφόσον όμως πρόκειται για οπωσδήποτε εφικτή δυνατότητα, τότε ενδέχεται το πρόβλημα να βρίσκεται μάλλον σε εκείνον που δεν την αντιλαμβάνεται και υποστηρίζει πως δεν υπάρχει άλλη εναλλακτική. Στο Juggling, εφόσον προσπεράσουμε τη μελέτη σκοπιμότητας, η μελέτη εφικτότητας, καθώς δείχνει το siteswap, έχει πλέον αναχθεί στην εξέταση ενός σκέτου αριθμού.

Γενικότερα, σε ένα υπόδειγμα Juggling αγνοούμε πόσοι άνθρωποι ή χέρια ενέχονται, αγνοούμε πόσα αντικείμενα χρησιμοποιούνται και αγνοούμε τα ειδικά μονοπάτια των ριπτόμενων αντικειμένων. Υποτίθεται πως υπάρχει συγκεκριμένος αριθμός αντικειμένων και δίνεται προσοχή στις φορές που ρίπτονται και υποτίθεται επίσης ότι οι χρόνοι των ρίψεων είναι περιοδικοί. Αρκετές άλλωστε κι από τις σφαιρίσεις διεξάγονται με περιοδικές ρίψεις.

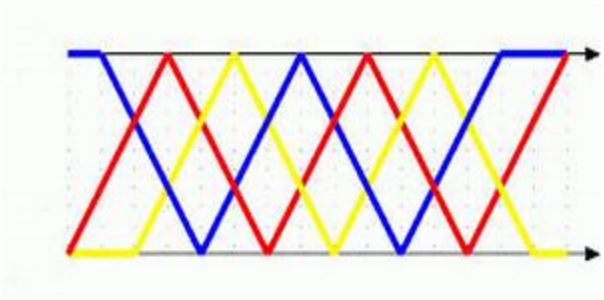
Με τη σημειογραφία του siteswap, προκειμένου να χαρακτηρίσουμε το υπόδειγμα, μεταχειριζόμαστε τους χρόνους μεταξύ των ρίψεων, δηλαδή τη διαφορά από τη μια ρίψη στην επόμενη της ίδιας μπάλας. Στο siteswap μεταχειριζόμαστε αλληλουχίες αριθμών προκειμένου να υποδηλώσουμε συγκεκριμένες κινήσεις του Juggling. Αυτές οι αλληλουχίες κωδικοποιούν τον αριθμό των λίγων beat κάθε ρίψης, ο οποίος συνδέεται με το ύψος των ρίψεων και το χέρι με το οποίο γίνεται η καθεμία. Για παράδειγμα, το 4 εντός κάποιας ακολουθίας αριθμών σημαίνει ότι η μπάλα βρίσκεται για τρία beat στον αέρα και ένα beat στο χέρι, προτού ριχτεί εκ νέου. Αντιστοίχως το 3 σημαίνει ότι η μπάλα βρίσκεται για δυο beat στον αέρα και ένα beat στο χέρι, προτού ριχτεί εκ νέου, και ούτω καθεξής. Όσο ψηλότερα ρίχνεται η μπάλα, τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός, οπότε το 4 αντιστοιχεί σε μια ψηλότερη ρίψη από το 3. Επιπλέον μεταχειριζόμαστε τους ζυγούς αριθμούς για να αντιστοιχίσουμε ρίψεις μια μπάλας που ρίχνεται κατ' ευθείαν επάνω και πιάνονται με το ίδιο χέρι, ενώ μεταχειριζόμαστε τους μονούς αριθμούς για ρίψεις που πιάνονται με το αντίθετο χέρι από εκείνο που ρίπτονται. Κατόπιν απλώς καταγράφουμε την αλληλουχία των αριθμών. Δεν είναι δύσκολο να αντιληφθεί κανείς τη σημειογραφία του siteswap αρχίζοντας από κάποιο απλό υπόδειγμα και να περάσει κατόπιν σε υποδείγματα πιο σύνθετα, λίγο, ή πολύ. Ακολουθούν έτσι οι αρχικοί αριθμοί και η σημασία τους:

- 0 = «ξεκούραση» (σχολάζον - άδειο χέρι)
- 1 = «χαμηλή μεταβίβαση-πάσα (μεταξύ χεριών)
- 2 = «κράτημα» (ένα χέρι / δίχως ρίψη)
- 3 = «3 μπάλες (cascade με 3 μπάλες (μεταξύ χεριών)
- 4 = «4 μπάλες (fountain με 4 μπάλες (ψηλά και προς το ίδιο χέρι)
- 5 = «ψηλή μεταβίβαση-πάσα (μεταξύ χεριών)

Κατόπιν εξηγείται εν συντομία η συλλογιστική με την οποία αποδόθηκαν στα βασικά υποδείγματα οι αντίστοιχοι αριθμοί:

Στο υπόδειγμα cascade (Εικόνα 11) με έστω τρεις μπάλες, έχουμε:

1. η πρώτη μπάλα ρίχνεται σε χρόνους 0, 3, 6, ...,
2. η δεύτερη μπάλα ρίχνεται σε χρόνους 1, 4, 7 ...,
3. η τρίτη μπάλα ρίχνεται σε χρόνους 2, 5, 8 ..... .

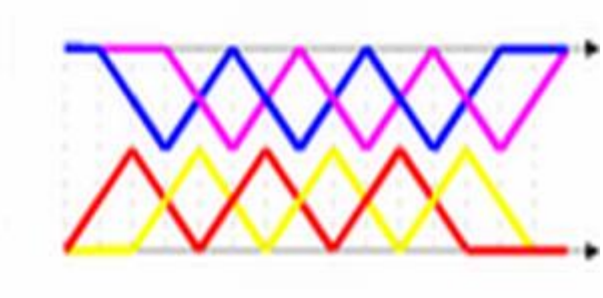


Εικόνα 11. Το ladder για το cascade (Πηγή: http://www.libraryofjuggling.com/)

Με τη σημειογραφία του siteswap, το παραπάνω υπόδειγμα cascade, στον οποίο το 3 είναι ο χρόνος (τα beat) μεταξύ των ρίψεων οποιασδήποτε μπάλας, χαρακτηρίζεται ως 3,3,3,3,.. ή σημειώνεται πιο απλά ως σκέτο 3. Παρατηρούμε ότι το υπόδειγμα cascade, μπορεί να γενικευτεί και για μεγαλύτερους μονούς αριθμούς, όχι όμως με ζυγούς αριθμούς μπαλών, κορυνών κ.λπ. συνέργων καθότι υπό τέτοιες συνθήκες θα είχαμε σύγκρουσή τους σε ένα κεντρικό σημείο του.

Στο υπόδειγμα fountain (Εικόνα 12) με έστω τέσσερις μπάλες έχουμε:

1. η πρώτη μπάλα ρίχνεται σε χρόνους 0, 4, 8, ...,
2. η δεύτερη μπάλα ρίχνεται σε χρόνους 1, 5, 9 ...,
3. η τρίτη μπάλα ρίχνεται σε χρόνους 2, 6, 10 .....,
4. η τέταρτη μπάλα ρίχνεται σε χρόνους 3, 7, 11 .....

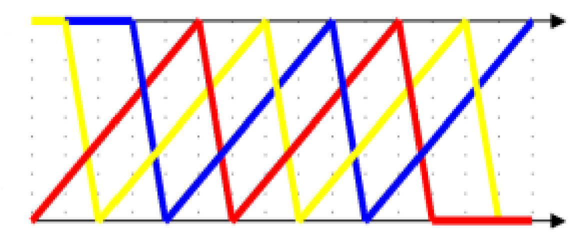


Εικόνα 12. Το ladder για το fountain (Πηγή: http://www.libraryofjuggling.com/)

Με τη σημειογραφία του siteswap, το παραπάνω υπόδειγμα «fountain», στον οποίο το 4 είναι ο χρόνος (τα beat) μεταξύ των ρίψεων οποιασδήποτε μπάλας, χαρακτηρίζεται ως 4,4,4,4,.. ή σημειώνεται πιο απλά ως σκέτο 4. Παρατηρούμε ότι το υπόδειγμα fountain, μπορεί να γενικευτεί και για μεγαλύτερους ζυγούς αριθμούς, ενώ αν εκτελεστεί με μονούς αριθμούς μπαλών, τότε θα προκύπτει κατ' ανάγκη ασυμμετρία, καθότι στο ένα χέρι θα έχουμε περισσότερες από ότι στο άλλο.

Στο υπόδειγμα shower (Εικόνα 13) με τρεις μπάλες έχουμε:

1. η πρώτη μπάλα ρίχνεται σε χρόνους 0, 5, 6, 11, 12 ...,
2. η δεύτερη μπάλα ρίχνεται σε χρόνους 1, 2, 7, 8, 13 ...,
3. η τρίτη μπάλα ρίχνεται σε χρόνους 3, 4, 9, 10, 15 ....



Εικόνα 13. Το ladder για το shower (ασύγχρονο) (Πηγή: http://www.libraryofjuggling.com/)

Με τη σημειογραφία του siteswap, στο παραπάνω υπόδειγμα «shower», μεταχειριζόμαστε δύο ψηφία, το διψήφιο 51, όπου το 5 αναφέρεται στη διάρκεια του χρόνου της υψηλότερης τροχιάς (άνω τόξο) της κάθε μπάλας και το 1 αναφέρεται στο χρόνο της χαμηλότερης τροχιάς (κάτω τόξο) της κάθε μπάλας. Στο υπόδειγμα shower, κάθε μπάλα περνάει από το ένα χέρι προς το άλλο, στο κάτω μέρος του τόξου σύντομα, εξ ου και το 1, ενώ κατόπιν στέλνεται προς τα πάνω σε μεγαλύτερη πορεία, εξ ου και το 5.

Τα παραπάνω υποδείγματα, καθώς κι άλλα πολλά μπορεί να τα συναντήσει πολύ εύκολα στο διαδίκτυο όποιος ενδιαφέρεται (http://www.libraryofJuggling.com/Tricks/). Στη βασική σημειογραφία του siteswap ενδέχεται να σημειώνονται με τον ίδιο αριθμό περισσότερα από ένα υποδείγματα. Για παράδειγμα το υπόδειγμα jugglers tennis σημειώνεται όπως και το cascade με τον αριθμό 3. Αυτό έγινε βεβαίως αρκετά γρήγορα αντιληπτό και επήλθαν εκλεπτύνσεις ώστε να μην έχουμε σχέση πολλά προς ένα.

Εστιάζουμε όμως και ιδιαιτέρως στο πως η σημειογραφία siteswap φανέρωσε καινούργια υποδείγματα. Παρουσίαζε καταρχήν έτσι εύλογα μεγαλύτερη ελκυστικότητα για τους πλέον ενδιαφερόμενους κι ενασχολούμενους πιο συστηματικά που εκτός του ότι μπορούσαν να μοιραστούν τα κόλπα τους πιο εύκολα, βρήκαν και καινούργιες προκλήσεις. Μόλις καταγράφηκαν τα γνωστά υποδείγματα, με απλά σύμβολα, αναδύθηκαν χιλιάδες καινούργια που δεν είχαν συνειδητοποιηθεί (Gray, 2012). Αν μάλιστα τα νέα ζογκλερικά κόλπα ήταν ενδιάμεσα στα παλιά, στις σφαιρίσεις μπορούν να προκύψουν υποδείγματα πολύ πιο διαφορετικά. Τα περισσότερα είναι μάλλον χωρίς ενδιαφέρον, κατά τον ίδιο τρόπο που κάποιες αλληλουχίες από νότες είναι ανιαρές, αν όχι δυσάρεστες και δεν θα τις μεταχειριστεί κάποιος σε τραγούδια. Ωστόσο, πιθανώς κάποιες εκατοντάδες, τεχνικώς παρουσιάζουν ενδιαφέρον και πιθανώς δεκάδες είναι πολύ ενδιαφέρουσες. Μπορούμε αντιστοίχως να ορίσουμε ενδιαφέρουσες σφαιρίσεις, τέτοιες που οι σημερινές να δείχνουν συγκριτικά ως οι αρχαίες που έχουν εγκαταλειφθεί προ πολλού πλέον.

Η επινόηση του siteswap και των υποδειγμάτων που απορρέουν από αυτό, συνεπάγεται πρακτικά ότι ο πληθυσμός της γης που αποφασίζει να ασχοληθεί με το Juggling πιο πέρα από το επίπεδο των αρχαρίων, μπορεί να «διαλέξει» ανάμεσα σε μπάλες, στεφάνια, κορύνες κ.α εργαλεία (όργανα), ή συνδυασμούς εργαλείων, τα οποία θα κυκλοφορεί με τα χέρια, με τα πόδια, με το κεφάλι, ή συνδυασμούς σωματικών μελών του που «διαλέγει» επίσης. Διαλέγοντας, δεσμεύεται κατά κάποιο τρόπο και στο ότι μπορεί να εκτελέσει το κατά siteswap 345, ή το 468 κ.α. υποδείγματα που είναι εκτελέσιμα, κι όχι τα αμέσως επόμενα, το 346, ή το 469 κ.α., τα οποία δεν είναι εκτελέσιμα, ή αλλιώς εφικτά.

Ήτοι, κάπως όπως οι οργανοπαίκτες που εκτελούν τη μουσική που γράφουν με νότες οι μουσικοσυνθέτες (που συνά είναι άλλοι από τους οργανοπαίκτες), ή όπως και τα λόγια που γράφουν οι ποιητές – στιχουργοί (που επίσης είναι συχνά άλλοι από τους ερμηνευτές – τραγουδιστές). Έτσι και οι ζογκλέρ αναμένεται να εκτελούν «κομμάτια» του siteswap που εν μέρει δεν θα έχουν οι ίδιοι επινοήσει πρώτοι κι ούτε θα έχουν γράψει αποκλειστικώς οι ίδιοι, μα παρόλα αυτά εκτελώντας τα θα παίζουν και οι ίδιοι. Ο συσχετισμός με τη μουσική βέβαια μπορεί να επεκταθεί και γενικότερα, καθώς στις Η.Π.Α., για παράδειγμα, το 80% της παραγωγής μουσικής ελέγχεται από πέντε μόνο μεγάλους ομίλους δισκογραφικών εταιρειών… Επίσης, οι προαναφερθέντες πέντε μεγάλοι όμιλοι δισκογραφικών εταιρειών έχουν εξαγοράσει πολλές εταιρείες διανομής δίσκων κι ελέγχουν κι ελέγχουν το 80% του δικτύου διανομής μουσικής (Stiglitz & Walsh, 2010). Κι όπως η πολιτιστική βιομηχανία της μουσικής μπορεί να ελέγχεται κατά τόσο μεγάλο βαθμό στην παραγωγή και τη διανομή του, έτσι κάπως μπορεί να συμβεί επίσης, ή να συμβαίνει ήδη και με το Juggling, καθώς βέβαια και με τις σφαιρίσεις εν γένει. Ακόμα πιο χαρακτηριστική μπορεί να είναι η παρομοίωση με τους συγγραφείς-σκηνοθέτες και τους ηθοποιούς, που δραματουργικά δεν απέχουν και πολύ, από τους σφαιριστές ιδίως. Κατά την γέννηση του θεάτρου στην αρχαιότητα άλλωστε, νομιζόταν από κάποιους ότι τα έργα των συγγραφέων, ή και οι σκηνοθετικές οδηγίες γράφονταν στο μυαλό των ηθοποιών κατά κάποιο τρόπο, αφού οι τελευταίοι δεν έπρατταν ότι όριζαν οι ίδιοι (ώστε αυτό δεν θεωρούταν και τόσο αποδεκτό).

Θα πρέπει να μη λησμονούμε πως εκ της αρχικής παραδοχής του Shannon, δεν ισχύει ο περιορισμός του αριθμού των υποδειγμάτων με βάση το ανθρώπινο σώμα με τα δυο χέρια κ.α. μέλη, καθώς αναφερόμαστε έτσι σε πολύ περισσότερα χέρια (με τα οποία εννοούμε επίσης πόδια, κεφάλια κ.α., τα οποία αποτελούν μια οικονομία που «τυγχάνει» έτσι κι αλλιώς κάποιας διαχείρισης. Αυτή ενδεχομένως απέχει πολύ από το να υποτεθεί ως βέλτιστη κι άρα μπορεί να επιδέχεται πολύ μεγάλες βελτιώσεις η λειτουργία και η περαιτέρω ανάπτυξή της.

Κάποια ζητήματα εντέλει, όπως το αν οι επαγγελματίες οφείλουν μεγάλο, μικρό, ή καθόλου μερίδιο της μετεγγραφής τους, προς τους συλλόγους – εταιρείες απ’ όπου προέρχονται, ή αν αξίζουν μεγαλύτερα ή μικρότερα έπαθλα, ενδέχεται να είναι σημαντικά ως προς το καθεστώς των δικαιωμάτων. Δεν αποκλείεται όμως να είναι δευτερεύοντα, αν ληφθεί υπόψη ότι αυτά τα δικαιώματα, αφορούν για παράδειγμα πολύ λίγες γυναίκες, που αποζημιώνονται λιγότερο, ή περισσότερο από το δέον, ενώ σίγουρα πολύ μεγάλο μέρος του πληθυσμού, των γυναικών εν προκειμένω, βλάπτονται πολύ περισσότερο, δια του τρόπου που αποκλείονται.

Κεφάλαιο 3. Παιγνία στρατηγικής και εξέλιξη στις σφαιρίσεις

Η Θεωρία Παιγνίων ασχολείται με την κατανόηση καταστάσεων αλληλεπίδρασης κι όπως άλλωστε συμβαίνει και με πολλές επιστήμες, η θεωρία παιγνίων περιέχει μια συλλογή μοντέλων. Μοντέλο είναι μια αφηρημένη έννοια που χρησιμοποιούμε για την κατανόηση των παρατηρήσεων και των εμπειριών μας κι εν μέρει συνεπάγεται τις αντιλήψεις μας για τις σχέσεις μεταξύ των καταστάσεων, απομονώνοντας αρχές που ισχύουν για μια σειρά ζητημάτων. Ο M. Osborne (2000) αναφέρει ότι μπορούμε, για παράδειγμα, να ταιριάξουμε την παρατήρηση της διαδρομής που παίρνει μια μπάλα του τένις σε ένα μοντέλο που υποθέτει την μπάλα να κινείται προς τα εμπρός με σταθερή ταχύτητα και έλκεται προς το έδαφος από τη συνεχή δύναμη της «βαρύτητας». Το μοντέλο αυτό ενισχύει την κατανόησή μας, επειδή ταιριάζει καλά, δίχως να έχει σημασία πόσο σκληρά ή σε ποια κατεύθυνση χτυπά η μπάλα, και ισχύει και για τις διαδρομές που παίρνονται από μπάλες του baseball, μπάλες του cricket, και μια ευρεία ποικιλία άλλων βλημάτων, που ρίπτονται προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Ο συγγραφέας ξεκινά με πρώτο παράδειγμα τη ρίψη μιας μπάλας και στη συνέχεια του αξιόλογου βιβλίου του δεν ασχολείται με αυτή. Κάτι παρόμοιο συμβαίνει και με πάρα πολλούς άλλους παιγνιοθεωρητικούς, που μεταχειρίζονται μάλλον ως παραδείγματα τις ρίψεις διαφόρων τέτοιων σφαιρών, από αθλοπαιδιές κατά κανόνα δημοφιλείς. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι σε κάθε περίπτωση υπάρχει μια μπάλα και ότι είναι λίγο πολύ τα ίδια αυτά που λέγονται ως προς τις σφαιρίσεις. Επί του παρόντος οι σφαιρίσεις βρίσκονται σε πρώτο πλάνο, χωρίς βεβαίως να αγνοούμε τις επεκτάσεις που τους δίνονται ευρύτερα ως παίγνια, από πάρα πολλές επιστήμες. Μας ενδιαφέρουν πρωτίστως οι ερωτήσεις και οι απαντήσεις που σχετίζονται όχι μόνον με το ποια είναι η διαδρομή μιας μπάλας, αλλά και με το ποιος τη ρίχνει σε ποιόν, που, πότε, πως και γιατί τη ρίχνει όπως τη ρίχνει, και πως αλλιώς θα ήταν για κάποιο λόγο ενδιαφέρον να ρίχνει μια, ή περισσότερες μπάλες, είτε παρεμφερή αντικείμενα. Οι σφαίρες μπορούν να διαφοροποιηθούν κατά μέγεθος, σχήμα και πολλές άλλες ιδιότητες, βεβαίως και οι άνθρωποι μπορούμε να διαφοροποιηθούμε ποικιλοτρόπως, ενώ μπορούμε να έχουμε διαφοροποίηση ακόμα κι ως τις αξίες που συνδέονται με αυτές. Εφόσον εντέλει ορισμένες σφαιρίσεις είναι συγκριτικώς πιο αναπτυγμένες από άλλες (π.χ απασχολούν περισσότερους ανθρώπους στους αγωνιστικούς χώρους, στις εξέδρες, στις οθόνες, ή συνδέονται με πολύ μεγαλύτερα οικονομικά μεγέθη κ.λπ.), παρουσιάζει ενδιαφέρον να αντιληφθούμε τι σημαντικό τις διακρίνει, ακόμα κι αν κλίνουμε προς την παραδοχή ότι όλες είναι ακόμη υποανάπτυκτες.

Θα χρησιμοποιήσουμε ως εκ τούτου έννοιες και μοντέλα της θεωρίας παιγνιών. Δεν βλάπτει βεβαίως να έχουμε υπόψη μας ότι η μοντελοποίηση εντάσσεται σε κάποιο τρόπο σκέψης που μπορούμε να τον χαρακτηρίσουμε προτυπολογικό. Ο F. Jullien τον ταυτίζει με τη δυτική σκέψη και κατά προέκταση με τη σκέψη των αρχαίων Ελλήνων, αντιδιαστέλλοντας τον με τον αντίστοιχο των Κινέζων, αναφορικά με το πώς στοχάζονται πάνω στην «αποτελεσματικότητα», ή την «στρατηγική» (Jullien, 2012). Ο μεν συνοψίζεται στο ότι για να είμαστε αποτελεσματικοί, κατασκευάζουμε ένα πρότυπο, μια ιδεατή μορφή, την οποία σχεδιάζουμε και θέτουμε ως στόχο και κατόπιν, ενεργούμε βάσει του προτύπου. Έτσι μπορούμε να ερμηνεύσουμε το πώς σκέφτονται συνήθως οι οικονομολόγοι, οι πολιτικοί, οι συνταγματολόγοι κ.α. που προϋποθέτουν την ύπαρξη ενός μοντέλου. Το κατεξοχήν προτυπολογικό πεδίο είναι τα μαθηματικά, τα οποία είναι μια γλώσσα κατά τη μεγάλη Ευρωπαϊκή ιδέα που απογειώνεται μετά το Γαλιλαίο, ενώ οι Κινέζοι ποτέ δεν τα είχαν διανοηθεί ως γλώσσα, «άρα ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν φαινόμενα της φύσης» (Jullien, 2012:31). Βεβαίως τα παίγνια δεν είναι τυπικά φυσικά φαινόμενα και το ερώτημα που θέτει ο ίδιος συγγραφέας, είναι μήπως στην περίπτωση της στρατηγικής, η προτυπολογική σκέψη φθάνει στα όριά της. Επί του παρόντος δεν αρνούμαστε καθόλου τα όσα μπορούν να προσφέρουν τα μαθηματικά στην κατανόηση της ανθρώπινης αλληλεπίδρασης. Αποδεχόμαστε ότι μπορούν να εμπλουτίσουν ιδιαίτερα την κατανόησή μας ως προς αυτές. Επισημαίνουμε, για παράδειγμα, πόσο φτωχά είναι τα scoring system όλων σχεδόν των σφαιρίσεων, που δεν αναγνωρίζουν αριθμητική πράξη άλλη πέραν της πρόσθεσης ενός πόντου, κάθε φορά που επιτυγχάνεται ο καθορισμένος στόχος τους.

Πέραν από αξιολογικές κρίσεις ως προς τον ένα ή τον άλλο τρόπο σκέψης, επισημαίνουμε αφενός ότι η «αποτελεσματικότητα», οι «στρατηγικές» κι εντέλει τα «μοντέλα» της θεωρίας παιγνίων βρίσκονται σε αυτό το μεταίχμιο της προτυπολογικής σκέψης, καθώς κι αφετέρου τη «Δυτική» προέλευση όλων των δημοφιλών σφαιρίσεων. Για να λειτουργούν καλά τα αλληλεπιδραστικά μοντέλα της θεωρίας παιγνίων, απαιτείται όταν εξετάζουμε την πορεία οιασδήποτε μπάλας να αγνοούμε κάπως τη ελκτική δύναμη της γης, όπως άλλωστε ισχύει περίπου κι όταν εξετάζουμε την ανθρώπινη ταχύτητα, κάτι που ενδεχομένως όμως δεν δείχνει και τόσο ξεκάθαρο. Τα μοντέλα της θεωρίας παιγνίων διαθέτουν την επιθυμητή απλότητα, που όμως δεν συνεπάγεται σε κάθε περίπτωση πλήρη κατανόηση, καθώς άλλωστε και στις παρομοίως απλές σφαιρίσεις ενδέχεται κανείς να παρακολουθεί δίχως να αντιλαμβάνεται πολλά. Είναι διπλή η σχέση των μοντέλων με τις ιδέες, καθώς οι επιπτώσεις των μοντέλων μας βοηθούν να καθορίσουμε εάν οι ιδέες μας έχουν νόημα, ενώ αυτές οι ιδέες υπό το φως των επιπτώσεων των μοντέλων, ενδέχεται να μας δείχνουν πώς οι παραδοχές των μοντέλων μας είναι ακατάλληλες. Σε κάθε περίπτωση, η διαδικασία της διαμόρφωσης και της ανάλυσης ενός μοντέλου θα πρέπει να βελτιώσει την κατανόησή μας ως προς την κατάσταση που εξετάζουμε (Osborne, 2000).

3.1 Παραδείγματα ζητημάτων που ανακύπτουν στις σφαιρίσεις και κατηγοριοποίηση τους βάσει της θεωρίας παιγνίων

Τα παίγνια επιδέχονται διάφορες κατηγοριοποιήσεις βάσει διαφόρων χαρακτηριστικών τους, οι οποίες συντείνουν στην πιο συστηματική ανάλυσή τους. Ακολούθως θα περιγράψουμε κάποιες βασικές διακρίσεις τους, μέσα κι από παραδείγματα που προσφέρονται από τις σφαιρίσεις ως δράσεις εντός συγκεκριμένου αγωνιστικού χώρου, αλλά κι ευρύτερα.

Παίγνια με διαδοχικές ή ταυτόχρονες κινήσεις

Στις σφαιρίσεις μπορούμε να πούμε ως προς το αρχικό σέρβις (πρώτη κίνηση), ότι αποτελεί μειονέκτημα στην Πετοσφαίριση, πλεονέκτημα στην Επιτραπέζια αντισφαίριση, ενώ στην Αντισφαίριση αποτελεί πλεονέκτημα, μάλλον μόνον αν κι εφόσον υφίσταται δικαίωμα για περαιτέρω σέρβις. Μια άλλη σχετική διαπίστωση είναι πως οι δημοφιλείς σφαιρίσεις που έχουν ήδη εδραιωθεί προ δεκαετιών και παρότι ίσχυαν άλλες αντιλήψεις, έχουν πλεονέκτημα πρώτης κίνησης έναντι κάθε καινούργιας υποψηφιότητας, εφόσον καταφέρουν να λειτουργούν ως καρτέλ κι επιτυγχάνουν την «αποτροπή εισόδου». Σε έναν αγώνα για την έρευνα και την ανάπτυξη κάποιου προϊόντος, όπως το «θέαμα» που προσφέρουν οι σφαιρίσεις ως τηλεοπτική παραγωγή, οι διάφορες «επιχειρήσεις» (οι τηλεοπτικοί σταθμοί αφενός κι αφετέρου οι ομοσπονδίες – σύλλογοι κ.α.) δρουν ταυτόχρονα, αλλά κάθε ανταγωνιστής έχει μερική πληροφόρηση για την πρόοδο των άλλων και έτσι μπορεί ενδεχομένως να ανταπαντήσει στις κινήσεις των ανταγωνιστών.

- Παίγνια με διαδοχικές κινήσεις ή αλλιώς δυναμικά παίγνια, ονομάζονται εκείνα που οι κινήσεις των παικτών γίνονται με κάποια αλληλουχία, κι ως εκ τούτου καθένας μπορεί να έχει επίγνωση των προηγούμενων κινήσεων. Στα παίγνια διαδοχικών κινήσεων οι παίκτες λογαριάζουν την κάθε κίνησή τους λαμβάνοντας υπόψη τις επιπτώσεις της, καθώς και τις αντιδράσεις των υπολοίπων.
- Παίγνια με πολλαπλές κινήσεις, ή αλλιώς στατικά παίγνια ονομάζονται κατ' αντιδιαστολή εκείνα που οι κινήσεις των παικτών γίνονται την ίδια χρονική στιγμή, δίχως οι παίκτες να έχουν την επίγνωση των κινήσεων που έχουν επιλέξει να πραγματοποιήσουν οι συμπαίκτες - αντίπαλοι.

Παίγνια μηδενικού ή μη μηδενικού αθροίσματος

Οι αντίπαλοι εντός αγωνιστικών χώρων σύλλογοι, συγκεντρώνονται σε γραφεία και συντονίζονται προκειμένου να συστήσουν μια αγωνιστική διοργάνωση, καθώς επίσης συστήνουν κάποια «εθνική» είτε και διεθνή ομοσπονδία κι ακόμα πολλές ομοσπονδίες διαφορετικών συνεργάζονται προκειμένου να συμμετέχουν στους Ολυμπιακούς Αγώνες κ.λπ.. Τα συμφέροντα και οι προσδοκίες τους δεν ευθυγραμμίζονται βεβαίως απόλυτα, καθώς για παράδειγμα μπορεί να συγκρούονται ως προς τις κρατικές επιχορηγήσεις και τις ιδιωτικές χορηγίες. Στην πραγματικότητα, τα περισσότερα παίγνια τείνουν μεταξύ σύγκρουσης και συνεργασίας και οι προσπάθειες των παικτών να λύσουν τις συγκρούσεις τους έγκειται στο ότι γνωρίζουν ότι αν αποτύχουν να συμφωνήσουν, το αποτέλεσμα μπορεί να είναι άσχημο για όλους. Οι οικονομικές, πολιτικές, κοινωνικές κ.α δραστηριότητες προσφέρουν συχνά ευκαιρίες για αμοιβαία επωφελείς συναλλαγές και συμφωνίες και είναι γενικά πιο αισιόδοξο και γόνιμο να μην εκλαμβάνουμε, σε κάθε περίπτωση, πως τα παίγνια είναι μηδενικού αθροίσματος.

- Παίγνια μηδενικού αθροίσματος, ή αλλιώς παίγνια σταθερού αθροίσματος ονομάζονται εκείνα που τα ενδιαφέροντα - συμφέροντα των παικτών βρίσκονται σε πλήρη σύγκρουση. Αυτό συμβαίνει τυπικά όταν μοιράζονται εντέλει σταθερή ποσότητα βεβαίου είτε πιθανού κέρδους, ή ζημιάς που λογαριάζεται σε οποιοδήποτε υπολογίσιμο μέγεθος, όπως χρόνο ζωής, οικονομικό χρήμα κ.α.
- Παίγνια μη μηδενικού, ή παίγνια μη σταθερού αθροίσματος, έχουμε κατ' αντιδιαστολή όπου συνυπάρχουν σύγκρουση και συνεργασία και η διαχείριση τους ως παραμέτρων, είναι σημαντική για την εξέλιξη του παιγνίου.

Παίγνια διεξαγόμενα άπαξ ή επαναλαμβανόμενα παίγνια

Στις σφαιρίσεις παρουσιάζονται διάφορα «μοναδικά συμβάντα», όπως π.χ. η εκτέλεση ενός πέναλτι από σουτέρ προς τερματοφύλακα με τον οποίο δεν έχουν ξαναβρεθεί αντιμέτωποι (Δεν θα έβλαπτε επιπλέον να έχουμε οπωσδήποτε υπόψη μας τη μοναδικότητα των ατόμων, έτσι όπως τονίζεται εκ της εξελικτικής σκέψης). Κάποια άλλα συμβάντα γίνονται κατ' επανάληψη όπως π.χ. οι αναμετρήσεις κάποιας διοργάνωσης για κάποιους που συμμετέχουν συστηματικά, ή επίσης και για την οργανωτική αρχή της. Στην πραγματικότητα, τα περισσότερα παίγνια έχουν σημαντικά πολλές πιθανότητες επανάληψης, παρόλο που ενίοτε εκλαμβάνονται ως παίγνια διεξαγόμενα άπαξ και προσφερόμενα για πολύ επιθετικές στρατηγικές, που μακροπρόθεσμα αποδεικνύονται μυωπικές καθώς ενέχουν απρόβλεπτο κόστος είτε όφελος.

- Παίγνια που διεξάγονται άπαξ ονομάζονται εκείνα που δεν επαναλαμβάνονται και κατά κανόνα χαρακτηρίζονται από αποφασιστικές κινήσεις. Οι παίκτες τους δεν γνωρίζουν και πολλά για τους υπόλοιπους, ως προς τις προτεραιότητες, τις δυνατότητες, τις ικανότητες τους και η έκπληξη είναι σημαντικό χαρακτηριστικό οιασδήποτε στρατηγικής.
- Επαναλαμβανόμενα παίγνια, ονομάζονται εκείνα που οι παίκτες ενεργούν κι παράλληλα ανταμείβονται ή τιμωρούνται ακριβέστερα (υπό την ετυμολογική σημασία του σύνθετου όρου τιμή+ορώ, που μπορεί να υποδηλοί ανταμοιβή ή ποινή - πρόστιμο). Στα επαναλαμβανόμενα παίγνια οι παίκτες διαθέτουν ευκαιρίες να φτιάξουν τη φήμη τους, να μάθουν περισσότερα για τους υπόλοιπους και να αναπτύξουν συγκριτικά πιο σύνθετες και περίπλοκες στρατηγικές.

Παίγνια με πλήρη και ίση, ή παίγνια με ελλιπή κι άνιση πληροφόρηση

Στις σφαιρίσεις που προσφέρονται προς νόμιμο είτε παράνομο στοίχημα, οι συμμετέχοντες σφαιριστές ενδέχεται να έχουν μεταξύ τους πλήρη και ίση πληροφόρηση, ενώ συγχρόνως να γνωρίζουν περισσότερα από τους τυπικούς οπαδούς (μάλιστα μπορούν ως εκ τούτου να επωφεληθούν εις βάρος τους, παρανόμως, ή νομίμως, όπως με την περίπτωση της λεγόμενης εξοικονόμησης πόντων (point shaving) (Winston, 2009). Η απόδοση στοιχήματος ενδέχεται να δείχνει εξισορροπημένη για τους κοινούς φίλαθλους, όμως το αγωνιστικά πολύ ισχυρότερο μέρος έχει την δυνατότητα να νικήσει το άλλο με μεγαλύτερη διαφορά πόντων, μπορεί να νικήσει μεν το παιχνίδι δίχως να απογοητεύσει τους οπαδούς του, μα και να επωφεληθεί φέρνοντας την αριθμητική διαφορά κάτω από την προσφερόμενη απόδοση.

- Παίγνια με πλήρη και ίση πληροφόρηση των παικτών ονομάζονται εκείνα τα παίγνια που όλοι οι μετέχοντες παίκτες κατέχουν κοινή και στον ίδιο βαθμό πληροφόρηση. Όταν οι διάφοροι παίκτες έχουν τέτοια πληροφόρηση, δεν καθίσταται παίγνιο η διαχείριση της πληροφορίας, δηλαδή το ενίοτε χαρακτηριζόμενο κι ως προ-παίγνιο (pregame) που ενδεχομένως αποκτά μεγαλύτερη σημασία από το επακόλουθο της πληροφόρησης παίγνιο.
- Τα παίγνια με ελλιπή κι άνιση πληροφόρηση ορίζονται κατ’ αντιδιαστολή με αυτά και μάλλον απαντώνται πιο συχνά. Σε πολλές περιπτώσεις οι προσπάθειες απόκρυψης, μεταβίβασης, ή αποκάλυψης πληροφοριών αποτελούν σημαντικό στοιχείο των παιγνίων. Αναπτύσσονται ως εκ τούτου διάφορες στρατηγικές προς αυτή την πληροφόρηση όπως οι λεγόμενες στρατηγικές σήμανσης (signaling) και οι στρατηγικές προφύλαξης (screening).

Παίγνια με, ή άνευ σταθερών και (προ)καθορισμένων κανονισμών

Οι σφαιρίσεις εκλαμβάνονται συχνά ως παραδείγματα προκαθορισμένων και σταθερών κανονισμών, βραχυπρόθεσμα τουλάχιστον. Σε μεγάλο βάθος χρόνου κάποιοι απ' αυτούς μπορεί να τέθηκαν προς συζήτηση, ή να συζητηθούν και πάλι μελλοντικά, έστω κι αν αυτό συμβαίνει πιο εύκολα στην αρχή και προτού καθιερωθούν. Επίσης, τους κανονισμούς μπορούμε να τους αντιλαμβανόμαστε και κάπως ευρέως, καθότι δεν εξαρτώνται τα πάντα από αυτούς. Στην Καλαθοσφαίριση (basketball) δίχως μεταβολή κανονισμού, το σουτ εδώ και δεκαετίες γενικώς εκτελείται σχεδόν απ' όλους με το ένα χέρι, παρότι στις πρώτες δεκαετίες εκτελούταν σχεδόν απ' όλους με δυο χέρια. Σε άλλο παράδειγμα, οι προκαθορισμένοι κανονισμοί για τις μεταγραφές των επαγγελματιών σφαιριστών έχουν αλλάξει προς το όφελός τους, όμως δεν άλλαξαν συγχρόνως και οι συσχετισμοί ισχύος μεταξύ των σωματείων.

- Παίγνια με καθορισμένους «σταθερούς» κανονισμούς ονομάζουμε εκείνα που είναι δεδομένο για τους παίκτες τι τους επιτρέπεται και τι τους απαγορεύεται, ώστε περιορίζονται οι διαπραγματεύσεις.
- Παίγνια με τροποποιήσιμους κανονισμούς ονομάζουμε εκείνα που οι παίκτες μπορούν να διαμορφώνουν κατά την πορεία τους δικούς τους κανονισμούς. Σε αυτά ενδεχομένως αποκτά ακόμα πιο μεγάλη σημασία το προ-παίγνιο όπου διαμορφώνονται οι κανονισμοί του παιγνίου, εφόσον εξαρτάται σημαντικά από αυτό, όπως στην περίπτωση της εξάρτησης από το μονοπάτι ανάπτυξης (path dependence).

Παίγνια συνεργατικά ή μη συνεργατικά

Οι σφαιρίσεις προβάλουν ως συνεργατικά παίγνια στα οποία έχουν συμφωνηθεί ρυθμίσεις όπως το πότε κάποιος είναι «offside» και πως ελέγχεται από ειδικό επόπτη γραμμών. Συνεργατικά είναι επίσης κι ως προς τις συμφωνίες που τηρούν όλα τα μέρη προκειμένου να διεξαχθούν μεγάλες διοργανώσεις, συχνά για περισσότερες από μια σφαιρίσεις. Από κάποια άλλη σκοπιά δεν δείχνει μάλλον και τόσο καλή η συνεργασία ανάμεσα σε άνδρες και γυναίκες, καθώς και με αυτούς που δεν ασχολούνται και τόσο. Θεωρούνται επίσης μη συνεργατικά ως προς τα αποτελέσματά τους, όμως η ευρέως χρησιμοποιούμενη περί συνεργασίας ορολογία της θεωρίας παιγνίων δεν αφορά τα αποτελέσματα, γι αυτό είναι ενίοτε παραπλανητική. Συχνά προϋποτίθεται ότι η επιβολή προέρχεται από κάποια αρχή έξωθεν του παιγνίου, όπως οι χαρακτηριστικές των σφαιρίσεων διαιτησίες, τα δικαστήρια κ.α.

- Παίγνια συνεργατικά (cooperative games) ονομάζονται εκείνα που οι συμφωνίες κοινής δράσης δεν συναντούν προβλήματα εφαρμογής και είναι εκτελεστέες.
- Μη συνεργατικά παίγνια (non cooperative games) ονομάζονται τα διεξαγόμενα άνευ επιβαλλόμενων συμφωνιών κοινής δράσης, η οποία παρόλα αυτά δεν αποκλείεται κιόλας.

3.2 Στρατηγικές στη Θεωρία Παιγνίων

Ο πολύ συνήθης χαρακτηρισμός «παίγνια στρατηγικής» δηλώνει τη σπουδαιότητα του όρου για τη θεωρία παιγνίων. Όπως αναφέρει ο W. Poundstone, «*η στρατηγική είναι μια πλήρης περιγραφή ενός λεπτομερούς τρόπου παιξίματος ενός παιγνίου, ασχέτως με το τι κάνει κάθε άλλος παίκτης κι ασχέτως με το πόσο πολύ διαρκεί το παίγνιο*» (Poundstone, 1993:48). Η στρατηγική ως όρος της θεωρίας παιγνίων, διαθέτει μια πολύ πιο επακριβή σημασία απ’ ότι συνήθως έχει. Για παράδειγμα, ακόμα και στο σκάκι, όταν κάποιος σκακιστής κάνει κάποιο πολύ συγκεκριμένο αρχικό άνοιγμα, δεν έχει στο νου του κάποιο εξίσου συγκεκριμένο τέλος της παρτίδας. Ο ίδιος συγγραφέας προκειμένου να επισημάνει πόσο περίπλοκη μπορεί να είναι κάποια στρατηγική ακόμα και σε ένα πολύ απλό παίγνιο, αναφέρεται στο εκτενές παράδειγμα της τρίλιζας, έστω κι από την δεύτερη κιόλας κίνηση. Αρκετοί συγγραφείς χρησιμοποιούν για την επεξήγησης της έννοιας της στρατηγικής τα παίγνια προκαθορισμένων διαδοχικών κινήσεων και την τρίλιζα αρχικώς, ενώ κατόπιν προχωράνε, συνήθως με εγκώμια, προς το περίπλοκο σκάκι. Έτσι κάνουν και οι Dixit & Skeath (1999) που γράφουν πως όταν δεν είναι εφικτή η μέχρι τέλους κατάστρωση στρατηγικής, αυτή εκφέρεται με την προσήμανση αποδόσεων ωφελείας όχι στους τελικούς κόμβους, μα στους ενδιάμεσους, κι αυτό μπορεί να γίνει με τη συνάρτηση ενδιάμεσης αξιολόγησης (intermediate valuation function). Η έννοια της στρατηγικής δεν είναι πάντως γενική κι αφηρημένη σε καμία περίπτωση, ακόμα κι αν αναφέρεται σε ενδιάμεσους κόμβους, είναι ως προς το πώς φθάνουμε σε αυτούς πλήρης και λεπτομερής.

- Μια αμιγής (pure) στρατηγική παρέχει έναν πλήρη καθορισμό του πώς κάποιος θα παίξει ένα παιχνίδι . Ειδικότερα , καθορίζει την κίνηση που θα κάνει για οποιαδήποτε κατάσταση ενδέχεται να αντιμετωπίσει. Το σύνολο των λεγόμενων αμιγών στρατηγικών κάθε «παίκτη» έχει μεγάλη σημασία.
- Μια ανάμικτη ή μικτή (mixed) στρατηγική είναι η πρόσδοση πιθανότητας σε κάθε αμιγή στρατηγική. Αυτή επιτρέπει την επιλογή στην τύχη μιας εκ των αμιγών στρατηγικών. Δεδομένου ότι οι πιθανότητες είναι συνεχείς, υπάρχουν απείρως πολλές μικτές στρατηγικές. Μπορεί όμως κανείς να θεωρήσει τις

αμιγείς στρατηγικές ως ειδικές περιπτώσεις των μικτών, όπου κάποια συγκεκριμένη αμιγής στρατηγική επιλέγεται με πιθανότητα 1 και κάθε άλλη στρατηγική με πιθανότητα 0 .

Υπό κάποιες προϋποθέσεις θα ήταν ίσως πιο διαφωτιστικό η συζήτηση επί των «στρατηγικών» να γίνεται με όρους καθαρότητας, ώστε να αναφερόμαστε για παράδειγμα σε στρατηγικές καθαρεύουσες και μη. Έτσι ενδεχομένως θα παρέπεμπε περισσότερο σε γλώσσες. Η θεωρία παιγνίων δομείται πάνω στις λεγόμενες «στρατηγικές», ορολογία που παραπέμπει σε στρατηγούς, στρατούς , μάχες, πολέμους κ.α., Εκεί στην πραγματικότητα υφίστανται μάλλον ακόμα περισσότεροι λόγοι να μην εκλαμβάνονται οι συμμετέχοντες ως πιόνια, όχι τόσο χάριν ευχολογίων, όσο καθότι δεν μπορούν να ισχύουν τα λεπτομερή σχέδια δράσης. Οι στρατηγικές συχνά υποτίθενται ως κανονιστικές συστάσεις που καθορίζουν τις ενέργειες των παικτών, είτε επίσης ως συμβουλευτικές συστάσεις προς τις ενέργειές τους. (Brams & Taylor, 1996).) Οι στρατηγικές συστάσεις αναφέρονται σε επιλογές, ή ενίοτε καταλήγουν σε μια και μόνον (στρατηγική) επιλογή ενέργειας, στο πλαίσιο παιγνίων που διεξάγονται άπαξ (στατικών). Οι στρατηγικές περιλαμβάνουν κατά κάποιο τρόπο και τις τακτικές, που στην καθομιλουμένη παραπέμπει σε πιο βραχυπρόθεσμα σχέδια δράσης. Ο όρος τακτική γενικά δεν χρησιμοποιείται στη θεωρία παιγνίων, καίτοι ο συνήθης όρος στρατηγική αναφέρεται εντέλει και σε μοναδικές επιλογές κάποιας ενέργειας αλλά και σε πολύ πιο μακροπρόθεσμα σχέδια δράσης.

Η έννοια της στρατηγικής στις σφαιρίσεις, μπορεί κατ αναλογία να γίνει καλώς αντιληπτή ξεκινώντας από όπου υπάρχουν προκαθορισμένες διαδοχικές κινήσεις, όπως στην πετοσφαίριση. Σχεδόν είκοσι χρόνια έπειτα από την έναρξη της πετοσφαίρισης, εμφανίζεται στις Φιλιππίνες η στρατηγική του «set and spike» που σύντομα έγινε, και ακόμα παραμένει ο απόλυτα κυρίαρχος τρόπος επίθεσης. (http://volleyball.org/history.html) Σημαίνει πλέον ότι η μπάλα πηγαίνει προς ένα συγκεκριμένο παίκτη, τον «πασαδόρο», που ο ρόλος του είναι να την πασάρει καταλλήλως προς επίσης συγκεκριμένο παίκτη, το καρφί, ο οποίος τη στέλνει ως επί το πλείστον με μεγάλη δύναμή προς την άλλη μεριά. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όλες οι επιθετικές στρατηγικές στη διεθνή πετοσφαίριση έκτοτε, ακόμα και σε όχι υψηλό επίπεδο αποτελούν παραλλαγές της, ώστε ότι υπήρχε πριν, κρίνεται πλέον ως υποτυπώδες, ή ως ξεπερασμένο. Οι επιθετικές στρατηγικές μπορούν να ποικίλουν πλέον ως προς το από ποιον παίκτη θα εκδηλωθούν, ως προς το ποιος παίκτης θα πηδήξει παραπλανητικά, στο χρονισμό τους, από και προς ποια μεριά κ.λπ. όμως δεν παύει να ισχύει ότι οι επιτιθέμενοι πάνε για κάρφωμα. Κατά αντιστοιχία οι αμυνόμενοι πάνε καταρχήν για «μπλοκ», καθώς αυτή είναι η κύρια αμυντική στρατηγική, που προέκυψε αρκετά αργότερα. Στα είκοσι χρόνια που η πετοσφαίριση παιζόταν δίχως καρφώματα, ήταν προφανώς πολύ λιγότερο συγκεκριμένο, λεπτομερές και πλήρες, το επιθετικό σχέδιο δράσης κάθε ομάδας που κατείχε την μπάλα. Η εμφάνιση του καρφώματος εκτός από κατάλληλο παράδειγμα του τι υπονοείται ως στρατηγική στις σφαιρίσεις είναι διαφωτιστική κι ως προς τη σημαντικότητα της. Είναι βεβαίως πολύ μεγάλη η σημασία της στρατηγικής, εφόσον το παιχνίδι παίζεται πλέον έτσι, αντίθετα μάλιστα κι από τις αρχικές προθέσεις του επινοητή του. Ο W. Morgan ήθελε ένα αλλιώτικο παιχνίδι κατάλληλο ακόμη και για τύπους λιγότερο «αθλητικούς που θα μπορούσαν βεβαίως να συνδυαστούν καλύτερα και με περισσότερη «εξυπνάδα» κ.λπ. (Dearing, 2007) Είναι ενδεικτικό όμως και του πόσο εύκολα μπορούν να καταρρέουν όλες οι στρατηγικές, με την τροποποίηση ακόμη κι ενός μόνον απλού όρου ενίοτε. Ο Morgan σύστησε το volley, δίχως να έχει συλλάβει τη στρατηγική του καρφώματος, οπότε δηλαδή αν το δίκτυ οριζόταν σε κάπως μεγαλύτερο ύψος, το παιχνίδι θα πλησίαζε ασφαλώς πολύ περισσότερο στις αρχικές προθέσεις του επινοητή του. Στρατηγικές θα αναπτύσσονταν και πάλι, όπως εκείνες οι παλιές που χαρακτηρίζουμε ως υποτυπώδεις, καθώς και άλλες καινούργιες, μα θα ήσαν πολύ διαφορετικές από όλες εκείνες που βλέπουμε σήμερα. Κάποια τέτοια πρόταση δεν αποτελεί οπισθοδρόμηση, καθότι το να σηκώνει κανείς πιο ψηλά την μπάλα, όπως και το να ψηλώνει το δίκτυ, δεν εννοείται ως εξέλιξη έτσι ακριβώς όπως για παράδειγμα εννοείται το να ψηλώσουν οι άνθρωποι. Εν προκειμένω αναφέρεται ως ένδειξη του τι είναι στρατηγική, αλλά και του τι δεν είναι, του πως αλλάζει και πως μπορεί να διακριθεί εκ των κανονισμών του παιχνιδιού. Έτσι: η πρόταση «οι παίκτες πρέπει να ακολουθούν τη σειρά των σερβίς που έχει δηλωθεί…» είναι σύσταση κανονισμού (Official Volleyball Rules 2013-2016). Ενώ, η πρόταση αφήνουμε την πρώτη πάσα στο λίμπερο, βγαίνει η δεύτερη στον πασαδόρο, σηκώνεται ο τάδε δεξιά και η μπάλα πηγαίνει δεξιά για να καρφώσει ο δείνα» είναι στρατηγική σύσταση. Μπορούμε γενικότερα να διαπιστώσουμε εν προκειμένω πως κάποια σφαίριση, κατατείνει εντέλει στην χρησιμοποίηση παραλλαγών μιας κύριας στρατηγικής, για την επίθεση και την άμυνα αντίστοιχα, παρότι όπως και οι υπόλοιπες συστάθηκε δανειζόμενη στοιχεία από άλλες - όπως π.χ. μια παραλλαγή του badminton, το mintonette – και υπό την επίδραση της επιτυχίας άλλων, όπως το basketball.

Εξυπακούεται ότι αν δεν έχει κανείς υπόψη ότι το volleyball συστάθηκε σε συγκεκριμένη γεωγραφική περιοχή, στις Η.Π.Α. και σε πόλεις με πανεπιστήμια κ.α., καθώς κι αν δευτερευόντως αγνοεί την ιστορική διαδρομή της, δεν μπορεί να συλλάβει καλώς την αναπτυξιακή της διάσταση, ούτε και την αναπτυξιακή στρατηγική της. Θα πρέπει να γίνεται ως εκ τούτου κατανοητό, ότι ο όρος στρατηγική μπορεί να αναφέρεται από το πώς θέτει κανείς τις μπάλες και τα πράματα εν γένει στις όποιες σφαιρίσεις, μέχρι το πώς αυτές εξελισσόμενες προχωρούν στην ανάπτυξή τους, που μπορεί να σημαίνει και την για πολλές γενιές ενασχόληση, δισεκατομμυρίων ανθρώπων, σε κάθε μέρος της γης.

3.3 Ισορροπίες στη Θεωρία Παιγνίων

Τα παίγνια δια μέσου των στρατηγικών που επιλέγουν οι παίκτες βαίνουν προς «ισορροπίες», όρος που συχνά χρησιμοποιείται ως συνώνυμος των «λύσεων» . Η έννοια της ισορροπίας είναι δάνειο της Φυσικής, αν και κατόπιν τη συναντάμε και στη βιολογία. Αναφέρεται σε καταστάσεις που δεν έχουν τάσεις αλλαγής, που όπως γράφει ο J. von Neumann «δεν υπόκεινται σε δυναμικές αναπτύξεις» για να προσθέσει λίγο πιο κάτω, ότι «οι τελευταίες στην πραγματικότητα βρίσκονται συνήθως μακριά από τις ισορροπίες και απαιτούν μια πολύ πιο βαθιά γνώση» (Von Neumann & Morgenstern, 1944:45). Όπως άλλωστε έχει επισημάνει κι ο βραβευμένος με το Nobel Οικονομικής Επιστήμης του 2005 παιγνιοθεωρητικός T. Schelling, σε ισορροπία μπορεί βρίσκεται και κάποιος κρεμασμένος νεκρός, που η κατάστασή του δεν είναι ασφαλώς η πλέον επιθυμητή (Schelling, 1978).

Οι στρατηγικές ενδέχεται να μην άγουν προς τις ισορροπημένες εκβάσεις που υποτίθεται πως άγουν. Πέραν της αρκετά γνωστής Πύρρειου Νίκης (που στο ευρύτερο πλαίσιο λογίζεται ως ήττα), ενδέχεται να προκύπτουν ακόμη πιο παράδοξα αποτελέσματα, όπως δείχνουν να καταλήγουν κάποιες στρατηγικές (κυριολεκτικά) στο πιο κάτω απόσπασμα του Ξενοφώντα:

> *«το αποτέλεσμα στάθηκε αντίθετο από κείνο που περίμενε όλος ο κόσμος: γιατί όπως είχαν βρεθεί συγκεντρωμένες κι αντιμέτωπες δυνάμεις απ΄όλη σχεδόν την Ελλάδα, κανένας δεν αμφέβαλλε ότι σε περίπτωση μάχης οι νικητές θα γίνονταν κυρίαρχοι κι οι νικημένοι υπήκοοι τους. Ωστόσο ο θεός τα ΄φερε έτσι, ώστε η καθεμιά από τις δύο παρατάξεις να στήσει τρόπαιο σαν να ΄χε νικήσει, δίχως η άλλη να προσπαθήσει να την εμποδίσει· κι οι δυο τους έδωσαν πίσω νεκρούς εχθρούς σαν νικητές, αλλά κι οι δυο περισυνέλεξαν δικούς τους νεκρούς σαν νικημένοι· και ενώ κι η μια και η άλλη ισχυρίζονταν ότι είχαν νικήσει, καμιά τους δεν βγήκε από τη μάχη ενισχυμένη σε εδάφη, πόλεις ή εξουσία· και μετά τη μάχη η Ελλάδα γνώρισε ακόμα μεγαλύτερη ακαταστασία κι αναταραχή από πριν».*
>
> (Ξενοφών, «Ελληνικά»)

Εξ αυτού προκύπτει ότι ενδέχεται η έκβαση κάποιας δράσης να μην είναι η πλέον επιθυμητή και σκόπιμη για κάποιο, ή όλα τα εν προκειμένω δύο μέρη, να μην είναι η πλέον ανεπιθύμητη, να μην είναι ούτε η υποθετικώς επιθυμητή ειρήνη. Επιπλέον, ενδέχεται να μην είναι χαμένη ευκαιρία, ούτε όμως και ισορροπία τρόμου, ως αυτή που διαφάνηκε στην πρώτη κρίσιμη μεταπολεμική περίοδο που αναπτύχθηκε η θεωρία παιγνίων. Μια χρήσιμη διευκρίνιση, ιδίως στο πλαίσιο των σφαιρίσεων, είναι πως η ισορροπία και η ισοπαλία, υποτίθενται μεν αμφότερες ως εκβάσεις που έπονται των αρχικών επιλογών, όμως δεν είναι ταυτόσημες έννοιες. Η ισορροπία εννοείται ως ευρύτερη, στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων. Όπως επισημαίνεται κι αλλού, η ισοπαλία ως αποτέλεσμα εντάσσεται στο πλαίσιο των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος, οι οποίες μπορούν να απεικονιστούν και με τις αποδόσεις του ενός παίκτη μόνον. Η αναγνώριση της κατηγορίας των παιγνίων μη σταθερού αθροίσματος, επιτάσσει τη διάκριση ανάμεσα στο τι είναι λύση και τι ισορροπία. Σε μια ισορροπία, κάθε παίκτης έχει μεγιστοποιήσει την ωφέλειά του και δεν έχει κίνητρο, ή ούτε και φόβητρο, να αλλάξει στρατηγική. Εφόσον κάποιο παίγνιο είναι μη σταθερού αθροίσματος, δεν έχουν όλες οι ισορροπίες τις ίδιες απολαβές.

Η επίλυση ενός παιγνίου δεν είναι σαν την επίλυση ενός υπολογιστικού προβλήματος. Αναγκαία συνθήκη είναι μια συνθήκη που εφόσον ικανοποιείται τίθεται ως υποψήφια για να είναι λύση. Μια έκβαση, ή ένα αποτέλεσμα (outcome), είναι αναγκαίο να είναι ισορροπία προτού τη χρίσουμε υποψήφια ως λύση. Εάν ένα αποτέλεσμα δεν είναι ισορροπία, τότε κάποιος παίκτης επωφελείται αλλάζοντας στρατηγική. Εντούτοις, επειδή και μόνον ένα αποτέλεσμα αποτελεί ισορροπία δεν σημαίνει ότι συνιστά και λύση. Για να είναι και λύση απαιτείται επίσης να πληροί και συνθήκες ικανότητας (Gardner, 1995).

Οι πλέον κύριες έννοιας ισορροπίας στη θεωρία παιγνίων είναι οι εξής:

1. Οι προταθείσες εκ του J. Von Neumman ισορροπίες, που προκύπτουν εκ των στρατηγικών minimax.
2. Οι προταθείσες εκ του J. Nash ισορροπίες, που προκύπτουν εκ των στρατηγικών βέλτιστης αντίδρασης.
3. Οι προταθείσες εκ του J. Maynard Smith εξελικτικές ισορροπίες, που σχετίζονται με τις λεγόμενες Εξελικτικά Σταθερές Στρατηγικές (ΕΣΣ).

Ο J. Von Neumman συνέλαβε μια έννοια ισορροπίας κατά την οποία υφίστανται μόνον συμβάντα που εκτυλίσσονται, και για όποιον τα αντιλαμβάνεται, κατά κάποιο τρόπο δεν έχουν σημασία ως προς την κατάληξή τους, οι πεποιθήσεις των άλλων. Η μεγάλη διάνοιά του βεβαίως του επέτρεψε να θέσει πολλές από τις βάσεις για την κατασκευή των ηλεκτρονικών υπολογιστών, όπου πράγματι τιθασεύονται τα ηλεκτρικά κυκλώματα και θριαμβεύει ο προγραμματισμός κατόπιν της σύζευξης του λογισμικού και του λειτουργικού μέρους τους. Η «σκληρότητα του αντικειμένου» ήταν βεβαίως πολύ μεγάλη, αφενός όμως η ανθρώπινη σκέψη όμως δαμάζεται πιο δύσκολα κι αφετέρου δεν δαμάζει βεβαίως τα πάντα. Ο J. Von Neumann, εισηγήθηκε την θεωρία παιγνίων εστιάζοντας κυρίως στις ανταγωνιστικές καταστάσεις που τις εξέλαβε ως μαθηματικά προβλήματα για τα οποία επιζητείται λύση, την οποία και βρήκε. Πρόκειται για την αριστοποιητική συμπεριφορά που μεγιστοποιεί τις πιθανότητες νίκης του καθενός, ή ισοδύναμα του ελαχιστοποιεί τις πιθανότητες ήττας. Είναι δεδομένη η συμπεριφορά του άλλου, εφόσον είναι αντίπαλος, η ισορροπία προκύπτει στο σημείο που το άθροισμα των κερδών του ενός και των ζημιών του άλλου είναι μηδέν. Τόση είναι (καθόλου τυχαία) και η διαφορά τους σε απόλυτες τιμές. Οι J. Von Newmann & Morgestern διέκριναν βεβαίως επίσης και την κατηγορία των παιγνίων μη μηδενικού αθροίσματος, όμως αφιέρωσαν σε αυτά πολύ λιγότερη έκταση κειμένου, ενώ αφετέρου κατατείνουν στην απαίτηση για δυο θεωρίες, μια για τα μεν και άλλη για τα δε (Von Newmann & Morgestern, 1944). Με το θεώρημα minimax, απέδειξαν ότι σε μια πολύ μεγάλη κατηγορία παιγνίων, αυτή των δύο παικτών και μηδενικού αθροίσματος, η συγκεκριμένη ισότητα προκύπτει από τη διασταύρωση των minimax & maximin στρατηγικών τους. Μπορεί δε να εκληφθεί αφενός ως πρόβλεψη προς το αποτέλεσμα κάποιας τέτοιας αντιπαράθεσης κι αφετέρου ως σύσταση στρατηγικής προς τους παίκτες. Η συντηρητική έννοια της ισορροπίας προσεγγίζεται ακόμα πιο συντηρητικά. Ως σύσταση βασίζεται στη αποστροφή προς την αβεβαιότητα, η οποία είναι εύλογη σε πολλές περιπτώσεις, μα εξ ορισμού είναι αδικαιολόγητη όταν καθιστά κάποιον υπερβολικά απαισιόδοξο άνευ λόγου. Η ισορροπία των minimax στρατηγικών δεν προσιδίαζε στην ισορροπία τρόμου που άρχιζε να διαμορφώνεται την ίδια πρώτη μεταπολεμική εποχή, λόγω των πυρηνικών εξοπλισμών που ανέπτυσσαν οι υπερδυνάμεις (Poundstone, 1993). Η θεωρία παιγνίων που βασιζόταν σε αυτή στο ξεκίνημά της ήδη, αντιμετώπιζε προβλήματα βιωσιμότητας (Βαρουφάκης, 2007).

Ο J. Nash ασχολήθηκε κι απάντησε κάποιο ερώτημα ύπαρξης σημείου ευσταθούς ισορροπίας σε οποιοδήποτε πεπερασμένο παιχνίδι n παικτών και δεν ήταν αυτή καθαυτή η διάσημη απάντησή του που συνέτεινε στην εξέλιξη της θεωρίας παιγνίων. Ήταν η ιδέα του ότι η έννοια του σημείου ευσταθούς ισορροπίας αποτελεί γενίκευση της έννοιας του κοινού επίπεδου ασφαλείας των δυο παικτών, όταν περνάμε από τα σταθερού αθροίσματος, στα παίγνια μη-μηδενικού αθροίσματος. Παρά τις αρχικές επιφυλάξεις προς αυτή, η ιδέα του J. Nash κατόπιν αποδείχτηκε ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα. Η επιτυχία της δεν οφείλεται στις μαθηματικές ιδιότητες του σημείου ευσταθούς ισορροπίας, που δημιουργούν αρκετές αμφιβολίες (τουλάχιστον σε μαθηματικούς), μα στην εξήγηση που αυτό κατόρθωσε να δώσει σε πραγματικά φαινόμενα που μελετούν επιστήμες όπως τα οικονομικά, η διοίκηση επιχειρήσεων, οι πολιτικές επιστήμες, η βιολογία κ.λπ. (Μηλολιδάκης, 2009).

Η έννοια της ισορροπίας κατά Nash μπορούμε ασφαλώς να ισχυριστούμε ότι ενδυνάμωσε τη θεωρία παιγνίων, αν όχι πως τη διέσωσε, ή πως την κατέστησε την θεωρία που ενοποιεί όλες τις κοινωνικές επιστήμες, καθώς υποθέτουν κάποιοι διακεκριμένοι επιστήμονες, όπως ο βραβευμένος με το Nobel Οικονομικής Επιστήμης R. Myerson (1997).

Ο J. Nash δεν δείχνει καθόλου να υποτιμά τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος και τη εν γένει σκοπιά του J. von Neumann. Στην έννοια της ισορροπίας κατά Nash, η δράση του καθενός αποσκοπεί στη μεγιστοποίηση της ωφέλειάς του, με γνώμονα τις προσδοκίες του για το τι θα επιλέξει ο «άλλος». Ήτοι, πρέπει να ληφθούν υπόψη οι αποδόσεις του ενός, ή περισσοτέρων άλλων, συμπαικτών είτε αντιπάλων, οπότε ο καθένας άγεται προς τη στρατηγική του, που είναι η βέλτιστη αντίδρασή του σε κάθε πιθανολογούμενη στρατηγική των άλλων. Αυτό απαιτεί ενίοτε να διακριθεί πρώτα ποια είναι η καλύτερη αντίδραση (απόκριση) του «άλλου», στις πιθανολογούμενες από εκείνον στρατηγικές. Όταν η βέλτιστη αντίδραση του ενός συμπίπτει ταυτοχρόνως με τη βέλτιστη αντίδραση του «άλλου», το αποτέλεσμα είναι μια ισορροπία κατά Nash. Σε οποιαδήποτε τέτοια περίπτωση ουδείς μετανοεί για τη στρατηγική του, τη λεγόμενη κι ως στρατηγική ισορροπίας του. Η ισορροπία κατά Nash επεκτείνεται εκεί όπου οι παίκτες «και μπορούν και τα καταφέρνουν να συνεργάζονται», εκεί όπου «μπορούν να επικοινωνήσουν και να δημιουργήσουν συμμαχίες οι οποίες θα επιβληθούν από ένα διαιτητή» (Nash, 1951).

Ο Nash κάνει μια διάκριση σε παίγνια συνεργασίας που επιδέχονται πραγματοποιήσιμες συμφωνίες μεταξύ των παικτών κι εκτός των επίσημων κανονισμών του παιχνιδιού, καθώς και σε παίγνια μη συνεργασίας που δεν επιδέχονται τέτοιες συμφωνίες. Υποστηρίζει πως τα τελευταία είναι λιγότερο σύνθετα και πως σε αυτά, τα μη συνεργασίας, μπορούν να αναχθούν και τα υπόλοιπα, ώστε να αναλυθούν έτσι με σκοπό την εύρεση των ισορροπιών. Αναδεικνύει επιπλέον τη μεγάλη διαφορά μεταξύ ιδιωτικού και συλλογικού συμφέροντος, καθώς και πόσο επισφαλές είναι να υποθέτουμε απερίσκεπτα την ταύτιση τους (Olson, 1991). Ο σπουδαίος μαθηματικός δεν υποστήριξε ότι κάθε παίγνιο άγεται προς μια μοναδική ισορροπία Nash, αν και ευλόγως έδειξε να υποστηρίζει το λεγόμενο σχέδιο εκλέπτυνσης της. Το πρόβλημα της απροσδιοριστίας στην περίπτωση της ισορροπίας Nash σημαίνει ότι βέλτιστη αντίδραση ενδέχεται όχι μόνον να μην είναι μια, μα κι ότι θεωρητικά ενδέχεται να είναι κι οποιαδήποτε. Ορισμένοι συγγραφείς όπως ο Γ. Βαρουφάκης (2007) υποστηρίζουν ότι αυτή η απροσδιοριστία είναι πανταχού παρούσα, άλλοι όπως οι Dixit και Skeath (1999) υποστηρίζουν ότι δεν είναι τόσο μεγάλη όσο μπορεί να υποθέσει αυθαίρετα κάποιος. Κάποιοι εξίσου διακεκριμένοι συγγραφείς όπως ο R. Myerson (1997) αναγνωρίζουν εντέλει ότι οι ιστορικές διαδικασίες μπορούν να διαμορφώσουν προσδοκίες κι έτσι μπορεί να προκύψει κάποια διέξοδος, με βάση την έννοια των σημείων εστίασης (focal points) που έθεσε ο T. Schelling. Η υπόθεση μοναδικών ισορροπιών Nash είναι πολύ βολική και γόνιμη, πολύ φιλόδοξη επίσης και δεν είναι κοινώς αποδεκτή. Μπορούμε επιπλέον να αναλογιστούμε, πως για παράδειγμα ακόμα και η σύλληψη κάποιου ανθρώπου από την αλληλεπίδραση δυο άλλων, δεν είναι απαραιτήτως μοναδική, καθότι δεν είναι ανύπαρκτες στο ανθρώπινο είδος οι πολύδυμες κυήσεις. Σε άλλα είδη δε αποτελούν και τον κανόνα, π.χ. οι αρμαδίλλοι γεννούν κατά κανόνα τετράδυμα (Hamlett, 1933). Τα ίδια τα άτομα, άνθρωποι ή όχι, μπορούν να συλληφθούν και έλθουν στη ζωή όχι ως μοναδικά, καθώς επίσης και να φέρουν στη ζωή άλλα άτομα, επίσης όχι μοναδικά.

Ο J. Maynard Smith χρησιμοποίησε στη θέση της ισορροπίας Nash, την έννοια της Εξελικτικά Σταθερής Στρατηγικής (ΕΣΣ) κι από αυτή προκύπτει η λεγόμενη «Εξελικτική Ισορροπία». Αναγνώρισε κι ο ίδιος πως δεν ήταν ο πρώτος που έκανε τη συσχέτιση των αντίστοιχων επιστημονικών πεδίων, μα έκανε βέβαιο ότι κανείς πλέον, δεν θα μπορούσε να αγνοήσει τη δύναμη της θεωρητικής σκέψης του παιγνίου για όλες τις πτυχές του πληθυσμού της βιολογίας. Αυτό που ο E. Mayr ονομάζει «η μεγαλύτερη εννοιολογική επανάσταση στη βιολογία», δηλαδή «η αντικατάσταση της τυπολογικής σκέψης από την πληθυσμιακή σκέψη» (Mayr, 2008), μεταφέρθηκε από τον J. Maynard Smith στη θεωρία των παιγνίων (Sigmund, 2005). Η έννοια της ΕΣΣ είναι θεμελιώδης για τους ισχυρισμούς μας και προέρχεται εν μέρει από τη θεωρία παιγνίων κι εν μέρει από την εξέλιξη του αριθμητικού λόγου των φύλων (Maynard Smith & Price, 1973).

Μια στρατηγική είναι εξελικτικά σταθερή, εφόσον κάποιος πληθυσμός που τη χρησιμοποιεί, δεν μπορεί να δεχθεί εισβολή από κάποια ομάδα με μεταλλαγμένο γονότυπο. Παρομοίως, μια μορφή κουλτούρας (cultural form), αναγνωρίζεται ως ΕΣΣ, υπό την προϋπόθεση ότι εφόσον εγκαθιδρυθεί σε ένα συνολικό πληθυσμό (π.χ. μια επιχείρηση) δεν μπορεί να δεχθεί εισβολή από κάποια εναλλακτική της. Έτσι απομακρυνόμαστε από την εξήγηση των ενεργειών των ατόμων προς την διάχυση των μορφών συμπεριφοράς, στρατηγικών αντιστοίχως, εντός της κοινωνίας. (Gintis, 2000). Μια αδυναμία της παιγνιοθεωρητικής προσέγγισης προς την εξέλιξη είναι ότι αποδίδει μεγάλη έμφαση στις καταστάσεις ισορροπίας, ενώ η εξέλιξη είναι μια διεργασία συνεχούς, ή τουλάχιστον τακτικής αλλαγής. Η ίδια κριτική μπορεί να απευθυνθεί και για την έμφαση της Πληθυσμιακής Γενετικής προς τις ισορροπίες, καθώς γενικότερα είναι ευκολότερο μαθηματικά να αναλύουμε ισορροπίες παρά τροχιές αλλαγής. Όπως επεσήμανε όμως κι ο Maynard Smith, (1982:8) υπάρχουν, εντούτοις, δυο καταστάσεις στις οποίες τα μοντέλα της θεωρίας παιγνίων μας αναγκάζουν να σκεφθούμε σχετικά με την αλλαγή, όπως για τη σταθερότητα.

α) Όταν ένα παίγνιο ενδέχεται να μην έχει καμία ΕΣΣ κι έτσι ο πληθυσμός να κάνει κύκλους επ' αόριστον.
β) Όταν ένα παίγνιο έχει περισσότερες από μια ΕΣΣ.

Η φυσική επιλογή καλεί τη θέαση της εξέλιξης ως την αντικατάσταση των λιγότερο προσαρμοστικών χαρακτήρων, από εκείνους που είναι πιο υγιείς, ώστε να φθάνει ίσως στην εξελικτική ισορροπία, στο σημείο όπου κάποιος έχει τα πλέον προσαρμοστικά χαρακτηριστικά (Vincent and Brown, 2005). Μπορούμε έτσι να ορίσουμε εξελικτικές ισορροπίες, που επίσης εφόσον υπάρχουν, δεν είναι μοναδικές απαραιτήτως, ενώ έχει βεβαίως μεγάλη σημασία ως προς αυτές το αν είναι, ή δεν είναι ομοιογενείς, οι πληθυσμοί στους οποίους αναφέρονται.

Οι ΕΣΣ και οι ισορροπίες της Εξελικτικής Θεωρίας Παιγνίων παρουσιάζουν ενδιαφέρον ως προς τις σφαιρίσεις. Στην πραγματικότητα διαλέγει για παράδειγμα κανείς σε ποια μεριά του αντιπάλου θα του στείλει την μπάλα, την οποία θα ρίψει από κάποια μεριά δική του, που ενδεχομένως δεν την έχει διαλέξει και τόσο πολύ ο ίδιος. Επιπλέον ενδιαφέρον παρουσιάζουν ως προς τις μεροληπτικές συμβάσεις άνευ επαρκούς δικαιολογητικής βάσης, για την ανίχνευση, την ανάδειξη και την αλλαγή τους.

3.4 Οι ρίψεις των σφαιρίσεων ως παραδείγματα ισορροπίας στη Θεωρία Παιγνίων

Λόγω της απλότητας και της δημοφιλίας των τυπικών ανταγωνιστικών σφαιρίσεων, αυτές πολύ συχνά γίνονται σημεία αναφοράς για τη θεωρία παιγνίων. Κάποιες στοιχειώδεις ρίψεις τους, όπως οι εκτελέσεις σέρβις και οι εκτελέσεις «πέναλτι», που αμφότερες συμβαίνουν σε κάμποσες σφαιρίσεις, καθίστανται χαρακτηριστικά παραδείγματα ισορροπίας μικτών στρατηγικών. Ενώ μάλιστα μπορεί να μην υπάρχει ισορροπία στις αμιγείς στρατηγικές. Τέτοια παραδείγματα, βρίσκουμε δυνητικώς πάρα πολλά, καθότι μπορούν να υποτεθούν διάφορες παρεμφερείς ρίψεις σε διμερείς σφαιρίσεις. Συναντάμε συνήθως τη στενή θεώρηση τέτοιων ρίψεων, εντός κάποιας από τις δημοφιλείς κατά κανόνα σφαιρίσεις. Αυτή κληρονομεί έτσι κατά κάποιο τρόπο και τους περιορισμούς στους οποίους υπόκεινται οι συγκεκριμένες ρίψεις εντός του ευρύτερου πλαισίου τους. Δεν είναι βεβαίως απαραίτητο κανείς να ανακαλέσει κάποια ειδικότερη σφαίριση, εφόσον έχει γενικότερα κατά νου τι πρεσβεύει η θεωρία παιγνίων.

Οποιαδήποτε ρίψη από τις παραπάνω, εκτελείται σε κάθε περίπτωση από έναν άνθρωπο. Στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων, το κύριο ζήτημα για τα διαγωνιζόμενα μέρη, δηλαδή τους πάσης φύσεως παίκτες των σφαιρίσεων, είναι μια επιλογή. Στις σφαιρίσεις προσφέρονται πολλά και διάφορα ζεύγη διαθέσιμων επιλογών. Για παράδειγμα, δεξιά –

αριστερά, πάνω – κάτω, μπρος – πίσω, χέρι – πόδι, ευθύ – αντίστροφο χτύπημα, εσωτερικό – εξωτερικό φάλτσο, άνδρας – γυναίκα κ.α. Αυτά τα ζεύγη διαθέσιμων επιλογών αφορούν κατά κανόνα διακρίσεις του χώρου, είτε διακρίσεις του ανθρώπινου δυναμικού. Οποιεσδήποτε κι αν είναι οι διαθέσιμες επιλογές για καθένα από τα μέρη, δεν εμποδιζόμαστε να διατυπώσουμε τη βασική συλλογιστική. Μπορούμε έτσι γενικώς να καταλήξουμε στις κύριες έννοιες των διαφόρων στρατηγικών και των ισορροπιών, να διερευνήσουμε κιόλας όσα μας προσφέρουν, ή ενδεχομένως ακόμη κι αδυναμίες τους. Εφόσον για παράδειγμα είναι δεδομένο ότι η απροσδιοριστία των στρατηγικών ισορροπίας αποτελεί σημαντικό ζήτημα για τους υπέρμαχους και για τους αμφισβητίες της ισχύος που έχει η θεωρία παιγνίων, μπορεί να εκληφθεί κι ως μάλλον προβληματικό να αναφερθούμε γενικώς κι αορίστως σε σφαιρίσεις και σε ρίψεις τους.

Δεν θα έβλαπτε να μη λησμονούμε τα συγκεκριμένα μαθηματικά, ότι δηλαδή τα παραπάνω ζεύγη διαθέσιμων επιλογών έχουν μεταξύ τους διαφορές. Το δεξί χέρι προς το αριστερό χέρι έχει διαφορετικό συσχετισμό δυνάμεων από εκείνον που έχουν το δεξί πόδι προς το αριστερό πόδι, ούτε είναι αυτός ο ίδιος συσχετισμός που ισχύει για άνδρες και γυναίκες, μπορεί να είναι δε άλλος στο ποδόσφαιρο απ' ότι στο handball, αλλιώτικος στο tennis κ.ο.κ. Έτσι μπορεί κανείς συμπληρωματικά κιόλας, να έχει εναλλακτικά κατά νου κάποια πολύ συγκεκριμένη σφαίριση, λαμβάνοντας υπόψη ότι στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων ενδέχεται και να αγνοηθεί η πολλαπλότητα ορισμένων ομάδων (Ostrom et al., 1991). Λαμβάνοντας καταρχήν υπόψη τα παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε την ακόλουθη γενική περιγραφή μιας κατάστασης, αρκετά γνώριμης σε πολλές σφαιρίσεις:

Έστω το μέρος A κατέχει τη μοναδική μπάλα κι επιτίθεται, ενώ το B αμύνεται. Το μεν προσπαθεί να επιτύχει τον αγωνιστικό στόχο του, το δε προσπαθεί για την αποτροπή του. Το A διαθέτει δυο επιθετικές επιλογές, καθώς μπορεί να επιτεθεί με ισάριθμους τρόπους επίθεσης. Το B πρέπει αντιστοίχως να προετοιμάζεται επίσης να αμυνθεί προς καθέναν από τους δυο τρόπους. Το κάθε μέρος γνωρίζει ότι αν δεν μπορεί να παραπλανήσει το άλλο, δεν θα πρέπει τουλάχιστον να του δίνει σαφή ένδειξη της σχεδιαζόμενης δράσης του. Αναγνωρίζει ότι κάθε τέτοια πληροφορία θα χρησιμοποιηθεί πιθανότατα εναντίον του και σύμφωνα με τις προτιμήσεις του άλλου. Υπό την προϋπόθεση ότι αμφότερα τα μέρη είναι εξίσου καλά στην απόκρυψη των προθέσεών τους μπορούμε να αναλύσουμε την αλληλεπίδρασή τους, σαν ένα παιχνίδι πολλαπλών κινήσεων μεταξύ αυτών.

Εφόσον πρόκειται για παιχνίδι σταθερού αθροίσματος, κάθε μέρος θέλει να κρατά το άλλο στο σκοτάδι της άγνοιας. Έτσι, κάποιο μέρος μπορεί να αναλώνεται ενδεχομένως στο άνευ ενδείξεων μάντεμα των πραγματικών προθέσεων του άλλου, και γι αυτό άλλωστε εκείνο εισάγει τον παράγοντα της τύχης στις ενέργειές του. Το Α ωφελείται αν συμβεί να εκδηλώσει την επίθεσή του με διαφορετική επιλογή από αυτήν που καλύπτει η άμυνα του Β. Ειδάλλως αν συμβεί το Α να επιτεθεί με την επιλογή που καλύπτει η άμυνα του Β, τότε ωφελείται το τελευταίο.

Οι αποδόσεις ωφέλειας, ή απολαβές του κάθε μέρους, είναι ο αριθμός των φορών που αυτό νικά κι ανταμείβεται εντέλει σε οποιονδήποτε συνδυασμό ενδεχομένων επίθεσης κι άμυνας. Στην πραγματικότητα, ανάλογα με το παιχνίδι, το σκοράρισμα μπορεί να είναι σχετικά εύκολη, ή δύσκολη υπόθεση, καθώς σε κάποιες σφαιρίσεις όπως το τένις, το μπάσκετ, το βόλεϊ σημειώνεται υψηλό σκοράρισμα, δηλαδή πολλοί «πόντοι», σε σύγκριση με άλλα, όπως το ποδόσφαιρο. Το εν λόγω παίγνιο ενδέχεται να μην είναι απόλυτα συμμετρικό, αφού η μια επιλογή μπορεί να ευνοεί συγκριτικά περισσότερο το Α και η άλλη επιλογή να ευνοεί συγκριτικά περισσότερο το Β. Ούτε όμως είναι απαραιτήτως ασύμμετρο. Θα υποτεθεί καταρχήν ως ασύμμετρο, δηλαδή πως οι δυο επιλογές που διαθέτει το κάθε μέρος δεν είναι εξίσου ευνοϊκές για κανένα μέρος και θα εκφράσουμε τις αποδόσεις αυτών των στρατηγικών σε όρους προσδοκώμενων ωφελειών.

Εντός της θεωρίας παιγνίων σχηματίζουμε έτσι καταρχήν και για τα δυο μέρη από έναν αντίστοιχο πίνακα 2Χ2, ώστε λαμβάνουμε τους παρακάτω τετραγωνικούς πίνακες:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}$$

για τους οποίους, αν ισχύει $\alpha_{ij} = 1 - \beta_{ij}$ αναφέρονται σε παίγνιο σταθερού αθροίσματος

Τοποθετούμε τα στοιχεία των πινάκων έτσι ώστε οι δυο μεγαλύτερες και οι δυο μικρότερες τιμές, να μη βρίσκονται στην ίδια σειρά, ή την ίδια στήλη. Έτσι υποδηλώνεται ότι για οποιασδήποτε δεδομένη επιλογή, υπάρχει οπωσδήποτε κάποια άλλη επιλογή, με την οποία κάποιο από τα μέρη, ωφελείται περισσότερο. Κατόπιν αυτών, το να γράψει κανείς αντισφαίριση, ποδόσφαιρο, πετοσφαίριση, ή υδατοσφαίριση κ.λπ. είναι πολύ εύκολο, καθώς υφίσταται μεγάλος αριθμός αρκετά παρόμοιων σφαιρίσεων, που προδιαγράφουν ρίψεις για τις οποίες αυτά ισχύουν.

Με την παραπάνω κατασκευή, η θεωρία παιγνίων συλλαμβάνει πως μπορούν να καταλήγουν σε ισορροπία οι μικτές στρατηγικές στις διμερείς σφαιρίσεις. Ακόμα κι αν δεν προκύπτει τέτοια ισορροπία για τις αμιγείς στρατηγικές. Τα σενάρια δράσης που δομούνται τοιουτοτρόπως, υποτίθεται πως <u>δεν</u> συνδέονται με τη δράση του ενός μόνον μέρους. Αν συνέβαινε κάτι τέτοιο θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις εκβάσεις τους ως 4 (1Χ4) διατεταγμένα στοιχεία σε κάποιο διάνυσμα-γραμμή. Συνδέονται με διμερείς δράσεις, οπότε σε κάθε 2Χ2 πίνακα που μεταχειριζόμαστε για να τα εντάξουμε, θεωρούμε ότι το ένα μέρος Α «ελέγχει» τις γραμμές, ενώ το άλλο μέρος Β «ελέγχει» τις στήλες. Ιδίως εφόσον θα υποθέταμε κάποιο παίγνιο μη σταθερού αθροίσματος θα ήταν επιπλέον σκόπιμο να «συνενώσουμε» τους δυο πίνακες σε έναν «διπλοπίνακα» (bimatrix) (Πίνακας IX).

		Μέρος Β	
		επιλογή 1	επιλογή 2
Μέρος Α	επιλογή 1	α_{11} , β_{11}	α_{12} , β_{12}
	επιλογή 2	α_{21} , β_{21}	α_{22} , β_{22}

Πίνακας IX

Είναι πολύ βοηθητικό να κατανοήσουμε ότι αυτό δεν κρίνεται απαραίτητο για τα παίγνια σταθερού αθροίσματος. Οπότε μπορούμε ως εκ τούτου να προχωρήσουμε την ανάλυση αναπαριστώντας όλες τις απαραίτητες πληροφορίες σε έναν πίνακα, με μόνον τις αποδόσεις ωφελείας του Α σε κάθε κελί. Δηλαδή θα κάνουμε κατόπιν ως προς αυτό, ότι έκανε ο J. Bernoulli πριν από τρεις και πλέον αιώνες, κατά την πρώιμη εποχή των πιθανοτήτων. Επιπλέον, εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας προς τις ρίψεις, αντί των φάσεων που ήταν η κύρια αναφορά του J. Bernoulli. Γνωρίζοντας τις απολαβές του ενός μέρους Α μπορούμε οποιαδήποτε στιγμή θέλουμε να μάθουμε και τις απολαβές του άλλου μέρους Β, για οποιοδήποτε ζεύγος επιλογών, καθώς δεν έχουμε παρά να τις συνάγουμε αφαιρώντας από τη μονάδα, το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα Α. Επιπλέον, με τα στοιχεία, του οποιουδήποτε ενός πίνακα και μόνον, μπορούμε θεωρητικά να φθάσουμε στον προσδιορισμό της βέλτιστης τιμής κάποιας πιθανότητας p, με την οποία τυχαιοθετεί τις επιλογές του, έστω καταρχήν το Α μέρος, κατά μια ανάμικτη στρατηγική p_{mix}. Αλλά ίσως ακόμα πιο εντυπωσιακά, με τα ίδια στοιχεία, μπορούμε να καταλήγουμε και στον προσδιορισμό της βέλτιστης τιμής κάποιας πιθανότητας q, με την οποία τυχαιοθετεί τις επιλογές του το Β μέρος, κατά μια ανάμικτη στρατηγική q_{mix}. Οι παραπάνω τιμές p_{mix} και q_{mix} με τις οποίες τυχαιοθετούνται οι ενέργειες των αντίπαλων μερών, δεν προκύπτουν με αφαίρεση από την μονάδα, καθώς δεν αθροίζονται σε αυτή. Κάθε μέρος τυχαιοθετεί μόνο του. Αυτή η προσέγγιση, κατά την οποία οι ενέργειες τυχαιοθετούνται προκειμένου να επιτύχουν την αδιαφορία του αντιπάλου, είναι γνωστή ως ανάμιξη στρατηγικών.

- Η ανάμικτη στρατηγική του ισχυρού μέρους που συνδέεται με την p_{mix}, ονομάζεται maximin, είναι δε αυτή που του εξασφαλίζει τις μέγιστες απολαβές που μπορεί να έχει, δίχως να γνωρίζει τις ενέργειες του αντιπάλου.
- Η ανάμικτη στρατηγική του ανίσχυρου μέρους που συνδέεται με την q_{mix}, ονομάζεται minimax, είναι δε αυτή των ελάχιστων απολαβών που μπορεί να εξωθηθεί εκ του αντιπάλου, επίσης δίχως να γνωρίζει τις ενέργειες του.

Η ανάμιξη γίνεται κατά το δυνατόν με μη αναγνωρίσιμο πρότυπο. Ήτοι πρέπει να μην δρα, ή να μην αντιδρά κανείς με πανομοιότυπο τρόπο, ούτε καν με τον ίδιο συστηματικό τρόπο, τον οποίο μπορεί να «αντιληφθεί» εύκολα μια μηχανή. Όπως το έδειξε κι ο Shannon άλλωστε και καθώς οι υπολογιστικές μηχανές βεβαίως, στο σκάκι κι αλλού, νικούν εύκολα πλέον τους ανθρώπους. Οι περισσότεροι άνθρωποι δε, καλώς ή κακώς, δεν έχουν ενδεχομένως τέτοιες απαιτήσεις «έξυπνης» συμπεριφοράς από τους παντός είδους ενασχολούμενους-νες με τις σφαιρίσεις, που ενέχουν και σωματική διάσταση, συγκριτικά μεγαλύτερη. Ανεξάρτητα από άλλες απαιτήσεις, αν οποιοδήποτε μέρος δεσμεύεται σε κάποια προκαθορισμένη συμπεριφορά τέτοιου τύπου, το άλλο μπορεί να αντλήσει πλεονέκτημα εξ αυτής, «αποκωδικοποιώντας» την. Εντέλει με αυτά τα ίδια στοιχεία και υπό τις ανάμικτες στρατηγικές τους, αφενός την maximin για το Α που συνδέεται με την p_{mix} κι αφετέρου την minimax για το Β που συνδέεται με την q_{mix}, υπολογίζουμε και την τιμή ισορροπίας, στην οποία κατατείνουν. Συνοπτικά, με την πλέον απλή μέθοδο των odds, μπορούμε να βρούμε αμέσως μοναδικές τιμές για τα p και q, καθώς έχουμε

$p / (1 - p) = (\alpha_{22} - \alpha_{21)} / (\alpha_{11} - \alpha_{12}) =>$

$p = (\alpha_{22}-\alpha_{12})/\alpha_{11}+\alpha_{22}-\alpha_{12}-\alpha_{21})$ και

$q / (1 – q) = (\alpha_{22} - \alpha_{12}) / (\alpha_{11} – \alpha_{21}) =>$

$q = (\alpha_{22}-\alpha_{21})/(\alpha_{11}+\alpha_{22}-\alpha_{21}-\alpha_{12})$.

Τα παραπάνω γίνονται ακόμη πιο απλά, αν εκτός από γνωστές σφαιρίσεις μεταχειριστούμε και κάποια συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα.. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το Α επιτυγχάνει αναλόγως κατά το α_{11} = 50%, ή κατά το α_{22} = 20%, των συνολικών φορών που συμβαίνει να εκδηλώσει επίθεση κάνοντας διαφορετική επιλογή από εκείνη με την οποία εκδηλώνει την άμυνά του το Β. Υποθέτουμε επίσης το Α και πάλι επιτυγχάνει αναλόγως κατά το α_{12} = 80%, ή κατά το α_{21} = 90% των συνολικών φορών που συμβαίνει να εκδηλώσει επίθεση κάνοντας διαφορετική επιλογή από εκείνη με την οποία εκδηλώνει την άμυνά του το Β. Έχουμε έτσι τις απολαβές του Α μόνον, α_{11} = 50%, α_{12} = 80%, α_{21} = 90%, α_{22} = 20% που μετέπειτα θα περάσουμε και πάλι στον τετραγωνικό πίνακα του. Ασφαλώς θα ήταν πολύ πιο εύκολα τα πράγματα αν ορίζαμε ως επιλογές 1 και 2, το αριστερά – δεξιά, ή το άνδρας – γυναίκα κ.λπ.

όμως το ζητούμενο εν προκειμένω δεν είναι αυτή η ευκολία. Μεταχειριζόμαστε τα ίδια αριθμητικά δεδομένα που μεταχειρίζονται κάποιοι διακεκριμένοι συγγραφείς όπως οι Dixit & Skeath (1999), ο B. Polak (2007), ο H. Varian (2015), χωρίς να εικάζουμε τις ίδιες ρίψεις, ούτε τις αυτές σφαιρίσεις. Απλό είναι βεβαίως και να πειράξει κανείς τις αριθμητικές αναλογίες και να κάνει τις αντίστοιχες αριθμητικές προσαρμογές. Οι παραπάνω συγγραφείς βεβαίως μεταχειρίζονται παραδείγματα συγκεκριμένων σφαιρίσεων και πάντως πραγματεύονται μεμονωμένες ρίψεις. Δεν είναι βεβαίως κι εντελώς άνευ σημασίας ούτε και η επιλογή των αριθμητικών δεδομένων της θεωρίας παιγνίων, καθώς τα διάφορα παίγνια δομούνται κι επί της βάσης αυτών.

Στη χρονική θεώρηση των A. Dixit & S. Skeath (1999) κ.α., κατά το χρόνο παιχνιδιού υπάρχει μια μπάλα που ελέγχεται από το ένα, ή το άλλο μέρος. Αναφέρονται για παράδειγμα στο 50% ή στο 80% του χρόνου. Αναλύεται δηλαδή το πολλαπλό παιχνίδι των ταυτόχρονων κινήσεων, με παράδειγμα κάποιο παιχνίδι με μια μπάλα. Συνέπεια της μοναδικότητας της μπάλας είναι κάποια πολύ συγκεκριμένη στενή αντίληψη για τη φύση του χρόνου και του χώρου. Είναι παρεμφερής, με την αντίληψη του λεγόμενου «καθαρού χρόνου» στην καλαθοσφαίριση, που υπό άλλες συνθήκες ενδέχεται να μην ισχύει. Μπορούμε για παράδειγμα να υποθέσουμε κάποια σφαίριση που διεξάγεται με δύο έστω μπάλες και βάσει κανονισμού δεν συνεχίζεται αν μείνει με μια μόνον μπάλα εντός αγωνιστικού χώρου. Κατά κάποιο τρόπο όπως κάποιο έμφυλο ζωικό είδος, που άπαξ και απομείνει με ένα μόνον μέλος του, οδηγείται προς την εξαφάνιση. Δεδομένου όμως ότι οι σφαιρίσεις διεξάγονται με μια μπάλα η περιγραφή απλοποιείται και συνεχίζουμε με αυτή, δίχως να αναφερθούμε και τόσο στις παραιτέρω επεκτάσεις. Ο παρακάτω Πίνακας δείχνει το μερίδιο των φορών που το A κερδίζει τη φάση απέναντι στο B, σε καθένα από τους 4 δυνατούς συνδυασμούς των στρατηγικών επιλογών τους.

		Μέρος B	
		επιλογή 1	επιλογή 2
Μέρος A	επιλογή 1	**50%**	**80%**
	επιλογή 2	**90%**	**20%**

Πίνακας X

Εν προκειμένω είναι ευνόητο πως με τα συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα δεν υπάρχουν κυρίαρχες στρατηγικές, δηλαδή ότι δεν μπορεί δηλαδή κάποιο μέρος να προτιμά μονίμως κάποια επιλογή και να αναμένει αποδόσεις βέβαιης νίκης. Το παιχνίδι όπως εικονίζεται στον Πίνακα X, μπορεί όμως να βρίσκει ισορροπία σε ανάμικτες στρατηγικές.

Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι το Α θα μπορούσε να χρησιμοποιεί συμπληρωματικά και τον μάλλον λιγότερο ισχυρό και συγκριτικά αναποτελεσματικό δεύτερο τρόπο επίθεσής του. Το κάνει με επαρκή συχνότητα, που να του διασφαλίζει ότι το Β δεν θα μπορεί να προβλέψει ποιος τρόπος επίθεσης επίκειται. Του αρκούν μάλιστα οι δυο τρόποι, παρά να επεκταθεί στην ανάμιξη τριών τρόπων, η οποία ως επί το πλείστον δεν ενδείκνυται, υπό το φως της θεωρίας παιγνίων (Dixit, & Skeath, 1999) Οι τρόποι εν προκειμένω περικλείονται στην μια εκ των δυο επιλογών, που δεν είναι σταθερά η ίδια. Υπό τέτοιες συνθήκες, τα μέρη συνήθως ενεργούν κάπως μη συστηματικά, «ποντάροντας» στον αιφνιδιασμό του αντιπάλου. Μη συστηματικά μεν, όχι όμως κι έξω από κάθε σύστημα, εφόσον αν μη τι άλλο παίζουν κάποια σφαίριση με δεδομένους κανονισμούς, έστω κι αν δεν αποκλείεται να μην έχουν καν λόγο γι αυτούς. Μη συστηματικά μεν, μα όχι και «μη συστημικά» εξίσου. Κάποια τέτοια μη συστηματική προσέγγιση για το ένα, ή και τα δυο μέρη, σημαίνει την επιλογή κάθε στρατηγικής για ορισμένο αριθμό φορών. Ο αριθμός των φορών που επιλέγεται κάθε στρατηγική, μπορεί βεβαίως να εξαρτάται κι από άλλους παράγοντες, όπως για παράδειγμα τους διοργανωτές του παιχνιδιού, αν υποθέσουμε πως είναι άλλοι από εκείνους που παίζουν. Οι τελευταίοι δεν είναι βεβαίως «μαριονέτες» των διοργανωτών του παιχνιδιού τους, των προπονητών τους, διαφόρων σημαντικών άλλων, του κοινού που τους παρακολουθεί κ.λπ. Ούτε όμως κι όλοι αυτοί, οι υπόλοιποι, είναι εξαρτημένοι οπωσδήποτε από τις επιλογές και τις κινήσεις εκείνων που κυκλοφορούν κάποια μπάλα.

Εκ της σκοπιάς του μέρους Α που ελέγχει τις γραμμές

Στο Πίνακα XI επεκτείνουμε τον πίνακα αποδόσεων ωφελείας προσθέτοντας μια γραμμή που αντιπροσωπεύει μια ανάμικτη στρατηγική για το Α, που την καλούμε p_{mix}. Αν το Α έχει έστω δυο μόνο αμιγείς στρατηγικές, η ανάμιξη μεταξύ αυτών δίνει ένα συνεχές εύρος επιλογών. Η επιλογή κάποιας ανάμικτης στρατηγικής, δεν είναι κάτι σαν την επιλογή μιας (τρίτης) αμιγούς στρατηγικής. Ανάμικτη επιλογή σημαίνει πως εντέλει παίζει μια από τις αμιγείς στρατηγικές, που είναι εν προκειμένω οι ελάχιστες δύο. Παίζει λοιπόν μια αμιγή στρατηγική με πιθανότητα p και την άλλη αμιγή στρατηγική με 1 – p, καθώς κάθε ανάμικτη στρατηγική εκλαμβάνεται ως ειδική περίπτωση μιας συνεχούς στρατηγικής. Μας διευκολύνει εν προκειμένω μάλιστα ως προς την απεικόνισή της, να την εντάξουμε ενδιαμέσως των γραμμών που έχουμε για τις αμιγείς στρατηγικές και να τη χρωματίσουμε με διαφορετικό χρώμα (γκρι).

		Μέρος Β	
		επιλογή 1	επιλογή 2
Μέρος Α	επιλογή 1	**50**	**80**
	επιλογή maximin	50p+90(1-p)	80p+20(1-p)
	επιλογή 2	**90**	**20**

Πίνακας XI

Κατόπιν εκφέρουμε αλγεβρικά όλους τους υπολογισμούς, καθώς θέλουμε να βρούμε τη βέλτιστη επιλογή τιμής του p για το A κι άρα ψάχνουμε ανάμεσα σε όλες τις δυνατές τιμές της p, για εκείνη την τιμή που μεγιστοποιεί τα ελάχιστα των αποδόσεων ωφελείας. Αυτό ισοδυναμεί με την εξεύρεση της στρατηγικής maximin για το A.

Οι αποδόσεις ωφέλειας που συνδέονται με τη νέα στρατηγική είναι αναμενόμενες τιμές καθώς δείχνουν τα ποσοστά επιτυχίας που μπορεί να αναμένει κατά μέσο όρο το A, όταν χρησιμοποιεί την p_{mix} στρατηγική του έναντι σε καθεμία από τις αμιγείς στρατηγικές του B. Το p_{mix} σημαίνει ότι το A παίζει τη «επιλογή 1» με πιθανότητα p και τη «επιλογή 2» με πιθανότητα (1 – p). Αν το B παίζει την αμιγή στρατηγική «επιλογή 1», έναντι στο μείγμα του A, συνεπάγεται ότι αυτό συμβαίνει κατά κάποιο μερίδιο των φορών p, εφόσον το αποτέλεσμα συνδέεται και με τις δυο επιλογές. Δηλαδή η απόδοση ωφέλειας του A, από τη χρησιμοποίηση τη δικής του p-mix έναντι της «επιλογής 1» για το B, είναι

$50p + 90(1 - p)$.

Παρομοίως, όταν το A χρησιμοποιεί τη δική του p-mix και το B χρησιμοποιεί την αμιγή στρατηγική «επιλογή 2», η απόδοση ωφέλειας του A (και πάλι) είναι

$80p + 20(1 – p)$.

Από τις πλέον τρεις συνολικά στρατηγικές του, το Α αναμένει ότι το Β θα επιλέξει εκείνη τη στρατηγική που ελαχιστοποιεί το ποσοστό επιτυχίας του Α. Η επιλογή ως προς την ανάμικτη στρατηγική, εξαρτάται από τη μεταβλητή p. Επιπλέον, αν το Α εξισώσει τις παραπάνω δυο εκφράσεις, επιλέγοντας κάποια κατάλληλη τιμή του p, τότε καθιστά αδιάφορο το Β. Έτσι υπολογίζουμε κι ως εκ τούτου, αυτή την τιμή του p ως εξής:

$50p + 90(1 – p) = 80p + 20 (1 – p) => p = 0.7$

Επιπλέον μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υπό τη δεδομένη τιμή του p, καταλήγουμε και σε συγκεκριμένη απόδοση ωφέλειας για το Α

EU (A) = 50*0.7 + 90*0.3 = 80*0.7 + 20*0.3 = 62

Ήτοι, υπό τα παραπάνω δεδομένα η απόδοση ωφέλειας του Α είναι 62%. Το σημαντικό ως προς την επίτευξης της νίκης, είναι ότι υπάρχουν ενδιάμεσα σημεία (τα σημεία πέριξ της τιμής p = 0.7), όπου το Α έχει ποσοστά επιτυχίας πάνω από 50%. Αυτά δηλώνουν πως το Α έχει πλεονέκτημα του να κρατά το Β στο σκοτάδι ως προς τις πραγματικές προθέσεις του, που αν θέλει να τις εξιχνιάσει θα πρέπει να τις μαντέψει. Κάτι τέτοιο μπορεί να είναι μια άλλη υπόθεση, όχι απαραιτήτως εύκολη, εφόσον επανέλθουμε στον C. Shannon.

Εκ της σκοπιάς του μέρους Β που ελέγχει τις στήλες

Το Β μέρος, παρομοίως μπορεί να χρησιμοποιήσει μικτές στρατηγικές προκειμένου να βελτιώσει τις δικές του αποδόσεις ωφέλειας, που επίσης είναι αναμενόμενες τιμές. Δεν είναι περίεργο για το Β, όπως δεν είναι ούτε και για το Α. Η επιλογή μικτών στρατηγικών απ' όλους, είναι αρκετά συνηθισμένη στις ανταγωνιστικές σφαιρίσεις. Συγχρόνως φαίνεται ότι ισχύει όμως επίσης κι αυτό που επισήμαινε ο J. Bernoulli, δηλαδή πως ο δυνατός επιζητά πάντοτε να «χτυπήσει» στην αδύναμη μεριά, καθώς π.χ. βάλλεται συστηματικά η αμυνόμενη γυναίκα εκ της αντίπαλης επίθεσης, είτε αυτή εκδηλώνεται από άνδρα, είτε από γυναίκα.

Στην εκλογή πιθανοτήτων από το Β αντιστοιχούμε αλγεβρικά το q. Υποθέτουμε ότι παίζει «επιλογή 1» με πιθανότητα q και «επιλογή 2» με πιθανότητα (1 – q). Αυτό το ονομάζουμε το δικό του $q_{mix.}$ Επεκτείνουμε τον πίνακα αποδόσεων ωφελείας, εισάγοντας μια τρίτη στήλη για την q_{mix} (Πίνακας ΙΧ). Πάλι, το q μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ 0 και 1, και να εξετάσουμε τις συνέπειες όλων των επιλογών του q. Για καθεμία από τις στρατηγικές του το Β περιμένει το Α να επιλέξει τη βέλτιστή του απάντηση, που όπως και προηγουμένως τη δείχνουμε σε μια ένθετη ενδιάμεση στήλη τη μέγιστη από τις αποδόσεις ωφέλειας του Α. Μας διευκολύνει εν προκειμένω μάλιστα ως προς την απεικόνισή της, να την εντάξουμε ενδιαμέσως των γραμμών που έχουμε για τις αμιγείς στρατηγικές και να τη χρωματίσουμε επίσης με διαφορετικό χρώμα (γκρι).

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">Μέρος
Β</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>επιλογή
1</td><td>επιλογή
minimax</td><td>επιλογή
2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μέρος
Α</td><td>επιλογή
1</td><td>50</td><td>50q+80(1–q)</td><td>80</td></tr>
<tr><td>επιλογή
2</td><td>90</td><td>90q+20(1–q)</td><td>20</td></tr>
</table>

Πίνακας XII.

Το Β θα πρέπει να περιμένει πως το Α θα χρησιμοποιήσει την επιλογή που είναι βέλτιστη για εκείνο και κατά συνέπεια χειρότερο για το ίδιο το Β, για οποιαδήποτε δεδομένη τιμή του q. Έτσι πέρα από τη μέθοδο των odds, υπολογίζουμε κι ως εκ τούτου αυτή την τιμή του q ως εξής:

$50q+80(1–q) = 90q + 20 (1 – q) \Rightarrow q = 0.6$

Η βέλτιστη q-mix του Β απαιτεί να αμύνεται στην «επιλογή 1» κατά το 60% των φορών και να αμύνεται στη «επιλογή 2» κατά το 40% των φορών. Εισάγοντας αυτή τη βέλτιστη τιμή του q σε οποιαδήποτε από τις εκφράσεις αποδόσεων ωφελείας δίνεται η μέση απόδοση ωφέλειας από αυτό το μείγμα.

EU (A) = (50 x 0,6) + (80 x 0,4) = 30 + 32 = 62.

Οι μικροί αριθμοί είναι εν γένει υπέρ του Β και εις βάρος του Α, εφόσον πρόκειται για παίγνιο σταθερού αθροίσματος. Η απόδοση ωφελείας 62, είναι το ποσοστό επιτυχίας του Α. Το ποσοστό επιτυχίας του Β είναι

EU (B) = 1 – EU (A) = 38

Εντούτοις, αυτή η μικτή στρατηγική q_{mix} αντιστοιχεί στο minimax του Β, και σταθμικά είναι καλύτερη από τις δυο αμιγείς στρατηγικές του. Το 62 για το Α και 38 για το Β, αποτελούν αντιστοίχως την λεγόμενη αξία του παιχνιδιού (value of the game) για κάθε μέρος. Έτσι έχουμε:

$50p+90(1-p) = 80p+20(1-p) = 50q+80(1–q) = 90q+20(1–q)$

		Μέρος Β		
		επιλογή 1	επιλογή minimax	επιλογή 2
Μέρος Α	επιλογή 1	**50**	50q+80(1–q)	**80**
	επιλογή maximin	50p+90(1-p)	62 / 38	80p+20(1-p)
	επιλογή 2	**90**	90q+20(1–q)	**20**

Πίνακας XIII

Βάζοντας μαζί τις βέλτιστες επιλογές των ανάμικτων στρατηγικών για τα Α και Β, μπορούμε να δείξουμε ότι συνιστούν μια ισορροπία για το παιχνίδι. Θεωρητικά δηλαδή, αν το Α επιλέξει μια τιμή του p άλλη από το 0,7 τότε το Β μπορεί να επιλέξει μια αμιγή στρατηγική που να του δίνει μια κατά μέσο όρο υψηλότερη απόδοση ωφελείας απ’ ότι του δίνεται ενάντια στο βέλτιστο μείγμα του Α (Πίνακας XIII). Αλλά κι αν το Β επιλέξει μια αξία του q άλλη από το 0,6 τότε το Α μπορεί να επιλέξει μια αμιγή στρατηγική που θα του δίνει μια κατά μέσο όρο υψηλότερη απόδοση ωφελείας απ’ ότι του δίνεται ενάντια στο βέλτιστο μείγμα του Β.

Ασφαλώς καθένα από τα μέρη, ενδέχεται να διαθέτει τρεις ή και περισσότερες αμιγείς στρατηγικές (κι όχι απαραίτητα όσες και το άλλο μέρος). Κάτι τέτοιο δεν έπεται απαραίτητα ότι θα χρησιμοποιεί ανάμικτες στρατηγικές όπου θα τις συνδυάζει όλες τους, (ή θα συν3άζει κ.ο.κ. όπως αναφέρει ο J. Bernoulli). Θα μπορούσε να χρησιμοποιεί ακόμα και μια μόνον αμιγή στρατηγική, παρότι διαθέτει κι άλλες επίσης (δηλαδή να μη αναμιγνύει καθόλου). Έτσι τα δυο, ή έστω το ένα από τα μέρη, ενδέχεται να χρησιμοποιεί κάποια ανάμικτη στρατηγική που να συνίσταται εκ δυο αμιγών, όπως αναφέραμε αναλυτικά παραπάνω, όμως να διαθέτει περισσότερες αμιγείς στρατηγικές κι όχι ακριβώς δυο. Στη γενικότερη υπόθεση ότι καθένα από τα δυο μέρη διαθέτει τρεις στρατηγικές, ο διπλοπίνακας (bimatrix) απολαβών (Πίνακας XIV) έχει ως εξής:

		Μέρος Β		
		επιλογή 1	επιλογή 2	επιλογή 3
Μέρος Α	επιλογή 1	α_{11}, β_{11}	α_{12}, β_{12}	α_{13}, β_{13}
	επιλογή 2	α_{21}, β_{21}	α_{22}, β_{22}	α_{23}, β_{23}
	επιλογή 3	α_{31}, β_{31}	α_{32}, β_{32}	α_{33}, β_{33}

Πίνακας XIV.

Έχουμε μία περίπτωση όπου το Α αναμιγνύει μεταξύ και των τριών στρατηγικών, τρεις περιπτώσεις κατά τις οποίες το Α αναμιγνύει ακριβώς ανάμεσα σε δύο από αυτές, και τρεις περιπτώσεις όπου το Α χρησιμοποιεί μια αμιγή στρατηγική Το ίδιο ισχύει και για το Β. Έτσι κάνοντας τους συνδυασμούς μπορούμε να οδηγηθούμε σε $(1+3+3)^2 = 49$ συνολικά ενδεχόμενες περιπτώσεις ισορροπιών Nash.

Ξεχωρίζει εύκολα θεωρητικώς εκείνη που τόσο το Α όσο και το Β αναμιγνύουν αμφότερα μεταξύ και των τριών στρατηγικών τους. Μπορούμε έτσι να υποθέσουμε ότι το Α κάνει την επιλογή 1 με πιθανότητα p_1, κάνει την επιλογή 2 με πιθανότητα p_2, και την επιλογή 3 με πιθανότητα $1-p_1-p_2$ (εφόσον οι πιθανότητες τους εξ ορισμού δεν υπολείπονται, όπως και δεν υπερβαίνουν τη μονάδα, ούτε υπό την έννοια του J. Bernoulli). Κατά τον ίδιο τρόπο, το Β κάνει την επιλογή 1 με πιθανότητα q_1, κάνει την επιλογή 2 με πιθανότητα q_2, και την επιλογή 3 με πιθανότητα $1-q_1-q_2$. Η θεώρηση της αδιαφορίας μας οδηγεί στις εξής διπλές εξισώσεις:

$$q_1\alpha_{11}+q_2\alpha_{12}+(1-q_1-q_2)\alpha_{13} = q_1\alpha_{21}+q_2\alpha_{22}+(1-q_1-q_2)\alpha_{23} = q_1\alpha_{31}+q_2\alpha_{32}+(1-q_1-q_2)\alpha_{33}$$

$$p_1\alpha_{11}+p_2\alpha_{21}+(1-p_1-p_2)\alpha_{31} = p_1\beta_{12}+p_2\beta_{22}+(1-p_1-p_2)\beta_{32} = p_1\beta_{13}+p_2\beta_{23}+(1-p_1-p_2)\beta_{33}$$

Κάθε μια από αυτές τις διπλές εξισώσεις μπορεί να χωριστεί στα δυο. Οπότε αυτό που προκύπτει είναι ένα σύστημα τεσσάρων γραμμικών εξισώσεων με ισάριθμες μεταβλητές p_1, p_2, q_1, και q_2. Δηλαδή έχουμε:

$$q_1\alpha_{11}+q_2\alpha_{12}+(1-q_1-q_2)\alpha_{13} = q_1\alpha_{21}+q_2\alpha_{22}+(1-q_1-q_2)\alpha_{23}$$
$$q_1\alpha_{11}+q_2\alpha_{12}+(1-q_1-q_2)\alpha_{13} = q_1\alpha_{31}+q_2\alpha_{32}+(1-q_1-q_2)\alpha_{33}$$
$$p_1\beta_{11}+p_2\beta_{21}+(1-p_1-p_2)\beta_{31} = p_1\beta_{12}+p_2\beta_{22}+(1-p_1-p_2)\beta_{32}$$
$$p_1\beta_{11}+p_2\beta_{21}+(1-p_1-p_2)\beta_{31} = p_1\beta_{13}+p_2\beta_{23}+(1-p_1-p_2)\beta_{33}$$

Οι πρώτες δυο παραπάνω εξισώσεις περιέχουν τα q_1, και q_2, οι δυο τελευταίες περιέχουν τα p_1 και p_2, οπότε οι μεν μπορούν να επιλυθούν ξεχωριστά από τις δε. Κατά συνέπεια μπορούμε να εκφράσουμε τα q_1, και q_2, βάσει των συγκεκριμένων συντελεστών α_{11}, ... α_{33}, δηλαδή από τα στοιχεία του πίνακα A_{3X3} Αντιστοίχως μπορούμε να εκφράσουμε τα p_1 και p_2, βάσει των συντελεστών β_{11}, ... $\beta_{33,}$ τα στοιχεία του B_{3X3} (του δεύτερου εκ των πινάκων από τους οποίους συντίθεται ο αντιστοίχων διαστάσεων διπλοπίνακας). Μπορούμε έτσι θεωρητικά να καταλήξουμε και σε μια ισορροπία ανάμικτων στρατηγικών, συντιθέμενων εκ τριών αμιγών. Μπορούμε δε να καταλήξουμε όμως και σε απροσδιόριστες ισορροπίες μειγμάτων. Ένα κύριο ρεύμα της θεωρίας παιγνίων απαντά προς αυτά ότι κάθε μέρος μπορεί να κάνει μια κατάταξη – ιεράρχηση στις στρατηγικές του βάσει της αποδοτικότητάς τους (των απολαβών που του προσφέρουν) και να περιοριστεί σε δυο μόνον. Αυτό γίνεται υπό την λογική του ότι δεν είναι σκόπιμο, όταν φεύγει από την πλέον αποδοτική αμιγή στρατηγική, να πάει στην τρίτη κι έπειτα, εφόσον είναι προτιμότερη εξ ορισμού η δεύτερη ως συγκριτικά πιο αποδοτική.

Έτσι περνάμε κατόπιν στην υπόθεση ότι το Α αναμιγνύει μεταξύ δυο στρατηγικών με αντίστοιχες πιθανότητες p κι 1-p, ενώ το Β αναμιγνύει μεταξύ όλων, δηλαδή και των τριών, όπως προηγουμένως. Ως εκ τούτου φθάνουμε σε τρεις εξισώσεις με ισάριθμες μεταβλητές

$$q_1\alpha_{11}+q_2\alpha_{12}+(1-q_1-q_2)\alpha_{13} = q_1\alpha_{21}+q_2\alpha_{22}+(1-q_1-q_2)\alpha_{23}$$
$$p\beta_{11}+(1-p)\beta_{21} = p\beta_{12}+(1-p)\beta_{22}$$
$$p\beta_{11}+(1-p)\beta_{21} = p\beta_{13}+(1-p)\beta_{23}$$

Όταν το ένα ή και τα δυο μέρη έχουν τρεις (ή περισσότερες) αμιγείς στρατηγικές, μια ισορροπία μικτών στρατηγικών μπορεί δηλαδή να προκύψει καθώς δεν τίθεται θετική πιθανότητα σε όλες τις αμιγείς στρατηγικές, αλλά μόνον σε ένα υποσύνολο αυτών. Ως προς τις σφαιρίσεις μπορούμε εν προκειμένω να επισημάνουμε ότι παρέχουν υποστήριξη του παραπάνω ισχυρισμού, σε πολλές περιπτώσεις, όπως επίσης και σε πολλές άλλες περιπτώσεις όχι. Ως χαρακτηριστικό παράδειγμα πρακτικού περιορισμού στις δυο στρατηγικές επιλογές εκ των περισσότερων διαθέσιμων, δίνεται η εκτέλεση των πέναλτι. Οι εκτελεστές, όπως και οι τερματοφύλακες, επιλέγουν δεξιά, ή αριστερά, στην συντριπτική πλειονότητα των εκτελέσεων. Σπανίως επιλέγεται το κέντρο του ενιαίου τέρματος, που είναι κατά κάποιο τρόπο και περιορισμός του στόχου (άλλωστε δεν συναντάμε τέρματα χωρισμένα με ενδιάμεσα δοκάρια, σε δυο ή περισσότερες μεριές, με έναν ή περισσότερους τερματοφύλακες είτε με διαφοροποιημένους αριθμητικούς συντελεστές κι άλλο δέλεαρ). Χαρακτηριστικό παράδειγμα πρακτικού μη περιορισμού στις δυο στρατηγικές επιλογές είναι οι ντρίμπλες των επιθετικών (μα και τα κοψίματα των αμυντικών). Κάποιοι που επιτυγχάνουν στο να ξεγελάνε τον αντίπαλό τους κατά κάποιο τρόπο, φαίνεται πως δεν αρκούνται σε ένα – δύο τρόπους.

Γενικώς οι ρίψεις των σφαιρίσεων ως πεδίο εφαρμογής στρατηγικών συστάσεων της θεωρίας παιγνίων, ή ευρύτερα ως πεδίο δοκιμών της παρουσιάζουν πολύ ενδιαφέρον. Οι στρατηγικές συστάσεις – υποδείξεις συζητούνται στη βάση συστημένων κανονισμών, πολύ περιορισμένων εφόσον εξεταστούν καλώς.

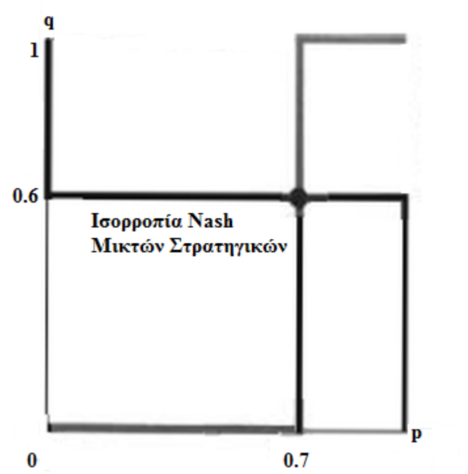
Στο παραπάνω παράδειγμα είχαμε συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα. Πόθεν βγήκαν αυτά τα αριθμητικά δεδομένα; Ο Pollack τα αποδίδει στον Dixit. Ο Dixit στην πρώτη έκδοση τα αναφέρει ως εύλογο σενάριο. (Dixit 1999). Είναι βέβαια βολικά ως προς το ότι παρουσιάζουν τα πάντα με ακέραιους αριθμούς κι ως επί το πλείστον «στρογγυλούς». Το Α έχει απολαβές 50-80-90-20, καταλήγει δε στην ισορροπία με 62, ο Β έχει απολαβές 50-20-10-80, καταλήγει δε στην ισορροπία με 38 και είναι τα πάντα τακτοποιημένα. Μπορεί να είναι αυτή η τιμή της ισορροπίας το 62 / 38 που προκύπτει υπό τα παραπάνω δεδομένα, και μπορεί τα μέρη να ενεργούν είτε με το σκεπτικό των minimax στρατηγικών του J. Von Neumann, είτε με το σκεπτικό των βέλτιστων αντιδράσεων του J. Nash, και είμαστε ελεύθεροι να μεταβάλλουμε οποιαδήποτε από τις αρχικές τιμές, ώστε να αλλάξει η τιμή ισορροπίας και η αξία του παιχνιδιού. Μπορούμε επίσης να βρούμε πραγματικά δεδομένα για κάθε σφαίριση και να επιβεβαιώσουμε, μέσω αυτών, τις ευρύτερες ισορροπίες Nash. Το κύριο ζητούμενο δεν είναι απαραιτήτως να βρούμε κάποια αριθμητική τιμή ισορροπίας για οποιαδήποτε ρίψη και για κάθε σφαίριση. Δεν αποκλείεται έτσι να μην αντιληφθούμε κάποια αρκετά πιο συγκεκριμένα πράγματα, όπως για παράδειγμα ότι ενδέχεται άνδρες και γυναίκες να αποτρέπονται να παίζουν μαζί, από το δικαίωμα για δυο σέρβις που ισχύει στην αντισφαίριση. Η ισχύς του κανονισμού δικαιώματος για ακριβώς δυο σέρβις, δεν είναι πιο εύλογη από το να ισχύει ακριβώς ένα, ή ακριβώς τρία και πάντως τα μαθηματικά προσφέρουν συγκεκριμένη λύση, ώστε να μην έχει ο ισχυρός δεύτερη ευκαιρία έναντι του ανίσχυρου, προκειμένου να βελτιωθεί και να είναι πιο βιώσιμο το παιχνίδι τους. Ενδεχομένως δεν γίνεται καλώς αντιληπτό ότι παρά τη σκοπιμότητα των διαφοροποιήσεων και των τυχαιοθετήσεων για καθένα από τα μέρη, αυτές δεν είναι ασκήσεις επί χάρτου και στην πράξη δεν είναι εξίσου εύκολη η πραγματοποίησή τους για χέρια και πόδια, ή γι άνδρες, γυναίκες και παιδιά κ.ο.κ..

Επιπλέον ορισμένα ζητήματα της θεωρίας παιγνίων είναι δύσκολα ακόμα κι επί χάρτου. Ήδη από τους J. von Neumann και Morgenstern (1944) και σύμφωνα με την σύσταση τους για το bridge κ.α. παίγνια, ακόμα και κάποια ανθρώπινα σύνολα, όπως τα «ζεύγη», μπορούν να εκληφθούν ως ενιαία. Ή ακόμη και σύμφωνα με τη σύσταση του J. Bernoulli. Δεν θεωρούνται ως δυο, αλλά ως ένας και μοναδικός «παίκτης» και ο όρος «παίκτης» είναι πολύ κοινός στη θεωρία παιγνίων. Γενικότερα στη θεωρία παιγνίων ο φορέας της επιλογής δεν είναι απαραιτήτως ένας άνθρωπος, καθώς υποτίθεται πως μπορεί π.χ. παίκτης να είναι και μια επιχείρηση. Στις σφαιρίσεις, ατομικές ή ομαδικές, μεταχειριζόμαστε τον ίδιο όρο για να υποδηλώσουμε τον έναν άνθρωπο μόνον, γι αυτό μεταχειριζόμαστε επί του παρόντος συχνά και τον όρο «μέρος», ως προς τις συνήθως διμερείς σφαιρίσεις, ατομικές ή ομαδικές. Έτσι κι αλλιώς εν προκειμένω δεν προβαίνουμε σε συστηματική κατηγοριοποίηση, οπότε αναφερόμαστε σε μέρη, με την πλέον απλή σημασία του όρου. Το ζήτημα του φύλου, τίθεται συχνά και στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων, μάλιστα ακόμα κι επί υποθετικών ζητημάτων που στην πραγματικότητα ενδέχεται να μην έχουν την πραγματική διάσταση που έχουν στις σφαιρίσεις. Αποτελεί ζήτημα άλλωστε και της θεωρίας παιγνίων ευρύτερα, καθώς κάποιοι συγγραφείς αναφέρονται στον ίδιο όρο ως αρσενικό κι άλλοι ως θηλυκό. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το βιβλίο «Bargaining and Markets» των πολύ διακεκριμένων παιγνιοθεωρητικών A. Rubinstein και M. Osborne, όπου δεν κατέληξαν σε συμφωνία ως προς το γένος του παίζοντος (Rubinstein & Osborne, 1990). Δεδομένου του περιορισμού της Αγγλικής (σ.σ όπως άλλωστε και της Ελληνικής κι άλλων γλωσσών) στη χρήση του αρσενικού, ή του θηλυκού άρθρου αναφορικά με τα άτομα, οι συγγραφείς διαφωνούσαν ως προς το αν και πως θα έπρεπε να χρησιμοποιούν το «ο», ή το «η». Ο A. Rubinstein ισχυρίζεται ότι θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν ένα «ουδέτερο» άρθρο και πρότεινε το «ο», υπό τη σημασία ότι με αυτό θα αναφέρονταν σε άνδρες και γυναίκες. Το κύριο επιχείρημά του είναι ότι παρά τη σπουδαιότητα της γλώσσας, η έμφαση σε αυτή και οι συνεχείς υπομνήσεις ως προς το ζήτημα «ο»/«η», θα αποσπούσαν την προσοχή των αναγνωστών από τα κύρια ζητήματα. Ο M. Osborne ισχυρίζεται ότι καμία γλώσσα δεν είναι «ουδέτερη» κι ότι οποιαδήποτε επιλογή του συγγραφέα επιδρά στον αναγνώστη, η δε επιλογή του «ο» προάγει σεξιστικές στάσεις, ανεξαρτήτως των προθέσεων του χρήστη. Το κύριο επιχείρημά του είναι πως ο συγγραφέας θα πρέπει να εκλέγει ότι είναι πιο πιθανό να έχει την πλέον επιθυμητή επίδραση στις απόψεις των αναγνωστών και το πώς να αλλάξεις τον κόσμο, σκοπός που θα εξυπηρετούταν καλύτερα με τη γενίκευση της χρήσης του «η». Πέραν όμως των γλωσσικών επιλογών κάθε συγγραφέως, έστω εντός της θεωρίας παιγνίων, έχουμε και το πλέον πραγματικό ζήτημα των σφαιρίσεων και πέραν του ευρύτερου και πολύ ενδιαφέροντος ζητήματος της αναγνώρισης φύλων, στις σφαιρίσεις διακρίνονται εμφατικά οι κατηγορίες ανδρών και γυναικών. Το γραμματικώς ουδέτερο γένος του λεκτικού όρου μέρος που προκρίναμε εν προκειμένω, δεν κρίνουμε ότι είναι δέον να εκληφθεί ως δηλωτικό της ουδέτερης, ή μη ουδέτερης γνώμης μας.

Κάθε άνθρωπος που ρίχνει μπαλιές σαν γυναίκα δεν αξίζει οπωσδήποτε λιγότερο από άλλον που ρίχνει σαν άνδρας, ούτε και του αναλογούν απαραιτήτως λιγότερες ευκαιρίες. Το να εμφανίζει εν προκειμένω λιγότερη ανάπτυξη ο μισός ανθρώπινος πληθυσμός, δεν σημαίνει ασφαλώς ούτε πως είναι λιγότερο εξελιγμένος, ούτε πως δεν έχει δυνατότητες ανάπτυξης, περισσότερες, ή λιγότερες από τον υποτιθέμενα αναπτυγμένο. Αν μάλιστα οι σφαιρίσεις γενικώς δεν είναι και τόσο αναπτυγμένες, τότε οι υποθέσεις περί περισσότερο και λιγότερο αναπτυγμένου πληθυσμού, καθίστανται εν προκειμένω ακόμα πιο σχετικές. Από κει και πέρα, για κάποιες ικανότητες όπως αυτές των κάθε λογής ρίψεων υπάρχουν πάρα πολλές σκοπιές. Μπορούμε για παράδειγμα να τις εξετάσουμε ως να εμπίπτουν στο υπόδειγμα δυαδικής οικονομίας του Lewis, όπου ο καθυστερημένος τομέας δεν ανταμείβεται αναλόγως της παραγωγικότητάς του για να είναι επιτυχής η διαδικασία συνολικής ανάπτυξης (Lewis, 1954). Είτε να δούμε αν έχουμε φαινόμενα γυάλινης οροφής, ή λαβυρίνθου ως προς την άνοδο των γυναικών, όπως ισχυρίζονται αρκετές γυναίκες κ.λπ. (Eagly, & Carli, 2007). Ακόμα κι αν είναι εκ φύσεως μεγάλες οι εν λόγω διαφορές, δεν δείχνουν να συνιστούν επαρκή δικαιολογητική βάση για τις ακόμα μεγαλύτερες αναπτυξιακές διαφορές που παρατηρούνται από οιαδήποτε σκοπιά.

3.5 Η Ισορροπία Nash, το Hex και το Tic Tac Toe

Η ισορροπία Nash αποτελεί τρόπο επίλυσης μη συνεργατικών παιγνίων, στα οποία συμμετέχουν δύο οι περισσότεροι παίκτες. Προϋποτίθεται ότι ο κάθε παίκτης ενεργεί ως να γνωρίζει τις στρατηγικές ισορροπίας που μπορεί να ακολουθήσουν οι υπόλοιποι και ουδείς δεν έχει να επωφεληθεί αλλάζοντας τη δική του στρατηγική μόνον. Εφόσον όλοι οι παίκτες επιλέξουν τις στρατηγικές τους και κατά κάποιο τρόπο δεσμεύονται ότι δεν θα αλλάξουν, τότε το σύνολο το στρατηγικών αυτών ονομάζεται σημείο σορροπίας κατά Nash. Σε κάθε παίγνιο με πεπερασμένο πλήθος παικτών και ενεργειών υποτίθεται με βάση το ομώνυμο θεώρημα ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας. Οι παίκτες σκέφτονται ορθολογικά τι μπορεί να διαλέξουν οι συμπαίκτες-αντίπαλοί τους, προσπαθούν να καταλάβουν τη συμπεριφορά τους και σύμφωνα με αυτό επιλέγουν την στρατηγική τους. Όταν η στρατηγική ενός παίκτη αποτελεί την βέλτιστη απόκριση στην στρατηγική του ενός η περισσότερων άλλων, αυτός ο συνδυασμός στρατηγικών αποτελεί ισορροπία Nash. Στην περίπτωση των παιγνίων σταθερού αθροίσματος, έτσι δηλαδή όπως θέσαμε προηγουμένως το παράδειγμα της σφαιριστικής ρίψης, το σημείο της ισορροπίας Nash συμπίπτει με το σημείο ισορροπίας εκ των στρατηγικών minimax και maximin του V. Newmann. (Σχήμα 15). Η πρώτη επεκτείνεται όμως και στα ευρύτερα παίγνια κι ως εκ τούτου τυγχάνει ευρείας αναγνώρισης. Η πιο ευρέως συζητούμενη εκδοχή της είναι αυτής της ισορροπίας των ανάμικτων στρατηγικών και ιδίως στα 2Χ2 παίγνια μη σταθερού αθροίσματος όπως απεικονίζεται σε κάποιο «ενδιάμεσο» σημείο του σχήματος που έχει το εκάστοτε παίγνιο. Αντιδιαστέλλεται μάλιστα από τα αντίστοιχα σημεία ισορροπίας Nash αμιγών στρατηγικών, τα οποία κατά περίπτωση δηλαδή, ενδέχεται και να μην υπάρχουν.



Σχήμα 15.

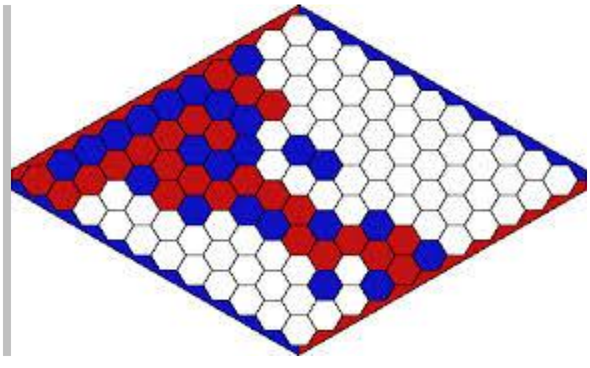
Δεν ήταν η απάντησή του Nash καθαυτή που συνέτεινε στην εξέλιξη της θεωρίας παιγνίων. Ήταν η ιδέα του ότι η έννοια του σημείου ευσταθούς ισορροπίας αποτελεί γενίκευση της έννοιας του κοινού επίπεδου ασφαλείας των δυο παικτών, όταν περνάμε στα παίγνια μη-μηδενικού αθροίσματος από τα μηδενικού αθροίσματος. Παρά τις αρχικές επιφυλάξεις, η ιδέα του Nash κατόπιν αποδείχτηκε ιδιαιτέρως γόνιμη. Η επιτυχία της δεν οφείλεται στις μαθηματικές ιδιότητες του σημείου ευσταθούς ισορροπίας, που *«δημιουργούν αρκετές αμφιβολίες (τουλάχιστον σε μαθηματικούς), αλλά στην εξήγηση που αυτό κατόρθωσε να δώσει σε πραγματικά φαινόμενα που μελετούν επιστήμες όπως τα οικονομικά, η διοίκηση επιχειρήσεων, οι πολιτικές επιστήμες, η βιολογία κ.λπ.»* (Μηλολιδάκης, 2009:243-244).

Υπάρχουν συστήματα που είναι τόσο πολύπλοκα, ώστε μπορεί να απαιτείται τεράστιος χρόνος ώσπου να βρεθούν σε κατάσταση ισορροπίας (Daskalakis, 2008). Επιπλέον εφόσον προκύπτουν πολλές ισορροπίες Nash, όπως αναφέρεται κι αλλού προκύπτει πρόβλημα απροσδιοριστίας κι απαιτείται διαλογή τους, γεγονός που απασχόλησε πολλούς επιστήμονες (εκλεπτύνσεις της έννοιας). Η ισορροπία Nash αναζωογόνησε τη θεωρία παιγνίων καθώς θεωρείται πως λαμβάνει υπόψη και τις αντιλήψεις των άλλων, τις οποίες αγνοούσε η έως τότε Θεωρία Παιγνίων του J. Von Neumann. Μπορεί εύλογα κανείς να σκεφθεί ότι αυτή προέκυψε από κάποια εμβάθυνση στα ανθρώπινα κίνητρα, όμως κάτι τέτοιο είναι μάλλον εσφαλμένο.

Η επινόηση της ισορροπίας Nash συνδέεται εν πολλοίς με την τοπολογία, ένα θεώρημα σταθερού σημείου πιο συγκεκριμένα, καθώς και την επινόηση ενός παιγνίου, του Hex. Ότι επεκτείνεται και στα παίγνια μη σταθερού αθροίσματος και μάλιστα οσωνδήποτε παικτών, δεν σήμανε όμως ότι οι άλλοι εκλαμβάνονται ως συμπαίκτες, φίλα προσκείμενοι «σύμμαχοι». Αντιθέτως ίσως εκλαμβάνονται κάπως περισσότερο μάλλον ως αντίπαλοι. Ο J. Nash απάντησε κάποιο ερώτημα ύπαρξης σημείου ευσταθούς ισορροπίας σε οποιοδήποτε πεπερασμένο παιχνίδι n παικτών.

Το Hex επινοήθηκε από το Δανό μαθηματικό, εφευρέτη και ποιητή P. Hein καθώς συλλογιζόταν πάνω στο διάσημο τοπολογικό θεώρημα των 4 χρωμάτων, σύμφωνα με το οποίο αυτός ο αριθμός χρωμάτων αρκεί για να χρωματιστεί οποιοσδήποτε χάρτης έτσι ώστε να μην εικονίζονται με το ίδιο χρώμα οι χώρες που έχουν κοινό σύνορο (Gardner, 1975). Πρόκειται για πρόβλημα που αναφέρεται ήδη από το Moebius to 1840 και που βρέθηκε η λύση του το 1976, οπότε κι αποδείχθηκε.

Στο Hex οι δυο παίκτες παίζουν εναλλάξ, κι επιτρέπεται να σημειώσουν κάθε μη σημειωμένο κελί. Τα κελιά είναι εξάγωνα (εξ ου και το όνομα), ή άλλα πολύγωνα, που ο αριθμός τους μπορεί να ποικίλει. Τα 11 σε κάθε πλευρά όπως στο παρακάτω σχήμα, αποτελούν μια συνήθη απεικόνιση (Εικόνα 14). Οι δυο απέναντι πλευρές, εν προκειμένω αποδίδονται στον ένα παίκτη, που μπορεί να χρωματίζεται με μπλε και να συμβολίζεται με X, οι άλλες δυο στον άλλον που μπορεί να χρωματίζεται με κόκκινο και συμβολίζεται με O, όπως δηλαδή στο τυπικό tic-tac-toe (η τρίλιζα στα ελληνικά).



Εικόνα 14. Ενδεικτική τοποθέτηση στο Hex (Πηγή: http://www.mathpuzzle.se/hex.htm)

Σε αυτό το παίγνιο δεν υπάρχει ισοπαλία. Νικά ή όποιος παίζει πρώτος (Χ), ή όποιος παίζει δεύτερος (Ο). Όποιος καταφέρει να σημειώσει μια γραμμή αποτελούμενη από συνδεόμενα σημεία που συνενώνουν τις δυο αντικρυστές πλευρές που του αποδίδονται και που συμβολίζονται επίσης ως Χ1 και Χ2, κι αντιστοίχως ως Ο1 και Ο2.

Ως προς τη συλλογιστική της ισορροπίας Nash, με βάση και το πώς προέκυψε, μπορεί να μας φανεί χρήσιμο το tic tac toe, πασίγνωστο απλοϊκό παίγνιο, στο οποίο η ισοπαλία των δυο παικτών είναι εγγυημένο αποτέλεσμα για όποιους έχουν «μάθει» να παίζουν. Αν αντιστραφεί ο σκοπός του παιγνίου, καταστεί δηλαδή σκοπός η αποφυγή συμπλήρωσης τριάδας, τότε εξασφαλισμένο αποτέλεσμα η νίκη του ενός. Προτιμάμε τον όρο reverse tic tac toe, αντί του όρου αντίστροφη τρίλιζα, καθώς αυτή η εκδοχή παιχνιδιού δεν παίζεται συνήθως, ως τρίλιζα τουλάχιστον. Η εξασφαλισμένη ισοπαλία δεν φαίνεται πολύ ελκυστική, αντίθετα από την εξασφαλισμένη νίκη, που φαίνεται πως ελκύει πολλούς. Είναι όμως γενικότερα ενδιαφέρουσα, μα και προβληματική, η εξασφάλιση του ενός, ή του άλλου αποτελέσματος. Τα tic tac toe που παίζονται επί τετραγώνων έχουν σημαντικές ομοιότητες με τα κάπως πιο περίπλοκα Hex. Ο C. Shannon, σε μια κατηγοριοποίηση των παιγνίων σε 3 βαθμίδες, με κριτήριο την απλοϊκότητα τους, κατέτασσε μεταξύ άλλων το tic tac toe στην κατώτερη και το hex στη μεσαία βαθμίδα (Shannon,1993). Το Hex, που παίζεται συνήθως επί εξαγώνων, είτε άλλων πολυγώνων, δεν μπορεί να καταλήξει σε ισοπαλία. Αυτή η απόδειξη έγινε από το J. Nash και έχει ιδιαίτερη σχέση με το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer, που αποτελεί κλειδί για τη μετέπειτα απόδειξη ύπαρξης των ισορροπιών Nash. Αυτές αποκτούν σημασία στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων και στις σφαιρίσεις εν προκειμένω. Πιο συγκεκριμένα, η νίκη του ενός ή του άλλου στο Hex, είναι ως πρόταση ισοδύναμη με το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer (Gale, 1979). Το θεώρημα δεν ορίζει τρόπο προσδιορισμού του σταθερού σημείου.

Ο J. Nash έβρισκε ενδιαφέρον στη σύνδεση της τοπολογίας με τη θεωρία παιγνίων δια μέσου του hex κι όχι στο να παίζει επί τούτου το συγκεκριμένο παίγνιο (Hayward & Rijswijck, 2006).

Σταθερό σημείο (fixpoint) μιας συνάρτησης, ονομάζεται κάποιο σημείο x για το οποίο ισχύει f(x)=x

Για παράδειγμα, αν έχουμε τη συνάρτηση f(x) = x3 – 6,

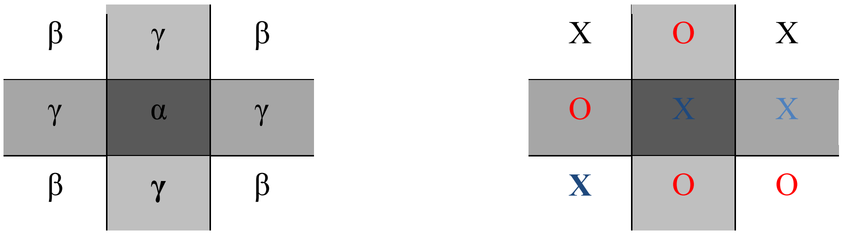
Τότε το 2 είναι σταθερό σημείο της f, επειδή f(2) = 2.

Υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουνε κανένα σταθερό σημείο όπως π.χ. η συνάρτηση f(x) = x + 1

Το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer δηλώνει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση (f από τη μοναδιαία σφαίρα Dn στον εαυτό της , f : D n → D n , έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει ένα x με f(x)=x.

Στο θεώρημα αυτό το n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός και η μοναδιαία σφαίρα είναι το σύνολο των σημείων του Ευκλείδιου χώρου Rn των οποίων η απόσταση είναι το πολύ 1 από ένα ορισμένο κέντρο.

Εξετάζουμε έτσι πολύ συνοπτικά την ανάλυση του reverse tic tac toe, το παίγνιο όπου η νίκη είναι εγγυημένη για τον έναν παίκτη, όπως και στο αντίστροφο hex. Στο reverse tic tac toe είναι εξασφαλισμένη για εκείνον που παίζει 2ος. Στο hex επίσης είναι εξασφαλισμένη η νίκη για εκείνον που παίζει 2ος, όταν διεξάγεται με περιττό αριθμό κελιών σε κάθε πλευρά. Είναι επίσης εξασφαλισμένη για εκείνον που παίζει 1ος, όταν το hex παίζεται σε άρτιο αριθμό κελιών. Αυτές οι λεγόμενες αντίστροφες εκδοχές, είναι μάλλον πιο διαφωτιστικές για το πώς οι κατά κάποια θεώρηση τοπολογικές, είτε κατ' επέκταση γεωμετρικές ιδιότητες, μεταφέρονται ως πλεονέκτημα, ή προνόμιο επί της σειράς με την οποία παίζουν οι παίκτες. Μεταφέρονται βεβαίως στην περίπτωση των σφαιρίσεων και δεδομένου ότι αυτές διεξάγονται από ανθρώπους κι όχι πιόνια, ή γραφικά σύμβολα, καθίσταται σημαντική η καλή κατανόησή τους.



Σχήμα 16.

Τα 9 τετράγωνα κελιά (cells), ή πλακίδια (tiles) της τρίλιζας μπορούμε να τα διακρίνουμε σε 3 κατηγορίες και να τα εικονίσουμε με διαφορετικά χρώματα (Σχήμα 16):

α) κέντρο, όπου βρίσκεται ένα και μοναδικό κελί, το οποίο μπορεί να συνδυαστεί σε τριάδα με οποιοδήποτε από τα 8 υπόλοιπα κελιά. (γκρι σκούρο)

β) περιφέρεια γωνία, όπου βρίσκονται άλλα 4 κελιά, τα οποία. μπορούν να συνδυαστούν σε τριάδα με 6 από τα υπόλοιπα κελιά (γκρι ανοιχτό)

γ) περιφέρεια μέση, όπου βρίσκονται 4 κελιά, τα οποία μπορούν να συνδυαστούν σε τριάδα με 4 από τα υπόλοιπα κελιά (λευκό)

Εφόσον αποδεχθούμε ως σκοπό του παιγνίου τον εξαναγκασμό του άλλου στη συμπλήρωση τριάδας, αντιλαμβανόμαστε εύκολα ότι ενδείκνυται καταρχήν η αποφυγή του κεντρικού κελιού, το οποίο συνδέεται με κάθε άλλο. Δεδομένου ότι οι παίκτες παίζουν μια φορά ο ένας και μια ο άλλος, το κεντρικό κελί καταλήγει τελευταία κι αναγκαστική επιλογή εκείνου που παίζει πρώτος. Εν προκειμένω ο πρώτος είναι «παγιδευμένος», εφόσον είναι αναγκασμένος να παίξει σε αυτό το κελί και χάνει το πολύ στην τελευταία 9η κίνηση, τη δική του 5η κίνηση με άλλα λόγια (Αν βέβαια δεχθούμε πως ο άλλος παίκτης, ο συμπαίκτης – αντίπαλος, δεν του επιφυλάσσει κάποιο άλλο αποτέλεσμα κι επίσης ότι δεν έχει αντιληφθεί ο ίδιος την παγίδα).

Στις παραπάνω αντίστροφες εκδοχές προκύπτουν τα προαναφερόμενα αποτελέσματα, στην κανονική τρίλιζα είναι εξασφαλισμένο ότι δεν μπορεί κάποιος να νικήσει, αν ο αντίπαλος του «ξέρει» να παίζει. Υποθέτουμε δε ισοπαλία όταν κανείς δεν επιτυγχάνει στο σκοπό του, παρότι ο ένας τοποθετεί περισσότερα σημεία. Στο «κανονικό» hex είναι εγγυημένο ότι μπορεί να νικήσει ο πρώτος κι αυτό απέδειξε ο Nash χρησιμοποιώντας τη λεγόμενη «κλοπή στρατηγικής». Η κλοπή στρατηγικής (strategy stealing argument) την οποία χρησιμοποίησε ο J. Nash στο hex υπό την κανονική εκδοχή, περιγράφεται δια μέσου της κανονικής τρίλιζας ως εξής:

Υποθέτουμε έστω ότι ο δεύτερος παίκτης μπορεί να χρησιμοποιήσει μια στρατηγική S που του εγγυάται τη νίκη. Ο πρώτος παίκτης τοποθετεί ένα X σε μια τυχαία θέση, και ο δεύτερος παίκτης απαντά στη συνέχεια με την τοποθέτηση ενός O σύμφωνα με την S. Αν όμως αγνοήσουν την πρώτη τυχαία θέση που τοποθετήθηκε το X, ο πρώτος παίκτης συναντά την τρόπον τινά ίδια κατάσταση που ο δεύτερος παίκτης συνάντησε στην πρώτη του κίνηση, καθώς βρίσκει ένα σημείο του αντίπαλου στον πίνακα. Ο πρώτος παίκτης μπορεί επομένως να κάνει τις κινήσεις του σύμφωνα με τη (λογική της) S. Εκτός αν η S επιτάσσει την τοποθέτηση σημείου σε κελί που υπάρχει ήδη κάποιο σημείο, οπότε όμως μπορεί απλώς να τοποθετήσει το σημείο του X, σε κάποια άλλη τυχαία θέση στον πίνακα. Το αποτέλεσμα θα είναι ότι ένα σημείο X βρίσκεται στη θέση που απαιτείται από τη S, ενώ κι ένα άλλο X βρίσκεται σε μία τυχαία θέση και γίνεται αυτό το σημείο που αγνοείται, αφήνοντας την κατάσταση όπως και πριν. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο, η S εγγυάται εξ υποθέσεως την παραγωγή μιας νικηφόρου θέσης, με τα επιπλέον X να αγνοούνται δίχως καμία συνέπεια (βάσει του θεωρήματος του Zermello που δηλώνει ότι κάθε πεπερασμένο παίγνιο τέλειας πληροφόρησης δυο παικτών που παίζουν εκ περιτροπής, εφόσον δεν λήγει σε ισοπαλία, τότε ένας εκ των δυο πρέπει να έχει μια νικηφόρο στρατηγική). Αλλά τότε ο δεύτερος παίκτης έχει χάσει, σε αντίθεση με την υπόθεση ότι είχε μια εγγυημένη στρατηγική νίκης. Μια τέτοια στρατηγική νίκης για τον δεύτερο παίκτη, ως εκ τούτου, δεν υπάρχει, και άρα συμπεραίνεται πως η έκβαση του tic tac toe είναι, είτε μια αναγκαστική νίκη για τον πρώτο παίκτη, ή αλλιώς ότι λογαριάζεται ως ισοπαλία. Η απλή περαιτέρω ανάλυση του κανονικού tic-tac-toe δείχνει ότι είναι το δεύτερο.

Η ανάλυση στο κανονικό hex οδηγεί στο συμπέρασμα ότι εκεί η κλοπή στρατηγικής οδηγεί στη σίγουρη νίκη για τον πρώτο παίκτη. Η κλοπή στρατηγικής σε αυτά τα παιχνίδια, είναι «να υποθέσεις τι θα μπορούσε να κάνει ή τι θα έκανε ο άλλος για να σε νικήσει αν ήταν στη θέση σου». Σε κάποιους ιστιοπλοϊκούς αγώνες είναι επίσης γνωστό ότι ο προπορευόμενος συχνά κοιτάζει να κάνει όποιες κινήσεις κάνει ο δεύτερος, εφόσον βρίσκονται στις ίδιες λίγο πολύ συνθήκες, κλοπή στρατηγικής με άλλα λόγια. Έτσι στο reverse tic-tac-toe μπορεί κανείς να προεξοφλήσει ότι όποιος παίζει 1^{ος} είναι σαν να έχει παίξει ήδη στο κέντρο και σαν να έχει χάσει, ή σαν να έχει πέσει σε παγίδα προτού ξεκινήσει, ενώ στο Hex μπορεί να προεξοφληθεί κάτι αντίστοιχο για όποιον παίζει 2^{ος}.

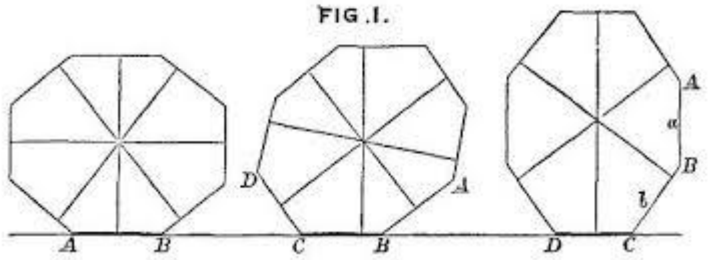
Στο σκάκι έχει καθώς φαίνεται μικρό πλεονέκτημα – προνόμιο όποιος παίζει πρώτος μα δεν προεξοφλείται τίποτα (τουλάχιστον προς το παρόν). Αν κάποιος βρει κάποιο τρόπο εξασφάλισης του ενός ή του άλλου αποτελέσματος (νίκης ή ισοπαλίας) στο σκάκι, θα αποσπάσει το θαυμασμό όλων, όμως το παιχνίδι πιθανώς θα χαλάσει, προσωρινά έστω. Αν κάποια στιγμή αποδειχθεί ότι μπορεί να προεξοφληθεί η νίκη, ή η ισοπαλία, είναι εύλογο να υποθέσουμε πως αν είναι εφικτό με κάποια προτεινόμενη αλλαγή να μην προεξοφλείται, αυτή θα γίνει αποδεκτή. Αν κάποιος άλλος, ή πιθανώς ο ίδιος προτείνει εν συνεχεία κάποια αλλαγή στο πώς να κινείται κάποιος τύπος πιονιού, ώστε να μην προεξοφλείται το αποτέλεσμα, τότε υποθέτουμε πως θα «σώσει» το παιχνίδι που προϋποθέσαμε ότι θα έχει «χαλάσει».

Ένα ζήτημα που προκύπτει άμεσα, είναι κατά πόσον είναι ενδιαφέρον κάθε παίγνιο στο οποίο κάποιος μπορεί εγγυημένα να είναι ο τελικός νικητής και να εναπόκειται στον ίδιο να χαρίσει κατά το δοκούν την ισοπαλία ή και τη νίκη σε άλλον.

Αυτό το ζήτημα δεν τίθεται όμως στην παραπάνω αντίστροφη τρίλιζα μόνον, που για κάποιον που την ξέρει μπορεί να είναι ανιαρή, όσο επίσης και η κανονική, μα διέπει καθώς φαίνεται και πάρα πολύ μεγάλο μέρος της θεωρίας παιγνίων. Ανιαρό όμως μπορεί να είναι και το σκάκι, που κάποιοι το βρίσκουν συναρπαστικό, είτε παίζουν έναντι άλλου ανθρώπου - συμπαίκτη κι αντιπάλου, είτε μόνοι τους, είτε έναντι ενός προγράμματος στον Η/Υ. Όπως μεταξύ άλλων σημειώνει κι ο C. Shannon, κανονικά σκεφθόμαστε τους Η/Υ ως ειδήμονες σε ότι εμπεριέχει μακρόσυρτους υπολογισμούς και φτωχούς στη γενίκευση αξιολογικών κρίσεων, προσθέτοντας ότι παραδόξως δεν συνέβη ακριβώς έτσι στο hex (Shannon, 1993).

Οι σύγχρονες σφαιρίσεις είναι ιδιαίτερα συνδεδεμένες με αξιολογικές κρίσεις και στη σημερινή πραγματικότητα δεν υφίσταται λόγου χάριν ούτε ως δείγμα μια τέτοια δημοφιλής δράση στην οποία να μη φέρονται ως πιο αποτελεσματικοί οι άνδρες. Βεβαίως είναι ποικιλοτρόπως εφικτό σε διάφορες περιπτώσεις να είναι υπό κοινούς κανονισμούς εξίσου αποτελεσματικές και να συμπρωταγωνιστούν οι γυναίκες. Είναι επίσης εφικτό το να είναι συγκριτικά πιο αποτελεσματικές και να διαδραματίζουν δευτερεύοντα ρόλο οι άνδρες, δίχως να ελαττωθεί το συγκριτικά μεγαλύτερο σωματικό βάρος και ύψος τους. Αργότερα θα ασχοληθούμε εκτενέστερα με την εξέταση της δικαιολογητικής βάσης διαφόρων προνομίων, ή της προνομιακής βάσης διαφόρων δικαιολογιών, προς υποστήριξη ή αποτροπή δράσεων κι ενεργειών.

Εντέλει, μια ακόμη ενδιαφέρουσα συσχέτιση μπορεί εν προκειμένω να γίνει και με το λεγόμενο πολύεδρο του Galton (1892) (Σχήμα 17) .



Σχήμα 17.

Στην εξελικτική βιολογία, το πολύεδρο του Galton είναι μια αλληγορία που επινοήθηκε από τον Francis Galton για να απεικονίσει την αλληλεπίδραση μεταξύ της τύχης (στο πλαίσιο της φυσικής επιλογής που είχε θέσει ο ξάδελφός του Δαρβίνος) και του ντετερμινισμού (ή αλλιώς των εσωτερικών περιορισμών) κατά την εξέλιξη των οργανισμών. Ο S. Gould επανέφερε αυτό τον όρο στο προσκήνιο για να φωτίσει το ζήτημα των εσωτερικών περιορισμών κατά τη μελέτη της συγγένειας διαφορετικών οργανισμών, όπως αυτή αντικατοπτρίζεται στην εξελικτική ιστορία τους (Gould, 1996).

Το ζήτημα τίθεται ως αν οι οργανισμοί προσομοιάζουν στις σφαίρες που μπορούν να κινηθούν προς όλες τις διευθύνσεις του επιπέδου (ή αλλιώς να εξελιχθούν προς όλες τις διευθύνσεις δίχως περιορισμούς). Κατ' αντιδιαστολή, οι όψεις του πολυέδρου του Galton αναπαριστούν τον περιορισμό σε κάποιο αριθμό κατευθύνσεων, στις οποίες μπορεί να εξελιχθεί κάποιος οργανισμός. Πέραν του να μεταχειριστούμε και πάλι τις σφαιρίσεις ως παραδείγματα όπως συνήθιζε ο S. Gould, η συσχέτιση με τη βιολογία παρουσιάζει επιπλέον ενδιαφέρον και για τις σφαιρίσεις ως sport.

3.6 Παίγνια συντονισμού – Στρατηγικές και ισορροπίες όταν δεν υφίσταται έκδηλος ανταγωνισμός

Η βασική διάκριση των παιγνίων σταθερού αθροίσματος είναι ως προς το αν είναι τέλειας, ή ατελούς πληροφόρησης. Σε κάθε περίπτωση, τέθηκαν καταρχήν στα κελιά ενός πίνακα 2Χ2, αυτά τα παίγνια σταθερού αθροίσματος, τα οποία εξ ορισμού δεν είναι κοινωφελή. Εφόσον προσθέτοντας μονάδες ωφελείας στον έναν, αφαιρούνται ισόποσες μονάδες από τον άλλον, όλοι οι πίνακες του παραπάνω τύπου, είναι αρκετά παραπλήσιοι, ακόμη κι αν διαφέρουν ως προς τις τιμές τους. Αναγνωρίζοντας ότι δεν είναι όλα τα παίγνια τέτοια, εντάσσεται κατόπιν στα τέσσερα έστω κελιά, κάθε δυνατός αλγεβρικός είτε αριθμητικός συνδυασμός. Με την πάροδο του χρόνου αφενός πολλοί από αυτούς αποκτούν τυπικό σενάριο κι όνομα. Ακόμα και κάποιος που δεν γνωρίζει την θεωρία παιγνίων αν τοποθετήσει κάποιες τιμές στα κελιά του παραπάνω πίνακα, αυτές θα εμπίπτουν στον τύπο κάποιου παιγνίου, που να παραπέμπει σε κάποιο γνωστό τυπικό σενάριο και κατ' επέκταση σε συγκεκριμένο όνομα παιγνίου. Κάτι τέτοιο δεν σημαίνει όμως ότι αυτό το παίγνιο αντιστοιχεί στην κατάσταση αλληλεπίδρασης που ενδεχομένως έχει στο νου του.

Από τα αρχικά παίγνια σταθερού αθροίσματος γίνεται κατόπιν ένα πέρασμα στα παίγνια μη σταθερού αθροίσματος, που τέθηκαν επίσης από τους Von Neumann & Morgenstern (1944), οι οποίοι σκόπευαν για την επίλυσή τους άλλη μέθοδο, από εκείνη που κατέστη η πλέον δημοφιλής κατόπιν, εκείνη του J. Nash. Δίχως τη συνεισφορά του, η θεωρία παιγνίων θα αντιμετώπιζε προβλήματα βιωσιμότητας (Βαρουφάκης, 2007). Η συνεισφορά του βεβαίως δεν μείωσε της αξία της προηγηθείσας ανάλυσης για τα παίγνια σταθερού αθροίσματος, ίσα – ίσα που δεν μεταχειρίστηκε ως πολύ διαφορετικά και τα μη σταθερού αθροίσματος. Είναι ευνόητο ότι η παρουσίαση των παιγνίων όλων των τύπων και των σεναρίων τους, καθιστά μακροσκελή οποιαδήποτε εργασία αφενός, αφετέρου όμως ενδέχεται να μην συνεισφέρει κάτι ως προς κάποιο πιο συγκεκριμένο ζήτημα. Για το λόγο αυτό, επί του παρόντος θα προσπαθήσουμε να είμαστε πιο συγκεκριμένοι ώστε να περιοριστούμε και κάπως να τα περιορίσουμε.

Τα παίγνια συντονισμού είναι μια βασική κατηγορία των παραπάνω παιγνίων. Ως παίγνια συντονισμού στην κλασσική θεωρία παιγνίων εννοούμε αυτά όπου τα συμμετέχοντα μέρη μπορούν να επιτύχουν μεγαλύτερη ωφέλεια αν συντονίσουν τις στρατηγικές τους. Οι ανταγωνιστικές σφαιρίσεις που χρησιμοποιούνται τόσο πολύ παραδειγματικά για την υποδήλωση του ανταγωνισμού, στην πραγματικότητα ενέχουν πολύ μεγάλο βαθμό συντονισμού, τον οποίο μπορούμε να αναγνωρίσουμε σε πάρα πολλές εκφάνσεις τους. Οι σφαιρίσεις ως ανταγωνιστικά παίγνια, απαιτούν είτε προϋποθέτουν να διεξαχθούν προηγουμένως, ή συγχρόνως κάποια παίγνια συντονισμού. Αυτά διεξάγονται ανάμεσα σε σφαιριστές, συλλόγους, εθνικές - διεθνείς ομοσπονδίες, επιχειρηματικούς - οικονομικούς φορείς κ.λπ.. Τα συμμετέχοντα μέρη σε ένα έστω διμερές παίγνιο συντονισμού, μπορεί να θέλουν να πείσουν τους συμπαίκτες τους, ή γενικώς να επιδιώκουν

α) να συνεργαστούν σε μια ισορροπία κοινής προτίμησης (παίγνιο διασφάλισης),

β) να επιλέξουν κάτι που να οδηγεί στο προτιμώμενο αποτέλεσμα του ενός (κοτόπουλο).

γ) να παίξουν κάποια προοπτική πέραν από τη στρατηγική ισορροπίας (δίλημμα του κρατουμένου), ή

δ) να συνεργαστούν προς κάποια ισορροπία που επιθυμούν αμφότερα, μα όχι εξίσου (μάχη των δύο φύλων).

Ο συντονισμός μπορεί να επιτευχθεί στο παίγνιο διασφάλισης, στο κοτόπουλο, στη μάχη των φύλων, εφόσον κάποιο μέρος κινηθεί πρώτο και δεσμευθεί σε συγκεκριμένη επιλογή, ώστε το άλλο να αντιληφθεί την επιλογή του κι αντιδράσει κατάλληλα. Η παραπάνω στρατηγική δεν λειτουργεί στο δίλημμα του κρατουμένου, όπου αν το ένα μέρος επιλέξει το κοινό συμφέρον, είναι εξ ορισμού συμφέρον για το άλλο να επιλέξει το αντίθετο. Έτσι για παράδειγμα στις αθλητικές ομοσπονδίες που λειτουργούν σαν καρτέλ, προκύπτουν ιδιαίτερες συνέπειες στο μεταξύ τους ανταγωνισμό. Το παίγνιο της διασφάλισης δεν ενέχει σχεδόν καθόλου ανταγωνισμό, θεωρητικά τουλάχιστον. Το κοτόπουλο και ο πόλεμος των φύλων έχουν στοιχεία ανταγωνισμού και τυπικής διαπραγμάτευσης.

<table>
<tr>
<td>Σενάριο Prisoner's Dilemma -
Δίλημμα του κρατουμένου

Δύο κατηγορούμενοι είναι σε χωριστά κελιά, όπου ανακρίνονται κι ο καθένας έρχεται αντιμέτωπος με ένα δίλημμα. Εάν και οι δύο ομολογήσουν, παραμένουν αμφότεροι στη φυλακή για έστω 2 χρόνια. Εάν αμφότεροι αρνηθούν, θα παραμείνουν στη φυλακή 1 μόνο χρόνο, για κάποιο μικρότερο παράπτωμα που τους προσάπτεται. Εάν συμβεί να ομολογήσει μόνον ο ένας, θα αφεθεί ελεύθερος ο ίδιος κι ο άλλος θα μείνει 5 χρόνια στη φυλακή.

Περιγραφή
Κάθε παίκτης έχει μια κυρίαρχη στρατηγική. Το μοναδικό αποτέλεσμα της ισορροπίας εντέλει κυριαρχείται κατά Pareto από κάποιο άλλο αποτέλεσμα στο οποίο κάθε παίκτης παίζει μια κυριαρχούμενη δική του στρατηγική.</td>
<td>Σενάριο Game of Chicken -
Το κοτόπουλο

Δυο οδηγοί αυτοκινήτων κινούνται με ταχύτητα ο ένας καταπάνω στον άλλο, κι αν κανείς δεν στρίψει η σύγκρουση διαφαίνεται ως αναπόφευκτη και θα είναι μοιραία γι αμφότερους. Όποιος στρίψει πρώτος για ν' αποφύγει τη σύγκρουση, διασώζει τη ζωή τη δική του αφενός κι αφετέρου διασώζει επίσης τη ζωή του εμμένοντος άλλου, μα αντιμετωπίζει όμως έπειτα την περιφρόνηση του, καθώς επιπλέον και τη χλεύη του όποιου περίγυρου.

Περιγραφή
Υπάρχουν δυο ισορροπίες αμιγών στρατηγικών. Μια διαφορετική στρατηγική ισορροπίας προτιμάται από κάθε παίκτη. Και οι δυο ισορροπίες είναι βέλτιστες κατά Pareto. Υπάρχει και μια ισορροπία μικτών στρατηγικών.</td>
<td>Σενάριο Stag Hunt -
Το κυνήγι του ελαφιού

Μια παρέα έστω δυο κυνηγών μπορεί είτε να κυνηγήσει ένα ελάφι που είναι ο πλέον προτιμητέος στόχος της, είτε να κυνηγήσει ένα λαγό. Αν οι κυνηγοί πάνε για το ελάφι θα το πιάσουν σίγουρα και τότε θα μοιραστούν πολύ κρέας, ενώ αν έστω κι ένας ασχοληθεί με το κυνήγι του λαγού, τότε καθένας θα πιάσει από έναν λαγό. Καθένας τους όμως προτιμάει οπωσδήποτε το μερίδιο του ελαφιού, από ολόκληρο το λαγό.

Περιγραφή
Υπάρχουν δυο ισορροπίες αμιγών στρατηγικών, που είναι και κατά Pareto βέλτιστες. Και οι δυο παίκτες προτιμούν τη μια ισορροπία από την άλλη. Η μια είναι κυρίαρχη ως προς τις αποδόσεις, η άλλη ως προς το ρίσκο.</td>
</tr>
<tr>
<td>Παράδειγμα
<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Κρατούμενος 2</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Ο</td><td>Α</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κρατούμενος 1</td><td>Ο</td><td>2,2</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Α</td><td>5,0</td><td>1,1</td></tr>
</table></td>
<td>Παράδειγμα
<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Οδηγός 2</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Ε</td><td>Σ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Οδηγός 1</td><td>Ε</td><td>-10,-10</td><td>1,-1</td></tr>
<tr><td>Σ</td><td>-1,1</td><td>0,0</td></tr>
</table></td>
<td>Παράδειγμα
<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Κυνηγός 2</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Λ</td><td>Ε</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κυνηγός 1</td><td>Λ</td><td>10,10</td><td>-50,0</td></tr>
<tr><td>Ε</td><td>0,-50</td><td>0,0</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>Γενική Φόρμα
<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Παίκτης 2</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Α</td><td>Δ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Παίκτης 1</td><td>Π</td><td>$a_{11}, β_{11}$</td><td>$a_{12}, β_{12}$</td></tr>
<tr><td>Κ</td><td>$a_{21}, β_{21}$</td><td>$a_{22}, β_{22}$</td></tr>
</table>
Όταν ισχύουν οι συνθήκες:
$a_{21} > a_{11} > a_{22} > a_{12}$
$β_{12} > β_{11} > β_{22} > β_{21}$</td>
<td>Γενική Φόρμα
<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Παίκτης 2</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Α</td><td>Δ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Παίκτης 1</td><td>Π</td><td>$a_{11}, β_{11}$</td><td>$a_{12}, β_{12}$</td></tr>
<tr><td>Κ</td><td>$a_{21}, β_{21}$</td><td>$a_{22}, β_{22}$</td></tr>
</table>
Όταν ισχύουν οι συνθήκες:
$a_{12} > a_{22} > a_{21} > a_{11}$
$β_{21} > β_{22} > β_{12} > β_{11}$</td>
<td>Γενική Φόρμα
<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Παίκτης 2</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Α</td><td>Δ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Παίκτης 1</td><td>Π</td><td>$a_{11}, β_{11}$</td><td>$a_{12}, β_{12}$</td></tr>
<tr><td>Κ</td><td>$a_{21}, β_{21}$</td><td>$a_{22}, β_{22}$</td></tr>
</table>
Όταν ισχύουν οι συνθήκες:
$a_{11} > a_{21} \geq a_{22} > a_{12}$
$β_{11} > β_{12} \geq β_{22} > β_{21}$</td>
</tr>
</table>

Πίνακας XV.

Οι παιγνιοθεωρητικοί χρησιμοποιούν την έννοια της ωφέλειας και σπανίως την αναλύουν περαιτέρω σε κόστος κι όφελος (Ostrom, 2005). Αν εξετάσουμε τα παραπάνω παίγνια ως συνεπαγόμενα κάποιο κόστος και κάποιο όφελος, κοινό, ή ατομικό μπορούμε να τα εντάξουμε σε ένα ενιαίο πίνακα για τα απίγνια κοινής δράσης (Πίνακας XV). Το κόστος και το όφελος δεν είναι βεβαίως πάντοτε ατομική υπόθεση, ούτε πάντοτε κοινή υπόθεση, ασφαλώς όμως υπάρχουν και συνυπάρχουν ενίοτε και το κοινωφελές και το ίδιον όφελος, όπως και οι αντίστοιχοι τύποι κόστους. Επιπλέον τα μέρη δεν είναι πάντοτε δύο. Εφόσον όμως για παράδειγμα δεχθούμε ότι το να παίζει κανείς κάποια σφαίριση μόνος του δεν παρουσιάζει τόσο ενδιαφέρον και για τον ίδιο ακόμα, ή ενδεχομένως είναι και πληκτική κιόλας, ενώ είναι πιο ενδιαφέρον το να παίζει με κάποιον άλλο, μπορούμε να κατανοήσουμε ότι το μεταξύ τους παιχνίδι ως κοινή τους παραγωγή. Η σφαίριση τους ως εκ τούτου μπορεί να συνεπάγεται κάποιο κόστος (cost - c) αφενός και κάποιο όφελος (benefit – b) αφετέρου, τα οποία μπορούν να επιμεριστούν περαιτέρω σε c_1, c_2 και b_1, b_2. Σε μια τέτοια περίπτωση μπορούμε να συμπεριλάβουμε τα παραπάνω μεγέθη σε ένα πιο γενικό πίνακα αποδόσεων Πίνακας XVI , που ανάλογα με τις συνθήκες μπορεί να εκδηλωθεί ως «δίλημα του κρατουμένου», «κοτόπουλο», ή «κυνήγι του ελαφιού» Η γενική απεικόνιση του είναι η παρακάτω (Dixit & Skeath, 1999).

		Μέρος Β	
		επιλογή 1	επιλογή 2
Μέρος Α	Επιλογή 1	$b_2 - c_2$, $b_2 - c_2$	$b_1 - c_1$, b_1
	επιλογή 2	b_1 , $b_1 - c_1$	0 , 0

Πίνακας XVI.

α) Το παραπάνω παιχνίδι εκδηλώνεται ως «δίλημμα των κρατουμένων» όταν ισχύουν συγχρόνως οι εκφράσεις:

$b_1 > b_2 - c_2$,

$0 > b_1 - c_1$,

$b_2 - c_2 > 0$,

β) Το παραπάνω παιχνίδι εκδηλώνεται ως «γεράκι περιστέρι» όταν ισχύουν συγχρόνως οι ανισότητες:

$b_1 > b_2 – c_2$,

$0 < b_1 - c_1$,

γ) Το παραπάνω παιχνίδι εκδηλώνεται ως «κυνήγι του ελαφιού» όταν ισχύουν συγχρόνως οι εκφράσεις:

$b_1 < b_2 - c_2$,

$0 > b_1 - c_1$,

$b_2 - c_2 > 0$

Διαπιστώνουμε από τα παραπάνω ότι τα παίγνια μπορούμε να τα δούμε από διάφορες σκοπιές και αργότερα θα δώσουμε κάποια εξήγηση ως προς το αν και ποιοι επωφελούνται από τις σφαιρίσεις, καθώς κι αν οι ίδιοι ή κάποιοι άλλοι πληρώνουν αντίστοιχο κόστος. Πολλά παίγνια πολλών παικτών αφορούν προβλήματα συλλογικής δράσης, που η γενική δομή τους μπορεί να εκδηλώνεται ως δίλημμα του κρατουμένου, ή κοτόπουλο, ή παιχνίδι διασφάλισης. Η κρίσιμη δυσκολία με τέτοια παίγνια, σε οποιαδήποτε μορφή, είναι ότι οι ισορροπίες Nash που προκύπτουν από μεμονωμένα ορθολογικές επιλογές μπορεί να μην είναι το συλλογικά βέλτιστο, ή ακόμη ευρύτερα, το κοινωνικά βέλτιστο αποτέλεσμα, ή το αποτέλεσμα που μεγιστοποιεί αθροιστικά τις απολαβές όλων των παικτών. Τα προβλήματα της συλλογικής δράσης έχει αναγνωριστεί εδώ και πολλούς αιώνες και συζητούνται από τους μελετητές από διάφορους τομείς. Το έργο του Olson (1991) «η λογική της συλλογικής δράσης…» ανέδειξε ότι τα κοινωνικά βέλτιστα αποτελέσματα δεν θα προκύψουν αν κάθε άτομο είχε ιδιωτικό κίνητρο για εκτελεί τα καθήκοντα του, όπως είχε κατά κάποιο τρόπο θεωρηθεί από την (κοινωνική) θεωρία ομάδων. Αναγνωρίζεται ευρύτερα πλέον ότι τα προβλήματα συλλογικής δράσης προκύπτουν σε διάφορους τομείς και ότι δεν υπάρχει μόνο μια βέλτιστη λύση. Η συνεργατική συμπεριφορά μπορεί να προάγεται ποικιλοτρόπως, π.χ. από τα κοινωνικά έθιμα, τις συμβάσεις, τη χρήση κυρώσεων για τους μη συνεργάσιμους, ή από τη δημιουργία των κανόνων αποδεκτής συμπεριφοράς. Όπως αναφέρουμε και σε άλλο σημείο, αρκετοί συγγραφείς συμφωνούν ότι οι μικρές ομάδες είναι πιο επιτυχείς στην επίλυση των προβλημάτων συλλογικής δράσης, συγκριτικά με τις πολύ μεγάλες ομάδες. Όταν οι ενέργειες κάποιου παίκτη ασκούν επίδραση στις αποδόσεις ωφελείας των άλλων, αναφέρονται ως εξωτερικότητες. Αυτές μπορεί να είναι θετικές ή αρνητικές και να οδηγήσει σε ατομικά αποδόσεις που δεν είναι κοινωνικά βέλτιστες. Βάσει της οριακής αρχής, οι ενέργειες του παίκτη που παράγουν αρνητικές εξωτερικότητες έχουν χρησιμοποιηθεί περισσότερο απ’ όσο χρειάζεται εκ της σκοπιάς της κοινωνίας, ενώ αντιστρόφως οι θετικές εξωτερικότητες σημαίνουν ότι οι ενέργειες έχουν χρησιμοποιηθεί αντιστοίχως λιγότερο. Για την επίτευξη του συλλογικώς βέλτιστου, είναι δυνατή και η χρησιμοποίηση μηχανισμών που μεταβιβάζουν στα μεμονωμένα μέλη το κόστος ή το όφελος των ενεργειών τους. Η πρόσθετη δυνατότητα θετικής ανατροφοδότησης υφίσταται, όταν υπάρχουν θετικές εξωτερικότητες και τότε ενδέχεται να υπάρχουν πολλαπλές ισορροπίες Nash. Στις πολυπληθείς ομάδες, η διάχυση της ευθύνης μπορεί να οδηγήσει στην παθητική συμπεριφορά όπου τα μεμονωμένα άτομα περιμένουν από άλλους να αναλάβουν δράση, και στο λεγόμενο πρόβλημα του λαθρεπιβάτη από τα οφέλη της εν λόγω δράσης. Το παίγνιο του «Πολέμου των Φύλων» θα το εξετάσουμε από εξελικτική σκοπιά.

3.7 Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων

Όπως σε κάθε περίπτωση της Θεωρίας Παιγνίων, έτσι και στην Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων (ΕΘΠ) περισσότερη σημασία έχουν τα αριθμητικά, είτε αλγεβρικά δεδομένα και λιγότερο τα σενάρια. Έτσι για τα συμμετρικά εξελικτικά παίγνια 2Χ2, στα οποία η σειρά και η στήλη δεν διαφοροποιούνται ως προς το ποιες είναι οι απολαβές τους, μπορούμε να τα εντάξουμε σε ένα γενικό πίνακα, θεωρώντας ότι αυτές είναι ίσες στη μια διαγώνιο, αντίθετα από την άλλη διαγώνιο όπου είναι συμμετρικές (Πίνακας XVII).

		Μέρος Β	
		επιλογή 1	επιλογή 2
Μέρος Α	Επιλογή 1	α_{11} , α_{11}	α_{12} , $\boldsymbol{\alpha_{21}}$
	επιλογή 2	α_{21} , $\boldsymbol{\alpha_{12}}$	α_{22} , α_{22}

Πίνακας XVII.

<u>Το Εξελικτικό «Γεράκι – Περιστέρι»</u>

Ως αρχικό παίγνιο από το οποίο ξεκίνησε η ανάλυση της ΕΘΠ μπορούμε να θεωρήσουμε τη συμμετρική εξέλιξη στο στατικό παίγνιο «Γεράκι – Περιστέρι» («Hawk - Dove»), που αναφέρεται ως αντίστοιχο με το «Κοτόπουλο» («Chicken»), ενώ επίσης μπορεί να τείνει και στο «Δίλημμα του Κρατουμένου». Εντάσσεται καλώς σε κάποιο πλαίσιο ανταγωνισμού προς συγκεκριμένους κοινούς πόρους. Σηματοδοτεί τη συνάντηση δυο διαγωνιζομένων που καθείς τους μπορεί να είναι ανυποχώρητος, ή υποχωρητικός, κατά πως ήσαν οι διεθνείς τάσεις κατά τον πόλεμο του Vietnam, όταν το έθεσε ο Maynard Smith. Η βασική παρατήρησή του ήταν πως στους πληθυσμούς πολλών έμβιων ειδών, τα διαγωνιζόμενα μέλη τους δεν είναι καθόλου διατεθειμένα να εμπλακούν σε διενέξεις-μάχες άνευ ορίων με άλλους διαγωνιζομένους του ιδίου είδους, μα αρκούνται σε κάποιες μάλλον συμβολικές αναμετρήσεις. Τα «παίγνια συνύπαρξης» όπως αναφέρονται αλλιώς τα εξελικτικά παίγνια συνήθως ξεκινούν, ενίοτε δε συνοψίζονται κιόλας στο «Γεράκι – Περιστέρι». Ο H. Varian (2015) ξεκινάει το σχετικό με αυτά κεφάλαιό του περνώντας καταρχήν από το παράδειγμα των σφαιρίσεων που έχει εξετάσει σε προηγούμενο κεφάλαιο, αυτό με τις γνωστές δεδομένες τιμές που μεταχειριστήκαμε μεταξύ άλλων κι εμείς. Αναφέρει πως έχουμε ερμηνεύσει τις μικτές στρατηγικές ως τυχαία επιλογή από τους παίκτες και υπενθυμίζει ότι αν στο παίγνιο της ρίψης υποθέσουμε ότι η στρατηγική της σειράς είναι να παίξει αριστερά με πιθανότητα 0.7 και δεξιά με πιθανότητα 0.3, τότε θεωρούμε ότι η σειρά θα «αναμείξει» το παίγνιό της και θα παίξει αριστερά στο 70% των προσπαθειών και δεξιά στο 30% των προσπαθειών. Προσθέτει όμως ότι υπάρχει και μια άλλη ερμηνεία. Έστω ότι οι επιτιθέμενοι και οι αμυνόμενοι συνδυάζονται τυχαία και ότι το 70% των σουτέρ πάντοτε χτυπάει αριστερά και το 30% πάντα χτυπάει δεξιά. Τότε, από την πλευρά του αμυνόμενου, είναι απλώς σαν να αντιμετωπίζει ένα μοναδικό παίκτη που κάνει μια τυχαία επιλογή με αυτές τις πιθανότητες. Κατόπιν αναφέρει:

> *«Μπορεί αυτή η ερμηνεία να μην είναι ότι καλύτερο όσον αφορά το ποδόσφαιρο, αλλά αποτελεί μια καλή ιστορία για συμπεριφορά των ζώων. Η ιδέα είναι ότι διάφορα είδη συμπεριφοράς είναι γενετικά προγραμματισμένα και ότι η εξέλιξη επιλέγει τα μείγματα του πληθυσμού που είναι σταθερά σε σχέση με τις δυνάμεις της εξέλιξης. Τα τελευταία χρόνια, οι βιολόγοι έχουν αρχίσει να θεωρούν τη θεωρία των παιγνίων ως αναπόσπαστο εργαλείο για τη μελέτη της συμπεριφοράς των ειδών».*

(Varian, 2015: 621)

Αφού περιγράψουμε τα γενικά χαρακτηριστικά από το «Γεράκι – Περιστέρι» θα υποστηρίξουμε πως δεν είναι καθόλου δύσκολο να εξετάσουμε κάπως έτσι και τις διάφορες ανθρώπινες αναμετρήσεις στις «ποικίλες» σφαιρίσεις και προτείνεται αφενός ως κάποια σύζευξη της κλασσικής θεωρίας παιγνίων με την ΕΘΠ, δια των σφαιρίσεων. Προτείνεται αφετέρου ως μια διαφορετική βάση ως προς τα υφιστάμενα έμπρακτα ζητήματα των δημοφιλών σφαιρίσεων. Το γενικότερο πλαίσιο του παιγνίου «Γεράκι – Περιστέρι» είναι ο αγώνας για κοινούς πόρους, που δεν είναι άσχετος με τις σφαιρίσεις.

Το διάσημο «παίγνιο ζωικής αλληλεπίδρασης» υποτίθεται πως θα είχε αρκετά προβλέψιμο αποτέλεσμα, μάλλον δίχως την προϋπόθεση της ανθρώπινης παρουσίας. Αυτή π.χ. μπορεί να εξημερώνει γεράκια ως «γερακάρης», ώστε μαζί ενδεχομένως και με σκύλους να κυνηγά διάφορα άλλα είδη ζώων, ή να τυφλώνει περιστέρια ως δόλο προκειμένου να συλλάβει περισσότερα σε πιο παλιές εποχές είτε σε λιγότερο πολιτισμένες κοινωνίες. Ή να μην έχει πρόβλημα συνύπαρξης με τα περιστέρια στις κεντρικές πλατείες σύγχρονων μεγαλουπόλεων έχοντας πάψει να κυνηγά τα άλλοτε υποτιθέμενα εύκολα θύματα και να τηρεί μια άλλη στάση προς τους υποτιθέμενους σπουδαίους θηρευτές. Στο πλαίσιο της ΕΘΠ το παίγνιο δεν υπονοεί δυο ζωικά είδη, αναφέρεται μάλλον σε ένα, που εμφανίζει δυο τύπους συμπεριφοράς.

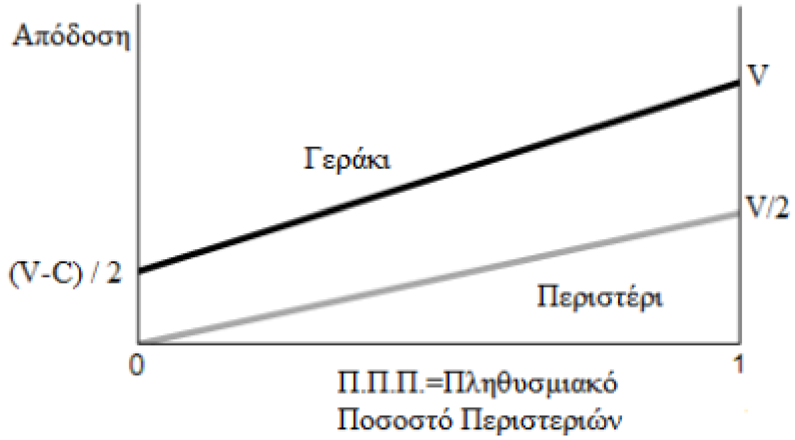
	Γεράκι (Γ)	Περιστέρι (Π)
Γεράκι (Γ)	(V-C)/2 , (V-C)/2	V , 0
Περιστέρι (Π)	0 , V	V/2 , V/2

Έτσι στο εν προκειμένω εξελικτικό πλαίσιο, υποτίθεται πως

- αν αναμετρηθούν κάποιο μέλος του πληθυσμού (κάποιος παίκτης, ή καλύτερα κάποια στρατηγική) με συμπεριφορικό τύπου (Γ) προς κάποιο αντίστοιχο (Π), τότε το (Γ) αποκομίζει απόδοση ωφέλειας V, αφού το (Π)υποχωρεί χωρίς ωφέλεια, δίχως όμως και βλάβη.
- στην περίπτωση που βρεθούν (Π) με (Π), απλά μοιράζονται στα δυο τις V μονάδες ωφέλειας.
- στη συνάντηση (Γ) με (Γ), τότε αγωνίζονται για τις V μονάδες ωφέλειας, με κατάληξη το ένα εκ των δυο να τραυματιστεί ή να υποχωρήσει, γεγονός που αποτυπώνεται στον πίνακα ως απώλεια C μονάδων.

Κατόπιν η ανάλυση προχωρά ως εξής:

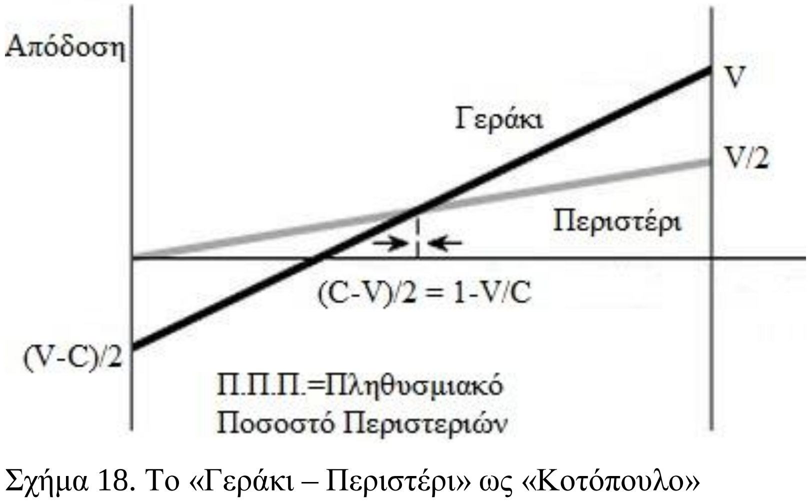
(α) Αν ισχύει V > C τότε το παίγνιο τείνει προς το «Δίλημμα του Κρατουμένου» και μάλιστα κατατείνει προς ένα μονομορφικό πληθυσμό ακόμα κι αν δεν αρχίζει με αυτόν (Σχήμα 18).



Σχήμα 18. Το Γεράκι – Περιστέρι ως Δίλλημα του Κρατουμένου.

Επικρατεί η υπό την ορολογία του «Διλλήματος του Κρατουμένου» συμπεριφορά (στρατηγική) του τύπου «Αποστασία», ή με άλλα επικρατεί η συμπεριφορά του τύπου «Γεράκι» υπό την ορολογία της άλλης εκδοχής, είτε ως μετάλλαξη που καταλαμβάνει εντέλει όλο τον πληθυσμό, είτε ως αρχικός τύπος που δεν μπορεί να καταληφθεί από μετάλλαξη.

(β) Αν $V < C$, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 18, το παίγνιο τείνει προς το «Κοτόπουλο».(Dixit & Skeath, 2004). Η ανάλυση του παιγνίου κατατείνει ότι είτε εκλάβουμε το γεράκι ως μετάλλαξη του περιστεριού, είτε το περιστέρι ως μετάλλαξη του γερακιού, οδηγούμαστε προς μια πολυμορφική ισορροπία συνύπαρξης αμφοτέρων.



Σχήμα 18. Το «Γεράκι – Περιστέρι» ως «Κοτόπουλο»

Σε κάποιο πληθυσμό «γερακιών» μια τυχαία μετάλλαξη κάποιου ατόμου σε «περιστέρι» είναι ευνοϊκή για το ίδιο, όπως κι αντιστοίχως σε κάποιο πληθυσμό «περιστεριών» συμβαίνει με τη μετάλλαξη κάποιου σε «γεράκι». Το εξελικτικά προτιμότερο για κάποιο άτομο εντός αυτού του παιγνίου θεωρείται πως είναι να ανήκει στον σχετικώς πιο σπάνιο πληθυσμό. Αυτό προκύπτει ως εξής:

Έστω το μέρος του πληθυσμού που παίζει ως (Γ) είναι p, οπότε είναι (1-p) το υπόλοιπο μέρος, που παίζει ως (Π). Άρα η πιθανότητα για ένα οργανισμό τύπου (Γ) να συναντήσει άλλον οργανισμό τύπου (Γ) είναι p και η πιθανότητα να συναντήσει ένα (Π) είναι αντιστοίχως (1-p).

Η προσδοκώμενη απόδοση για τον τύπο (Γ) θα είναι

$EU(\Gamma) = [(V-C)/2]\ p + V\ (1-p)$.

Η προσδοκώμενη απόδοση για τον τύπο (Γ) θα είναι

$EU(\Pi) = (V/2)\ (1-p)$.

Υποθέτουμε ότι ο τύπος με τις υψηλότερη απόδοση ωφέλειας αναπαράγεται πιο γρήγορα και κληροδοτεί την δική τάση, που είναι αναλόγως τύπου (Γ) ή (Π), στους απογόνους του. Έτσι αν $EU(\Gamma) > EU(\Pi)$ θα παρατηρήσουμε αύξηση στο επί του πληθυσμού ποσοστό του τύπου (Γ), ενώ αν αντιθέτως $EU(\Pi) > EU(\Gamma)$ θα παρατηρήσουμε αύξηση στο επί του πληθυσμού ποσοστό του τύπου (Π).

Μοναδικός τρόπος ο πληθυσμός να βρεθεί σε ισορροπία, είναι αν οι αποδόσεις ωφελείας για κάθε τύπο παίκτη είναι ίδιες, εφόσον δηλαδή:

$EU(\Gamma) = EU(\Pi) \Rightarrow [(V-C)/2]\ p + V\ (1-p) = (V/2)\ (1-p)$

$\Rightarrow p = 1/2$

Πολύ ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύνδεση ανάμεσα στις ισορροπίες μικτών στρατηγικών του διεξαγόμενου κατά ορθολογικό τρόπο παιγνίου της κλασσικής θεωρίας παιγνίων αφενός κι αφετέρου την πολυμορφική ισορροπία της ΕΘΠ, που προκύπτουν από αρκετά διαφορετικές ιδεολογικές αφετηρίες. Οι αναλογίες του μείγματος σε κάθε περίπτωση είναι 50 : 50, όμως οι ερμηνείες διαφέρουν. Στο ορθολογικό πλαίσιο υποτίθεται ότι κάθε παίκτης αναμιγνύει τις δικές του αμιγείς στρατηγικές, ενώ στο πλαίσιο της ΕΘΠ, κάθε μέλος του πληθυσμού χρησιμοποιεί μια αμιγή στρατηγική, όμως καθώς τα διάφορα μέλη έχουν διάφορες συμπεριφορές (στρατηγικές), παρατηρούμε ποικιλομορφία. Η ισορροπία Nash φερόταν να αφορά ορθολογικά άτομα που κάνουν υπολογισμούς ώστε να καταλήξουν στην πλέον κατάλληλη στρατηγική έναντι της άριστης στρατηγικής που θα μπορούσε να επιλέξει ο άλλος. Η Εξελικτικά σταθερή στρατηγική φερόταν να μοντελοποιεί τη συμπεριφορά έμβιων οργανισμών, όπου οι στρατηγικές με τις μεγαλύτερες αποδόσεις επιβίωσης θα αναπαράγονται πιο γρήγορα. Επιπλέον, στο συγκεκριμένο παίγνιο, στην κλασσική θεωρία παιγνίων είχαμε 3 συνολικά ισορροπίες Nash, εκ των οποίων οι δυο προέκυπταν εκ των αμιγών στρατηγικών, κι από τις οποίες απαλλασσόμαστε πλέον. Άρα, όταν υπάρχουν περισσότερες της μιας Nash ισορροπίες, η ΕΘΠ μπορεί υπό κάποιες συνθήκες, όπως οι εν προκειμένω, να προσφέρει κριτήριο διαλογής μιας από αυτές. Το αντίθετο όμως δεν συμβαίνει, όταν δηλαδή προκύπτουν περισσότερες ισορροπίες στο πλαίσιο της ΕΘΠ.

Επισημαίνουμε πόσο η ανάλυση αυτού του παιγνίου μοιάζει με την υπόθεση που αναπτύχθηκε επί της επιχειρηματολογίας του Darwin, κι έπειτα του Fischer, από το Hamilton (που το είχε θέσει κι ως ανίκητη στρατηγική, ενώ ο Maynard Smith ισχυρίστηκε ότι δεν εξολοθρεύεται μάλλον - όχι πως δεν ηττάται, ούτε πως είναι βέλτιστη). Ήτοι, ως προς την εντός των αμφιγονικών ειδών 1:1 αναλογία αρσενικών – θηλυκών και το συγκριτικό πλεονέκτημα που θα ενδεχομένως θα αποκτήσει το άτομο που θα ανήκει σε σχετικώς πιο σπάνιο πληθυσμό. Η ανάλυση δείχνει ως αντί για το αρσενικό – θηλυκό κάποιου εκ των αμφιγονικών ειδών, παίρνουμε πλέον δυο είδη. Έτσι στο εξελικτικό παίγνιο που ονομάζεται Γεράκι – Περιστέρι, σημαίνει ότι από τις 3 ισορροπίες Nash προς τις οποίες καταλήγαμε στην κλασσική θεωρία παιγνίων, προκρίνεται μόνον η μικτή πολυμορφική ισορροπία στην οποία κατατείνει, κι απορρίπτονται οι αμιγείς. Ο H. Varian, περνώντας στην ΕΘΠ, κάνει μάλλον μια αντιδιαστολή με το ποδόσφαιρο. Δεν δείχνει να το προσλαμβάνει ως κάποιο από τα πάμπολλα «είδη» ρίψεων, εντός των ποικίλων σφαιρίσεων, που θα μπορούσαν να υπάρξουν. Εκτός σφαιρίσεων δεν είναι πρόβλημα απαραιτήτως, όπως ίσως δεν είναι και το να μην αντιλαμβάνεται κάποιος διάφορα είδη θεάτρου, ή μουσικής. Ενδέχεται να έχει κάποιες συνέπειες ως προς τη σκοπιά των σφαιρίσεων που λαμβάνει, και να μην ενστερνίζεται απόψεις που ειδάλλως θα ενστερνιζόταν πάραυτα, π.χ. ως προς διάφορα είδη ισότητας/ανισότητας. Στα ποδοσφαιρικά πέναλτι που αναφέρει, οι εκτελεστές κλωτσούν την μπάλα με το ένα πόδι, που είναι το ίδιο σε κάθε εκτέλεση πέναλτι που κάνουν, στην συντριπτική πλειονότητα των περιπτώσεων. Είναι κάτι που ενδεχομένως δεν λαμβάνεται καλώς υπόψη. Οι άνθρωποι που παίζουν οιαδήποτε σφαίριση, έχουν εκ γενετής κάποια μεριά προτίμησης (δεξιά ή αριστερή), όπως ισχύει και για τους ανθρώπους που δεν παίζουν οιαδήποτε σφαίριση. Οι απαιτήσεις ορισμένων σφαιρίσεων, κάνουν κάποιους ή όλους τους ενασχολούμενους με αυτές να αναπτύσσουν εξίσου σχεδόν και την άλλη μεριά τους. Στο ίδιο παράδειγμα του Varian, και γενικώς αυτοί που παίζουν ως μοναδικοί τερματοφύλακες σε τόσες σφαιρίσεις, κι όχι π.χ. δυο μαζί, αν δεν προχωρήσουν σε κάποια τέτοια ανάπτυξή τους και παραμείνουν με κάποια έκδηλη πλευρά προτίμησης, όπως η λεγόμενη εκ γενετής, είναι ευνόητο πως συγκριτικώς θα υστερούν. Εξυπακούεται πως η ανάπτυξη της «άλλης» μεριάς υπό διαφορετικές προϋποθέσεις και σφαιρίσεις, αποτελεί μειονέκτημα. Η επένδυση στην ανάπτυξη της άλλης μεριάς του ανθρώπου ως προς την επιτραπέζια αντισφαίριση που παίζεται με μια ρακέτα είναι χαμένος χρόνος, καθώς ασφαλώς το ίδιο χέρι απαιτείται να απαντά χτυπήματα από δεξιά κι από αριστερά. Είτε στην περίπτωση επένδυσης σε κάποια εκ γενετής κλίση, είτε στην περίπτωση επένδυσης στην «άλλη» μεριά, που το παράδειγμά της καθιστά ακόμα πιο ξεκάθαρο αυτό που εννοούμε, η ανάπτυξη συνδέεται με τη βιολογία, μα δεν εξαρτάται από τη βιολογία και μόνον. Ακόμα κι αν εντέλει επαφίεται στον εκάστοτε άνθρωπο ως οργανισμό - άτομο, δεν εξαρτάται από αυτόν και μόνον. Εξαρτάται επίσης σε μεγάλο βαθμό κι από το περιβάλλον (τις κοινωνικές, οικονομικές, πολιτιστικές, πολιτικές ψυχολογικές κ.α. συνθήκες) που είναι σε μεγάλο βαθμό διαμορφωμένο προτού συσταθεί το άτομο και δεν πρέπει κατόπιν να παραιτηθεί από τη διαμόρφωσή του, προς όφελος του ιδίου κι όχι μόνον.

3.8 Ο Πόλεμος των Φύλων ως εξελικτικό παίγνιο

Από τα πλέον ενδιαφέρονται προς εξέταση εξελικτικά παίγνια είναι και ο Πόλεμος των φύλων (Battle of Sexes, BoS). Η ονομασία του παιγνίου, από ορισμένους κρίνεται ως μάλλον αδόκιμη (Βαρουφάκης, 2007). Οι παίκτες στο παίγνιο του πολέμου των φύλων έχουν απλά διαφορετικές προτιμήσεις. Συνήθως υποτίθεται κάποιο ζευγάρι που πρωτίστως προτιμούν να πάνε μαζί σε κάποια παράσταση, όμως έχουν δευτερευόντως διαφορετικές προτιμήσεις. Οι διαφορετικές προτιμήσεις τους αναφέρονται κι ως Bach ή Stravinsky (BoS επίσης), ή το ποδόσφαιρο για τον άνδρα και το θέατρο (όπερα) για τη γυναίκα κ.α.. Μπορούμε δε να τις εκφράσουμε κι ως επί διαφορετικών σφαιρίσεων, όχι για να προσθέσουμε επιπλέον ονομασίες, μα για ουσιαστικούς λόγους καθώς νομίζουμε πως θα καταδείξουμε κατόπιν.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Μέλος Ανδρικού Πληθυσμού</td></tr>
<tr><td>(B)</td><td>(S)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μέλος Γυναικείου Πληθυσμού</td><td>(B)</td><td>V-C , V</td><td>0 , 0</td></tr>
<tr><td>(S)</td><td>0 , 0</td><td>V , V-C</td></tr>
</table>

Πίνακας XVIII.

Το εξελικτικό παίγνιο του BoS μπορούμε να υποθέσουμε κάποια άτομα διαφορετικού φύλου, που σχεδιάζουν να παρακολουθήσουν μαζί κάποια σφαίριση, την B (όπως beach volleyball) που αναφέρεται ως η προτίμηση της γυναίκας, ή την S (όπως sand volleyball ή soccer) που υποτίθεται ως η προτίμηση του άνδρα (Πίνακας XVIII). Είναι δηλαδή όπως οι Bach και Stravinsky επί του ιδίου θέματος, επί του θέματός μας. Επιπλέον είναι σύμφωνες με τις προϋποθέσεις του BoS, ως σφαιρίσεις παρεμφερείς, ή μη παρεμφερείς. Ενδέχεται συγκριτικώς δε να εκφράζουν σύγχρονες πραγματικές προτιμήσεις κι αξιολογήσεις ανδρών και γυναικών. Αναφέρουμε ενδεικτικώς ως αξιοπερίεργες δυο διαπιστώσεις: Το Soccer αποτελεί θέμα ενασχόλησης δισεκατομμυρίων ανδρών, όχι όμως και δισεκατομμυρίων γυναικών που δεν έχουν κλωτσήσει ουδέποτε μια μπάλα, δίχως αυτό να δικαιολογείται επαρκώς εκ των πάμπολλων λόγων που αναφέρονται σχετικώς, ενώ υπό κάποια σκοπιά είναι σκανδαλώδες κι έχει ανυπολόγιστες συνέπειες. Φαίνεται πως οι γυναίκες συγκριτικώς προτιμούν το Beachvolley από το Soccer, όμως π.χ. στο Ιράν όπου η Διεθνής Ομοσπονδία του (FIVB), έχει αναθέσει δυο μάλιστα μεγάλες διοργανώσεις, απαγορεύεται ακόμα και στις εξέδρες η είσοδος των γυναικών, οπότε τίθενται επίσης κι άλλα ζητήματα ισότητας/ανισότητας πέραν εκείνης των οικονομικών απολαβών για τους πρωταγωνιστές, ώστε ενδεχομένως δεν μπορεί να τα υποστηρίζει όλα εξίσου. Θέτουμε εντέλει σχετικά με τις σφαιρίσεις και κάποιες προτάσεις επί τέτοιων ζητημάτων, αναπτυξιακών πρωτίστως, οικονομικών δευτερευόντως, τα οποία συνήθως τίθενται νομικώς και συχνά άστοχα. (Αυτά ακολούθως κι αφού τις εξετάσουμε πρώτα ως τυπικές συμπεριφορές στο πλαίσιο της ΕΘΠ). Υποθέτουμε λοιπόν ότι έχουμε τα παρακάτω δεδομένα ότι V>C:

- Ένα κάποιο μέλος του γυναικείου πληθυσμού, ως γυναίκα προτιμά πρωτίστως να παρακολουθήσει κάποια σφαίριση παρέα με ένα κάποιο μέλος του ανδρικού πληθυσμού, όμως προτιμά κιόλας αυτή να είναι η σφαίριση B και τα παραπάνω ισχύουν για όλο το γυναικείο πληθυσμό. Αν αμφότεροι καταλήξουν να παρακολουθούν τη σφαίριση B γράφουμε απόδοση ωφέλειας V για τη γυναίκα και V-C για τον άνδρα.
- Ένα κάποιο μέλος του ανδρικού πληθυσμού, ως άνδρας προτιμά πρωτίστως να παρακολουθήσει κάποια σφαίριση παρέα με ένα κάποιο μέλος του γυναικείου πληθυσμού, όμως προτιμά κιόλας αυτή να είναι η σφαίριση S και τα παραπάνω ισχύουν για όλο τον ανδρικό πληθυσμό . Αν αμφότεροι καταλήξουν να παρακολουθούν τη σφαίριση S γράφουμε απόδοση ωφέλειας V για τον άνδρα και V-C για τη γυναίκα.
- Τέλος αν οι παραπάνω καταλήξουν να παρακολουθούν διαφορετικές σφαιρίσεις γράφουμε απόδοση ωφέλειας 0 γι αμφότερους

Σε κάθε περίπτωση υποτίθεται εν προκειμένω.

Αν θέσουμε το ζήτημα υπό όρους βιολογίας, δεν μπορούν πλέον να ορίζονται ως τυχαίοι κλήροι από ένα ομοιόμορφο πληθυσμό ζώων, μα ανήκουν σε διαφορετικά είδη, ή ανήκουν στο ίδιο είδος μόνον εάν αυτό παρουσιάζει διμορφισμό.

Σε κάθε περίπτωση, η μελέτη τέτοιων παιγνίων με εξελικτικούς όρους, απαιτεί να θεωρήσουμε επιλεγμένα μέλη από διαφορετικούς πληθυσμούς, ένα μεγάλο πληθυσμό ανδρών και ένα μεγάλο πληθυσμό γυναικών, καθώς κι άτομα από τον κάθε πληθυσμό, που επιλέγονται τυχαία και βρίσκονται σε μια συνάντηση. Ανάμεσα στα μέλη του κάθε πληθυσμού όμως υπάρχουν αφενός αδιάλλακτα κι αφετέρου διαλλακτικά άτομα. Τα αδιάλλακτα επιλέγουν πάντοτε την παρακολούθηση της σφαίρισης που προτιμά ο πληθυσμός τους καίτοι υποτίθεται πως πρωτίστως προτιμούν να παρακολουθούν κάποια σφαίριση μαζί και με τα άτομα του άλλου φύλου. Τη σφαίριση S οι αδιάλλακτοι άνδρες, τη σφαίριση B οι αδιάλλακτες γυναίκες. Τα διαλλακτικά άτομα δηλαδή λαμβάνουν υπόψη την ύπαρξη και πληθυσμού με αντίθετες προτιμήσεις και υποχωρούν προκειμένου να επιτύχουν συμβιβασμό.

Αν από τον ένα πληθυσμό κληρωθεί αδιάλλακτο άτομο και από το άλλο κληρωθεί διαλλακτικό, τότε επικρατεί η προτίμηση του αδιάλλακτου, δηλαδή τότε το αποτέλεσμα είναι υπέρ του πληθυσμού που ανήκει εκείνο. Αν κληρωθούν αδιάλλακτα άτομα τότε δεν υπάρχει γι αυτά περιθώριο συμβιβασμού και υποτίθεται, παραδόξως κάπως ότι το ίδιο θα συμβεί αν κληρωθούν διαλλακτικά. Λόγω συμμετρίας, καθένα θα ήθελε και θα επέμενε να μην παρακολουθήσει την σφαίριση που προτιμά, μα την άλλη.

Η διαφορά του BoS σε σχέση με τα άλλα εξελικτικά παίγνια είναι πως τα μέρη που είναι τοποθετημένα στη σειρά και στη στήλη αντίστοιχα, φέρονται να μην είναι μέλη του ιδίου πληθυσμού. Είναι μέρη και μέλη διαφορετικών πληθυσμών ακόμα κι αν μπορούν δευτερευόντως να συμπεριληφθούν στον πληθυσμό ενός διμορφικού είδους. Αν και οι δυο πληθυσμοί αποτελούν μείγμα ή κράμα αδιάλλακτων και διαλλακτικών ατόμων, δεν υπάρχει κανένας λόγος οι αναλογίες των δύο αυτών τύπων να είναι σε αμφότερα τα μείγματα ίδιες. Προκειμένου να διευκολύνουμε την περαιτέρω εξέταση δίνουμε έστω αριθμητικές τιμές 2 για το όφελος κι 1 για το κόστος, οπότε πάμε στον παρακάτω πίνακα με τιμές 0, τιμές 2, καθώς και 2-1=1.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Μέλος Ανδρικού Πληθυσμού</td></tr>
<tr><td>(B)</td><td>(S)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μέλος Γυναικείου Πληθυσμού</td><td>(B)</td><td>1 , 2</td><td>0 , 0</td></tr>
<tr><td>(S)</td><td>0 , 0</td><td>2 , 2</td></tr>
</table>

Πίνακας XIX.

Μπορούμε έτσι επιπλέον να εισάγουμε δύο μεταβλητές που να αντιπροσωπεύουν την αναλογία των αδιάλλακτων στους δύο πληθυσμούς και να μελετήσουμε την δυναμική τους (Πίνακας XIX). Οι αδιάλλακτοι του κάθε πληθυσμού τα πηγαίνουν καλύτερα όταν συναντούν συχνότερα τους διαλλακτικούς του άλλου πληθυσμού που συμβαίνει ότι εκείνος περιέχει λιγότερους αδιάλλακτους.

Έστω πως είναι χ η αναλογία των αδιάλλακτων ανάμεσα στους άνδρες και πως ανάμεσα στις γυναίκες είναι y. Εφόσον κάποιος αδιάλλακτος άνδρας συναντά κάποια αδιάλλακτη γυναίκα σημειώνουμε ωφέλεια 0 γι αμφότερους. Όταν κάποιος αδιάλλακτος άνδρας συναντά κάποια διαλλακτική γυναίκα παρακολουθούν τη σφαίριση S και σημειώνουμε για τον ίδιο ωφέλεια 2 (και για τη γυναίκα 1). Λαμβάνοντας υπόψη τα ποσοστά αδιαλλαξίας στον ανδρικό πληθυσμό, οι αναμενόμενες απολαβές του είναι:

$y(0) + (1 - y)2 = 2\ (1 - y)$.

Παρομοίως, όταν κάποια αδιάλλακτη γυναίκα συναντά κάποιο διαλλακτικό άνδρα παρακολουθούν τη σφαίριση B και σημειώνουμε για την ίδια ωφέλεια 2 (και για τον άνδρα 1). Λαμβάνοντας υπόψη τα ποσοστά αδιαλλαξίας στο γυναικείο πληθυσμό, η αναμενόμενη απόδοσή της είναι:

$y(1) + (1 - y)0 = y$.

Υπό βιολογικούς έστω όρους, συμπεραίνεται ότι ο αδιάλλακτος άνδρας θα αναπαράγεται γρηγορότερα, όταν το χ αυξάνει, ή αλλιώς όταν $y < 2/3$. Παρομοίως εξετάζοντας και τον άλλο πληθυσμό, διαπιστώνουμε πότε οι αδιάλλακτες γυναίκες θα αναπαράγονται γρηγορότερα όταν το y αυξάνει, ή αλλιώς όταν $\chi < 2/3$. Εκτός της βιολογικής αναπαραγωγής έχουμε όμως επίσης και την «κοινωνική» αναπαραγωγή. Αν δε συμβαίνει να ενέχεται τόσο η βιολογική και η «κοινωνική» αναπαραγωγή, είναι ενδιαφέρον να αντιλαμβανόμαστε το μερίδιο της καθεμιάς.

Μπορούμε να δώσουμε μια ερμηνεία των αποτελεσμάτων, υποστηρίζοντας ότι τις περισσότερες φορές οδηγούμαστε προς έναν πληθυσμό που αποτελείται σχεδόν αποκλειστικά από αδιάλλακτους και έναν άλλο πληθυσμό σχεδόν αποκλειστικά από διαλλακτικούς, καθώς κι ότι αυτό μπορεί να εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Ο πληθυσμός που ξεκινά με μεγαλύτερο αριθμό αδιάλλακτων είναι πιθανότερο να σχηματίσει συνολικό πληθυσμό αδιάλλακτων και να κερδίσει απόδοση 2. Αν οι αρχικές αναλογίες δεν ευνοούν κανέναν, οι δυναμικές που αναπτύσσονται μπορεί θεωρητικά να οδηγήσουν στο πολυμορφικό σημείο (2/3, 2/3). Αντίθετα από το πολυμορφικό αποτέλεσμα στο προηγούμενο παίγνιο Γεράκι - Περιστέρι, ο πολυμορφισμός στον Πόλεμο των Φύλων είναι ασταθής. Ο Πόλεμος των Φύλων είναι ένα από τα απλούστερα παίγνια δίχως ΕΣΣ (Mynard Smith & Hofbauer, 1987)

Τις περισσότερες φορές οι αναχωρήσεις θα θέσουν σε κίνηση μια αθροιστική διαδικασία που οδηγεί σε ακραίες ισορροπίες πού όμως δεν είναι εξελικτικά σταθερές. Για αυτό στο παίγνιο Πόλεμος των Φύλων, η Θεωρία δεν μπορεί να αποφανθεί υπέρ κάποιας από τις δυο. Αν θέλουμε να αποφανθούμε για κάποια ότι συγκεντρώνει περισσότερες πιθανότητες, χρειάζεται ενδεχομένως να καταφύγουμε στις διάφορες ισχύουσες κοινωνικές – πολιτιστικές συμβάσεις και την ιστορία τους. Γενικώς ισχύει ότι τα παίγνια με υποτιθέμενα διαφορετικούς πληθυσμούς δεν μπορούν παρά να έχουν μονομορφικές εξελικτικά σταθερές ισορροπίες για κάθε πληθυσμό.

3.9 Οι εξελικτικές τάσεις στις σφαιρίσεις και τα είδη κατά τον S.J.Gould

Εκτός από την εξελικτική θεωρία παιγνίων, είναι αρκετά γνωστή όμως και η προσέγγιση των σφαιρίσεων ενός επιφανούς εξελικτικού επιστήμονα. Ο Stephen Jay Gould (1941 – 2002), διακεκριμένος παλαιοντολόγος πρωτίστως και ως εκ τούτου γνώστης των επιστημονικών μεθόδων που καταδεικνύουν τις εξελικτικές τάσεις, ήταν συνάμα και λάτρης των σφαιρίσεων και κυρίως του baseball. Γράφει πρώτα ένα πολύ ενδιαφέρον άρθρο «The Creation Myths of Cooperstown» (1984), αφιερώνει σε αυτές κάποια ενδιαφέροντα αποσπάσματα των βιβλίων του «The flamingo's smile» (1985), «Wonderful Life» (1989) καθώς και στο «Full House» (1996). Θα εστιάσουμε καταρχήν στο πρώτο και κατόπιν στο τελευταίο έργο του.

Ο S.J. Gould έχει από πολύ νωρίς εντοπίσει πως η εξέλιξη των σφαιρίσεων δεν περιγράφεται πολύ καλά από τη «συμβατική» ιστορία και το πόσο παραπλανητικοί μπορούν να είναι ευρύτερα οι «μύθοι προέλευσης» («origin myths») ή και στενότερα οι «μύθοι δημιουργίας» («creation myths»). Το Cooperstown, ένα μικρό χωριό κοντά στη Ν. Υόρκη, είναι γνωστό για ένα γύψινο άνδρα, με ύψος πάνω από δέκα πόδια, που δήθεν ανακαλύφθηκε στην περιοχή από εργάτες που έσκαβαν, τον Οκτώβριο του 1869. Για πολλούς Αμερικάνους αποτελεί κάτι επιστημονικώς ανεξήγητο και το προεκτείνουν προς τις αρχές της ανθρωπότητας στην Αμερικάνικη ήπειρο. Δεν είναι καθόλου δύσκολο να αντιληφθεί κανείς πως πρόκειται για αποκύημα της φαντασίας ενός αγύρτη καπνοβιομήχανου, της ευρύτερης περιοχής. Επισημαίνουμε επιπλέον, πως η περίπτωσή παρουσιάζει ενδιαφέρον κι ως προς την εκ του Freud συσχέτιση των αρχών της ψυχανάλυσης με τις πρώτες αρχαιολογικές σκαπάνες της εποχής που διάνοιξαν το σχετικό επιστημονικό πεδίο, μα κατ’ επέκταση και με τις σφαιρίσεις εν γένει, καθώς υποστηρίζει κι ο διαπρεπής παλαιοντολόγος. Το Cooperstown είναι πρωτίστως γνωστό και «βρίσκεται στο χάρτη», λόγω ενός διαφορετικού και καθώς προκύπτει διόλου ασθενέστερου μύθου προέλευσης. Εκλαμβάνεται ως ιερός γενέθλιος τόπος, στην «επίσημη» αφήγηση ως προς την προέλευση του baseball.

Οι μύθοι προέλευσης, μπορούν να προκαλέσουν τεράστια πρακτικά προβλήματα κι αντίθετα από την επίσημη αφήγηση δεν είναι ο Abner Doubleday, που επινοεί το baseball στο Cooperstown το 1839. Όπως επισημαίνει ο S. J. Gould, στην πραγματικότητα, κανείς δεν επινόησε το baseball, σε κάποια στιγμή ή σε οποιοδήποτε σημείο. Παρ' όλα αυτά, είναι πολύ σημαντικό στοιχείο του Αμερικάνικου πολιτισμού, που έχει μια μακρά και ενδιαφέρουσα ιστορία. Μπορούμε να συμπληρώσουμε ότι τα παραπάνω επεκτείνονται εν γένει ως προς την ανάπτυξη των σφαιρίσεων και πέραν της Αμερικής, πέραν επίσης του παρελθόντος και του παρόντος τους. Ο συγγραφέας αναφέρει πως θα κάνει τραβηγμένες αναλογίες ανάμεσα στο baseball και τη ζωή, τις οποίες μάλλον δεν αποφεύγει κατόπιν, στο βιβλίο του Fullhouse.

Είναι πάντως πολύ χαρακτηριστική η αντίθεση ανάμεσα στις αναφερόμενες σε δημιουργία αφηγήσεις και στις αναφερόμενες σε εξέλιξη αφηγήσεις, που αμφότερες εκλαμβάνονται ως ιστορικές. Οι ιστορικές αφηγήσεις ως προς τέτοιες αρχές και προελεύσεις εκλαμβάνονται κατά δυο τρόπους. Ή κάποια οντότητα έχει ρητό σημείο προέλευσης, ένα συγκεκριμένο χρόνο και τόπο δημιουργίας, ή αλλιώς εξελίσσεται και δεν έχει (επακριβώς) προσδιοριζόμενη στιγμή εισόδου στον κόσμο. Το baseball παρέχει ένα ενδιαφέρον παράδειγμα αυτής της αντίθεσης, επειδή γνωρίζουμε την απάντηση και μπορούμε να διαφωτιστούμε εκ των δύο κύριων και συχνά αντικρουόμενων κριτηρίων, του εξωτερικού γεγονότος και της εσωτερικής ελπίδας. Το baseball εξελίχθηκε από μια πληθώρα προηγούμενων παιχνιδιών με μπαστούνι και μπάλα (stick and ball games). Δεν έχει καμία αλήθεια η προέλευση εκ του Cooperstown, ούτε ο ρόλος του Abner Doubleday, που ήθελε να αναδείξει ο A. G. Spalding της ομώνυμης βιομηχανίας. Εκτός από βιομήχανος είναι και εκ των πρώτων - αν όχι ο πλέον πρώτος μεγάλος pitcher του baseball κατά τη διάρκεια της προηγούμενης αθλητικής καριέρας του. Καθώς φαίνεται δε, προτιμάται το μοντέλο της δημιουργίας, επειδή έτσι μπορούμε να έχουμε ήρωες και ιερούς τόπους. Αντιπαραθέτοντας το χαρακτηριστικό μύθο του Cooperstown με την εξέλιξη του baseball και των σφαιρίσεων, μπορούμε να μάθουμε κάτι για τις πολιτιστικές μας πρακτικές και τη συχνή έλλειψη σεβασμού τους προς την αλήθεια. Δεν είναι όμως και υπερβολή να επισημάνουμε ως προς τα παραπάνω, πως οι Η.Π.Α. μπορούν να θεωρηθούν ως αρκετά μεγάλες για να μην εκληφθούν ως σκέτο σημείο του χώρου. Ούτε επίσης θεωρείται εύκολα ως χρονικό σημείο, κάποιος μισός ή ένας αιώνας, σε σχέση με τη διάρκεια ζωής κάποιας προσωπικότητας όπως του Spalding. Καθώς διαπιστώνεται εύκολα, η προαναφερόμενη βιομηχανία έφτιαξε κατόπιν και τις επίσημες μπάλες άλλων διάσημων Αμερικάνικης προέλευσης σφαιρίσεων, όπως το basketball και το volleyball. Έπειτα από τη μάλλον ραγδαία επιτυχία αυτών, ο Spalding, συνέστησε μια επιτροπή επιφανών ανδρών, με σκοπό να διερευνήσει και να βρει τις απαρχές του baseball. Μετέπειτα της παρέδωσε ένα γράμμα που έλαβε και το οποίο ανέφερε ότι 1839 χρόνια μετά τη γέννηση του Χριστού και 58 χρόνια πριν, ο Doubleday, είχε διακόψει ένα παιχνίδι μαρμάρων (αμάδων), πίσω από το μαγαζί του ράφτη στο Cooperstown. Σχεδίασε το διάγραμμα ενός γηπέδου baseball, και περίπου ως άλλος Μωυσής εξήγησε τους κανόνες του παιχνιδιού, καθορίζοντας έτσι τη δράση στην εν λόγω σφαίριση. Ο Doubleday, «κατά σύμπτωση» ήταν επίσης ένας ήρωας του Αμερικάνικου εμφυλίου, ένας πολύ μεγάλης καριέρας αξιωματικός που φέρεται ότι έριξε την εναρκτήρια βολή του (υποτίθεται επίσης πως βρισκόταν σε άμυνα), κατοπινό μέλος και πρόεδρος της θεοσοφικής κοινωνίας.

Η παραπάνω ανεπαρκής εξήγηση οφείλεται στον υπέρμετρο πατριωτισμό κάποιου που αποφάσισε ότι η πατρίδα του χρειάζεται ένα εθνικό χόμπι, το οποίο πρέπει να είναι αυτόχθον. Η ιδέα ότι το baseball είχε εξελιχθεί από μια ευρεία ποικιλία «Εγγλέζικων» σφαιρίσεων με μπαστούνι και μπάλα (bat and ball games), παρότι μπορεί να αληθεύει, δεν ταίριαζε και δεν ταιριάζει ακόμα με τη μυθολογία ενός φαινομένου, τόσο κυρίαρχου στις Η.Π.Α. (Κυρίαρχο ακόμα και για τον Gould, όπως του καταλογίζει ο Dawkins κι όχι μόνον). Δεν σημαίνει βεβαίως πως για παράδειγμα η Ευρώπη δεν έχει τους αντίστοιχους μύθους προσώπων, τόπων και χρόνων. Κάλλιστα αντί του Spalding και μια αφήγηση για την ανάπτυξη του baseball, μα και των basketball, volleyball κ.α. σφαιρίσεων, θα μπορούσαμε π.χ. να αναφερθούμε στην αντιστοίχως ισχυρή επίδραση του Charles Alcock, την ανάπτυξη του Cricket, του Ποδοσφαίρου, του Rugby κ.α. σφαιρίσεων, Ευρωπαϊκής ή «Εγγλέζικης» προέλευσης. Δεν είναι δύσκολο να αποδοθούν μυθικές διαστάσεις, σε συμβάντα όπως η διεξαχθείσα στην Αγγλία συνάντηση Alcock και Spalding, όπου βρέθηκαν αντίπαλοι ως παίκτες του baseball (Szymanski, 2009). Μύθοι ως αυτοί δεν αποκλείεται όμως και να ξεπεραστούν, ή κιόλας να αντικατασταθούν από άλλους τέτοιους μύθους, και στις δυο μεριές του Ατλαντικού, είτε παραπέρα. Ο Spalding, από καιρό λογομαχούσε φιλικά, με τον Henry Chadwick, έναν άλλο πρωτοπόρο επιχειρηματία των πρώτων χρόνων του baseball, που γεννήθηκε στην Αγγλία. Ο τελευταίος αντιμετώπιζε το θέμα αρκούντως ως αστείο, ισχυριζόταν δε για χρόνια χωρίς όμως να δίνει και πολύ σημασία, ότι αυτό είχε αναπτυχθεί από ένα Βρετανικό παιχνίδι με μπαστούνι-και-μπάλα, γνωστό ως Rounders. Υποστήριζε κιόλας ότι μια Εγγλέζικη προέλευση δεν αναιρεί το παραμικρό από την αξία του, καθώς επρόκειτο αναμφισβήτητα πλέον για απόλυτα Αμερικανικό άθλημα, και ένα παιχνίδι πλήρως προσαρμοσμένο στο χαρακτήρα των Η.Π.Α.. Πάντως το baseball, έχει Hall of Fame στο Cooperstown, καθότι εκεί «ταιριάζει» καλύτερα η στέγασή του, καθότι δεν θα έλειπε και τόσο από τις γεμάτες μουσεία μεγαλουπόλεις όπως η Ν. Υόρκη και Βοστόνη. Δεν είναι εν προκειμένω δύσκολο να διακρίνουμε κάποιες αναλογίες, με το μουσείο του Rugby στην Αγγλία για παράδειγμα, ή με αυτό του Μαραθωνίου δρόμου στο Μαραθώνα, ώστε να σκεφθούμε ως προς την τοπική περιφερειακή ανάπτυξη (ή αναλόγως υπανάπτυξη) τέτοιων περιοχών. Επιπλέον όμως μπορούμε να αναλογιστούμε κι ως προς τις κατά περίπτωση συνθήκες που οδηγούν δισεκατομμύρια ανθρώπων να ασχολούνται με κάποια σφαίριση όπως το baseball, ή το rugby, ή να τρέχουν 42 και πλέον χιλιόμετρα τη φορά. Πρόκειται άλλωστε για ένα δρόμο στον οποίο αναφέρεται κι ο Gould, ενώ ως προς το αγαπημένο του baseball και το μύθο του δηλώνει πολύ επιεικής, καθώς κι ότι δεν το κρίνει με το νου αλλά με την καρδιά.

Έτσι λοιπόν το baseball κι εν γένει οι σφαιρίσεις, σύμφωνα με τα διαθέσιμα στοιχεία εξελίσσονται και οφείλουμε να αναρωτηθούμε γιατί εδώ και τόσο καιρό αυτά αξιολογούνται τόσο ανεπαρκώς και γιατί μύθοι δημιουργίας, όπως αυτός με τον Doubleday και το Cooperstown βρίσκουν τέτοιο βήμα και τόση απήχηση. Η απάντηση που δίνεται, αναφέρεται στους εξής δυο λόγους:

α) το εμπόδιο που τίθεται εκ της έλξης την οποία ασκούν στους ανθρώπους οι «δημιουργιστικές» ιστορίες. Σε αυτό σκόνταψε προφανώς μεταξύ άλλων κι ο J. Bernoulli, με δεδομένη την αδυναμία του να εξηγήσει εξελικτικά την προέλευση της τεράστιας ποικιλίας των φαινομένων που παρατηρεί, μα και την μεγάλη διανοητική προσπάθεια που καταβάλει για τα μαθηματικά που παράγει. Άρα και πιο δικαιολογημένα σε σχέση με οιονδήποτε κάνει κάτι αντίστοιχο σήμερα. Είναι όμως πέραν των προθέσεων του παρόντος να αποδοθεί σε αυτόν, στο Δαρβίνο, στο Shannon, ή άλλο σπουδαίο επιστήμονα, μια θέση ως αυτή που είχε στο νου του ο Spalding για τον Doubleday.

β) το αρνητικό εμπόδιο των άγνωστων πηγών, που βρίσκονται εκτός της συνήθους αρμοδιότητας των ιστορικών (πηγές που δεν τους είναι οικείες). Σε αυτό σκοντάφτουν όλοι οι ιστορικοί, που δεν είχαν, ή και δεν έχουν ακόμη, τις στοιχειώδεις γνώσεις αυτών των διεργασιών. Δεν ήσαν άλλωστε οι ιστορικοί που καθοδήγησαν την ανθρωπότητα προς τις εξελικτικές εξηγήσεις, αν και δεν αποκλείονται βεβαίως από την υπέρβασή τους. Δεν είναι εύκολη υπόθεση, ας μην ξεχνάμε ακόμα περισσότερο ότι ακόμα κι επιστήμονες όπως ο Shannon, που έχει καταφέρει να περάσει τη συμβολική λογική σε κυκλώματα με διακόπτες, που αντιλαμβάνεται τις εξελικτικές διεργασίες, που δείχνει σεβασμό στην ιστορία του Juggling, δεν θα διακρίνει τα πάμπολλα μοτίβα του που γνωρίζουμε μετά το Siteswap (και τα οποία δεν σχετίζονται πολύ με την ιστορία των προηγούμενων).

Στη συνέχεια ο Gould γράφει ότι τα Εγγλέζικα παιχνίδια με μπαστούνι και μπάλα, που παίζονταν το δέκατο ένατο αιώνα, μπορούν να ταξινομηθούν χονδρικά σε δύο κατηγορίες, που βρίσκονται σε συμφωνία με κοινωνικές διαιρέσεις. Πρώτα επισημάνουμε αφενός ότι οι εν λόγω προγονικές σφαιρίσεις περιγράφονται έτσι ως Εγγλέζικες και το μεταγενέστερο baseball ως Αμερικάνικο, σύμφωνα και με πολλές άλλες συγγένειες κι αφετέρου ότι αυτές ενδεχομένως περιγράφονται καλύτερα ως παιχνίδια με μπάλα και μπαστούνι (με διαφορετική σειρά αναφοράς, δηλωτική της προέλευσης από άλλα παιχνίδια με μπάλα καταρχήν, μια πάντα). Οι δε κοινωνικές διαιρέσεις που καθόρισαν τις παραπάνω σφαιρίσεις έχουν ως εξής:

- Οι ανώτερες και μορφωμένες τάξεις έπαιζαν Cricket, και η ιστορία αυτής της σφαίρισης τεκμηριώνεται από άφθονα στοιχεία, καθώς οι λόγιοι γράφουν για τα δικά τους συμφέροντα, και καθότι οι δραστηριότητες των ισχυρών είναι καλά καταγεγραμμένες και αποτελούν το σύνολο σχεδόν της ιστορίας που προορίζεται για τα σχολεία.
- Οι ταπεινοί εργαζόμενοι άνθρωποι έπαιζαν κάποια άλλη σφαίριση με μπαστούνι και μπάλα, που υπάρχει σε διάφορες μορφές και έχει οριστεί από πολλά ονόματα, όπως "rounders" στη δυτική Αγγλία, "feeder" στο Λονδίνο, «base ball» στη νότια Αγγλία. (Τότε και για καιρό ακόμη γράφονταν στα Αγγλικά με δυο λέξεις - όχι μονολεκτικά, όπως γράφονται πλέον και πολλές από τις υπόλοιπες σφαιρίσεις, ενώ επιπλέον παίζονται κατά κανόνα και με έναν τύπο μπάλας - όχι με δυο). Για πολλούς λόγους, που κατά το συγγραφέα συνιστούν ουσιαστική διαφορά μεταξύ του cricket και του baseball, οι αγώνες του πρώτου μπορούσαν να διαρκέσουν έως και αρκετές ημέρες, ενώ ο ελεύθερος χρόνος των εργαζόμενων που έπαιζαν το δεύτερο ήταν σκέτα ώρες.

Ο Gould διακρίνει ότι η πρώιμη ιστορία του baseball των εργαζομένων, παρουσιάζει το ίδιο πρόβλημα μη ορατότητας – προσπέλασης από τους συμβατικούς ιστορικούς, καθώς και την ίδια υπόσχεση για την έρευνα στις πηγές, που τους είναι ανοίκειες. Επισημαίνουμε και πάλι την αναλογία με την ιστορία του απώτερου παρελθόντος των έμβιων, όμως δεν είναι απαραίτητο να είμαστε τόσο προσκολλημένοι στον όποιο τύπο παρελθόντος. Εντωμεταξύ η ιστορία του παραπάνω sport κι όχι μόνον, γίνεται όλο και πιο ακαδημαϊκά αξιοσέβαστη, αλλά οι γενικές γραμμές της (και πολύ συναρπαστικές λεπτομέρειες) έχουν πλέον εδραιωθεί. Καθώς οι ανώτερες τάξεις έπαιζαν ένα κωδικοποιημένο και καλά τεκμηριωμένο Cricket, οι εργαζόμενοι έπαιζαν σε μεγάλο βαθμό κάποιο μη καταγεγραμμένο και πολύ πιο διαφοροποιημένο σύνολο από παιχνίδια με μπαστούνι και μπάλα, προγονικά του baseball. Άμα το έχει υποψιαστεί κανείς βρίσκει επίσης πολλές πηγές για να το υποστηρίξει, στις οποίες συμπεριλαμβάνεται και η Jane Austen. Μπορεί όμως ενδεχομένως κιόλας κάποιος να υποψιαστεί τον Gould για υπερβολική αφοσίωση στο baseball, που τον εμποδίζει να διακρίνει ορθώς αν και κατά πόσο οι ισχυροί επιβάλλουν ή όχι τα γούστα τους, κατά πόσον αυτά είναι διαχρονικά και ποιες μπορούν να είναι οι μελλοντικές τάσεις τους. Σφαιρίσεις όπως το baseball επέζησαν σε μεγάλο βαθμό ως παιδικά παιχνίδια, αόρατα επίσης για τους συμβατικούς ιστορικούς. Ο Gould, αναγνωρίζει εντέλει δύο βασικούς λόγους που χάρισαν σε αυτά τα παιχνίδια στην ευρύτερη φήμη και οδήγησαν σε μια κωδικοποίηση των κανονισμών και τυποποίηση της μορφής τους.

α) Μια σειρά από κοινωνικούς λόγους, από την πτώση του πουριτανισμού ως την αυξημένη ανησυχία για την υγεία και την υγιεινή στις πυκνοκατοικημένες πόλεις, έκαναν τον αθλητισμό μια αποδεκτή δραστηριότητα για τους ενήλικες.

β) Άνθρωποι μεσαίας τάξης και επαγγελματίες άρχισαν να παίρνουν στα χέρια τους κάποιες πρώιμες μορφές ως οι παραπάνω, και με αυτή την ανοδική κοινωνική στροφή προέκυψαν σύλλογοι, πρωταθλήματα, γραπτοί κανόνες, στολές, γήπεδα, βιβλία οδηγιών, ή με λίγα λόγια, όλα τα σύνεργα της συμβατικής ιστορίας.

Ο Gould δεν υποστηρίζει ότι οι τα πρώιμα παιχνίδια θα μπορούσαν επίσης να ονομαστούν baseball, με μερικές ασήμαντες διαφορές, μα ότι υφίσταται μια σύνθετη προέλευση από την οποία αυτό προέκυψε, τελικά σε μια κωδικοποιημένη και κανονική μορφή. Αναδεικνύει ένα πραγματικό πρόβλημα αυτό της κακής αντίληψης της ιστορικής εξέλιξης των σφαιρίσεων που δεν είναι γραμμική και που πράγματι οι συμβατικοί ιστορικοί δεν περιγράφουν σε ικανοποιητικό χρονικό βάθος. Εν τούτοις ενδεχομένως παραγνωρίζει την προγραμματική διάσταση των σφαιρίσεων, ως προς τις χρονολογημένες εξελίξεις τους, μα και ως προς τις αχρονολόγητες, δεδομένου ότι υπάρχει ακόμη και συνέχεια. Ότι μπορεί δηλαδή κάποιο υποκείμενο, συλλογικό έστω, να προδιαγράψει μία σειρά προγραμματιζόμενων ενδεχομένων εξελίξεων, που πιθανώς δεν θα συμβούν έτσι ακριβώς όπως προκαθορίζονται, όμως να σημαδέψουν εκ των προτέρων σε μεγάλο βαθμό τις πραγματικές μελλοντικές εξελίξεις, κατά πως θα διαπιστωθεί εκ των υστέρων. Ως προς τις χρονολογημένες εξελίξεις, ο Spalding και η εταιρεία του μπορεί να μην πέρασαν την απάτη τους με τον Doubleday και να μην τον καθιέρωσαν όσο θα ήθελαν, όμως δεν είναι άσχετοι με το ότι εκατομμύρια αμερικανών παίζουν baseball και όχι κάτι άλλο.

Ο Gould αναδεικνύει ένα πραγματικό πρόβλημα, αυτό της κακής αντίληψης της ιστορικής εξέλιξης των σφαιρίσεων που δεν είναι γραμμική και που πράγματι οι συμβατικοί ιστορικοί δεν περιγράφουν σε ικανοποιητικό χρονικό βάθος. Εν τούτοις ενδεχομένως παραγνωρίζει την προγραμματική διάσταση των σφαιρίσεων, ως προς τις χρονολογημένες εξελίξεις, μα και ως προς τις αχρονολόγητες, δεδομένου ότι υπάρχει και συνέχεια. Ότι μπορεί δηλαδή κάποιο υποκείμενο, συλλογικό έστω, να προδιαγράψει μία σειρά προγραμματιζόμενων ενδεχομένων εξελίξεων, που πιθανώς δεν θα συμβούν έτσι ακριβώς όπως προκαθορίζονται, όμως να σημαδέψουν εκ των προτέρων σε μεγάλο βαθμό τις πραγματικές μελλοντικές εξελίξεις, κατά πως θα διαπιστωθεί εκ των υστέρων. Ως προς τις χρονολογημένες εξελίξεις, ο Spalding και η εταιρεία του μπορεί να μην πέρασαν την απάτη τους με τον Doubleday και να μην τον καθιέρωσαν όσο θα ήθελαν, όμως δεν είναι άσχετοι με το ότι εκατομμύρια αμερικανών παίζουν baseball και όχι κάτι άλλο.

Ο Gould αναφέρει πως με την επίσκεψή του σε ένα μουσείο, αντιλήφθηκε ο ίδιος ότι τα πολλά που γνώριζε ως προς ένα μουσικό είδος της αρεσκείας του, ήσαν πολύ λίγα σε σύγκριση με το όσα του αποκαλύπτονταν ως προς το απώτερο παρελθόν της. Αν π.χ. ο Δαρβίνος περιοριζόταν στη στενή ιστορική εξέταση δεν θα διατύπωνε τις υποθέσεις του δεν θα έφθανε στον προσδιορισμό ηλικίας της γήινης ζωής στα δις έτη, την εξέλιξη των ειδών κι όλα αυτά τα συμπεράσματά του που δεχόμαστε ως επιστημονικώς ορθά. Δεν είναι μόνον η συμβατική ιστορική εξέταση προβληματική, είναι επίσης και η συμβατική κοινωνιολογική προσέγγιση και ευρύτερα κάθε προσέγγιση ανθρωπιστικών επιστημών που παραγνωρίζει οτιδήποτε πέραν του ανθρωπογενούς περιβάλλοντος, ή κινείται εντός ακόμη στενότερων ορίων. Οι θεράποντες οιασδήποτε ανθρωπιστικής επιστήμης που ενίοτε έχουν γράψει εκατοντάδες σελίδες ως να μην έχουν συναντήσει στη ζωή τους κάποιο φυτό, ή ζώο άλλο πέραν από ανθρώπους επώνυμους, σε περιπτώσεις όπως αυτές των σφαιρίσεων χάνουν μάλλον κάτι σημαντικό ως προς τις πηγές τους, μα και ως προς τις τάσεις τους. Κάτι παρεμφερές με εκείνο που διαπίστωσε ως προς το μουσικό παρελθόν, μπορεί να ισχύει επίσης ως προς το παρελθόν και το μέλλον των σφαιρίσεων, για τον Gould κι όχι μόνον. Περιοριζόμενος κανείς αρκετά στενά σε ένα είδος σφαίρισης όπως το baseball, δεν αποκλείεται να παραπλανηθεί ως προς τις ευρύτερες εξελικτικές διεργασίες που αφορούν τις σφαιρίσεις γενικότερα. Ακόμα και κάποιος πολύ εξοικειωμένος, αν όχι και ειδικός επί «άλλων» εξελικτικών διεργασιών. Οποιοσδήποτε τέτοιος βαθύς γνώστης, δεν καθίσταται αυτομάτως «ειδικός» επί των σφαιρίσεων, επί της μουσικής, επί της θεατρικής τέχνης κ.λπ. όταν τόσοι πολλοί άνθρωποι εξειδικεύονται σε πάμπολλες πολύ μικρότερες εκφάνσεις τους, για παράδειγμα παίζοντας κάτι με έναν τύπο μπάλας, με ένα – δυο μουσικά όργανα κ.λπ., ή και παρακολουθώντας τα μόνον. Η τεχνητή επιλογή ιδίως, η οποία οδήγησε το Δαρβίνο στη σύλληψη της φυσικής επιλογής, μπορεί να έχει ιδιαίτερη σημασία ως προς την ανάπτυξη των σφαιρίσεων. Δεν έχουμε πλέον να διασταυρώσουμε πτηνά όπως έκαναν παλαιόθεν οι εκτροφείς τους, για να επιβεβαιώσουμε ότι μπορεί να λειτουργεί έτσι και η φυσική επιλογή σε μεγαλύτερο βάθος χρόνου. Ούτε έχουμε βεβαίως καθήκον να διασταυρώσουμε σφαιρίσεις για να παράγουμε άλλες πλέον κατάλληλες, δεν θα έβλαπτε όμως και υπό τέτοιο σκεπτικό να εξετάσουμε τις στρεβλώσεις που παράγουν οι σημερινές, ώστε να τις βελτιώσουμε και να τις εμπλουτίσουμε. Η προέλευση των σημερινών σφαιρίσεων, δεν συνδέεται μόνον με πιο πρώιμα είδη σφαιρίσεων, κι αυτές του μέλλοντος δεν θα προέρχονται απαραιτήτως από τις σημερινές. Όπως χαρακτηριστικά σημείωνε ο J. Bernoulli τα μαθηματικά αντλούν από πολλές πηγές, ενώ καθώς δείχνουν τα πράγματα αρδεύουν κιόλας πολλές επιστήμες κι όχι μόνον.

Υπό κάποιο τέτοιο σκεπτικό, είναι μάλλον ευνόητο ότι τα μαθηματικά μπορούν να αντλούν κι από τις σφαιρίσεις όπως έδειξε ο ίδιος, καθώς και να τις αρδεύουν επίσης.

Ο Gould στο *«Full House, The Spread of Excellence from Plato to Darwin»* (1996), υπέδειξε καταρχήν τα αίτια για το ότι ήσαν φθίνοντα, κατά το μεγαλύτερο μέρος του 20ου αιώνα, τα βέλτιστα ποσοστά επιτυχίας χτυπημάτων που καταγράφηκαν σε κάθε μια σεζόν baseball. Δήλωνε φανατικός οπαδός της και πρόκειται για μια πολύ δημοφιλή σφαίριση στις Η.Π.Α. κι όχι μόνον. Οπωσδήποτε ξέφυγε από κάποιες πολύ τετριμμένες, μα και λανθασμένες εξηγήσεις. Η δική του ειδίκευσή δεν τον ώθησε όμως πολύ παραπέρα από το «είδος» baseball, ή και λίγα ακόμα είδη σφαιρίσεων. Παρομοίως λίγα, μπορούμε ασφαλώς να πούμε πως θα ήσαν και τα είδη ζώων που θα γνώριζε κάποιος πρωτόγονος γύρω από την περιοχή που ζούσε, ή τα μουσικά είδη και οι σκοποί που θα είχε στο νου του, κ.λπ. Ασύγκριτα λιγότερα βεβαίως από τα έμβια είδη που ο Gould ασφαλώς γνώριζε πολύ καλύτερα.

Το βιβλίο αφορά την εξάπλωση της αριστείας από τον Πλάτωνα έως τον Δαρβίνο. Τον τίτλο ο ίδιος τον δικαιολογεί εκ του στιγμιαίου συναρπαστικού Αρχιμήδειου «εύρηκα» που τον έκανε να δει τις εξελικτικές τάσεις με εντελώς διαφορετικό τρόπο. Ήτοι, ως αλλαγές στην ποικιλία εντός των πλήρων συστημάτων, παρά ως ένα «πράγμα που κινείται είτε πάνω είτε κάτω». Αναφέρει ότι το συγκεκριμένο βιβλίο τον απασχολούσε για 15 χρόνια και είχε τρεις διαφορετικές ρίζες:

α) μια ενόραση για τη φύση των εξελικτικών τάσεων που του ήρθε στο κεφάλι μια μέρα, ώστε αναθεώρησε τις προσωπικές σκέψεις του ως προς την ιστορία της ζωής, και πήρε την τεχνική μορφή της σε μια ομιλία του για την Παλαιοντολογική Κοινωνία (Paleontological Society)

β) ένα στατιστικό «εύρηκα» που του προσέφερε μεγάλη ελπίδα και άνεση κατά τη διάρκεια μιας απειλητικής για τη ζωή του ασθένειας, στην οποία αναφέρεται στο 4^{ο} μέρος και

γ) μία επεξήγηση που, μόλις την αντιλήφθηκε, του φάνηκε ως αυτονόητη και απαραίτητα σωστή, αλλά και διαμετρικά αντίθετη προς όλες τις παραδοσιακές ερμηνείες, για ένα μεγάλο ερωτηματικό παζλ της αμερικανικής λαϊκής κουλτούρας, όπως η εξαφάνιση μιας επίδοσης στο baseball. Καταλήγει έτσι πως τα δύο κύρια θέματα που συνδέει στο βιβλίο του:

- η πτώση της επίδοσης του 0.400 στο hitting του baseball, και
- το πρόβλημα της προόδου στην ιστορία της ζωής.

Ο Gould δηλώνει και παίκτης του πόκερ, ώστε προκαλεί από την αρχή του βιβλίου τον αναγνώστη σε ένα στοίχημα. Αν εκείνος επιμείνει μέχρι το τέλος θα ανταμειφθεί (ίσως ακόμα και με κάποιο φλος ρουαγιάλ που υπερτερεί του δικού του σκέτου φουλ). Στη συνέχεια γράφει λίγο πολύ κάτι αρκετά καλά διαπιστωμένο από τους βιολόγους, ότι είναι σχεδόν αδύνατο να αναπτυχθεί μια εξελικτική σκέψη πάνω στην Πλατωνική ουσιοκρατία, καθότι οι ουσίες, όντας αμετάβλητες στο χώρο και το χρόνο, είναι αδιάστατα φαινόμενα. Ήτοι, αν δεν έχουν ποικιλομορφία, δεν είναι δυνατόν να εξελίσσονται, ή να εμφανίζονται μέσα από αυτές αρχόμενα είδη. Πολύ καιρό πριν, μόνον βακτήρια ζούσαν στη γη, τώρα μια πολύ ευρύτερη ποικιλία που περιλαμβάνει τον Homo Sapiens (Gould, 1996). Η πολύ πιο σύγχρονη Δαρβινική σκοπιά, μας βοηθά να αντιληφθούμε καλύτερα ένα ευρύ φάσμα ζητημάτων που μας μπερδεύουν, από την εξαφάνιση της επίδοσης του 0.400 hitting στο baseball ως την έλλειψη των σύγχρονων Mozart και Bethoveen.

Έτσι, το δεύτερο κύριο παράδειγμά του, για την εξάπλωση της αριστείας πάντοτε, αναφέρεται στην κοινή πεποίθηση πολλών ανθρώπων ότι η διαδικασία της εξέλιξης είναι προσανατολισμένη σε πιο σύνθετους οργανισμούς, μέσα από το επιστημονικό πεδίο της βιολογίας. Το συγκεκριμένο βιβλίο εστιάζει στο πώς ένα είδος στατιστικής παρανόησης οδηγεί σε παρερμηνείες σημαντικών φαινομένων όπως αυτά των παραδειγμάτων του. Η παρανόηση προκύπτει από την απόδοση προσοχής μόνο στις ακραίες τιμές, υψηλές βαθμολογίες κ.λπ., εκεί όπου υπάρχει μια συνεχής κατανομή των τιμών και είναι αυτή που στην πραγματικότητα καθορίζει τα συμβάντα. Αυτή τη συνεχή κατανομή άλλωστε υποδηλώνει και ο τίτλος που παραπέμπει στο χαρτοπαικτικό «φουλ».

Εν προκειμένω θα αναφερθούμε λιγότερο στο δεύτερο παράδειγμα, αυτό της βιολογίας, όπου θα επισημάνουμε ότι υφίσταται και πολλές διαφορετικές γνώμες. Ο Gould σημειώνει ότι πολλοί άνθρωποι πιστεύουν λανθασμένα ότι η διαδικασία της εξέλιξης έχει μια προτιμητέα κατεύθυνση, πως κατά το πέρασμα του χρόνου, έχει την τάση να φτιάχνει οργανισμούς πιο σύνθετους και πιο πολύπλοκους. Διαπιστώνει πως όσοι πιστεύουν ότι η εξέλιξη ενέχει μια τάση προόδου συχνά την υποδηλώνουν με την παράθεση μιας σειράς οργανισμών αυξανόμενης πολυπλοκότητας που εμφανίστηκαν σε διαφορετικούς αιώνες. Για παράδειγμα «βακτήρια, φτέρες, δεινόσαυροι, σκυλιά, άνθρωπος». Ο Gould ισχυρίζεται πως οι όλο και πιο πολύπλοκοι οργανισμοί, είναι η μια μόνον πλευρά που έχει η κατανομή της πολυπλοκότητας κι όποιος κοιτάζει αυτή μόνο βλέπει το δέντρο μα χάνει το δάσος. Βασίζεται κυρίως στο ότι οι πιο κοινοί οργανισμοί ανέκαθεν ήσαν και εξακολουθούν να είναι, τα βακτήρια. Η κατανομή της πολυπλοκότητας περιορίζεται στη μία πλευρά της, καθώς οι ζωντανοί οργανισμοί δεν μπορούν να είναι πολύ απλούστεροι από ό, τι τα βακτήρια. Έτσι κάποιος αμερόληπτος τυχαίος περίπατος της εξέλιξης, που θα καθοδηγείται μερικές φορές προς την πολυπλοκότητα και άλλες προς την απλότητα (χωρίς να έχει εγγενή προτίμηση προς τη μια ή την άλλη) θα σχηματίζει μία κατανομή με ένα μικρό, αλλά όλο και πιο μακρύτερο άκρο στην πλευρά της υψηλής πολυκότητας.

Επί του παρόντος θα σταθούμε κυρίως στο πρώτο παράδειγμα, κάπως διευρυμένα κιόλας, αφού κι ο συγγραφέας, δεν περιορίζεται στην προαναφερόμενη σφαίριση και μόνον. Στον πρόλογο και σε ένα ολόκληρο μέρος του έργου, το τρίτο μέρος, αναφέρεται στις σφαιρίσεις ευρύτερα και περισσότερο απ' όλες στο baseball. Δεν θα σταθούμε ιδιαίτερα στο πως παίζεται, στους κανονισμούς του κ.λπ., όσο στις διαπιστώσεις του συγγραφέα. Ο Gould γράφει θέτοντας καταρχήν το προβλημα, οτι όπως το σούμο ευνοεί αυτόν που είναι βαρύς έτσι και το baseball μπορεί να είναι μαγνήτης για αυτόν που ενδιαφέρεται για τα στατιστικα στοιχεία. Άλλωστε όπως επίσης αναφέρει εκεί έχουμε πλέον και τα sabermetrics, στα οποία άλλωστε συχνά αναφέρονται οι Αμερικάνοι κυρίως συγγραφείς. Οι σφαιρίσεις γενικότερα βρίθουν στατιστικών στοιχείων. Ο Gould διερωτάται ρητορικά, πού αλλού μπορεί να βρει κανείς κάποιο σύστημα, χωρίς αλλαγές κανονισμών για έναν αιώνα (και άρα να επιτρέπει συγκρίσεις με νόημα) ενώ συνάμα να κρατάει πλήρη αρχεία ενεργειών και κατορθωμάτων και μάλιστα υπό αριθμητικό τύπο. Κάποια τέτοια διαπίστωση μας ωθεί να σκεφθούμε ότι κι ο J. Bernoulli δεν καταπιάστηκε ενδεχομένως τόσο τυχαία με την Jeu de Paume. Ασφαλώς όμως μπορούμε να έχουμε και μία αντίθετη ανάγνωση από αυτή του Gould, εφόσον εστιάζουμε πρωτίστως στις σφαιρίσεις. Γιατι δηλαδή να μην κοιτάξουμε από την άλλη σκοπιά, για τις αντιστοιχίσεις με τα ζωικά είδη για παράδειγμα, που έχουν τόσο μακραίωνη ιστορία.

Το ερώτημα που ο Gould απάντησε στο baseball ειδικότερα, ήταν πως παλαιότερα σημειωνόταν συγκριτικά πολύ πιο συχνά μια συγκεκριμένη επίδοση (ένα «σχετικό ρεκόρ», όπως το επεξηγεί, κάποιου παίκτη με μέσο όρο 0,400 και άνω). Η συνήθης ερμηνεία που έδιναν οι αφοσιωμένοι οπαδοί της ιστορίας του baseball ήταν η νοσταλγική επίκληση «υπήρχαν γίγαντες εκείνες τις ημέρες». Δεν είχαν μάλλον αναρωτηθεί επαρκώς γιατί δεν υπήρχαν αντίστοιχοι γίγαντες να τους αντιμετωπίσουν. Μπορούμε να υπενθυμίσουμε σχετικώς ότι στο volleyball, το κάρφωμα που είναι διεθνώς κυρίαρχη επιθετική στρατηγική, αναπτύχθηκε δεκαετίες πριν το «μπλοκ», τη διεθνώς κυρίαρχη αμυντική στρατηγική επιλογή, άρα γι αυτό το διάστημα δεν υπήρχε και πολύ αποτελεσματική άμυνα (http://www.volleyball.org/history.html).

Ο Gould κατέρριψε τους παραπάνω ισχυρισμούς με πολύ συστηματικό τρόπο, καθώς πρότεινε την εξέταση στα συνολικά ποσοστά, όχι μόνο σε αυτά των κορυφαίων παικτών, σε διάφορες στατιστικές κατηγορίες. Έδειξε ότι τα χειρότερα ποσοστά δεν είναι τόσο κακά όσο ήσαν άλλοτε (Gould, 1985). Ισχυρίστηκε έτσι ότι αυτό που περιγράφει πραγματικά την κατάσταση καλύτερα, ήταν ότι είχε επέλθει κάποια σταθεροποίηση του παιχνιδιού, κατόπιν κάποιας συνολικής μείωσης στην ποικιλία του. Διαπιστώνει ορθά πως *όταν το* baseball ήταν νέο, τα στυλ του παιχνιδιού δεν είχαν ρυθμιστεί επαρκώς, ώστε να εξουδετερώνουν αυτά που επιτύγχαναν «για πλάκα» οι πλέον καλύτεροι παίκτες. Αν κατά το προαναφερθέν παράδειγμα φανταστούμε κάποιο σημερινό παίκτη του volleyball να παίζει χωρίς αντίπαλο μπλοκ, δεν θα μας προξενούσε εντύπωση να έχει εξαιρετικά στατιστικά. Κάπως έτσι κι ο διάσημος παίκτης του basketball, W. Chamberlain έλεγε κι ο ίδιος για τον τεράστιο αριθμό πόντων του σε έναν αγώνα, ότι απλώς κάποτε διπλασίασε το μ.ο. του, όπως συμβαίνει και με τους υπόλοιπους. Επισημαίνουμε κι ότι τα σκορ στο basketball δεν ήσαν εξαρχής υψηλά, καθώς αρχικά οι επιθέσεις δεν κατέληγαν σε καλάθια, όχι βεβαίως λόγω της αποτελεσματικότητας των αμυντικών. Μπορούμε να συμπληρώσουμε ότι πλέον όμως έχει επέλθει κάποια σταθεροποίηση των επιδόσεων, ακόμα και τα ποσοστά ευστοχία των ελεύθερων βολών, που εκτελούνται άνευ αντιπάλου. Ο Gould επισημαίνει ότι οι αμυντικοί παλιά δεν ήξεραν ακόμη που θα έπρεπε να είναι, ενώ αργότερα, οι παίκτες κινήθηκαν προς βέλτιστες μεθόδους τοποθέτησης, οπότε η ποικιλία αναγκαία έφθινε. Ακολούθως όμως, δηλαδή ακόμη και οι σημερινοί αξιότεροι παίκτες, συναντούν μια αντιπαλότητα πολύ καταλληλότερα ανταποκρινόμενη στη δική τους αξιοσύνη, που δεν επιτρέπει τα ακραία κατορθώματα που χαρακτήριζαν μια πιο ανέμελη εποχή. Με άλλα λόγια, μέσα από μια διαδοχική προσέγγιση των στρατηγικών, στην αντιμετώπιση της καθεμιάς από την άλλη, το σύστημα επικάθισε σε μια ισορροπία.

Ο Gould επεξεργάστηκε δεκάδες στατιστικά για να καταδείξει ότι μια τέτοια μείωση της ποικιλίας πράγματι συνέβη, εκτός των περιστασιακών εξαιρέσεων. Και πράγματι οι εξαιρέσεις επιβεβαιώνουν τη θέση του, επειδή συμβαίνουν αμέσως έπειτα τη διατάραξη της ισορροπίας από κάποια έξωθεν παρεμβατική αλλαγή. Όποτε αλλάζουν οι κανονισμοί του παιχνιδιού, όποτε νέες ομάδες και πολλοί νέοι παίκτες εισέρχονται κι όταν λαμβάνει χώρα μια επέκταση του παιχνιδιού, ή όποτε η τεχνολογία αλλάζει (π.χ. χρησιμοποιείται μια νέα μπάλα ή άλλα καινούργια αντικειμενικά δεδομένα) το προηγούμενο σύστημα των αμοιβαίων βέλτιστων απαντήσεων βγαίνει εκτός ισορροπίας. Η ποικιλία αυξάνεται για λίγο καθώς οι παίκτες πειραματίζονται, και κάποιοι επιτυγχάνουν, ενώ άλλοι αποτυγχάνουν. Εντέλει μια νέα ισορροπία επέρχεται και η ποικιλία ξαναπέφτει.

Ένα από τα κεφάλαια που μας ενδιαφέρει ιδιαιτέρως, αναφέρεται στα ρεκόρ σε άλλα σπορ. Σε αυτό ξεκαθαρίζει ευθύς ότι τα μεγάλα ρεκόρ στο baseball είναι σχετικά – ήτοι αξιολογούν τις επιδόσεις ενάντια σε άλλους παίκτες σε ρόλο αντιπάλου. Δεν είναι απόλυτα, στη βάση κάποιας προσωπικής επίδοσης που λογαριάζεται, ζυγίζεται, ή χρονομετρείται από ρολόϊ. Ένα ρεκόρ του baseball επιτυγχάνεται απέναντι σε αντίπαλους συμπαίκτες, κάποια επίδοση ρεκόρ των 4 λεπτών για το μίλι, ή η άρση 250 κιλών συνδέεται με τον αμετάβλητο εξωτερικό κόσμο.

Οι βελτιώσεις των σχετικών ρεκόρ είναι διφορούμενες, καθώς επιδέχονται πολλές πιθανές (και μερικές διαμετρικά αντίθετες) ερμηνείες. Κάποια αύξηση στο μέσο όρο του batting θα μπορούσε να σημαίνει ότι έχει βελτιωθεί αυτός ο τύπος χτυπήματος. Η ίδια αύξηση θα μπορούσε επίσης να σημαίνει ότι έχει χειροτερέψει, ο συνδεόμενος με αυτόν άλλος τύπος χτυπήματος, το pitching, που μπορεί να έχει επιδεινωθεί ακόμη πιο πολύ κι οπότε το ρεκόρ αποτελεί συνέπεια συγκριτικού πλεονεκτήματος.

Ο Gould γράφει στη συνέχεια ότι τα απόλυτα ρεκόρ έχουν ένα πιο ξεκάθαρο νόημα, καθώς αν οι προπορευόμενοι δρομείς τρέχουν γρηγορότερα και οι άλτες πηδούν ψηλότερα τι μπορούμε να πούμε; Επισημαίνουμε ότι αυτά τα απόλυτα ρεκόρ που αναφέρει ο Gould, καθίστανται κάπως λιγότερο απόλυτα, αν λάβουμε υπόψη μας ότι συνδέονται και με την τυποποίησή τους. Μπορούμε όμως να κάνουμε και κάποιες επισημάνσεις, για παράδειγμα, ως προς τους ρίπτες. Όλες οι κατηγορίες τους ρίχνουν με κάποιο πανομοιότυπο βλήμα, το οποίο αν ενδεχομένως ήταν έστω και λίγο διαφορετικό σε μέγεθος, σχήμα, κ.α. ιδιότητες θα μπορούσε να οδηγεί σε κάπως διαφορετικά ρεκόρ. Μα και σε κάπως άλλες κατανομές, υπό την έννοια ότι θα μπορούσε να καταστήσει κάτοχο του ρεκόρ εκείνον που τώρα είναι 2^{ος}, ή 5^{ος} (όχι όμως 100^{ος}). Επιπλέον, μπορούμε όμως να υποθέσουμε για παράδειγμα ένα διαγωνισμό ρίλιθοβολίας, στον οποίο θα διάλεγε ο καθένας το λίθο που θα έκρινε πως πέταγε μακρύτερα (ή και πιο εύστοχα), που θα επιτρεπόταν έστω να τον ψάξει οπουδήποτε, ή ακόμα και να τον δανειστεί από άλλο. Για έναν τέτοιο διαγωνισμό μπορούμε να πούμε ότι θα ήταν πιο άδικος σε σχέση με άλλον όπου θα έριχναν όλοι με τον ίδιο, τον οποίο θα τον είχαν διαλέξει ενδεχομένως άλλοι, ή και όλοι, όμως ίσως ευνοούσε συγκριτικώς κάποιον, έτσι όπως προαναφέραμε;

Στα απόλυτα ρεκόρ εκτιμά και ο ίδιος ο Gould ότι δεν μπορούμε να αρνηθούμε το γεγονός της προόδου και στη συνέχεια πηγαίνει να το επιβεβαιώσει στο Μαραθώνιο. Εκεί σημειώνει τη θεαματική βελτίωση των ρεκόρ γι' άνδρες και γυναίκες, αναφέροντας αρκετά διάσημα ονόματα αθλητών-τριών και ρεκόρ. Δεν αναφέρει την ακόμα πιο εντυπωσιακή ίσως αύξηση της συμμετοχής στον πλέον γνωστό αγώνα αντοχής.

Ο Μαραθώνιος προσφέρεται ιδιαίτερα για να δει κανείς πολύ καλά αυτό που επεσημαίνει ο Gould και ενδεχομένως για να το επεκτείνει περαιτέρω. Η για τους πολλούς εξαντλητική διαδρομή των 42 και πλέον χιλιομέτρων, ολοκληρώνεται από κάποιους σε κάτι λίγο περισσότερο από δυο ώρες κι αυτοί αποτελούν το δεξί άκρο της κατανομής. Υπάρχει όμως κι αντίθετο άκρο, όπου πέραν των πολύωρων επιδόσεων για τις οποίες δεν ενδιαφέρεται σχεδόν κανείς, συναντάμε αρκετούς θανάτους και θανάσιμους τραυματισμούς. Καθώς βέβαια έχουμε συνηθίσει να λογαριάζουμε τους δρόμους αντοχής στη βάση της απόστασης, καθώς και να μη λαμβάνουμε υπόψη τους μη ενασχολούμενους, συναντάμε τους πλέον γρήγορους δρομείς στο αριστερό άκρο.

Είναι αρκετά ευνόητο ότι αν έστω ανακαθορίσουμε το Μαραθώνιο ως αγώνα μεγάλης αντοχής και πάλι, που να διεξάγεται βάσει χρόνου κι όχι βάσει απόστασης, θα έχουμε στο δεξί άκρο τους ταχύτερους, οι οποίοι θα καλύπτουν μεγαλύτερη απόσταση. Αν μάλιστα συμπεριλάβουμε και τους μη συστηματικούς δρομείς στα αριστερά τότε καταλήγουμε ότι αυτό το δεξί άκρο καθίσταται ακόμη πιο λεπτό και μακρύ. Στη βάση του χρόνου των δυο ωρών το δεξί άκρο θα καταλαμβάνεται από εκείνους τους λίγους που σε αυτό το το χρονικό διάστημα καλύπτουν 40χλμ. κι άρα η μέση ταχύτητά τους είναι 20χλμ/ώρα. Οι ίδιοι στις 3 ώρες μπορούν να καλύψουν λίγο λιγότερα από 60χλμ, ενώ για τη συντριπτική πλειονότητα η κάλυψη και των 40χλμ στις 3 ώρες είναι ένας ανέφικτος στόχος. Ακόμα κι ο σκέτος τερματισμός στο Μαραθώνιο, υποτίθεται πως αποτελεί τίτλο τιμής, όμως και πολλοί άνθρωποι πεθαίνουν ή τραυματίζονται θανάσιμα προσπαθώντας να τερματίσουν. Είναι ευνόητο ότι αυτοί θα γλίτωναν τη ζωή τους αν ο αγώνας αντοχής ορίζονταν στη βάση του χρόνου κι ότι οι πλέον γρήγοροι θα έτρεχαν δυνητικά ακόμα μεγαλύτερες αποστάσεις.

Ο αρκετά διάσημος εξελικτικός επιστήμονας R. Dawkins ασκεί μια εκτενή και πολύ χαρακτηριστική κριτική για το «Full House» και ιδίως ως προς τη σκέψη αντιπαραβολής των τυπικών εξελικτικών διεργασιών (όπως τις εννοεί ο ίδιος μέσα από το επιστημονικό πεδίο του) με τις σφαιρίσεις (Dawkins, 1997). Γράφει ότι η κεντρική ιδέα του βιβλίου είναι απλά να δείξει πως μια τάση που δείχνει «προφανής» σε μια ορισμένη μέτρηση μπορεί να μη σημαίνει τίποτα παραπάνω από μια διαφορά στη διακύμανση (variance), που συχνά συνδυάζεται με κάποιο ακρότατο, ανώτατο ή κατώτατο.

Συνοψίζει ότι οι σύγχρονοι παίκτες του baseball δεν μπορούν να επιτύχουν πλέον κάποια επίδοση όπως το 0.400 του προαναφερθέντος βιβλίου, που ότι κι αν αφορά - προφανώς είναι κάτι πολύ καλό. Η μείωση σε ποσοστά επιτυχίας όπως αυτό είναι τεχνητή και παρόμοια στατιστικά τεχνουργήματα παράγουν γενικεύσεις σε λιγότερο επιπόλαια (frivolous) πεδία. Κατόπιν ισχυρίζεται πως αυτό δεν χρειάζεται και πολύ για να εξηγηθεί, αλλά το baseball καταλαμβάνει 55 ολόκληρες σελίδες γραμμένες αυτού του κατά τα άλλα διαυγούς βιβλίου. Γι αυτό κρίνει πως πρέπει να διαμαρτυρηθεί κάπως εκ μέρους εκείνων των αναγνωστών που ζουν σε αυτό το σκοτεινό και ελάχιστα γνωστό μέρος που ονομάζεται υπόλοιπος κόσμος. Παραθέτει κατόπιν ένα απόσπασμα σχετικό με το cricket και γεμάτο με τη δική του ειδική ορολογία και καλεί τους Αμερικανούς να φανταστούν πως θα ήταν να περιστρεφόταν ένα ολόκληρο κεφάλαιο γύρω από κάτι τέτοιο. Συμπεραίνει ότι οι αναγνώστες στην Αγγλία, στις Ινδίες, στην Αυστραλία, κι αλλού όπου παίζεται η παραπάνω σφαίριση, θα μπορούσαν να κατανοήσουν κάθε λέξη, αλλά οι Αμερικανοί, αν άντεχαν μια σελίδα ή δύο, κατόπιν θα διαμαρτύρονταν.

Κατόπιν αναφέρει πως η εμμονή του J. Gould με το baseball είναι ακίνδυνη, μάλιστα και στις μικρές δόσεις που έχουμε μέχρι τώρα συνηθίσει, είναι κι ελαφρώς αξιαγάπητη. Αλλά αυτή η υβριστική αλαζονεία να θέλει να διατηρήσει την προσοχή των αναγνωστών μέσα από έξι κεφάλαια γεμάτα baseball, ισοδυναμεί με αμερικανικό σοβινισμό (και υποπτεύεται Αμερικανικό αρσενικό σοβινισμό σε αυτό). Είναι το είδος της μαλθακότητας που ο συγγραφέας θα πρέπει να προστατευτεί από το συντάκτη και τους φίλους πριν από τη δημοσίευση - και απ 'όσο γνωρίζω προσπάθησαν. Ο R. Dawkins πλέκει το εγκώμιο του J. Gould που είναι κανονικά πολιτισμένος κοσμοπολίτης, πρόσχαρος στο πνεύμα κι επιτήδειος στο στυλ, ενώ μετέπειτα προχωράει στην κριτική του υπόλοιπου βιβλίου. Αναφέρει ξανά ελάχιστες φορές το baseball, αποδοκιμαστικά σε κάθε περίπτωση, ώσπου στο τέλος κλείνει με αυτό. Καταλήγει γράφοντας πως η προσπάθεια του J. Gould να μειώσει οποιαδήποτε πρόοδο προς ένα ασήμαντο, τύπου baseball τεχνούργημα, αποτελεί απρόσμενη φτωχοποίηση, μια αχαρακτήριστα μικρή, μια ασυνήθιστη ταπείνωση του πλούτου των εξελικτικών διαδικασιών.

Ο ίδιος ο R. Dawkins στο «Εγωιστικό Γονίδιο» φεύγει από τα πολλά αριθμητικά δεδομένα και περιγράφει πιο πολύ με λέξεις το γεράκι – περιστέρι, τη μάχη των φύλων και άλλα της εξελικτικής θεωρίας παιγνίων, κινούμενος πολύ περισσότερο στο πλαίσιο της εξελικτικής θεωρίας από την πρωταρχική τυπική σκοπιά της, παρά από παιγνιοθεωρητική σκοπιά (Dawkins, 1998). Τα παίγνια σχετίζονται με είδη και σε άλλα βιβλία του, στον «ποταμό της ζωής» τιτλοφορεί ένα αρκετά μεγάλο κι ενδιαφέρον κεφάλαιο, η συνάρτηση ωφελείας του Θεού (αν και είναι αρκετά διάσημος ως κατήγορος των θρησκειών, περισσότερο κι από το J. Gould), γενικά για τον R. Dawkins εφόσον υπάρχουν γένη και είδη για τα παίγνια αυτά είναι βιολογικά. Δυσκολεύεται να διακρίνει είδη σφαιρίσεων, καθώς ενδεχομένως δεν έχει στο νου του κάποια πολύ μεγάλη ποικιλία τους, ή καθώς δεν κάνει μια αναλογία ούτε με τους γενετικά τροποποιημένους οργανισμούς και την ποικιλία που μπορούν να παράγουν οι εξελικτικοί επιστήμονες. Έχουν τη δυνατότητα, έστω κι αν κρίνεται ότι αυτή είναι ανεπιθύμητη σε σχέση με την τεράστια επίσης ποικιλία ειδών που μπορούν να παράγουν καλλιτέχνες σε τέχνες όπως η μουσική και το θέατρο, ή και στις σφαιρίσεις εντέλει.

Επιπλέον, μπορούμε όμως να υποθέσουμε για παράδειγμα ένα διαγωνισμό ρίψεων, κάποιας λιθοβολίας έστω, στον οποίο θα διάλεγε ο καθένας το λίθο που θα έκρινε πως πέταγε μακρύτερα (ή και πιο εύστοχα), που θα επιτρεπόταν έστω να τον ψάξει οπουδήποτε, ή ακόμα και να τον δανειστεί από άλλο. Για έναν τέτοιο διαγωνισμό μπορούμε να πούμε ότι θα ήταν πιο άδικος σε σχέση με άλλον όπου θα έριχναν όλοι με τον ίδιο, τον οποίο θα τον είχαν διαλέξει ενδεχομένως άλλοι, ή και όλοι, όμως ίσως ευνοούσε συγκριτικώς κάποιον, έτσι όπως προαναφέραμε; Στα απόλυτα ρεκόρ εκτιμά και ο ίδιος ο Gould ότι δεν μπορούμε να αρνηθούμε το γεγονός της προόδου και στη συνέχεια πηγαίνει να το επιβεβαιώσει στο Μαραθώνιο. Εκεί σημειώνει τη θεαματική βελτίωση των ρεκόρ γι’ άνδρες και γυναίκες, αναφέροντας αρκετά διάσημα ονόματα αθλητών-τριών και ρεκόρ. Δεν αναφέρει την ακόμα πιο εντυπωσιακή ίσως αύξηση της συμμετοχής στον πλέον γνωστό αγώνα αντοχής.

Ο Μαραθώνιος προσφέρεται ιδιαίτερα για να δει κανείς πολύ καλά αυτό που επεσημαίνει ο Gould και ενδεχομένως για να το επεκτείνει περαιτέρω. Η για τους πολλούς εξαντλητική διαδρομή των 42 και πλέον χιλιομέτρων, ολοκληρώνεται από κάποιους σε λίγο περισσότερο από δυο ώρες κι αυτοί αποτελούν το δεξί άκρο της κατανομής. Υπάρχει όμως κι αντίθετο άκρο, όπου πέραν των πολύωρων επιδόσεων για τις οποίες δεν ενδιαφέρεται σχεδόν κανείς, συναντάμε αρκετούς θανάτους και θανάσιμους τραυματισμούς. Εφόσον βέβαια έχουμε συνηθίσει να λογαριάζουμε τους δρόμους αντοχής στη βάση της απόστασης, καθώς και να μη λαμβάνουμε υπόψη τους μη ενασχολούμενους, συναντάμε τους πλέον γρήγορους δρομείς στο αριστερό άκρο.

Είναι αρκετά ευνόητο ότι αν έστω ανακαθορίσουμε το Μαραθώνιο ως αγώνα μεγάλης αντοχής και πάλι, που να διεξάγεται βάσει χρόνου κι όχι βάσει απόστασης, θα έχουμε στο δεξί άκρο τους ταχύτερους, οι οποίοι θα καλύπτουν μεγαλύτερη απόσταση. Αν μάλιστα συμπεριλάβουμε και τους μη συστηματικούς δρομείς στα αριστερά τότε καταλήγουμε ότι αυτό το δεξί άκρο καθίσταται ακόμη πιο λεπτό και μακρύ. Στη βάση του χρόνου των δυο ωρών το δεξί άκρο θα καταλαμβάνεται από εκείνους τους λίγους που σε αυτό το το χρονικό διάστημα καλύπτουν 40χλμ. κι άρα η μέση ταχύτητά τους είναι 20χλμ/ώρα. Οι ίδιοι στις 3 ώρες μπορούν να καλύψουν λίγο λιγότερα από 60χλμ, ενώ για τη συντριπτική πλειονότητα, η κάλυψη και των 40χλμ στις 3 ώρες είναι ένας ανέφικτος στόχος. Ακόμα κι ο σκέτος τερματισμός στο Μαραθώνιο, υποτίθεται πως αποτελεί τίτλο τιμής, όμως και πολλοί άνθρωποι πεθαίνουν ή τραυματίζονται θανάσιμα προσπαθώντας να τερματίσουν. Είναι ευνόητο ότι αυτοί θα γλίτωναν τη ζωή τους αν ο αγώνας αντοχής ορίζονταν στη βάση του χρόνου. Επιπλέον οι μη διατρέχοντες τέτοιο κίνδυνο, πλέον γρήγοροι/ρες αθλητές/τριες θα κάλυπταν τρέχοντας ακόμα μεγαλύτερες αποστάσεις.

Ο αρκετά διάσημος εξελικτικός επιστήμονας R. Dawkins ασκεί μια εκτενή και πολύ χαρακτηριστική κριτική για το «Full House» και ιδίως ως προς τη σκέψη αντιπαραβολής των τυπικών εξελικτικών διεργασιών (όπως τις εννοεί ο ίδιος μέσα από το επιστημονικό πεδίο του) με τις σφαιρίσεις (Dawkins, 1997). Γράφει ότι η κεντρική ιδέα του βιβλίου είναι απλά να δείξει πως μια τάση που δείχνει «προφανής» σε μια ορισμένη μέτρηση μπορεί να μη σημαίνει τίποτα παραπάνω από μια διαφορά στη διακύμανση (variance), που συχνά συνδυάζεται με κάποιο ακρότατο, ανώτατο ή κατώτατο. Συνοψίζει ότι οι σύγχρονοι παίκτες του baseball δεν μπορούν να επιτύχουν πλέον κάποια επίδοση όπως το 0.400 του προαναφερθέντος βιβλίου, που ότι κι αν αφορά - προφανώς είναι κάτι πολύ καλό. Η μείωση σε ποσοστά επιτυχίας όπως αυτό είναι τεχνητή και παρόμοια στατιστικά τεχνουργήματα παράγουν γενικεύσεις σε λιγότερο επιπόλαια (frivolous) πεδία. Κατόπιν ισχυρίζεται πως αυτό δεν χρειάζεται και πολύ για να εξηγηθεί, αλλά το baseball καταλαμβάνει 55 ολόκληρες σελίδες, αυτού του κατά τα άλλα διαυγούς βιβλίου. Γι αυτό κρίνει πως πρέπει να διαμαρτυρηθεί κάπως εκ μέρους εκείνων των αναγνωστών που ζουν σε αυτό το σκοτεινό και ελάχιστα γνωστό μέρος που ονομάζεται υπόλοιπος κόσμος. Παραθέτει κατόπιν ένα απόσπασμα σχετικό με το cricket και γεμάτο με τη δική του ειδική ορολογία και καλεί τους Αμερικανούς να φανταστούν πως θα ήταν να περιστρεφόταν ένα ολόκληρο κεφάλαιο γύρω από κάτι τέτοιο. Συμπεραίνει ότι οι αναγνώστες στην Αγγλία, στις Ινδίες, στην Αυστραλία, κι αλλού όπου παίζεται η παραπάνω σφαίριση, θα μπορούσαν να κατανοήσουν κάθε λέξη, αλλά οι Αμερικανοί, αν άντεχαν μια σελίδα ή δύο, κατόπιν θα διαμαρτύρονταν.

Κατόπιν αναφέρει πως η εμμονή του J. Gould με το baseball είναι ακίνδυνη, μάλιστα και στις μικρές δόσεις που έχουμε μέχρι τώρα συνηθίσει, είναι κι ελαφρώς αξιαγάπητη. Αλλά αυτή η υβριστική αλαζονεία να θέλει να διατηρήσει την προσοχή των αναγνωστών μέσα από έξι κεφάλαια γεμάτα baseball, ισοδυναμεί με αμερικανικό σοβινισμό (και υποπτεύεται Αμερικανικό αρσενικό σοβινισμό σε αυτό). Είναι το είδος της μαλθακότητας που ο συγγραφέας θα πρέπει να προστατευτεί από το συντάκτη και τους φίλους πριν από τη δημοσίευση - και απ 'όσο γνωρίζω προσπάθησαν. Ο R. Dawkins πλέκει το εγκώμιο του συναδέλφου του J. Gould που είναι κανονικά τόσο πολιτισμένος κοσμοπολίτης, τόσο πρόσχαρος στο πνεύμα, τόσο επιτήδειος στο στυλ και μετέπειτα προχωράει στην κριτική του υπόλοιπου βιβλίου. Αναφέρει ξανά ελάχιστες φορές το baseball, αποδοκιμαστικά σε κάθε περίπτωση, ώσπου στο τέλος κλείνει με αυτό. Καταλήγει γράφοντας πως η προσπάθεια του J. Gould να μειώσει οποιαδήποτε πρόοδο προς ένα ασήμαντο, τύπου baseball τεχνούργημα, αποτελεί απρόσμενη φτωχοποίηση, μια αχαρακτήριστα μικρή, μια ασυνήθιστη ταπείνωση του πλούτου των εξελικτικών διαδικασιών.

Ο ίδιος ο R. Dawkins στο «Εγωιστικό Γονίδιο» φεύγει από τα πολλά αριθμητικά δεδομένα και περιγράφει λεκτικά το γεράκι – περιστέρι, τη μάχη των φύλων και άλλα της εξελικτικής θεωρίας παιγνίων, κινούμενος κυρίως στο πλαίσιο της εξελικτικής θεωρίας από την πρωταρχική τυπική σκοπιά της, παρά από παιγνιοθεωρητική σκοπιά (Dawkins, 1998). Τα παίγνια σχετίζονται με είδη και σε άλλα βιβλία του, στον «Ποταμό της Ζωής» τιτλοφορεί ένα αρκετά μεγάλο κι ενδιαφέρον κεφάλαιο, η συνάρτηση ωφελείας του Θεού (αν και είναι αρκετά διάσημος ως κατήγορος των θρησκειών, περισσότερο από το J. Gould). Για τον R. Dawkins εφόσον υπάρχουν γένη και είδη για τα παίγνια, αυτά είναι βιολογικά. Δυσκολεύεται να διακρίνει είδη σφαιρίσεων, καθώς ενδεχομένως δεν έχει στο νου του κάποια πολύ μεγάλη ποικιλία τους, ή καθώς δεν κάνει μια αναλογία ούτε με τους γενετικά τροποποιημένους οργανισμούς και την ποικιλία που μπορούν να παράγουν οι εξελικτικοί επιστήμονες. Έχουν τη δυνατότητα, έστω κι αν κρίνεται ότι αυτή είναι ανεπιθύμητη σε σχέση με την τεράστια επίσης ποικιλία ειδών που μπορούν να παράγουν κάποιοι καλλιτέχνες για παράδειγμα, σε τέχνες όπως η μουσική και το θέατρο, ή και στις σφαιρίσεις εντέλει. Σύμφωνα με το Βαρουφάκη, οι Dawkins και Gould είναι τα πρώτα ονόματα που χρειάζεται να ανακαλέσει κανείς αν πρόκειται να αναφερθεί στην εξελικτικές διεργασίες (Βαρουφάκης, 2007). Η γνώμη του Mayr είναι κάπως διαφορετική, καθώς δεν δείχνει να συμφωνεί με την επιδιωκόμενη δημοσιότητά τους και τους θεωρεί μάλλον ως επιστημονικούς «αστέρες» (Mayr, 2008). Ως προς τις σφαιρίσεις όμως και ειδικότερα το baseball, ο Gould δείχνει πως αντιλαμβάνεται τις εξελικτικές διεργασίες, με μεγάλη πράγματι ευρύτητα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Είναι δύσκολη και σύνθετη η απάντηση στο ερώτημα γιατί τόσοι πολλοί άνθρωποι ασχολούμαστε με τις σφαιρίσεις, γιατί παίζουμε καταρχήν έτσι όπως παίζουμε, ώστε να προσεγγίσουμε κατόπιν καλύτερα έτσι τις δομές και τις στρατηγικές ανάπτυξής τους. Είναι αρκετά ενδεικτικό ότι ακόμα κι αν κάποιος ενστερνίζεται μια τυπική προσέγγιση κάποιας εκ των ανθρωπιστικών σπουδών κι απαντήσει γιατί παίζουμε αυτές τις σφαιρίσεις κι όχι άλλες, εφόσον δεν συλλαμβάνει «στοχαστικά» τις τελευταίες, ενδέχεται και πάλι εν προκειμένω να «χάνει» κάτι σημαντικό.

Οι σφαιρίσεις που αναπτύσσει η ανθρωπότητα έχουν πολύ βαθιές ρίζες και μπορούν να πάρουν ακόμη περισσότερη ώθηση χάρη στην κοινωνία της πληροφορίας, όπως πήραν άλλωστε από τη βιομηχανική επανάσταση και εκ των συνεπειών της ως προς την απασχόληση και τον «ελεύθερο χρόνο». Η λογική της βιώσιμης ανάπτυξης, ενδεχομένως θα απαιτήσει αλλαγές και θα επιφέρει εξελίξεις και στις σφαιρίσεις για τις οποίες πιθανώς είναι περισσότερο ανυποψίαστοι πολλοί άνθρωποι που δεν διακρίνουν κάτι άλλο πέρα από λίγους σταθερούς τύπους τους.

Δεδομένου ότι στην εποχή μας υπάρχουν δισεκατομμύρια ανδρών που ασχολούνται με μια σφαίριση όπως το ποδόσφαιρο, που πρακτικά αγνοούν σχεδόν ισάριθμα δισεκατομμύρια γυναικών, ότι υπάρχουν μέρη της γης όπου ο γυναικείος πληθυσμός εμποδίζεται να παρακολουθήσει τους άνδρες να παίζουν (κάτι που μπορεί να μην είναι η πλέον ενδεδειγμένη λύση ακόμα κι αν αυτή υποστηρίζουν ανθρωπιστικές οργανώσεις όπως η Human Rights Watch και σκηνοθέτες όπως ο J. Panahi) κι άλλα μέρη της γης όπου δίνεται έμφαση στην ισότητα των οικονομικών ανταμοιβών γι άνδρες και γυναίκες, ή στην σχεδόν ίση εκπροσώπησή τους στις διοικήσεις των ομοσπονδιών, κρίνουμε πως προέχει η επίτευξη του σκοπού της περισσότερης ισότητας εντός των αγωνιστικών χώρων και πως εν προκειμένω αυτό πλέον δεν πρέπει να είναι σκέτη ευχή, μα είναι το κλειδί της πραγματικής ανάπτυξης.

Η προώθηση της ισότητας των όρων ενασχόλησης με τα sport γι άνδρες και γυναίκες προκύπτει ως στόχος από πολλά σημαντικά για τον αθλητισμό κείμενα. Αναφερόμαστε για παράδειγμα στον Ολυμπιακό Καταστατικό Χάρτη (https://www.dosb.de/fileadmin/Bilder_allgemein/Veranstaltungen/Olympische_Spiele/Dokumente/olympic_charter_2.8.2015.pdf). Τέτοια είναι η σχετική «Λευκή Βίβλος» της Ε.Ε. (http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EL/TXT/HTML/?uri=URISERV:l35010&from=EL. Είναι όμως πολύ χαρακτηριστικό πως παρόλα αυτά δεν συμβαίνει έτσι στην πράξη, κάτι που διαπιστώνεται εύκολα και επεκτείνεται θεωρητικώς προς την επίτευξη άλλων τέτοιων μεγάλων στόχων.

Εργάζομαι σε ένα Πανεπιστημιακό Γυμναστήριο, αυτό του Παντείου Πανεπιστημίου Κοινωνικών & Πολιτικών Επιστημών και είμαι συνιδριτικό μέλος στο Αμίλλημα - Ερευνητικό Κέντρο Παιχνιδιού και Άσκησης, που διοργανώνουν εδώ και καιρό ετησίως το «katatopia festival». Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω αναφορές, πρόκειται για πολύ μικρό εγχείρημα, κι ούτε είναι πολύ φιλόδοξο. Έχει απευθυνθεί πρωτίστως σε επίλεκτους φοιτητές/αθλητές-τριες των Ελληνικών Πανεπιστημίων, κι εμπεριέχει σε κάποιο βαθμό τα μέχρι τώρα συμπεράσματα του γράφοντος κι ορισμένες από τις εν προκειμένω κύριες προτάσεις. Δεν αποτελεί πάντως θεωρητική κατασκευή, μα κάποια συνεκτική δέσμη δράσεων οι οποίες αν δεν λειτουργούσαν πιθανώς θα το είχαν οδηγήσει σύντομα στην κατάρρευση, την οποία θα μπορούσε να επιταχύνει και η οικονομική κρίση που τα συνοδεύει εντελώς συμπτωματικά για οκτώ σχεδόν χρόνια, όσα έχει η εν λόγω διοργάνωση.

Σε αυτό το πλαίσιο, προτάχθηκε καταρχήν ως κύριος σκοπός η πραγματοποίηση μιας μεγάλης σειράς αγώνων μεταξύ ισότιμων και μικτών ως προς το φύλο ομάδων. Πέραν των έμφυλων σωματικών διαφορών, οι αθλητές και οι αθλήτριες (ορισμένοι είναι διεθνούς επιπέδου, όμως είναι αρκετές φορές περισσότεροι οι λιγότερο αναγνωρισμένης αξίας παίκτες) θα έπαιζαν και παίζουν μικτά και ως ίσος προς ίσο, ονομάστηκαν δε κατά συνέπεια «αγώνες φιλότητας & ισοτιμίας». Αρχικά, προτιμήσαμε να τους θέσουμε στο volleyball, καθώς ήταν ως προς το σκοπό μας το πλέον πρόσφορο εκ των σπορ, για πολλούς λόγους που σχετίζονταν κυρίως με τον τόπο και το χρόνο της πρώτης διεξαγωγής τους. Την εν λόγω ισότητα που επιτυγχάνεται αν το α μέρος επιτίθεται με άνδρες κι αμύνεται με γυναίκες, ενώ το β’ μέρος επιτίθεται με γυναίκες κι αμύνεται με άνδρες, θεωρητικά μπορούμε να την επιτύχουμε, ή και να την επεκτείνουμε, σε οιαδήποτε από τις ολυμπιακές σφαιρίσεις κι όχι μόνον. Έτσι, την περάσαμε στο beach volley, όπου και συνεχίζουμε έκτοτε, ενώ εντάξαμε στο πρόγραμμα και το tennis, επιτρέποντας στους διαγωνιζόμενους να αποκρούουν και χτυπήματα εκτός του πλαισίου γραμμών, να κάνουν και «διάσωση» δηλαδή. Στη συνέχεια, επεκταθήκαμε προς το table tennis, όπου καταργήσαμε το ενδιάμεσο δίκτυ, απομακρύναμε τα τραπέζια και δοκιμάσαμε άλλα σχήματα και υλικά τους, καθώς και διάφορες μεταξύ τους αποστάσεις. Ακολούθως, εντός του συγκεκριμένου πλαισίου είχαμε τις πρώτες δισφαιρίσεις (σε ποδόσφαιρο και basketball), δηλαδή παιχνίδια που διεξάγονται με δυο σφαίρες (μπάλες, ή άλλα παρεμφερή αντικείμενα), που εφόσον δεν είναι πανομοιότυπες κυκλοφορούν εκ περιτροπής σε κάποιες εκδοχές, ή σε άλλες κυκλοφορούν συγχρόνως, ενώ μπορούν επίσης θεωρητικά να επεκταθούν προς οιαδήποτε από τις ολυμπιακές σφαιρίσεις κι όχι μόνον. Δίνοντας έμφαση και πάλι στο ζήτημα του φύλου, που τίθεται και πέραν των γνωστών σφαιρίσεων, προσθέσαμε κάποιον αγώνα αντοχής, της κατηγορίας των δρόμων πιο συγκεκριμένα, όπου τονίσαμε τα πλεονεκτήματα της διεξαγωγής του στη βάση του χρόνου, αντί της απόστασης. Συζεύξαμε στο πλαίσιο των δισφαιρίσεων το πασίγνωστο basketball με την από αρκετές απόψεις υπανάπτυκτο και λιγότερο γνωστό δικό του «απόγονο» το korfball, που είναι όμως μικτό και τον καιρό που τέθηκε ήταν αρκετά προοδευτικό. Δεν παραβλέψαμε τα άτομα με αναπηρία, και ως εκ τούτου αναπτύξαμε σφαιρίσεις για ομάδες ατόμων με προβλήματα όρασης και πιο συγκεκριμένα, τη διεξαγωγή goalball με δυο μπάλες συγχρόνως και όπου προσεχώς σκοπεύουμε να προσθέσουμε κι έναν στόχο στο κέντρο του γηπέδου.

Στην προσεχή διοργάνωση έχουμε την πρόθεση να διαπραγματευτούμε ένα πιο ενδιαφέρον scoring system στο waterpolo, χωρίζοντας το στόχο (εν προκειμένω goalpost) σε δυο ίσες καταρχήν μεριές και προσδίδοντας άνισες αξίες στην επίτευξη τέρματος προς τη μια και την άλλη, κάτι που μπορούμε κι αυτό θεωρητικά να το επεκτείνουμε προς οιαδήποτε από τις σφαιρίσεις του προγράμματος των τελευταίων Ολυμπιακών Αγώνων, κι όχι μόνον. Μετριούνται στα δάκτυλα και οι υπόλοιπες σφαιρίσεις από την αναβίωση των Ολυμπιάδων, καθώς επίσης και οι σφαιρίσεις που μπορεί να υποστηριχθεί ότι διαθέτουν σημαντική κάπως μακραίωνη ιστορία, όπως π.χ το golf και το lacrosse. Καθώς δεν είναι ασφαλώς δύσκολο για κάποιον να τις παίξει ακόμη και όλες αν προγραμματίσει κάτι τέτοιο, όπως ούτε και να τις παραλλάξει όλες ποικιλοτρόπως, το ενδιαφέρον έγκειται σε ότι δεν πληρούν αυτές και το οποίο συνάμα δεν είναι καθόλου ακατόρθωτο να πληρωθεί, ιδίως εφόσον πρόκειται για κάποιον από τους διακηρυγμένους στόχους ευρύτερων κοινωνικών ομάδων. Διοργανωτικά, στρεφόμαστε έτσι προς αυτούς δίχως να κυνηγάμε ασφαλώς την ολυμπιάδα, ούτε βεβαίως κάθε κρατική, ή ιδιωτική χρηματοδότηση, απ' οπουδήποτε κι αν προέρχεται. Μας δίνει ελπίδα ότι οι καινοτόμες πρακτικές σε στόχους καθώς αυτός της ισότητας των φύλλων, ενισχύονται πλέον κι από Ευρωπαϊκά Προγράμματα για τα sport, όπως και οι 3 δράσεις - κλειδιά του Erasmus Plus της περιόδου 2014 – 2020 (https://www.erasmusplus.org.uk/key-resources-archive-2015-call). Οι καινοτομίες στις οποίες έχουμε εστιάσει από νωρίς, προωθούνται σε μεγάλο βαθμό δια μέσου ενός συστήματος που εφαρμόζουμε στις διοργανώσεις μας. Οι μισοί σχεδόν αγώνες σφαιρίσεων της εν λόγω διοργάνωσης διεξάγονται σύμφωνα με τις προτεινόμενες καινοτομίες, ενώ οι υπόλοιπες διεξάγονται «κανονικά» με τον πλέον αναγνωρίσιμο και οικείο προς όλους τους διαγωνιζομένους τρόπο.

Η μελλοντική προοπτική των σφαιρίσεων, είναι μια πολύ σημαντική διάστασή τους, παρότι, ούτε οι πλέον μεγάλες διεθνείς ομοσπονδίες, μήτε κανείς άλλος οσοδήποτε ισχυρός κι αν δείχνει, δεν μπορεί βεβαίως ντετερμινιστικά να την προκαθορίσει πλήρως. Είναι πολύ σημαντικό να διερευνούμε τις πολλές εναλλακτικές που μπορούμε να έχουμε πέραν εκείνων των σφαιρίσεων με τις οποίες είμαστε εξοικειωμένοι οι περισσότεροι-ρες. Άλλωστε επιδέχονται παραλλαγές, εξίσου, ή και περισσότερο ενδιαφέρουσες, ακόμα και για το ίδιο το κοινό τους, ενώ δεν αποκλείεται βεβαίως και η είσοδος καινούργιων που θα κατακτήσουν το δικό τους κοινό. Αν και δεν είναι καθόλου εύκολη υπόθεση οποιαδήποτε τέτοια διοργάνωση, είναι εντέλει σημαντικό τέτοιες σφαιρίσεις να διεξάγονται εμπράκτως και οι όποιες παραδόσεις τους να ανανεώνονται, καθώς μπορούν να προσφέρουν απόλαυση, αλλά και έμπνευση, όπως και να διορθώσουν αρκετές από τις επικρατούσες στρεβλές αντιλήψεις και τα λανθασμένα στερεότυπα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alchian, A. (1950), Uncertainty, Evolution and Economic Theory, *The Journal of Political Economy*, 58(3), pp. 211-221

Anderson, B. (1997). *Φαντασιακές Κοινότητες*, Αθήνα, Νεφέλη

Αριστοτέλης (1975). *Ηθικά Νικομάχεια* (μτφ. Δαλέζιος Α.), Αθήνα, Πάπυρος

Aumann, R. J. & Maschler, M.(1985). Game Theoretic Analysis of a bankruptcy Problem from the Talmud, *Journal of Economic Theory*, 36, pp.195-213

Βαρουφάκης, Γ. (2007). *Θεωρία Παιγνίων*, Αθήνα, Εκδόσεις Gutenberg

Bartholomew, D.J. (1996). *Στοχαστικά Μοντέλα σε Κοινωνικές Διεργασίες*, Αθήνα, Παπαζήσης

Benjamin, W. (2004). *Μονόδρομος*, Αθήνα, Άγρα

Benjamin, W. (1999). *Δοκίμια φιλοσοφίας της γλώσσας*, Αθήνα, Νήσος

Bernoulli, J. (1677). *Meditationes, Annotationes, Animadversiones Theologicae et. Philosophicae a me JB*, Basel, Basel University Library, MS L I a 3

Bernoulli, J. translated by Edith Sylla (1713/2006). *The Art of Conjecturing, together with Letter to a Friend on Sets in Court Tennis (English translation)*, Baltimore: Johns Hopkins Univ Press,

Bernoulli, J., translated by Oscar Sheynin (1713/2005). *On the Law of Large Numbers, Part Four of Ars Conjectandi (English translation)*, Berlin, NG Verlag

Bos Henk, J.M., (1984). Arguments on Motivation in the rise and decline of a Mathematical Theory; the "Construction of Equations, 1637-ca. 1750, *Archive for history of exact sciences*, 30, pp. 331-380

Brams, S. J. & Taylor. A. D. (1996). *Fair division: from cake-cutting to dispute resolution*, Cambridge, Cambridge University Press

Coase, R. (1937). The Nature of the Firm, 4(16), *Economica*, pp. 386-405

Coase, R. (1960). The Problem of the Social Cost, *The Journal of Law of Economics*, 3, pp. 1-44

Daston, L (1992). The Doctrine of Chances Without Chance: Determinism, Mathematical Probability, and Quantification in the Seventeenth Century in Eds Nye M. J. Richards, J. L.

Stuewer, R. H. *The Invention of Physical Science,* Springer Netherlands pp. 27-50

Daston, L (1995). *Classical Probability in the Enlightenment*, Princeton University Press

Daston, L. & Galison, P. (2007). *Objectivity*, Boston, Zone Books

Darwin, C. R. (1998). *Η καταγωγή των ειδών*, Πάτρα, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών

Dawkins, R. (1988). *Το εγωιστικό γονίδιο*, Αθήνα, Σύναλμα

Dawkins, R. (1995). *Ο ποταμός της ζωής: μια δαρβινική θεώρηση*, Αθήνα, Κάτοπτρο

Davis, M. (2007). *Μηχανές της λογικής. Η συνεισφορά των μαθηματικών στην ανάπτυξη των υπολογιστών: Ο δρόμος από τον Leibniz ως τον Turing*, Αθήνα, Εκκρεμές

Dearing, B. J. (2007). *The Untold Story of William G. Morgan Inventor of Volleyball*, Livermore, WingSpan Press

de Finetti, B. (1964). Foresight: its Logical Laws, Its Subjective Sources, (translation of the 1937 article in French) in H. E. Kyburg and H. E. Smokler (eds), *Studies in Subjective Probability,* New York: Wiley,

de Fineti, B. (1974). *Theory of probability: a critical introductory treatment,* Australia, John Wiley & Sons

de Finetti, B. (1989). "Probabilism: A Critical Essay on the Theory of Probability and on the Value of Science," (translation of 1931 article), *Erkenntnis,* 31

Dixit, K A. & Skeath S.(1999). *Games of Strategy*, New York, W.W. Norton & Co.

Dixit, K A. & Skeath S.(2004). *Games of Strategy (second ed.),* New York, W.W. Norton & Co.

Dopfer, K. (2006). *The Evolutionary of Foundation of Economics*, Cambridge, University Press

Du Sautoy, M.(2009). *Θεωρία ομάδων*, Αθήνα, Τραυλός

Eves, H. W. (1990). *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Boston, PWS-Kent

Fisher, R.A. (1958). Polymorphism and Natural Selection, *Journal of Ecology,* 46(2), pp. 289-293

Franklin, J. (2002). *The Science of Conjecture*: *Evidence and Probability before Pascal*, Baltimore, Johns Hopkins University Press

Friedman, M. (2012). *Καπιταλισμός και ελευθερία*, Αθήνα, Παπαδόπουλος

Gale, D. (1979). The game of Hex and the Brouwer fixed point theorem, *Amer. Math. Monthly*, 86(10), pp. 818–827

Gardner, H. (1987). *The Mind's New Science: A History of the Cognitive Revolution*. New

York, Basic Books

Gardner, R. (1995). *Games for business and economics*, New York Chichester, Wiley

Garbel, D. & Zabell, S. (1979) On the emergence of probability, *Archive for History Of Exact Sciences*, 21(1), pp. 33-52

Gelman, A., Carlin, J., Stern, H. and Rubin, D. (2009). *Bayesian Data Analysis*, (2nd ed), London, Chapman & Hall

Gillmeister, H. (1997). *Tennis: A Cultural History*, London, Leicester University Pres

Gintis, M. H. (2000). *Game theory evolving a problem-centered introduction to modelling strategic behaviour*, Princeton, Princeton University

Gould, J. S. (1985). *The Flamingo's Smile*, New York, W. W. Norton

Gould, J. S. (1989). *Wonderful Life: The Burgess Shale and the Nature of History*, New York,W. W. Norton

Gould, J. S. (1996). *Full House: The Spread of Excellence from Plato to Darwin*, New York, Harmony Books

Jamer, M. (2001). *Έννοιες του χώρου*, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Jullien, F. (2012). *Εγκώμιο της απραξίας : η αποτελεσματικότητα στην κινέζικη σκέψη*, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Haaparanta L. (2009). *The Development of Modern Logic*, New York, Oxford University Press

Hacking, I. (1971). Jacques Bernoulli's Art of Conjecturing, *The British Journal for the Philosophy of Science*, 22, 3, pp. 209-229

Hacking, I. (2006). *The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference*, Cambridge, Cambridge University Press

Harris, H.A. (1972). *Sport in Ancient Greece and Rome (Aspects of Greek and Roman Life)*, London, Thames and Hudson

Hald, A. (1990). *A history of probability and statistics and their applications* before 1750, New York, John Wiley

Hald, A.(1998). *A history of mathematical statistics from 1750 to 1930*, New York , John Wiley

Hald, A. (2004). *A History of Parametric Statistical Inference from Bernoulli to Fisher, 1713 – 1935*, Department of applied mathematics and statistics, University of Copenhagen

Hamilton, W. (1967). "Extraordinary sex ratios. A sex-ratio theory for sex linkage and inbreeding has new implications in cytogenetics and entomology", *Science*,156(774), pp.477–488

Hamlett, G. W. D. (1933). Polyembryony in the Armadillo: Genetic or Physiological?, *The Quarterly Review of Biology*, 8 (3), pp.348–358

Hayek, F. (2008). *Το σύνταγμα της ελευθερίας*, Αθήνα, Καστανιώτης

Hayward, R.B.& van Rijswijck, J. (2006). Hex and combinatorics, *Discrete Mathematics*, 306, pp.2515 – 2528

Hobsbawm, E., Ranger T. (2004). *Η επινόηση της παράδοσης*, Αθήνα, Θεμέλιο

Huizinga, J. (1989) *Ο Άνθρωπος και το παιχνίδι*, Αθήνα, Γνώση

Husserl, E. (2003). *Η προέλευση της γεωμετρίας* Αθήνα, Εκκρεμές

Kahneman, D. (2013) *Σκέψη, αργή και γρήγορη : συμπεριφορική οικονομική, μηχανισμοί λήψης αποφάσεων, γνωσιακή επιστήμη,* Αθήνα, Κάτοπτρο

Kahneman, D, Tversky, A. (2007). *Choices, values, and frames*, Cambridge, Cambridge University Press

Keynes M.J. (2001). *Η Γενική Θεωρία της Απασχόλησης, του Τόκου και του Χρήματος*, Αθήνα, Παπαζήση

Kirk, G.S., Raven, J.E. & Schofield, M. (2006). *Οι προσωκρατικοί φιλόσοφοι*, Αθήνα, ΜΙΕΤ

Κοτταρίδη, Κ. και Σιουρούνης, Γ. (2002). *Αφιέρωμα στον John Nash, θεωρία παιγνίων : οι εργασίες του στη θεωρία παιγνίων και οι επαναστατικές εφαρμογές της στις κοινωνικές και φυσικές επιστήμες,* Αθήνα, Ευρασία

Κουλούρη, Χ. (1997). *Αθλητισμός και όψεις της αστικής κοινωνικότητας Γυμναστικά και αθλητικά σωματεία (1870-1922),* Αθήνα, Γενική Γραμματεία Νέας Γενιάς

Kuhn, T.S. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago, University of Chicago Press

Landes, D. (2012). *Τα Γρανάζια του Χρόνου: τα ρολόγια και η δημιουργία του σύγχρονου κόσμου*, Αθήνα, ΜΙΕΤ

Link, D. (2006). Chains to the West: Markov's Theory of Connected Events and Its Transmission to Western Europe, *Science in Context* 19 (4), pp561–589

Liu, L. H. (2010). The Cybernetic Unconscious: Rethinking Lacan, Poe, and French Theory, *Critical Inquiry*, 36, (2) pp. 288-320

Λουκιανός (1999). *Περί αιρέσεων ή Ερμότιμος*, Αθήνα, Θύραθεν

Mano, M. M. (1992). *Ψηφιακή Σχεδίαση*, Αθήνα, Παπασωτηρίου

Maor E. (2005). *e: Η ιστορία ενός αριθμού*, Αθήνα, Κάτοπτρο

Maynard Smith, J. (1982). *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press

Mayr, E. (2005). *Τι είναι η εξέλιξη*, Αθήνα, Κάτοπτρο

Mayr, E. (2008). *Η ανάπτυξη της βιολογικής σκέψης,* Αθήνα, Μ.Ι.Ε.Τ

Μηλολιδάκης, Κ. (2009). *Θεωρία Παιγνίων. Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και*

Συνεργασίας, Αθήνα, Σοφία

Mlodinow, L. (2008). *The Drunkard's Walk*, New York, Pantheon Books

Myerson, R. B. (1997). *Game theory: analysis of conflict,* Cambridge, Mass., Harvard University Press

Nicholson, W. (2008). *Μικροοικονομική θεωρία: βασικές αρχές και προεκτάσεις*, Αθήνα, Κριτική

North, D. C. (1996). *Institutions, institutional change and economic performance*, Cambridge, Cambridge University Press

North, D. C. (2000). *Δομή και μεταβολές στην οικονομική ιστορία*, Αθήνα, Κριτική

Ξενοφών (2000). *Ξενοφώντος Ελληνικά* Βιβλία Δ-Ζ (Μτφρ. Ρόδης Ρούφος), Αθήνα, Ωκεανίδα.

Olson, M. (1991). *Η λογική της συλλογικής δράσης: δημόσια αγαθά και η θεωρία των ομάδων*, Αθήνα, Παπαζήσης

Ostrom, E. (2005). *Understanding Institutional Diversity,* New Jersey, Princeton University Press

Ostrom, E., Walker, J. & Gardner, R. (1991). *Rules, games, and common-pool resources,* Indiana, Indiana University

Πασκάλ, Μ. (2008). *Σκέψεις*, (μτφ. Κωστής Παπαγιώργης), Αθήνα, Καστανιώτη

Πλάτων (2014). *Φαίδων* (μτφ. Πετράκης, Ι.), Αθήνα, Βιβλιοπωλείο της Εστίας

Poundstone, W. (1993). *Prisoner's dilemma*, New York, Anchor

Savage, J. L. (1954). *The foundations of statistics*, New York, John Wiley & Sons

Scaino, A. (1984). *Treatise on the game of the ball*, London, Raquetier

Σέξτος, Ε. (1967). *Sextus Empiricus: in four volumes*/ with an english translation by R. G. Bury, London, William Heinemann

Schelling, C. T. (1978). *Micromotives and macrobehaviour,* New York, W.W. Norton

Schneider, I. (1984). The role of Leibniz and Jacob Bernoulli for tje developmental of propability theory, *LLULL*, 7, pp. 69-89

Schrödinger, E. (1996). *Κοντά στον άνθρωπο*, Αθήνα, Τραυλός - Κωσταράκης

Schumpeter, J. A. (1972). *Καπιταλισμός, Σοσιαλισμός και Δημοκρατία*, Αθήνα, ΚΕΠΕ

Shannon, C. (2006). *Θεωρία Πληροφοριών. Μια μαθηματική θεωρία της επικοινωνίας*, Αθήνα, Leader Books

Shannon, C. (1993). *Collected Papers.* (Ed. Sloane, N.J.A. and Wyner, A.D., New York, IEEE Press

Shubik, M. (1959). *Strategy and Market Structure*, New York, Wiley

Shubik, M. (1959*). Edgeworth Market Games*," in Contributions to the Theory of Games (A. W. Tucker and R. D. Luce, eds.), 1959, Princeton, Vol. IV, 267-278. [Reprinted in: Mathematische Wirtshafts-theorie, Cologne: Verlag Kiepenheuer.]

Shubin, N. (2009). *Το ψάρι μέσα μας*, Αθήνα, Κάτοπτρο

Smith, D. E. & Mikami Y. (1914). *A History of Japanese Mathematics*. Chicago: Open court Pub. Co.

Σταμάτης, Ε. (1970). *Άπαντα του Αρχιμήδη* – Τόμος Α΄, Αθήνα Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδας

Sylla, E. D. (1998). The Emergence of Mathematical Probability from the Perspective of the Leibniz-Jacob Bernoulli Correspondence, *Perspectives on Science* 6.1&2, pp. 41-76

Sylla, E. D. (2013). Jacob Bernoulli and Mathematics in tennis, *Nuncius*. 28, 1, pp.142-163

Sylla, E. D. (2014) Tercentenary of *Ars Conjectandi* (1713): Jacob Bernoulli and the Founding of Mathematical Probability, *Issue International Statistical Review*, 82, 1, pp. 27-45

Sweezy, M., P. (1964). *Η θεωρία της καπιταλιστικής ανάπτυξης: αρχές της μαρξιστικής πολιτικής οικονομίας*, Αθήνα, Gutenberg

Szymanski, S. (2009). *Playbooks and Checkbooks: An Introduction to the Economics of Modern Sports*, New Jersey, Princeton University Press

Τασόπουλος, Α. (1992). *Γραμμική άλγεβρα και μη-γραμμικός προγραμματισμός*, Πειραιάς, Α. Σταμούλης.

Τασόπουλος, Α. (1997). *Μαθηματικός προγραμματισμός*, Πειραιάς, Α. Σταμούλης.

Τασόπουλος, Α. (2005). *Πληροφοριακά Συστήματα,* Πειραιάς, Α. Σταμούλης.

Taub, A. H. (ed). 1961-63. *John von Neumann: Collected Works, 1903-1957*, 6 Vols., Oxford, Pergamon Press

Varian, H. (2015). *Μικροοικονομική: μια σύγχρονη προσέγγιση*, Αθήνα, Κριτική

Vemblen, T. (1982). *Η Θεωρία της Αργόσχολης Τάξης*, Αθήνα, Κάλβος

Vincent, T. L. & Brown, J. S. (2005). *Evolutionary Game Theory, Natural Selection, and Darwinian Dynamics*, Cambridge, Cambridge University Press

Von Neumann, J. & Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games & Economic Behavior*, New York, Princeton University Press

Weintraub, E. R. (1992). *Toward a History of Game Theory* Duke University Press

Winston, L. W. (2009). *How Gamblers, Managers, and Sports Enthusiasts Use Mathematics in Baseball, Basketball, and Football*, New Jersey, Princeton University Press

Χουμανίδης, Λ.Θ. και Καραγιάννης, Α.Δ. (1986). Daniel Bernoulli: Παρουσίασις μιας νέας θεωρίας επί της μετρήσεως του κινδύνου", *Σπουδαί,* Τομ. ΛΣΤ, τευχ. 1-4, σσ. 208-234

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ

Amunategui, I. G. (2014). Symbolic Languages and Ars Combinatoria, http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1411/1411.3188.pdf (Ημ. Ανάκτησης 30/06/2015)

Basharin P. G., Langville N. A. & Naumov A. V. (2004) The life and work of A.A. Markov http://langvillea.people.cofc.edu/MarkovReprint.pdf?referrer=webcluster& (Ημ. Ανάκτησης 30/12/2014)

Beek, J. P. & Lewbel, A. (1995). Studying the ability to toss and catch balls and rings provides insight into human coordination, robotics and mathematics http://www.juggling.org/papers/science-1/ (Ημ. Ανάκτησης 12/10/2014)

Beek, J. P. & Lewbel, A. (1995a). The science of juggling, https://www2.bc.edu/~lewbel/jugweb/sciamjug.pdf (Ημ. Ανάκτησης 12/10/2014)

Bellhouse R. D. & Fillion N. (2014). Le Her and Other Problems in Probability Discussed by Bernoulli, Montmort and Waldegrave http://www.nfillion.com/docs/publications/BellhouseFillion2014.pdf (Ημ. Ανάκτησης 17/06/2015)

Bernoulli, N. (1709). The use of the art of conjecturing in law http://www.cs.xu.edu/math/Sources/NBernoulli/de_usu_artis.pdf (Ημ. Ανάκτησης 17/06/2015)

Bernoulli, N. (1711). Correspondence of Nicholas Bernoulli with Montmort, http://cerebro.xu.edu/math/Sources/NBernoulli/correspondence%20of%20nb.pdf (Ημ. Ανάκτησης 17/06/2015)

Brewster, D. (1832). The Edinburgh Encyclopaedia, Λήμμα Bernoulli James Τόμος 3, (pp. 464-470) https://play.google.com/store/books/details?id=f-hEAQAAMAAJ&rdid=book-f-hEAQAAMAAJ&rdot=1 (Ημ. Ανάκτησης 14/05/2015)

Cournot, A. (1838). *Researches into the mathematical principles of the theory of wealth* https://archive.org/details/researchesintom00fishgoog (Ημ. Ανάκτησης 21/07/2015)

Christenson, M. (2007). Nadal claims Federer scalp in battle of the surfaces, The Guardian, http://www.theguardian.com/sport/2007/may/03/tennis.sport (Ημ. Ανάκτησης 21/12/2014)

Cusano, N. (1463). *De Ludo Globi* (μτφ. Hopkins Jasper στα αγγλικά) http://jasper-hopkins.info/DeLudo12-2000.pdf (Ημ. Ανάκτησης 07/03/2014)

Clarey, C. (2007, 3 December). Tennis: Nadal to meet Federer in an exhibition, The New York Times http://www.nytimes.com/2007/05/01/sports/01iht-arena.1.5513670.html?_r=1& (Ημ. Ανάκτησης 03/07/2014)

Daskalakis, C. (2008). The Complexity of Nash Equilibria, http://people.csail.mit.edu/costis/thesis.pdf (Ημ. Ανάκτησης 14/02/2015)

Daston, L & Galison, P. (1992). The image of Objectivity, Representations http://www.nyu.edu/classes/bkg/methods/daston.pdf (Ημ. Ανάκτησης 30/03/2015)

Dawkins, R. (1997). Human Chauvinism: Review of Full House by Stephen Jay Gould, Evolution 51(3) http://satdude.com/4don/ebooks/Popular%20Science%20Books%20Collection/Richard%20Dawkins%20Collection/Dawkins%20Articles/Human%20Chauvinism.pdf (Ημ. Ανάκτησης 26/01/2015)

Decartes, R. (1637). La Geometrie http://hermes.ffn.ub.es/luisnavarro/nuevo_maletin/Descartes%20%281637%29_Geometrie.pdf (Ημ. Ανάκτησης 23/09/2015)

Dempster, A. P. (1966). Translations from James Bernoulli http://www.matematica.ciens.ucv.ve/modelos/Descargas/ars_sung.pdf (Ημ. Ανάκτησης 02/08/2015)

Deleuze, G. (2007). On Leibniz, http://deleuzelectures.blogspot.gr/2007/02/on-leibniz.html (Ημ. Ανάκτησης 07/07/2015)

Dipert R. R. (2014). http://www.britannica.com/topic/history-of-logic/Leibniz#ref535633 (Ημ. Ανάκτησης 21/06/2015)

Dumain, R. (2010) Leibniz & Games http://www.autodidactproject.org/quote/leibniz-games.html (Ημ. Ανάκτησης 25/09/2014)

Eagly, A. & Carli, L. (2007). Women and the Labyrinth of Leadership https://hbr.org/2007/09/women-and-the-labyrinth-of-leadership (Ημ. Ανάκτησης 17/10/2015)

Edgeworth F. Y. (1881). Mathematical Psychics http://ir.nmu.org.ua/bitstream/handle/123456789/6287/e229c7ac786f1dc236e2f6dd7c4ff410.pdf?sequence=1 (Ημ. Ανάκτησης 15/04/2014)

Ekström, J. (2012) Jakob Bernoulli's Theory of Inference, http://escholarship.org/uc/item/13k6x1w8 (Ημ. Ανάκτησης 24/04/2015)

Ένγκελς, Φ. (1893).Η καταγωγή της οικογένειας, της ατομικής ιδιοκτησίας και του κράτους, (http://kiatipis.org/Writers/F/Friendrich.Engels/The.Origin.of.the.Family..in.gr.pdf (Ημ. Ανάκτησης 04/02/2015)

Euler, L. ((1760), 1797). General Researches on the Mortality and the Multiplication of the Human Race http://www.cs.xu.edu/math/Sources/Euler/E334.pdf (Ημ. Ανάκτησης (03/06/2014)

Fausto-Sterling, A. (2000). Sexing the body: gender politics and the construction of sexualityhttps://libcom.org/files/Fausto-Sterling%20-%20Sexing%20the%20Body.pdf (Ημ. Ανάκτησης 22/01/2015)

Ferguson, T.S. (1989). Who solved the secretary problem? *Statistical Science* 4 (3): 282–296 https://www.math.upenn.edu/~ted/210F10/References/Secretary.pdf (Ημ. Ανάκτησης (14/03/2014)

Fisher, R.A. (1930). The genetical theory of natural selection, https://archive.org/details/geneticaltheoryo00fishuoft, (Ημ. Ανάκτησης (19/11/2014)

Fisher, R.A. (1934). Randomisation and an Old Enigma of Card Play https://digital.library.adelaide.edu.au/dspace/bitstream/2440/15217/1/111.pdf (Ημ. Ανάκτησης (11/01/2015)

Galton, F. (1892). Hereditary Genius, http://galton.org/books/hereditary-genius/text/pdf/galton-1869-genius-v3.pdf (Ημ. Ανάκτησης (09/11/2014)

Gardner, M. (1975). Mathematical Carnival http://www.scribd.com/doc/207195245/Gardner-1975-Mathematical-Carnival#scribd (Ημ. Ανάκτησης (23/05/2014)

Gardano, G. (1593). Practica arithmetice et mensurandi singularis (μτφ. Pulskamp J. Richard στα αγγλικά το 2009) http://cerebro.xu.edu/math/Sources/Cardano/cardan_pratica.pdf ((Ημ. Ανάκτησης 07/03/2014)

Goldstine, H. H (1972). The computer from Pascal to Von Neuman Princeton University Press. http://monoskop.org/images/f/fc/Goldstine_Herman_H_The_Computer_from_Pascal_to_von_Neumann.pdf (Ημ. Ανάκτησης 12/10/2014)

Gould, S., J (1989). The Creation Myths of Cooperstown, http://chuma.cas.usf.edu/~pinsky/texts/Creation%20Myths%20of%20Cooperstown.pdf (Ημ. Ανάκτησης 22/06/2015)

Gray, L. (2012, 20 December). Juggling by numbers: How notation revealed new tricks, BBC News Magazine http://www.bbc.com/news/magazine-20728493 (Ημ. Ανάκτησης 16/04/2015)

Greenspan, J. (2013). Billie Jean King Wins the ‘Battle of the Sexes,’ 40 Years Ago, History, http://www.history.com/news/billie-jean-king-wins-the-battle-of-the-sexes-40-years-ago(Ημ. Ανάκτησης 04/04/2015)

Grinstead, M. C. & Snell L. J. (1997). Introduction to Probability http://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/amsbook.mac.pdf (Ημ. Ανάκτησης 29/10/2014)

Groos K. (1898). *The Play of Animals* https://archive.org/stream/playofanimals00groouoft#page/n3/mode/2up (Ημ. Ανάκτησης .02/11/2014)

Groos K. (1901). *The Play of Man* https://archive.org/stream/playofman00groouoft#page/n3/mode/2up (Ημ. Ανάκτησης 02/11/2014)

Haussner, E. (1899). Wahrshcheinlichkeitsrechung (Ars conjectandi), https://archive.org/stream/wahrscheinlichke03bernuoft#page/128/mode/2up (Ημ. Ανάκτησης 07/02/2015)

Hayes, B. (2013) First Links in the Markov Chain**,** American Scientist 101, 2**,** pp. 92-97, http://www.americanscientist.org/issues/pub/first-links-in-the-markov-chain (Ημ. Ανάκτησης 14/03/2015)

Hykšová, M. (n.d.). Historical Beginnings of Game Theory, http://euler.fd.cvut.cz/predmety/game_theory/history.pdf (Ημ. Ανάκτησης 27/04/2015)

Θεοχαράκης, Ν. (2015, 14 Φεβρουαρίου). Θεωρία στον αέρα: Έννοιες – Ιδέες – Κριτική με τη στήριξη του Ινστιτούτου Νίκος Πουλαντζάς (Ραδιοφωνική εκπομπή), Αθήνα, Στο Κόκκινο http://www.stokokkino.gr/article/1000000000004424/THeoria-ston-Aera-Ennoies---Idees---Kritikirnme-ti-stiriksi-tou-Institoutou-Nikos-Poulantzas (Ημ. Ανάκτησης 20/02/2015)

Kassianidou, M., Srinivasan, V. and Villalobos, B. (1999). The science of juggling http://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/1999-00/information-theory/juggling.html (Ημ. Ανάκτησης 24/02/2015)

Knight, F. H. (1921). Risk, Uncertainty, and Profit http://www.econlib.org/library/Knight/knRUP.html (Ημ. Ανάκτησης 12/10/2014)

Locklin, S. (2011). Great thinkers: Eudoxus of Cnidos, https://scottlocklin.wordpress.com/2011/11/13/great-thinkers-eudoxus-of-cnidos/ (Ημ. Ανάκτησης 18/11/2014)

Lawler, G. 1995, Introduction to Stochastic Processes, http://cermics.enpc.fr/~roussetm/cours_m2/lawler.pdf (Ημ. Ανάκτησης 07/12/2014)

Lewbel, A. (2001). A personal tribute to Claude Shannon, https://www2.bc.edu/~lewbel/Shannon.html (Ημ. Ανάκτησης 12/09/2014)

Lewis, W. A. (1954). "Economic Development with Unlimited Supplies of Labor". http://www.globelicsacademy.net/2008/2008_lectures/lewis%20unlimited%20labor%20supply%201954.pdf (Ημ. Ανάκτησης 12/12/2015)

Marshall, A. (1890). Principles of Economics, http://www.econlib.org/library/Marshall/marPCover.html (Ημ. Ανάκτησης 09/06/2014)

Maynard Smith, J. & Price, R. (1973). The logic of animal conflict, *Nature*, 246(2), pp. 15-18 ftp://oceane.obs-vlfr.fr/pub/irisson/papers/Maynard%20Smith1973-The%20logic%20of%20animal%20conflict00.pdf (Ημ. Ανάκτησης 02/12/2015)

Maynard Smith, J. & Hofbauer, J. (1987). The "Battle of the Sexes": A Genetic Model with Limit Cycle Behavior, *Theoretical Population*, 32, pp1-14 http://homepage.univie.ac.at/josef.hofbauer/87tpb_MS.pdf (Ημ. Ανάκτησης 12/12/2015)

McDaniel, W. (1906). Some passages concerning Ball-games, https://archive.org/details/jstor-282704 (Ημ. Ανάκτησης 09/12/2015)

Miller, C. L. (2013). Cusanus, Nicolaus [Nicolas of Cusa] http://plato.stanford.edu/entries/cusanus/ (Ημ. Ανάκτησης 07/03/2014)

Nash, J. (1950). "Equilibrium points in n-person games" *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36(1):48-49 http://www.pnas.org/content/36/1/48.full.pdf (Ημ. Ανάκτησης 07/07/2015)

Nash, J. (1950a).The bargaining problem, *Econometrica*, 18, pp. 155-162 http://www.eecs.harvard.edu/cs286r/courses/spring02/papers/nash50a.pdf (Ημ. Ανάκτησης 07/07/2015)

Nash, J. (1951). "Non-Cooperative Games" *The Annals of Mathematics* 54(2):286-295.

http://www.jstor.org/stable/1969529?seq=1#page_scan_tab_contents Ημ. Ανάκτησης 07/072015)

Nash, J. (1953). Two person cooperative games, *Econometrica*, 21, pp. 128-140 http://staff.bath.ac.uk/ecsjgs/Teaching/Advanced%20Microeconomics/Articles/two-person%20coperative%20games.pdf (Ημ. Ανάκτησης 07/07/2015)

O'Connor, J J & Robertson, E F. (1999). Luca Pacioli, από http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pacioli.html (Ημ. Ανάκτησης 29/01/2015)

O'Connor, J J & Robertson, E F. (2001). The Number e http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e.html#s19 (Ημ. Ανάκτησης 11/12/2014)

Official Volleyball Rules 2013-2016 (2012) Published by FIVB http://www.fivb.org/EN/Refereeing-Rules/documents/FIVB-Volleyball_Rules2013-EN_20121214.pdf. (Ημ. Ανάκτησης 23/03/2014)

Osborne, J. M. (1996). Darwin, Fisher, and a theory of the evolution of the sex ratio https://www.economics.utoronto.ca/osborne/research/sexratio.pdf (Ημ. Ανάκτησης 12/08/2015)

Osborne, J. M. (2000). An introduction to game theory, http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~ptanapo1/gamebook.pdf (Ημ. Ανάκτησης 02/11/2015)

Osborne, J. M. & Rubinstein, A. *(*1990). Bargaining and markets, Academic Press, http://www.uib.cat/depart/deeweb/pdi/hdeelbm0/arxius_decisions_and_games/bargainingandmarkets.pdf (Ημ. Ανάκτησης 02/11/2015)

Pacioli, L. (1494). Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita http://cerebro.xu.edu/math/Sources/Pacioli/summa.pdf (Ημ. Ανάκτησης 09/10/2015)

Pollucis, J. (1824). Onomasticon https://books.google.gr/books?id=Al0GAAAAQAAJ&pg=PR5#v=onepage&q&f=false (Ημ. Ανάκτησης 15/12/2014)

Pierre Remont de Montmort, (n.d.) http://cerebro.xu.edu/math/Sources/Montmort/montmort.html (Ημ. Ανάκτησης 26/12/2015)

Poe, E.A. (1845). The Purloined Letter, http://pinkmonkey.com/dl/library1/purl.pdf (Ημ. Ανάκτησης 10/10/2014)

Poisson, S. D. (1837). Probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilitiés. http://www-liphy.ujf-grenoble.fr/pagesperso/bahram/Phys_Stat/Biblio/Poisson_Proba_1838.pdf (Ημ. Ανάκτησης 12/01/2015)

Polak, B. (2007). Mixed Strategies in Theory and Tennis http://oyc.yale.edu/transcript/243/econ-159 (Ημ. Ανάκτησης 01/09/2014)

Polasek, W. (2000). *The Bernoullis and the Origin of Probability Theory: Looking back after 300 years* http://www.ias.ac.in/resonance/Volumes/05/08/0026-0042.pdf (Ημ. Ανάκτησης 12/01/2015)

Ramsey, F. P. (1931). Truth and Probability. http://core.ac.uk/download/pdf/7048428.pdf

(Ημ. Ανάκτησης 03/01/2015)

Roero, C. S & Fleckenstein, J.O. (1989). Jacob Bernoulli attento studioso delle opere di Archimede Le note marginali all'edizione di Barrow del 1675 https://books.google.gr/books?id=CYvAH41605QC&pg=PA199&lpg=PA199&dq=Jacob+Bernoulli+attento+studioso+delle+opere+di+Archimede.+Le+note+marginali+all%27edizione+di+Barrow+del+1675&source=bl&ots=R5vi84nRFJ&sig=3XiZSxUPWbGogOdTAfbHf9NvF-w&hl=el&sa=X&ei=BIQSVfXXHsbfaKKPgaAI&ved=0CB8Q6AEwAA#v=onepage&q=Jacob%20Bernoulli%20attento%20studioso%20delle%20opere%20di%20Archimede.%20Le%20note%20marginali%20all%27edizione%20di%20Barrow%20del%201675&f=false (Ημ. Ανάκτησης 10/08/2015)

Roinila, M. (2007). Leibniz on Rational Decision-Making https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/19502/leibnizo.pdf?sequence=2 (Ημ. Ανάκτησης 12/02/2015)

Royal Society of London (1705). The Philosophical Transactions and Collections: Abridged and Disposed Under General Heads, Τόμος 1 https://books.google.gr/books?id=fVMVAAAAQAAJ&dq (Ημ. Ανάκτησης 14/11/2015)

Saaty, T. (2008). Decision making with the analytic hierarchy process http://www.colorado.edu/geography/leyk/geog_5113/readings/saaty_2008.pdf (Ημ. Ανάκτησης 08/10/2014)

Schneider, I. (n.d.). "Jakob Bernoulli" (version 3). StatProb: The Encyclopedia Sponsored by Statistics and Probability Societies. http://statprob.com/encyclopedia/JakobBERNOULLI.html (Ημ. Ανάκτησης 22/07/2014)

Schneider, I. (2006). «Direct and Indirect Influences of Jakob Bernoulli's Ars Conjectandi in 18th Century Great Britain», *Electronic Journal for the history of Probability and Statistics* http://www.jehps.net/Juin2006/Schneider.pdf (Ημ. Ανάκτησης 02/07/2015)

Seneta, E. W. (n.d.). "Nicolaus Bernoulli" (version 4). StatProb: The Encyclopedia Sponsored by Statistics and Probability Societies. http://statprob.com/encyclopedia/NicolausBERNOULLI.html (Ημ. Ανάκτησης 22/07/2014)

Shannon, C. (1953). A Mind Reading (?) Machine, http://seed.ucsd.edu/~mindreader/MindReader.pdf (Ημ. Ανάκτησης 04/02/2014)

Shannon, C. (1937). A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/11173/34541425-MIT.pdf?sequence=2 (Ημ. Ανάκτησης 19/04/2014)

Sigmund, K. (2005). John Maynard Smith and evolutionary game theory, *Theoretical Population Biology*, 68, pp. 7-10 http://homepage.univie.ac.at/Karl.Sigmund/MaynardSmith001.pdf (Ημ. Ανάκτησης 03/12/2015)

Sreedhar, A. (2015). The inspiring story of how Venus Williams helped win equal pay for women players at Wimbledon, http://nytlive.nytimes.com/womenintheworld/2015/07/10/the-inspiring-story-of-how-venus-williams-helped-win-equal-pay-for-women-players-at-wimbledon/ (Ημ. Ανάκτησης 10/11/2015)

Sylla, E. D. (2013). Jacob Bernoulli and the composition of Ars Conjectangi, Basel, Switzerland International Conference , Ars Conjectandi 1713 – 2013 http://www.statoo.ch/sst13/presentations/D2_Edith_Sylla.pdf (Ημ. Ανάκτησης 02/02/2015)

Slutsky, E. (2010). Collected Statistical Papers Selected and Translated by Oscar Sheynin http://sheynin.de/download/bluetwo.pdf (Ημ. Ανάκτησης 09/03/2015)

Todhunter, I. (1865). A history of the mathematical theory of probability *from the time of Pascal to that of Laplace*. http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=chi.47628220;view=1up;seq=7 (Ημ. Ανάκτησης 02/07/2015)

Vecer, J. (1995). What Difference Does the Tiebreak Make in a Tennis Game http://www.stat.columbia.edu/~vecer/tennis.pdf (Ημ. Ανάκτησης 16/04/2015)

Von Neumann, J. (1928). *On the theory of games of strategy* http://public.econ.duke.edu/~erw/190/von%20Neumann%201928-1959.pdf (Ημ. Ανάκτησης 21/07/2015)

Walker, P. (2012). A Chronology of Game Theory http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/paul_walker/gt/hist.htm (Ημ. Ανάκτησης 19/03/2015)

Weisstein, E. W. (2015). Weak Law of Large Numbers. http://mathworld.wolfram.com/WeakLawofLargeNumbers.html (Ημ. Ανάκτησης 29/07/2015)

Venus Williams (2006, June 26) Wimbledon has sent me a message: I'm only a second-class champion The Times, (http://www.thetimes.co.uk/tto/sport/tennis/article2369985.ece) (Ημ. Ανάκτησης 27/09/2014)

Williams sisters discover men are better players (1998, 28 Ιανουαρίου). (http://web.archive.org/web/20090428044804/http://www.dispatch.co.za/1998/01/28/sport/WILLIAMS.HTM) (Ημ. Ανάκτησης 27/06/2015) (Ημ. Ανάκτησης 29/07/2015)

Wood, R. (2008). Men versus Women Tennis Matches, http://www.topendsports.com/sport/tennis/men-v-women.htm (Ημ. Ανάκτησης 09/06/2015)

Φαφούτη, Λ. (2015, 8 Μαρτίου). Τα «μαθημαγικά» των ζογκλέρ, *Το Βήμα,* http://www.tovima.gr/science/article/?aid=683347 (Ημ. Ανάκτησης 09/03/2015)

Χρηστίδης, Α. Φ. (2012). Ιστορία της αρχαίας ελληνικής γλώσσας http://www.greek-language.gr/Resources/ancient_greek/history/ag_history/contents.html (Ημ. Ανάκτησης 17/04/2015)