ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΥΠΟ
Α. Α. ΛΑΖΑΡΗ

Ι. Εἰσαγωγὴ

Ἡ παροῦσα ἐργασία ἀποτελεῖ εἰσαγωγὴν εἰς τὴν οἰκονομετρικὴν τεχνικὴν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ (linear programming). Τὴν εἰσαγωγὴν ταύτην ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον, ἀφ' ἑνὸς μὲν λόγῳ τῆς εὐρυτάτης πρακτικῆς χρησιμότητος τῆς ὡς ἄνω τεχνικῆς, ἀφ' ἑτέρου δὲ λόγῳ τῆς πλήρους σχεδὸν ἐλλείψεως κειμένων τὰ ὁποῖα θὰ ἠδύνατο νὰ συμβουλευθῇ ὁ μὴ μαθηματικῶς κατηρτισμένος ἀναγνώστης, ὁ ἐνδιαφερόμενος διὰ τὴν ἐκμάθησιν τῶν βασικῶν ἀρχῶν τῆς τεχνικῆς.

Πρὸς κατανόησιν τῆς ἐννοιολογικῆς τοποθετήσεως τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ σημειοῦμεν κατωτέρω ὀλίγα τινὰ περὶ Προγραμματισμοῦ γενικῶς.

Ἡ ἀνεπάρκεια τῶν μέσων ἱκανοποιήσεως τῶν ἀνθρωπίνων ἀναγκῶν ἐπιβάλλει τὴν ἐφαρμογὴν ὀρθολογιστικῆς τινος διαδικασίας κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἑκάστοτε δεδομένων ποσοτήτων ἐκ τῶν μέσων αὐτῶν. Ὁ Προγραμματισμὸς ἀναφέρεται εἰς τὸ σύνολον τῶν οἰκονομικῶν σκέψεων αἱ ὁποῖαι καθορίζουν τὴν μορφὴν τῆς ὀρθολογιστικῆς αὐτῆς διαδικασίας, ἤτοι τὸν τρόπον κατανομῆς τῶν ἀνεπαρκῶν μέσων μεταξὺ τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν χρήσεων βάσει προκαθωρισμένων κριτηρίων. Συνεπῶς, ὁ Προγραμματισμὸς δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ *διαδικασία καταστρώσεως τοῦ προγράμματος οἰκονομικῆς δράσεως.*

Ὑπὸ τὴν ὡς ἄνω ἔννοιαν ὁ Προγραμματισμὸς εἶναι θεμελιῶδες φαινόμενον τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς, δύναται δὲ νὰ λεχθῇ ὅτι κατ' ἀρχὴν πᾶσαι αἱ οἰκονομικαὶ μονάδες ἀνεξαρτήτως σκοποῦ καὶ μεγέθους προγραμματίζουν. Ἡ κατάστρωσις ἐν τούτοις προγράμματος οἰκονομικῆς δράσεως ἀνταποκρινομένου ἐπιτυχῶς πρὸς τοὺς σκοποὺς καὶ τὰς συνθήκας τῆς προγραμματιζούσης οἰκονομικῆς μονάδος, ἐξαρτᾶται ἀπὸ πλείστους παράγοντας. Μεταξὺ τῶν παραγόντων αὐτῶν ἡ *μέθοδος ὑπολογισμοῦ* τοῦ προγράμματος ἐπέχει ἰδιαιτέραν σημασίαν [1]. Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς εἶναι μία ἐκ τῶν διαφόρων μεθόδων ὑπολογισμοῦ τοῦ προγράμματος οἰκονομικῆς δράσεως. Ἐπιδιώκει, ὡς καὶ αἱ λοιπαὶ μέθοδοι οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, τὴν εὕρεσιν τοῦ προγράμματος ἐκείνου τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ περισσότερον πρὸς τὰ δεδομένα οἰκονομικὰ κριτήρια. Ὑπερέχει ἐν τούτοις τῶν ἄλλων μεθόδων ὡς πρὸς τὸν βαθμὸν προσαρμοστικότητος εἰς διαφόρους κατηγορίας προβλημάτων καὶ ὡς πρὸς τὰς δυνατότητας ἀντιμετωπίσεως πολυπλόκων περιπτώσεων. Ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομικῆς θεωρίας ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς παρουσιάζει ἐπίσης ἐνδιαφέρον, καθόσον ἀκολουθεῖ γραμμὴν οὐσιωδῶς διάφορον τῆς ἐκ παραδόσεως ἀκολουθουμένης γραμμῆς τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως.

Μολονότι ὁ Γραμμικὸς Προγγραμματισμὸς ἔχει ἤδη δοκιμασθῆ εἰς τὴν πρᾶξιν ἐπιτυχῶς (ἰδίως εἰς Η.Π.Α.) δὲν ἔτυχεν ἀκόμη εὐρείας ἀποδοχῆς. Τοῦτο ὀφείλεται, νομίζομεν, ἐν μέρει μὲν εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ τεχνικὴ εἶναι νέα [2], κυρίως δὲ εἰς τὸ ὑψηλὸν τεχνικὸν ἐπίπεδον τῶν σχετικῶν δημοσιευμάτων. Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν κατεβλήθη προσπάθεια ἁπλουστεύσεως τῶν ἐκτιθεμένων ἐννοιῶν. Ἀπεφεύχθη σχεδὸν τελείως ἡ μαθηματικὴ ἐπιχειρηματολογία καὶ ἐδόθη ἰδιαιτέρα ἔμφασις εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἑρμηνείαν τῶν βασικῶν σημείων τῆς μεθόδου. Ἡ παρουσίασις αὕτη τοῦ θέματος δὲν εἶναι βεβαίως πλήρης, ἀλλὰ δὲν βλάπτει τὸν σκοπὸν τῆς παρούσης ἐργασίας ὁ ὁποῖος εἶναι, ὡς ἐλέχθη, εἰσαγωγικός. Ἐξ ἄλλου ἡ ἐκμάθησις τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἶναι δυνατὴ ἄνευ προηγουμένης ἐκμαθήσεως τῆς μαθηματικῆς θεωρίας, ὅπως ἀκριβῶς ἡ ἐκμάθησις τοῦ χειρισμοῦ μιᾶς πολυπλόκου μηχανῆς εἶναι συνήθως δυνατὴ ἄνευ πλήρους γνώσεως τῶν τεχνικῶν λεπτομερειῶν αὐτῆς.

Πλὴν τῆς μαθηματικῆς θεωρίας, μερικαὶ ἄλλαι ἐνδιαφέρουσαι πλευραὶ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ δὲν ἦτο ἐπίσης δυνατὸν νὰ συζητηθοῦν ἐνταῦθα. Ἐλπίζομεν ὅτι τὰ κενὰ αὐτὰ θὰ συμπληρωθοῦν βαθμιαίως.

Ὅ,τι χρειάζεται περισσότερον εἶναι, νομίζομεν, ἡ ἀνάλυσις πραγματικῶν περιπτώσεων ἐκ τῆς Ἑλληνικῆς Οἰκονομίας. Πρὸς τοῦτο θὰ ἦτο ἴσως ἀναγκαῖον νὰ διερευνηθοῦν προηγουμένως αἱ δυνατότητες ἐφαρμογῆς τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἰς διάφορα οἰκονομικὰ προβλήματα, κυρίως προβλήματα σχετιζόμενα μὲ τὴν οἰ-

---

1. Ἡ πληρότης καὶ ἀκρίβεια τῶν πληροφοριῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων βασίζεται ὁ ὑπολογισμὸς εἶναι ἐπίσης σημαντικοὶ παράγοντες διὰ τὴν κατάστρωσιν ἐπιτυχοῦς προγράμματος. Οἱ παράγοντες αὐτοὶ—ἐν πολλοῖς στατιστικῆς ἢ λογιστικῆς φύσεως—δὲν ἐξετάζονται ἐνταῦθα,

2. Μετὰ τὸ 1948 ἤρχισε νὰ γίνεται γνωστή.

κονομικὴν ἀνάπτυξιν τῆς χώρας. Παρὰ τὰς προσπαθείας μας δὲν ἠδυνήθημεν νὰ συλλέξωμεν τὰ ἀπαιτούμενα στοιχεῖα διὰ τὴν ἀνάλυσιν ἑνὸς πραγματικοῦ προβλήματος, ὡς ὑπελογίζαμεν ἀρχικῶς.

Τὰ κύρια τμήματα τῆς ἐργασίας εἶναι: τὸ τμῆμα II, εἰς τὸ ὁποῖον δίδονται γενικαὶ πληροφορίαι περὶ τοῦ θεωρητικοῦ χαρακτῆρος τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ὡς ἐπίσης καὶ ἐνδείξεις τινὲς περὶ τῶν πρακτικῶν δυνατοτήτων αὐτοῦ, καὶ τὸ τμῆμα III, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναλύεται ἡ διαδικασία ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου εἰς μίαν τυπικὴν περίπτωσιν προγραμματισμοῦ. Ἐλπίζομεν ὅτι ἡ κατανόησις τοῦ τμήματος III θὰ καταστήσῃ τὸν ἀναγνώστην ἱκανὸν νὰ χρησιμοποιῇ τὸν Γραμμικὸν Προγραμματισμὸν εἰς ὡρισμένας κατηγορίας προβλημάτων.

II. Βασικὰ χαρακτηριστικὰ καὶ οἰκονομικὴ σημασία τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ

1. *Θεμελιώδεις ἔννοιαι καὶ ὑποθέσεις*

Ὡς ἐλέχθη, ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ. Τὰ προβλήματα ταῦτα δύνανται νὰ καταταγοῦν εἰς δύο γενικὰς κατηγορίας. Ἡ πρώτη περιλαμβάνει «προβλήματα μεγιστοποιήσεως» ἤτοι ἐπιτεύξεως τοῦ *μεγίστου δυνατοῦ ἀποτελέσματος* διὰ *δοθέντων οἰκονομικῶν μέσων*. Ἡ δευτέρα περιλαμβάνει «προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως», ἤτοι ἐπιτεύξεως *ὡρισμένου οἰκονομικοῦ σκοποῦ* διὰ τῆς ἐλαχίστης *δυνατῆς θυσίας*. Ἀμφότεραι αἱ ὡς ἄνω κατηγορίαι προβλημάτων ἀποτελοῦν δύο διαφόρους ἐκδηλώσεις τοῦ Οἰκονομικοῦ Ἀξιώματος.

Αἱ δυνατότητες τῆς νέας τεχνικῆς εἶναι εὐρεῖαι ὄχι ὅμως καὶ ἀπεριόριστοι. Ποῖα ἀκριβῶς προβλήματα ἐμπίπτουν εἰς τὴν σφαῖραν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ θὰ καταφανῇ ἐκ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἐννοιολογικῶν βάσεων αὐτοῦ.

Μολονότι ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ὡς συγκεκριμένη τεχνικὴ ἀνεπτύχθη κατὰ τὴν τελευταίαν δεκαετίαν, αἱ κυριώτεραι ἔννοιαι καὶ ὑποθέσεις αὐτοῦ δὲν εἶναι νέαι. Ἀπαντῶνται συχνάκις εἰς τὰς συγγενεῖς θεωρίας αἱ ὁποῖαι ἠκολούθησαν τὴν παράδοσιν Quesnay, κυρίως δὲ εἰς τὰς θεωρίας γενικῆς ἰσορροπίας τῶν Walras (1), Cassel (2), Pareto (3), Leontief (4) καὶ von Neumann (5). Ὁ Γραμμικὸς

1. Eléments d'Economie Politique Pure, Paris 1926 (4 ἔκδοσις)
2. Theory of Social Economy, London 1932.
3. Manuel d'Economie Politique, Paris 1907.
4. The Structure of American Economy, N. Y. 1941.
5. A Model of General Economic Equilibrium. Review of Economic Studies. Vol. 13, 1945-46.

Προγραμματισμὸς ἐπηρεάσθη ἰδιαιτέρως ἀπὸ τὰς ἐργασίας τῶν Leontief καὶ von Neumann. Ἡ τεχνικὴ τῶν «εἰσροῶν - ἐκροῶν» (τοῦ Leontief) ἦτο ἡ ἀφετηρία τῶν πρώτων ὑποδειγμάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, τὸ δὲ «ὑπόδειγμα» von Neumann ὑπέδειξε τὸ εἶδος τῶν ἀπαιτουμένων μαθηματικῶν μέσων διὰ τὸν χειρισμὸν «γραμμικῶν» συναρτήσεων καὶ γενικῶς μὴ διαφορισίμων παραστάσεων (1). Τέλος ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς χρησιμοποιεῖ τὴν ἔννοιαν τῆς «παραγωγικῆς διαδικασίας» καὶ τὴν ὑπόθεσιν τῶν «σταθερῶν ἀναλογιῶν» αἱ ὁποῖαι ἐχρησιμοποιήθησαν ἐπίσης εἰς τὰς προαναφερθείσας ἐργασίας.

Ἀναλύομεν ἐν συνεχείᾳ τὴν ἔννοιαν τῆς «παραγωγικῆς διαδικασίας» καὶ τὰς μετ' αὐτῆς συνδεομένας θεμελιώδεις ὑποθέσεις τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ.

«Παραγωγικὴ διαδικασία» (productive process, activity), εἶναι ἡ συγκεκριμένη μέθοδος ἐκτελέσεως ἑνὸς οἰκονομικοῦ ἔργου, π.χ., ἡ χρησιμοποίησις 3,5 καὶ 4 μονάδων ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς α, β καὶ γ ἀντιστοίχως, διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ Α. Ἑκάστη παραγωγικὴ διαδικασία δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς οἱονδήποτε (θετικὸν) ἐπίπεδον—ἐὰν βεβαίως ἐπιτρέπουν αἱ διαθέσιμοι ποσότητες συντελεστῶν. Τὸ ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας, ὀνομαζόμενον «ἐπίπεδον δράσεως», μετρᾶται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων (2) τοῦ παραγομένου οἰκονομικοῦ ἔργου.

Ὑποθέσεις: Α. *Σταθεραὶ ἀναλογίαι* (Fixed Coefficients of Production). Αἱ ὑφ' ἑκάστης παραγωγικῆς διαδικασίας χρησιμοποιούμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς εὑρίσκονται εἰς σταθερὰν σχέσιν πρὸς τὴν παραγομένην ποσότητα τῶν ἀγαθῶν, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐπιπέδου δράσεως τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας. Οὕτω ἡ παραγωγὴ 3, 4, 6...ν μονάδων ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ Α, εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ἀπαιτεῖ 3, 4, 6.... ν φορὰς τὰς ἀρχικὰς ποσότητας 3, 5, 4 τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς α, β, γ, οὕτως ὥστε:

$$\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{6}{18}=\frac{\nu}{3\nu}=\frac{1}{3}=\frac{\text{ποσότης Α}}{\text{ποσότης }\alpha}=\text{σταθερὸς ἀριθμὸς}$$

$$\frac{3}{15}=\frac{4}{20}=\frac{6}{30}=\frac{\nu}{5\nu}=\frac{1}{5}=\frac{\text{ποσότης Α}}{\text{ποσότης }\beta}=\text{σταθερὸς ἀριθμὸς}$$

$$\frac{3}{12}=\frac{4}{16}=\frac{6}{24}=\frac{\nu}{4\nu}=\frac{1}{4}=\frac{\text{ποσότης Α}}{\text{ποσότης }\gamma}=\text{σταθερὸς ἀριθμὸς}$$

1. Βλ. παρ. 2 παρόντος τμήματος καὶ παρ. 2 τμήματος ΙΙΙ.
2. Ὁ καθορισμὸς τῆς μονάδος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρησιμοποιουμένου μετρικοῦ συστήματος.

Εἰς τὴν οἰκονομικὴν φιλολογίαν ἡ ἀνωτέρω ὑπόθεσις ἀπαντᾶται συνήθως ὡς ὑπόθεσις «σταθερᾶς κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως», (constant returns to scale).

Β. *Πεπερασμένος ἀριθμὸς παραγωγικῶν διαδικασιῶν* (finality). Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν *δὲν* ἀποκλείει τὴν ἀντικατάστασιν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, ὡς θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ νομισθῇ ἐκ πρώτης ὄψεως. Ἁπλῶς ἀποκλείει τοιαύτην ἀντικατάστασιν *ἐντὸς τῆς αὐτῆς* παραγωγικῆς διαδικασίας, ἅπαξ καθορισθείσης. Πᾶσα ἀντικατάστασις μεταξὺ συντελεστῶν παραγωγῆς δέον συνεπῶς νὰ θεωρῆται ὡς καθορίζουσα *νέαν* παραγωγικὴν διαδικασίαν. Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ὑποθέτει ἐν τούτοις—ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν ὁριακὴν ἀνάλυσιν—ὅτι αἱ δυνατότητες ἀντικαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς εἶναι περιωρισμέναι. Συνεπῶς καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν, τῶν προσδιοριζομένων ἐκ διαφόρου μίξεως τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, εἶναι ἐπίσης περιωρισμένος.

Γ. *Προσθετικότης* (additivity). Δύο ἢ καὶ περισσότεραι παραγωγικαὶ διαδικασίαι εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν *ταυτοχρόνως* εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον δράσεως (προϋποτιθεμένου ὅτι αἱ ὑπάρχουσαι ποσότητες συντελεστῶν τὸ ἐπιτρέπουν)· τότε ἡ συνολικῶς χρησιμοποιουμένη ποσότης συντελεστῶν παραγωγῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ ἐχρησιμοποιοῦντο ἂν ἑκάστη παραγωγικὴ διαδικασία ἐλάμβανε χώραν ἐντὸς διαφόρου χρονικῆς περιόδου. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει διὰ τὸ σύνολον τῶν παραγομένων ἀγαθῶν. Ἔστω π.χ. ὅτι δύο παραγωγικαὶ διαδικασίαι Π_1 καὶ Π_2 χρησιμοποιοῦνται ταυτοχρόνως εἰς ἐπίπεδα δράσεως 3 καὶ 2 ἀντιστοίχως. Ἂν ἡ Π_1 ἀπαιτεῖ 2, $^1/_2$, 1 μονάδας ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς α, β, γ ἀντιστοίχως διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ Α, ἡ δὲ Π_2 ἀπαιτεῖ 3, 1, 1 μονάδας ἐκ τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ Β, τότε θὰ ἔχωμεν διὰ τὰ σημειούμενα ἐπίπεδα δράσεως :

Ἀπαιτούμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς :

$2 \times 3 + 3 \times 2 = 12$	μονάδες	ἐκ	τοῦ	συντ.	α
$^1/_2 \times 3 + 1 \times 2 = 3\,^1/_2$	»	»	»	»	β
$1 \times 3 + 1 \times 2 = 5$	»	»	»	»	γ

καὶ σύνολον παραγομένων ἀγαθῶν: 3 μονάδες Α καὶ 2 μονάδες Β.

Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τῆς ὑποθέσεως περὶ προσθετικότητος εἶναι ὅτι ἡ ταυτόχρονος διεξαγωγὴ διαφόρων παραγωγικῶν διαδικασιῶν δὲν ἐπηρεάζει εὐνοϊκῶς ἢ δυσμενῶς τὸ συνολικὸν οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα ἢ τὸ συνολικὸν κόστος.

Δ) *Διαιρετότης* (divisibility). Ὑποτίθεται ὅτι ἑκάστη παραγωγικὴ διαδικασία δύναται νὰ διεξαχθῇ ὄχι μόνον εἰς οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀλλὰ καὶ εἰς οἱονδήποτε [1] κλασματικὸν ἐπίπεδον δράσεως, ἄνευ καταστρατηγήσεως τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Οὕτω ἡ παραγωγικὴ διαδικασία $Π_1$ (τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος) ὑποτίθεται ὅτι δύναται νὰ διεξαχθῇ εἰς ἐπίπεδα δράσεως 1/10, 1/500 κλπ. μὲ ἀποτέλεσμα τὴν δαπάνην 1/10, 1/500 κλπ. ἐκ τῶν ποσοτήτων 2, $^1/_2$, 1 τῶν χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ παραγωγὴν 1/10, 1/500 κλπ. ἐκ τῆς μονάδος τοῦ προϊόντος Α.

Ε. *Μεγιστοποίησις ἢ ἐλαχιστοποίησις* (optimisation). Ὑποτίθεται ὅτι αἱ οἰκονομικαὶ μονάδες δύνανται νὰ ἔχουν εἰς τὴν διάθεσίν των δύο ἢ περισσοτέρας παραγωγικὰς διαδικασίας ἑκάστη τῶν ὁποίων ὁδηγεῖ εἰς διάφορον οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα, οὕτως ὥστε νὰ συμφέρῃ ἡ ἐπιλογὴ μιᾶς ἢ περισσοτέρων παραγωγικῶν διαδικασιῶν αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν μέγιστον τὸ οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα ἐκ δοθέντων παραγωγικῶν μέσων. Ὁμοίως, ὑποτίθεται ὅτι τὸ αὐτὸ οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως δύο ἢ περισσοτέρων παραγωγικῶν διαδικασιῶν, ὁπότε τίθεται τὸ ζήτημα τῆς ἐκλογῆς τῆς ὀλιγώτερον δαπανηρᾶς μεταξὺ αὐτῶν.

Ἡ γενικὴ συνάρτησις παραγωγῆς τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως, ἡ ὁποία βασίζεται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῆς ἀπεριορίστου δυνατότητος ἀντικαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν, μολονότι χρήσιμος διὰ λόγους θεωρητικῆς γενικεύσεως, εἶναι ἀνεφάρμοστος πρακτικῶς. Ὁ ἐπιχειρηματίας ἀντιλαμβάνεται συνήθως τὴν ἐπιχείρησίν του ὡς ἓν σύνολον παραγωγικῶν διαδικασιῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων χρησιμοποιεῖ ὡρισμένας ποσότητας συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ παράγει ὡρισμένον οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα. Ἀντικατάστασις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς θεωρεῖται ἐπίσης δυνατή, ἀλλ' ὡς καθορίζουσα νέας παραγωγικὰς διαδικασίας. Αἱ τεχνικαὶ συνθῆκαι τῶν περισσοτέρων ἐπιχειρήσεων δὲν ἐπιτρέπουν τὴν ἀντικατάστασιν συντελεστῶν παραγωγῆς ἐντὸς τῆς αὐτῆς παραγωγικῆς διαδικασίας. Γενικῶς δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι κύριον πλεονέκτημα τῆς ἐννοίας τῆς «παραγωγικῆς διαδικασίας», ὡς γίνεται δεκτὴ ὑπὸ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, εἶναι ὅτι συμφωνεῖ πρὸς τὴν οἰκονομικὴν καὶ λογιστικὴν πρᾶξιν.

Ἡ ὑπόθεσις περὶ σταθερῶν ἀναλογιῶν, μολονότι ἐκ πρώτης ὄψεως περιοριστική, εἶναι βάσιμος θεωρητικῶς. Ἐὰν αἱ ποσότητες

---

1. Θετικόν.

τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν μέρος εἰς μίαν παραγωγικὴν διαδικασίαν μεταβάλλωνται ἀναλόγως, οὐδεὶς λόγος ὑπάρχει ὅπως μὴ διατηρῆται σταθερὰ ἡ σχέσις μεταξὺ χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων παραγωγῆς καὶ παραγομένης ποσότητος ἀγαθῶν, ἀνεξαρτήτως ἐπιπέδου δράσεως τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας. Αἱ εἰς τὴν πρᾶξιν παρατηρούμεναι περιπτώσεις αὐξανομένης ἢ φθινούσης κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως ὀφείλονται εἰς τὴν διατήρησιν σταθερᾶς τῆς ποσότητος ἑνὸς ἐκ τῶν χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν καθ᾽ ὃν χρόνον αἱ ποσότητες τῶν ἄλλων μεταβάλλονται ἢ εἰς τὴν εἰσαγωγὴν νέων παραγωγικῶν διαδικασιῶν [1]. Εἶναι λοιπὸν θεωρητικῶς δυνατὸν νὰ ὁρίσωμεν καταλλήλως καὶ εἰς κάθε στάδιον παραγωγῆς τὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν οὕτως ὥστε νὰ ληφθοῦν ὑπ᾽ ὄψιν αἱ ἀνωτέρω περιπτώσεις αὐξανομένης ἢ φθινούσης κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην πᾶσα συνάρτησις παραγωγῆς, συνεπῶς καὶ ἡ καμπυλοειδὴς συνάρτησις παραγωγῆς τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως, δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς σύνολον παραγωγικῶν διαδικασιῶν. Ἀπὸ πρακτικῆς ὅμως ἀπόψεως δημιουργοῦνται ὑπολογιστικαὶ δυσχέρειαι ὅταν ἡ παραγωγικὴ συνάρτησις λαμβάνῃ καμπυλοειδῆ μορφήν, κυρίως λόγῳ τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ παραγωγικῶν διαδικασιῶν, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν κατὰ τὸν ὑπολογισμόν, ἐκτὸς βεβαίως ἂν ἱκανοποιούμεθα μὲ προσεγγίσεις. Οὕτω, θὰ ἠδύνατο νὰ λεχθῇ ὅτι, ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως, εἰς τὰς ἀναφερθείσας περιπτώσεις ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ἐγγίζει τὰ ὅρια τῶν δυνατοτήτων του (βλ. παρ. *2* κατωτέρω).

Ἡ ὑπόθεσις περὶ περιωρισμένου ἀριθμοῦ παραγωγικῶν διαδικασιῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μᾶλλον σύμφωνος πρὸς τὴν πραγματικότητα. Μὲ ἐξαίρεσιν ἴσως τὴν γεωργίαν καί τινας χημικὰς βιομηχανίας, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑφ᾽ ἑκάστης οἰκονομικῆς μονάδος διαθεσίμων διαδικασιῶν, ἤτοι παραγωγικῶν μεθόδων χρησιμοποιήσεως τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, εἶναι περιωρισμένος. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἀναφερθεισῶν ἐξαιρέσεων δυνατὸν αἱ ἑκάστοτε τεχνολογικαὶ καὶ οἰκονομικαὶ συνθῆκαι νὰ περιορίζουν σημαντικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν οἰκονομικῶς βασίμων παραγωγικῶν διαδικασιῶν [2].

---

1. Δυνατὸν αἱ νέαι παραγωγικαὶ διαδικασίαι νὰ μὴ σχετίζονται ἀμέσως μὲ τὴν ὑπ᾽ ὄψιν οἰκονομικὴν μονάδα, ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν «ἐξωτερικῶν βιομηχανικῶν οἰκονομιῶν».

2. Αἱ ὑποθέσεις περὶ σταθερῶν ἀναλογιῶν καὶ περιωρισμένου ἀριθμοῦ παραγωγικῶν διαδικασιῶν ἔχουν ἰδιαιτέραν σημασίαν διὰ τὴν θεωρίαν τῆς ἀπασχολήσεως εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας. Εἰς τὰς χώρας αὐτὰς παρα-

Ἡ ὑπόθεσις περὶ προσθετικότητος φαίνεται, ἐκ πρώτης ὄψεως, ὡς μὴ γενικῶς ἰσχύουσα. Οὕτω π.χ., εἰς βιομηχανικάς τινας ἐκμεταλλεύσεις ἡ παραγομένη θερμότης ἐκ καταναλώσεως ποσότητος ἄνθρακος δυνατὸν νὰ χρησιμοποιῆται ταυτοχρόνως ὑπὸ δύο ἢ περισσοτέρων παραγωγικῶν διαδικασιῶν. Ἂν αἱ παραγωγικαὶ διαδικασίαι ἐλάμβανον χώραν εἰς διαφόρους χρονικὰς περιόδους θὰ ἦτο προφανῶς ἀναγκαία ἡ κατανάλωσις περισσοτέρου ἄνθρακος. Παρόμοιαι περιπτώσεις παρατηροῦνται εἰς διαφόρους κλάδους τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς. Εἰς ἑκάστην ὅμως τῶν περιπτώσεων αὐτῶν δυνάμεθα—ἄνευ ἀλλοιώσεως τῆς οὐσίας—νὰ θεωρήσωμεν τὰς ἐν ἀλληλοεπιδράσει παραγωγικὰς διαδικασίας ὡς συνιστώσας μίαν νέαν παραγωγικὴν διαδικασίαν. Συνεπῶς ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην ἡ ὑπόθεσις περὶ προσθετικότητος δὲν παραβιάζεται.

Ἡ ὑπόθεσις περὶ διαιρετότητος δυνατὸν νὰ ἰσχύῃ εἴς τινας περιπτώσεις, κατὰ κανόνα ὅμως εἶναι ἀντιπραγματική. Π.χ. εἰς τὴν παραγωγὴν διαρκῶν ἀγαθῶν (πλοίων, αὐτοκινήτων, ραδιοφώνων κλπ.) τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν εἶναι νοητὰ μόνον εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς. Ἡ ὑπόθεσις περὶ διαιρετότητος εἶναι ἐν τούτοις χρήσιμος ἀπὸ ὑπολογιστικῆς ἀπόψεως. Εἰς περιπτώσεις συγκεκριμένων ἐφαρμογῶν τῆς τεχνικῆς, πρέπει νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ φύσις τῶν παραγομένων ἀγαθῶν καὶ νὰ γίνωνται αἱ ἀναγκαῖαι προσαρμογαὶ εἰς τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἀναλύσεως.

Ἡ ὑπόθεσις περὶ μεγιστοποιήσεως ἢ ἐλαχιστοποιήσεως εἶναι «κανονιστική». Δὲν ἐπιδιώκει δηλαδὴ νὰ ἑρμηνεύσῃ τὴν πραγματικὴν ἐπιχειρηματικὴν συμπεριφοράν, ἡ ὁποία ἐνδέχεται νὰ μὴ συμφωνῇ μὲ τὸ Οἰκονομικὸν Ἀξίωμα, ἀλλ' ἁπλῶς σημαίνει ὅτι ἡ οἰκονομικὴ μονὰς πρέπει νὰ βασισθῇ ἐφ' ὡρισμένων κριτηρίων ἐπιλογῆς κατὰ τὴν οἰκο-

---

τηρεῖται συνήθως σοβαρὰ ἀνεργία μὴ δυναμένη νὰ θεραπευθῇ οὔτε δι' αὐξήσεως τῆς ἐνεργοῦ ζητήσεως κατὰ τὰ κεϋνσιανὰ διδάγματα (αὔξησις ἐνεργοῦ ζητήσεως δημιουργεῖ συνήθως πληθωρισμόν), οὔτε δι' ἀντικαταστάσεως—μέσῳ τοῦ μηχανισμοῦ τῆς ἀγορᾶς—τοῦ ἐν σχετικῇ ἀνεπαρκείᾳ συντελεστοῦ (π.χ. τοῦ κεφαλαίου) ὑπὸ τοῦ συντελεστοῦ «ἐργασία» συμφώνως πρὸς τὴν νεοκλασικὴν θεωρίαν τῆς ὁριακῆς ἀποδοτικότητος. Ἡ ἐπίμονος ἀνεργία ὀφείλεται προφανῶς εἰς τὴν περιωρισμένην δυνατότητα ἀντικαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς ὡς ἀκριβῶς ὑποτίθεται ὑπὸ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἀπαλοιφὴ τῆς ἀνεργίας εἰς τὰς χώρας αὐτὰς εἶναι δυνατὴ μόνον δι' ἀναλόγου αὐξήσεως τῆς ποσότητος τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν. Βλ. λίαν ἐνδιαφερούσας ἀναλύσεις ὑπὸ Masao Fukuoka: Full Employment and Constant Coefficients of Production. Quart. Journal of Economics, February 1955, καὶ E. Simpson: Inflation, «Deflation and Employment in Italy» εἰς Review of Economic Studies, 1949 - 1950.

νομικὴν αὐτῆς δρᾶσιν, ἂν ἐνδιαφέρεται διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος ἢ τὴν ἐλαχιστοποίησιν τῆς οἰκονομικῆς θυσίας.

2. *Διατί «Γραμμικὸς» Προγραμματισμός.*

Οἱ μαθηματικῶς ἐνήμεροι ἐκ τῶν ἀναγνωστῶν θὰ ἐμάντευαν ἤδη τὴν σημασίαν τοῦ ἐπιθέτου «Γραμμικός». Τὸ ἐπίθετον τοῦτο ἀναφέρεται εἰς τὴν μαθηματικὴν φύσιν τῶν προβλημάτων εἰς τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζεται ἡ τεχνικὴ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἡ ὑπόθεσις περὶ σταθερῶν ἀναλογιῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς «γραμμικὰς παραστάσεις» δυναμένας νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς εὐθεῖαι γραμμαὶ εἰς τὸ Καρτεσιανὸν σύστημα συντεταγμένων. Ἐπὶ πλέον, ἡ ὑπὸ μεγιστοποίησιν συνάρτησις εἶναι ἐπίσης γραμμικὴ παράστασις (βλ. παρ. 2 τμῆμα III). Ἡ «γραμμικότης» τῶν ἐν λόγῳ προβλημάτων ἀποκλείει τὴν ἐφαρμογὴν τῶν συνήθων μεθόδων τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ κατὰ τὴν μεγιστοποίησιν ἢ ἐλαχιστοποίησιν ([1]). Ἀντὶ τῶν μεθόδων αὐτῶν χρησιμοποιεῖται εἰδικὴ ἀνάλυσις, βασιζομένη εἰς τὴν θεωρίαν τῶν «κυρτῶν συνόλων» καὶ τὴν γεωμετρίαν πολυδιαστάτων χώρων.

Ἡ μὴ γραμμικότης τῶν προβλημάτων, εἴτε λόγῳ τῆς μορφῆς τῆς ὑπὸ μεγιστοποίησιν συναρτήσεως, εἴτε λόγῳ τῆς μὴ γραμμικῆς διατυπώσεως τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς ([2]), ἀποκλείει τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Οὕτω, μολονότι ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς εὐρυτάτην κατηγορίαν προβλημάτων, δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γενικὴ μέθοδος. Τινές, ἀντὶ τοῦ εἰδικοῦ ὅρου «Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς» χρησιμοποιοῦν τοὺς γενικοὺς ὅρους «Ἀνάλυσις Δραστηριότητος» Koopmans) ([3]) ἢ «Μαθηματικὸς Προγραμματισμὸς» (Dorfman) ([4]). Οἱ ὅροι οὗτοι ἐπιδιώκουν νὰ καλύψουν πάσας τὰς περιπτώ-

---

1. Ἐφαρμογὴ τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ εἶναι δυνατή, ἂν ἡ ὑπὸ μεγιστοποίησιν ἢ ἐλαχιστοποίησιν συνάρτησις ἔχει πρώτην παράγωγον μηδὲν καὶ δευτέραν παράγωγον μικροτέραν τοῦ μηδενὸς (μεγαλυτέραν τοῦ μηδενὸς ἂν πρόκειται περὶ ἐλαχιστοποιήσεως). Ἡ γραμμικὴ ὅμως συνάρτησις ἔχει πρώτην παράγωγον σταθερὸν ἀριθμὸν καὶ δευτέραν παράγωγον μηδέν.

2. Ἡ γραμμικὴ διατύπωσις καμπυλοειδῶν συναρτήσεων παραγωγῆς εἶναι κατ' ἀρχὴν δυνατὴ ἐφ' ὅσον, ὡς ἤδη ἐλέχθη, πᾶσα συνάρτησις παραγωγῆς θὰ ἠδύνατο νὰ διασπασθῇ εἰς ἓν πλῆθος παραγωγικῶν διαδικασιῶν ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἀπὸ ὑπολογιστικῆς ὅμως ἀπόψεως δὲν συμφέρει πάντοτε ἡ διατύπωσις αὐτή.

3. Koopmans, T.C. ed. Activity analysis of production and allocation, Cowles Commission for Research in Economics, 1951.

4. Dorfman, R., Mathematical or linear programming, American Economie Review, 1953.

σεις προγραμματισμοῦ, ἀνεξαρτήτως τῆς μαθηματικῆς φύσεως αὐτῶν. Διεξάγεται ἤδη ἐρευνητικὴ ἐργασία πρὸς γενίκευσιν τῶν μαθηματικῶν μεθόδων, ἐδημοσιεύθησαν δὲ ἐργασίαι ἐπὶ τῶν μὴ γραμμικῶν περιπτώσεων προγραμματισμοῦ (1). Πάντως μέχρι τῆς στιγμῆς δὲν ἀνεκοινώθη γενικὴ μέθοδος χειρισμοῦ τῶν περιπτώσεων αὐτῶν.

3. Δυναμικὸς Προγραμματισμός.

Ἂν αἱ διαθέσιμοι παραγωγικαὶ διαδικασίαι ἀνήκουν τεχνολογικῶς εἰς τὴν αὐτὴν χρονικὴν περίοδον δὲν ἀπαιτεῖται χρονικὸς συσχετισμὸς τοῦ προβλήματος. Ἂν ὅμως αἱ παραγωγικαὶ διαδικασίαι ἀνήκουν εἰς διαφόρους χρονικὰς περιόδους τότε εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως εἰσαχθῇ ὁ χρόνος ὡς ἓν ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ προβλήματος.

Τὰ προβλήματα τῆς πρώτης κατηγορίας καλοῦμεν προβλήματα στατικοῦ προγραμματισμοῦ, τῆς δὲ δευτέρας κατηγορίας προβλήματα δυναμικοῦ προγραμματισμοῦ. Τυπικὸν πρόβλημα τῆς δευτέρας κατηγορίας εἶναι ἡ κατάστρωσις προγράμματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως μιᾶς περιοχῆς. Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ πρέπει νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ διαχρονικὴ κατανομὴ τῶν διαφόρων κατηγοριῶν ἐπενδύσεων πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ τελικοῦ σκοποῦ. Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ μὲ μικρὰς ἀναπροσαρμογὰς εἰς τὰ προβλήματα τοῦ δυναμικοῦ πογραμματισμοῦ. Πάντως ἀπὸ ἀπόψεως ὑπολογισμοῦ τὰ προβλήματα ταῦτα εἶναι γενικῶς πολύπλοκα. Εἰς μερικὰς περιπτώσεις εἶναι δυνατὴ ἡ ἐφαρμογὴ εἰδικῆς τεχνικῆς πρὸς συντόμευσιν τῶν ὑπολογισμῶν (2).

4. Μέθοδος Simplex.

Ἡ μαθηματικὴ θεωρία τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ὁδηγεῖ εἰς τὴν διαμόρφωσιν μιᾶς γενικῆς μεθόδου λύσεως τῶν γραμμικῶν» προβλημάτων, γνωστῆς ὑπὸ τὸ ὄνομα «μέθοδος simplex» (Βλ. καὶ παρ. 3 τμήμ. III.). Ἡ μέθοδος αὕτη χαρακτηρίζεται ὡς «ἀνιχνευτικὴ» (iterative) διότι ἐξετάζει συστηματικῶς διαφόρους λύσεις πρὸς ἀνεύρεσιν τῆς «ἀρίστης». Σημειοῦμεν κατωτέρω μερικὰ ἐκ τῶν κυριωτέρων πλεονεκτημάτων τῆς μεθόδου simplex:

α) Καθιστᾶ δυνατὴν τὴν λύσιν προβλημάτων προγραμματισμοῦ μεγάλης κλίμακος εἰς σχετικῶς βραχὺ χρονικὸν διάστημα. Οὕτω ἐν

---

1. Kuhn, H. W. and Tucker, A. W. Non-linear programming εἰς Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Univ. Press of California, Berkeley.

2. Dantzig, G. B. Block triangular systems in Linear Programming, The Rand Corporation Research Memorandum R.M. 1273, April, 8, 1954,

πρόβλημα προγραμματισμοῦ 50 ἀγνώστων τὸ ὁποῖον συνεπάγεται συνήθως ἄνω τῶν 100.000 πολλαπλασιασμῶν, δύναται νὰ λυθῇ ὑπὸ πεπειραμένου ὑπαλλήλου διὰ τῆς μεθόδου simplex ἐντὸς μιᾶς περίπου ἑβδομάδος. Προβλήματα τοιαύτης ἐκτάσεως δὲν δύνανται νὰ λυθοῦν διὰ τῶν συνήθων μεθόδων (1). Πάντως, πέραν ἑνὸς ὁρίου (π.χ. προβλήματα ἄνω τῶν 150 ἀγνώστων), ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου simplex καθίσταται δυσχερὴς ἢ ἀδύνατος, ἐκτὸς ἂν εἶναι δυνατὸν νὰ περιορισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων τοῦ προβλήματος διὰ διαδικασίας τινος συγχωνεύσεως τῶν μεταβλητῶν εἰς γενικωτέρας ὁμάδας (2).

β) Παρέχει τὰ μέσα αὐτομάτου ἐλέγχου τῶν ὑπολογισμῶν ὡς ἐπίσης καὶ κριτήρια βάσει τῶν ὁποίων καθορίζεται ἂν ἐπετεύχθη ἡ «ἀρίστη» λύσις, ἢ ἂν πρέπει νὰ συνεχισθοῦν οἱ ὑπολογισμοί.

γ) Δίδει χρησίμους πληροφορίας ὡς πρὸς τὰς οἰκονομικὰς ἐπιδράσεις πάσης ἀποκλίσεως ἀπὸ τὴν «ἀρίστην λύσιν».

δ) Δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν κοινωνικοοικονομικῶν προβλημάτων τύπου Leontief, τὰ ὁποῖα λόγῳ τοῦ μεγέθους των ἀπαιτοῦν συνήθως χρῆσιν δαπανηρῶν ἀριθμομηχανῶν (3).

ε) Ἀπὸ ἀπόψεως ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν, γενικῶς, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν μεγάλων συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων ἢ ἀνισοτήτων.

στ) Τέλος σημαντικὸν πλεονέκτημα εἶναι ἡ ἁπλότης τῆς μεθόδου. Ἀνειδίκευτος ὑπάλληλος γραφείου δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ ταύτην ἀποδοτικῶς μετὰ ὀλιγοήμερον ἐξάσκησιν (4).

5. *Ἐφαρμογαὶ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ*

Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην σημειοῦμεν ἐνδεικτικῶς μερικὰς ἀπὸ τὰς γνωστοποιηθείσας ἐφαρμογὰς τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἰς διαφόρους οἰκονομικοὺς κλάδους.

α) Ἐλαχιστοποίησις κόστους μεταφορᾶς (5).

---

1. Ἐκτὸς βεβαίως ἂν διατίθεται ἠλεκτρονικὴ ἀριθμομηχανή.

2. Βλ. προτεινομένας ὑποδείξεις διὰ τὴν βελτίωσιν τῆς μεθόδου εἰς Dantzig ὡς ὑποσημείωσις 1.

3. Ὁμοίως δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν μιᾶς κατηγορίας προβλημάτων τῆς θεωρίας «παιγνίων» ἡ οἰκονομικὴ σημασία τῶν ὁποίων ἀρχίζει νὰ ἀναγνωρίζεται σήμερον (Βλ. κεφ. 19, 20 καὶ 24 εἰς Koopmans, T.C., ed. «Activity analysis of production and allocation», Cowles Commission for Research in Economics, 1951).

4. Ἡ διατύπωσις βεβαίως τοῦ προβλήματος ἀπαιτεῖ σχετικὴν πεῖραν καὶ γνῶσιν τῶν εἰδικῶν συνθηκῶν ἑκάστης περιπτώσεως προγραμματισμοῦ.

5. Lomax, K. S., «Allocation and Programming in Modern Economics», The Manchester School of Economics No 3, Sept. 1953. Morton, G. «Notes

Ἐπιδιώκεται ἡ ἐλαχιστοποίησις τοῦ κόστους μεταφορᾶς ἐμπορευμάτων ἀπὸ διάφορα σημεῖα προελεύσεως εἰς διάφορα σημεῖα προορισμοῦ καὶ εἰς ποσότητας προκαθωρισμένας δι' ἕκαστον σημεῖον προορισμοῦ. Τὰ προβλήματα ταῦτα εἶναι ἐξαιρετικῶς πολύπλοκα ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν σημείων προελεύσεως ἢ προορισμοῦ εἶναι μέγας. Ἡ διαδικασία λύσεως τῶν προβλημάτων αὐτῶν δύναται νὰ ἐπεκταθῇ ἐπίσης εἰς προβλήματα διανομῆς ἀγαθῶν εἰς διάφορα κέντρα καταναλώσεως, ἢ εἰς προβλήματα ἀγορᾶς πρώτων ὑλῶν ἀπὸ διάφορα σημεῖα πρὸς ἐξυπηρέτησιν γεωγραφικῶς κεχωρισμένων βιομηχανικῶν μονάδων.

β) Ὀρθολογιστικὴ χρησιμοποίησις κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ ἐπιχειρήσεων(1). Συνήθης τύπος βιομηχανικῶν. προβλημάτων.

γ) Διαχωρικὴ ἰσορροπία ἀγορῶν(2). Ἐπιδιώκεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἐξισορροπητικοῦ πλέγματος τιμῶν τὸ ὁποῖον ἐνδέχεται νὰ προκύψῃ ὑφ' ὡρισμένας συνθήκας ἀνταγωνισμοῦ μεταξὺ τοπικῶς κεχωρισμένων ἀγορῶν.

δ) Μεγιστοποίησις στρεμματικῆς ἀποδόσεως.(3). Ἐπιδιώκεται ἡ ἐπιλογὴ τῶν καλλιεργειῶν, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν μέγιστον τὸ οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα (κέρδος ἢ ποσότητα-

---

on Linear Programming». Economica, Nov. 1953. King, R. A., and R. J. Freund: «A procedure for solving a Linear Programming problem» Journal Paper No 563, North Carolina Agricultural Experiment Station, July. 1953. Koopmans, T. C., «Efficient allocation of resources», Cowles Commission for Research in Economics, 1939.

1. Lomax, K. S., «Allocation and Programming in Modern Economics», The Manchester School of Economics, Sept. 1953. Cahn, A. S. «The warehouse problem (abstract)»: Bulletin of the American Mathematical Society, Oct. 1948.

2. Samuelson P., «Spatial price equilibrium and Linear Programming». Am. Ec. Reviev. XLII, 3.

3. Boles N. J., «Linear Programming and Farm Management Analysis», Journal of Economics, Febr. 1955. O. Heady, «Simplified presentation and logical aspects of Linear Programming technique», Journal of Farm Economics, Proceedings, 1954. Dantzig, G. B., A. Orden, and P. Wolfe, The generalized simplex method for minimizing a Linear form under Linear inequality restraints», The Rand Corp., Research Memor., RM - 1264, Holley, J. L., A dynamic model: I Principles of model structure, Econometrica, Oct. 1952. King, R. A. Some applications of activity analysis in Agricultural Economics, Journal of Farm Economics, Dec. 1953. King, R. A., and R. J. Freund: A procedure for solving a Linear Programming problem», Journal Paper No 563, North Carolina Agricultural Experiment Station, July, 1953.

παραγωγῆς). Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ἐφαρμόζεται ἤδη εὐρύτατα ὑπὸ διαφόρων ἀγροτικῶν Ἰνστιτούτων εἰς Ἀμερικήν.

ε) Ἐλαχιστοποίησις τοῦ κόστους διατροφῆς κτηνῶν(1). Ἐπιζητεῖται ὁ καθορισμὸς τῆς «ἀρίστης» δυνατῆς διαίτης οὕτως ὥστε ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ διατηρῆται ἀμείωτος ἡ οἰκονομικὴ ἀπόδοσις τῶν κτηνῶν, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ ἐξασφαλίζεται ἡ ἐλαχιστοποίησις τοῦ κόστους τῶν κτηνοτροφῶν.

στ) «Μῖξις» (2). Τὰ προβλήματα μίξεως ἀπαντῶνται εἰς κάθε κλάδον τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς, ἰδίως δὲ εἰς τὰς χημικὰς βιομηχανίας. Π.χ. παραγωγὴ ἀγαθῶν μὲ ὡρισμένας χημικὰς ἰδιότητας, ἐκ τῆς μίξεως πρώτων ὑλῶν γνωστῆς συστάσεως καὶ ἰδιοτήτων, κατὰ τρόπον ἐλαχιστοποιοῦντα τὸ κόστος παραγωγῆς.

ζ) Οἰκονομικὴ ἀνάπτυξις μιᾶς περιοχῆς (3). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐπιδιώκεται ἡ διαχρονικὴ κλιμάκωσις τῶν ἐπενδύσεων καὶ ἡ «ἀρίστη» δυνατὴ κατανομὴ τῶν διαθεσίμων ἐργατικῶν δυνάμεων πρὸς ἐπίτευξιν ἑνὸς ἐπιπέδου οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Δυνατὸν ἐπίσης νὰ ἐπιζητῆται ἀπορρόφησις πληθυσμιακοῦ πλεονάσματος ἐντὸς προκαθωρισμένων χρονικῶν ὁρίων μὲ ταυτόχρονον μεγιστοποίησιν τοῦ κατὰ κεφαλὴν εἰσοδήματος.

III. Διατύπωσις καὶ λύσις ἑνὸς τυπικοῦ προβλήματος προγραμματισμοῦ

1. *Μερικαὶ διευκρινήσεις.*

Θὰ παρακολουθήσωμεν τὴν διαδικασίαν ἐφαρμογῆς τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἰς ἓν πρόβλημα προγραμματισμοῦ τῆς φανταστικῆς ἐπιχειρήσεως Α. Προηγουμένως εἶναι ἀνάγκη νὰ διευκρινήσωμεν μαθηματικάς τινας ἐννοίας τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν.

α) Διάνυσμα: (4) Ὑπὸ τὸν ὅρον διάνυσμα θὰ ἐννοοῦμεν ἐνταῦ-

---

1. Morton, G. Notes on Linear Programming, Economica Nov. 1953. Neumann, P. Some calculations on least - cost diets, Oxford Bulletin of Statistics, Aug. 1954.

2. Charnes A., Cooper W. W., and Henderson A. An introduction to Linear Programming, Journal of Economics, Feb. 1955. Lomax K. S., Allocation and Programming in Modern Economics, The Manchester School of Economics No 3, Sept. 1953. Charnes A., Cooper W. W. and Mellon B., Blending aviation gazolines, Econometrica, April, 1952.

3. Chenery H. The role of industrialisation in development programs, American Econ. Rev. Proceedings, May 1955. Moore F., Regional Economic Reaction Paths, Am. Ec. Rev. Proc. May 1955.

4. Ἐπεχειρήσαμεν ἀρχικῶς νὰ ἀποφύγωμεν τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ ὅρου

θα μίαν στήλην ἀριθμῶν ἐγγραφομένων καθ' ὡρισμένην τάξιν, π.χ.: Οἱ ἀριθμοί, 1, 4, καὶ 3 ἀποτελοῦν στοιχεῖα τοῦ διανύσματος (1).

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

β) Πρόσθεσις διανυσμάτων: ἡ πρόσθεσις τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν διανυσμάτων αὐτῶν π.χ.:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Πρόσθεσις διανυσμάτων εἶναι δυνατὴ μόνον ὅταν τὰ ἐπὶ μέρους διανύσματα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων.

γ) Πολλαπλασιασμὸς διανύσματος ἐπὶ ἀριθμόν: ὁ πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἑκάστου τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν. Π.χ.:

$$2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

δ) Γραμμικὸς συνδυασμὸς διανυσμάτων: τὸ ἄθροισμα (ἢ διαφορὰ) τῶν διανυσμάτων αὐτῶν ἑκάστου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν (2).

«διάνυσμα», ἀλλὰ διεπιστώσαμεν ὅτι τοῦτο θὰ ἐγίνετο πρὸς ζημίαν τῆς ἀναλύσεως. Ἡ χρησιμοποίησις τῆς λέξεως «στήλη» θὰ ἦτο ἴσως ἐπαρκὴς ἂν δὲν ἀπῃτοῦντο ὡρισμέναι ἀλγεβρικαὶ πράξεις.

1. Ἡ γενικὴ μαθηματικὴ ἔννοια τοῦ διανύσματος δὲν εἶναι ἀπαραίτητος εἰς τὴν ἀνάλυσιν. Σημειοῦμεν ἐν τούτοις ὅτι γεωμετρικῶς ἕκαστον διάνυσμα ὁρίζει σημεῖον μὲ συντεταγμένα τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος. Ὁ ἀριθμὸς τῶν διαστάσεων τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου ἰσοῦται συνεπῶς πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος. Ἐπειδὴ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ὑπεισέρχονται πολλάκις διανύσματα σχετικῶς μεγάλου ἀριθμοῦ στοιχείων, εἶναι προφανὴς ὁ τοπολογικὸς χαρακτὴρ τῶν ἐν λόγῳ προβλημάτων καὶ ἡ σχέσις των μὲ τὴν Γεωμετρίαν πολυσυστάτων χώρων.

2. Ὁ ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.

$$2\begin{bmatrix}3\\4\\2\\1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}2\\0\\3\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}10\\8\\7\\3\end{bmatrix}$$

Τοὺς ἀριθμοὺς 2,5 καὶ 3 καλοῦμεν συντελεστὰς ἢ ἁπλῶς πολλαπλασιαστάς. Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἀνωτέρω παραστάσεως γίνεται βάσει τῶν λεχθέντων. Πολλαπλασιάζομεν, πρῶτον, ἕκαστον διάνυσμα ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμόν:

$$\begin{bmatrix}6\\8\\4\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\0\\15\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}30\\24\\21\\9\end{bmatrix}$$

Ἐν συνεχείᾳ προσθέτομεν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα καὶ λαμβάνομεν τελικῶς τὸ διάνυσμα:

$$\begin{bmatrix}46\\32\\40\\16\end{bmatrix}$$

Τὰς ἁπλὰς αὐτὰς ἐννοίας θὰ χρησιμοποιήσωμεν κατωτέρω. Οὐδεμία ἄλλη μαθηματικὴ γνῶσις ἀπαιτεῖται πρὸς παρακολούθησιν τῆς ἀναλύσεως, πλὴν βεβαίως στοιχειώδους ἀριθμητικῆς.

2. *Διατύπωσις τοῦ προβλήματος*

Ὑποθέσεις (1). Α. Κατὰ τὸν χρόνον τοῦ ὑπολογισμοῦ ἡ ἐπιχείρησις Α δύναται νὰ διαθέσῃ 100, 80, 150 μονάδας (2) ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς α, β, γ ἀντιστοίχως. Τὸν περιορισμὸν αὐτὸν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ὑπὸ μορφὴν διανύσματος:

$$\Pi_0=\begin{bmatrix}100\\80\\150\end{bmatrix}$$

Τὸ σύμβολον Π_0 παριστᾷ συνοπτικῶς τὸ ἀνωτέρω διάνυσμα. Ἀ-

1. Πλὴν τῶν ἐνταῦθα σημειουμένων ὑποθέσεων ἰσχύουν παραλλήλως καὶ αἱ γενικαὶ ὑποθέσεις τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ (Τμῆμα I).
2. Αἱ «μονάδες» μετρήσεως καθορίζονται ἐκ τοῦ χρησιμοποιουμένου μετρικοῦ συστήματος.

νάλογα σύμβολα θὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ εἰς ἄλλας περιπτώσεις κατωτέρω. Τὸ Π_0 θὰ καλέσωμεν «διάνυσμα διαθεσίμων συντελεστῶν».

Β. Ἡ ἐπιχείρησις Α ἔχει εἰς τὴν διάθεσίν της πέντε διαφόρους παραγωγικὰς διαδικασίας, τὰς ὁποίας θὰ ἐκφράσωμεν διὰ τῶν διανυσμάτων Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, Π_5:

$$\Pi_1=\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix},\quad \Pi_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\quad \Pi_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\quad \Pi_4=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\quad \Pi_5=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$$

Τὰ ἀνωτέρω διανύσματα θὰ ὀνομάσωμεν «διανύσματα δράσεως» (1). Τὸ Π_1 σημαίνει ὅτι πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδας ἐξ ἑνὸς ὡρισμένου ἀγαθοῦ (2), ἀπαιτοῦνται 2 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α, 2 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ β καὶ οὐδεμία μονὰς ἐκ τοῦ συντελεστοῦ γ (3). Ἀναλόγως ἑρμηνεύονται καὶ τὰ λοιπὰ διανύσματα.

Γ. Ἡ ἐπιχείρησις Α δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ μίαν ἢ περισσοτέρας ταυτοχρόνως παραγωγικὰς διαδικασίας καὶ εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον δράσεως—ἂν βεβαίως αἱ συνολικῶς ἀπαιτούμεναι ποσότητες συντελεστῶν δὲν ὑπερβαίνουν τὰ ὅρια τὰ ὁποῖα καθορίζει τὸ διάνυσμα Π_0.

Δ. Τὸ καθαρὸν κέρδος ἐκ τῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν (=διανυσμάτων δράσεως) Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 καὶ Π_5 χρησιμοποιουμένων εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς μονάδος, εἶναι 2, 2, 3, 4 καὶ 6 νομισματικαὶ μονάδες ἀντιστοίχως. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ κέρδους ἀφαιρεῖται τὸ κατὰ μονάδα κόστος ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν ἀντιστοίχων ἀγαθῶν (4).

Αἱ ἀνωτέρω ὑποθέσεις καθορίζουν τὰς τεχνολογικὰς καὶ οἰκονομικὰς συνθήκας ἐντὸς τῶν ὁποίων δύναται νὰ κινηθῇ ἡ ἐπιχείρησις Α.

Τὸ πρόβλημα τώρα εἶναι νὰ καθορισθῇ βάσει τῶν ὑποθέσεων αὐτῶν τὸ πρόγραμμα δράσεως τῆς ἐπιχειρήσεως. Τοῦτο σημαίνει καθορισμόν: α) τοῦ εἴδους τῶν χρησιμοποιηθησομένων παραγωγικῶν

---

1. Structural or activity vectors.

2. Αἱ διάφοροι παραγωγικαὶ διαδικασίαι δυνατὸν νὰ παράγουν ἑτεροειδῆ ἢ ὁμοειδῆ ἀγαθά. Ἐνταῦθα θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι παράγουν ἑτεροειδῆ ἀγαθά.

3. Οἱ α, β, γ θεωροῦνται συντελεσταὶ παραγωγῆς ἀπὸ ἐπιχειρηματικῆς ἀπόψεως καὶ δὲν ἀνταποκρίνονται κατ' ἀνάγκην εἰς τὴν κλασικὴν διαίρεσιν: ἐργασία, ἔδαφος, κεφάλαιον. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ εἰσαχθῇ εἰς τὸ πρόβλημα οἱοσδήποτε ἀριθμὸς παραγωγικῶν συντελεστῶν. Ὁ συντελεστὴς α ἐνταῦθα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς «χρηματικὸν κεφάλαιον», ὁπότε ἐξηγεῖται εὐκόλως πῶς εἶναι δυνατὴ ἡ παραγωγὴ μὲ δύο μόνον συντελεστὰς εἰς τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις.

4. Δυνατὸν τὸ κέρδος νὰ ὑπολογίζεται βάσει προβλεπομένων τιμῶν.

διαδικασιῶν καὶ β) τοῦ ἐπιπέδου δράσεως αὐτῶν, κατὰ τρόπον ὥστε ἡ ἐπιχείρησις νὰ ἐπιτύχῃ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος ἐκ τῆς πωλήσεως τῶν προϊόντων.

Ἂν θέσωμεν λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 καὶ λ_5, διὰ τὰ ζητούμενα ἐπίπεδα δράσεως τῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 καὶ Π_5 ἀντιστοίχως, τότε ἡ συνάρτησις $\varphi(\lambda)$:

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5$$

ἐκφράζει τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον ἡ ἐπιχείρησις ἐπιδιώκει νὰ καταστήσῃ μέγιστον, ὑπὸ τὰς ἐνταῦθα ὑποθέσεις (1). Προφανῶς μερικὰ λ δυνατὸν νὰ λάβουν τιμὴν μηδὲν (2), ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ ἀντίστοιχος παραγωγικὴ διαδικασία δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὸ πρόγραμμα.

Ὁ τελικὸς περιορισμὸς τοῦ προγράμματος δράσεως τίθεται βεβαίως ὑπὸ τῆς ὑπαρχούσης ποσότητος συντελεστῶν παραγωγῆς. Δέον συνεπῶς νὰ εἶναι:

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 \leqslant \Pi_0 \qquad (1)$$

ἤ, ἐκφράζοντες ἀριθμητικῶς τὰ διανύσματα:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 150 \end{bmatrix}$$

ἢ ἀναλυτικώτερον (συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ὑπὸ στοιχ. 1. δ λεχθέντα):

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 &\leqslant 100 \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 + 1\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 &\leqslant 80 \\ 0\lambda_1 + 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 &\leqslant 150 \end{aligned} \qquad (2)$$

Ἡ σημασία τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων εἶναι προφανής: Ἡ πρώτη σημαίνει ὅτι ἡ συνολικῶς δαπανωμένη ποσότης ἐκ τοῦ συντελεστοῦ *α* κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ προγράμματος δράσεως δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν συνολικῶς διατιθεμένην ποσότητα τῶν 100 μονάδων τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ. Ἀνάλογος ἑρμηνεία πρέπει νὰ δοθῇ καὶ εἰς τὰς ἄλλας δύο ἀνισότητας. Οὕτω τὸ σύστημα (2) σημαίνει ὅτι αἱ ὑπὸ τοῦ προγράμματος προβλεπόμεναι συνολικαὶ ποσότητες τῶν

---

1. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ καθαρὸν κέρδος τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας Π_1 εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος εἶναι 2. Ἂν συνεπῶς λ_1 εἶναι τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς Π_1 τότε θὰ ἔχωμεν $2\lambda_1$ διὰ τὸ συνολικὸν κέρδος ἐκ τῆς παραγωγικῆς ταύτης διαδικασίας. Ὁμοίως σκεπτόμενοι καὶ διὰ τὰς λοιπὰς παραγωγικὰς διαδικασίας καὶ προσθέτοντες τὰ ἐπὶ μέρους γινόμενα λαμβάνομεν τὴν συνάρτησιν κέρδους $\varphi(\lambda)$.

2. Ὄχι ὅμως καὶ ἀρνητικήν.

συντελεστῶν α, β καὶ γ δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνουν τὰς ἀντιστοίχως διαθεσίμους ποσότητας τῶν συντελεστῶν αὐτῶν. Συνοπτικῶς λοιπὸν τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιχειρήσεως Α δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ (μὴ ἀρνητικαὶ) τιμαὶ τῶν λ, τοιαῦται ὥστε:

$$\varphi(\lambda)=2\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4+6\lambda_5=\text{μέγιστον}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν:

$$\lambda_1\Pi_1+\lambda_2\Pi_2+\lambda_3\Pi_3+\lambda_4\Pi_4+\lambda_5\Pi_5\leqslant\Pi_0$$

Πρὶν προχωρήσωμεν ἐν τούτοις εἶναι ἀνάγκη, διὰ λόγους διευκολύνσεως τῶν ὑπολογισμῶν, ὅπως μετατρέψωμεν τὰς ἀνωτέρω ἀνισότητας εἰς ἰσότητας. Ἡ μετατροπὴ μιᾶς ἀνισότητος εἰς ἰσότητα γίνεται δι' ἁπλῆς προσθήκης εἰς τὸ ἀσθενέστερον μέρος τῆς ἀνισότητος τῆς διαφορᾶς ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἀνισότητος ταύτης. Π.χ. ἡ ἀνισότης $5<8$ μετατρέπεται εἰς ἰσότητα ἂν προσθέσωμεν εἰς τὸ ἀριστερὸν μέλος τὴν διαφορὰν $8-5=3$. Ἡ ἀκολουθουμένη ἐνταῦθα διαδικασία μετατροπῆς τῶν ἀνισοτήτων εἰς ἰσότητας δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς. Ὁρίζομεν τρία νέα διανύσματα Π_6, Π_7, Π_8, τοιαῦτα ὥστε:

$$\Pi_6=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \Pi_7=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \Pi_8=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Οἰκονομικῶς, τὸ Π_6 σημαίνει ὅτι ἐπιτρέπει τὴν μὴ χρησιμοποίησιν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α. Τὰ Π_7 καὶ Π_8 ἐπιτρέπουν τὴν μὴ χρησιμοποίησιν μιᾶς μονάδος ἐκ τῶν συντελεστῶν β καὶ γ ἀντιστοίχως. Τὰ δύο μηδενικὰ εἰς ἕκαστον διάνυσμα σημαίνουν ὅτι ἡ μὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων ἐξ ἑνὸς συντελεστοῦ δὲν ἀπαιτεῖ δαπάνας ἐκ τῶν δύο ἄλλων συστελεστῶν. Λόγῳ τῆς οἰκονομικῆς των σημασίας θὰ ὀνομάσωμεν τὰ Π_6, Π_7 καὶ Π_8 «διανύσματα ἀδρανείας» [1].

Ἂν τώρα ὡρισμέναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς μένουν ἀχρησιμοποίητοι, διότι εἶναι πολλάκις τεχνικῶς ἀδύνατος ἡ χρησιμοποίησις ὡρισμένων ποσοτήτων ἐξ ἑνὸς συντελεστοῦ ἄνευ ἀντιστοίχων ποσοτήτων ἐκ τῶν ἄλλων συντελεστῶν (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν) τὰ ἀντίστοιχα διανύσματα ἀδρανείας πρέπει νὰ περιλαμβάνωνται εἰς τὸ πρόγραμμα δράσεως ὑπὸ κατάλληλα ἐπίπεδα. Θὰ ὀνομάσωμεν τὰ ἐπίπεδα ταῦτα, «ἐπίπεδα ἀδρανείας», καθόσον χρησιμοποίησις εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον ἑνὸς διανύσματος ἀδρανείας, σημαίνει ἁπλῶς μὴ χρησιμοποίησιν ὡρισμένων ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελε-

1. Slack vectors ἢ disposable activities.

στῶν παραγωγῆς. Αἱ τιμαὶ τῶν ἐπιπέδων ἀδρανείας δὲν δύνανται νὰ εἶναι μικρότεραι τοῦ μηδενὸς (δηλαδὴ ἀρνητικαὶ) οὔτε μεγαλύτεραι τῶν ποσοτήτων τῶν ἀντιστοίχων συντελεστῶν.

Ἂν θέσωμεν λ_6, λ_7, λ_8 διὰ τὰ ἐπίπεδα ἀδρανείας Π_6, Π_7 καὶ Π_8 ἀντιστοίχως, τότε ἡ παράστασις (1) γίνεται:

$$\lambda_1\Pi_1+\lambda_2\Pi_2+\lambda_3\Pi_3+\lambda_4\Pi_4+\lambda_5\Pi_5+\lambda_6\Pi_6+\lambda_7\Pi_7+\lambda_8\Pi_8=\Pi_0 \tag{3}$$

καὶ ἀναλυτικῶς:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1+2\lambda_2+1\lambda_3+2\lambda_4+2\lambda_5+1\lambda_6+0\lambda_7+0\lambda_8 &= 100 \\ 2\lambda_1+0\lambda_2+1\lambda_3+1\lambda_4+2\lambda_5+0\lambda_6+1\lambda_7+0\cdot\lambda_8 &= 80 \\ 0\lambda_1+1\lambda_2+2\lambda_3+1\lambda_4+2\lambda_5+0\lambda_6+0\lambda_7+1\lambda_8 &= 150 \end{aligned} \tag{4}$$

Τὸ σύστημα (4) σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον τῶν παραγωγικῶς χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων συντελεστῶν σὺν τῷ συνόλῳ τῶν μὴ χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὰς συνολικῶς διαθεσίμους ποσότητας συντελεστῶν.

Ἂν τέλος ὑποθέσωμεν ὅτι δὲν ζημιοῦται ἡ ἐπιχείρησις Α ἐκ τῆς μὴ χρησιμοποιήσεως ὡρισμένων ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν [1], τότε τὸ καθαρὸν ἀποτέλεσμα ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς διανυσμάτων ἀδρανείας εἰς τὸ πρόγραμμα ὑφ' οἱονδήποτε ἐπίπεδον εἶναι μηδὲν καὶ συνεπῶς ἡ συνάρτησις $\varphi(\lambda)$ μένει ἀμετάβλητος.

Μετὰ τὸν καθορισμὸν τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας τὸ πρόβλημα δύναται νὰ λάβῃ ὁριστικὴν διατύπωσιν ὡς ἀκολούθως:

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ (μὴ ἀρνητικαὶ) τιμαὶ τῶν λ, τοιαῦται ὥστε:

$$\varphi(\lambda)=2\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4+6\lambda_5=\text{μέγιστον} \tag{5}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν:

$$\lambda_1\Pi_1+\lambda_2\Pi_2+\lambda_3\Pi_3+\lambda_4\Pi_4+\lambda_5\Pi_5+\lambda_6\Pi_6+\lambda_7\Pi_7+\lambda_8\Pi_8=\Pi_0 \tag{6}$$

3. *Λύσις τοῦ προβλήματος.*

Ἡ παράστασις (6), ἡ ὁποία εἶναι περιληπτικὴ μορφὴ τοῦ συστήματος (4), ἐπιδέχεται διαφόρους λύσεις. Ἡ ἐπιχείρησις Α ἐνδιαφέρεται μόνον δι' ἐκείνην τὴν λύσιν ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ ταυτοχρόνως τὴν (5), ἤτοι καθιστᾷ μέγιστον τὸ ἀναμενόμενον κέρδος. Ἡ μέθοδος simplex, περὶ τῆς ὁποίας ὡμιλήσαμεν εἰς τὸ προηγούμενον τμῆμα, χρη-

---

1. Δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ διαφυγὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῆς μὴ χρησιμοποιήσεως ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν. Πάντως εἶναι ἐνδεχόμενον ὅπως ἡ μὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων συντελεστῶν προκαλῇ ζημίας, ἂν π.χ. δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ διατήρησις καὶ ἐπαναχρησιμοποίησις αὐτῶν. (Βλ. καὶ ὑπ' ἀριθ. 2 παρατήρησιν εἰς 4 κατωτέρω).

σιμοποιεῖται ἀκριβῶς πρὸς ἀνίχνευσιν τῆς λύσεως ταύτης διὰ συστηματικῆς ἐξετάσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ λύσεων.

Π ρ ῶ τ ο ν σ τ ά δ ι ο ν ὑ π ο λ ο γ ι σ μ ῶ ν. Ἐκλέγομεν ὡς ἀφετηρίαν τῶν ὑπολογισμῶν τὴν ἁπλουστέραν «δυνατὴν» (1) λύσιν θέτοντες $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0$ καὶ $\lambda_6=100$, $\lambda_7=80$, $\lambda_8=150$ (2). Ἡ λύσις αὕτη σημαίνει ὅτι οὐδεμία παραγωγικὴ διαδικασία χρησιμοποιεῖται (ἐφ' ὅσον τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν διαθεσίμων παραγωγικῶν διαδικασιῶν εἶναι μηδέν), αἱ δὲ διατιθέμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραμένουν ἀχρησιμοποίητοι (ἤτοι ἀπορροφῶνται ἀπὸ τὰ διανύσματα ἀδρανείας τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα λ_6, λ_7, λ_8 λαμβάνουν τὴν μεγίστην δυνατὴν τιμήν). Κατὰ συνέπειαν καὶ τὸ κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι μηδέν:

$$\varphi(\lambda)=2\times0+2\times0+3\times0+4\times0+6\times0$$

Πρὶν προχωρήσωμεν πρὸς εὕρεσιν καλλιτέρας λύσεως θὰ καταγράψωμεν συστηματικῶς τὰ τεχνικὰ καὶ οἰκονομικὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ὡς ἐπίσης καὶ τὴν ἀρχικὴν λύσιν ὡς κατωτέρω:

Πινάκιον α'.

Κ.Κ.	→					2	2	3	4	6
↓	Β	Π_0	Π_6	Π_7	Π_8	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
	Π_6	100	1			2	2	1	2	2
	Π_7	80		1		2		1	1	2
	Π_8	150			1		1	2	1	2
Ο.Κ.	→					−2	−2	−3	−4	−6

Ἐὰν ἀφήσωμεν πρὸς στιγμὴν κατὰ μέρος τὴν τελευταίαν σειράν, τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ πινακίου εἶναι μᾶλλον σαφές.

α) Κάτωθεν τοῦ στοιχείου Β, τὸ ὁποῖον συμβολίζει τὴν λέξιν «βάσις», ἐγγράφονται τὰ ἐκλεγόμενα διανύσματα πρὸς κατάστρωσιν τοῦ ἑκάστοτε προγράμματος (3).

1. «Δυνατὴ» λύσις σημαίνει λύσις ἱκανοποιοῦσα τὴν παράστασιν (6) ὄχι ὅμως κατ' ἀνάγκην καὶ τὴν (5).
2. Οἱ λόγοι τῆς ἐκλογῆς αὐτῆς ἀναφέρονται κατωτέρω.
3. Θὰ καλοῦμεν ἐνίοτε τὰ διανύσματα τοῦ προγράμματος διανύσματα βάσεως.

β) Κάτωθεν τοῦ Π_0 σημειοῦνται αἱ ὑπάρχουσαι ποσότητες τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς α, β, γ. Ταὐτοχρόνως ὅμως οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ παριστοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως (ἢ ἀδρανείας, ὡς ἐν προκειμένῳ) τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων τῆς βάσεως· ὡς δεικνύεται εἰς τὸ πινάκιον, αἱ 100, 80 καὶ 150 μονάδες ἐκ τῶν συντελεστῶν α, β καὶ γ ἀντιστοίχως, καθορίζουν τὰ ἐπίπεδα τῶν διανυσμάτων Π_6 Π_7 καὶ Π_8. Οὕτω αἱ στῆλαι κάτωθεν τῶν Β καὶ Π_0 παριστοῦν ὁμοῦ τὸ ἑκάστοτε ἐκλεγόμενον πρόγραμμα δράσεως, ὡς καθορίζουσαι τὰ ἐκλεγόμενα διανύσματα καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.

γ) Εἰς τὰς ὑπολοίπους στήλας τοῦ πινακίου ἀναγράφονται πάντα τὰ χρησιμοποιούμενα διανύσματα (δράσεως ἢ ἀδρανείας) μετὰ τῶν στοιχείων αὐτῶν. Τὰ μηδενικὰ στοιχεῖα δὲν ἀναγράφονται. Κατὰ τὴν ταξινόμησιν τὰ διανύσματα ἀδρανείας ἐτέθησαν πρὸ τῶν διανυσμάτων δράσεως διὰ λόγους εὐχερείας ὑπολογισμῶν.

δ) Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι πάντα τὰ διανύσματα $\Pi_0, \Pi_1, \ldots . \Pi_8$ δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ[1] τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως Π_6, Π_7, Π_8.

Ἂς λάβωμεν π.χ. τὸ διάνυσμα διαθεσίμων συντελεστῶν Π_0 δυνάμεθα νὰ θέσωμεν:

$$\Pi_0 = 100\ \Pi_6 + 80\ \Pi_7 + 150\ \Pi_8$$

$$= 100 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 80 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 150 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 150 \end{bmatrix} = \Pi_0$$

Εἰς τὸν ἀνωτέρω γραμμικὸν συνδυασμὸν ὡς πολλαπλασιασταὶ τῶν διανυσμάτων ἐτέθησαν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ διανύσματος Π_0. Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τοῦ συνδυασμοῦ αὐτοῦ εἶναι ὅτι αἱ ὑπάρχουσαι ποσότητες τῶν συντελεστῶν α, β, γ, διατίθενται ἐξ ὁλοκλήρου, ἂν τὸ ἐκλεγόμενον πρόγραμμα περιλαμβάνῃ τὸ διάνυσμα Π_6 εἰς ἐπίπεδον 100, τὸ διάνυσμα Π_7 εἰς ἐπίπεδον 80 καὶ τὸ διάνυσμα Π_8 εἰς ἐπίπεδον 150. «Διατίθενται ἐξ ὁλοκλήρου» σημαίνει ἐνταῦθα—λόγῳ τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος—ὅτι δὲν χρησιμοποιοῦνται. Ἡ ἑρμηνεία εἶναι προφανῶς πλέον ἐνδιαφέρουσα ὅταν εἰς τὸ πρόγραμμα περιλαμβάνωνται καὶ διανύσματα δράσεως (=παραγωγικαὶ διαδικασίαι), ὡς συμβαίνει εἰς τὰ πινάκια β′ καὶ γ′ κατωτέρω.

Ὁμοίως, τὸ διάνυσμα Π_4 δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς:

---

1. Βλέπε τὰ ὑπὸ στοιχεῖα δ λεχθέντα τῆς παραγρ. 1 τοῦ παρόντος τμήματος.

$$\Pi_4 = 2\Pi_6 + 1\Pi_7 + 1\Pi_8$$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_4$$

Εἰς τὸν συνδυασμὸν αὐτὸν ἐτέθησαν ὁμοίως ὡς πολλαπλασιασταὶ τῶν διανυσμάτων τὰ στοιχεῖα τοῦ Π_4. Γενικῶς πᾶν διάνυσμα τοῦ πινακίου δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐκλεγομένου προγράμματος, ἂν θέσωμεν ὡς πολλαπλασιαστὰς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ὑπ' ὄψιν διανύσματος.

Ποία τώρα εἶναι ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τῆς ἐκφράσεως ἑνὸς διανύσματος δράσεως, π.χ. τοῦ Π_4, ὡς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος. Σκεπτόμενοι ὡς καὶ προηγουμένως, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἔννοιαν ταύτην ὡς ἑξῆς: Αἱ ἀπαιτούμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τὴν χρησιμοποίησιν π.χ. τοῦ διανύσματος δράσεως Π_4 εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς μονάδος, ἰσοῦνται ἀκριβῶς πρὸς τὰς ποσότητας αἱ ὁποῖαι ἀπορροφῶνται ἀπὸ τὰ διανύσματα: Π_6 εἰς ἐπίπεδον 2, Π_7 εἰς ἐπίπεδον 1 καὶ Π_8 εἰς ἐπίπεδον 1. Ἐν ἄλλοις λόγοις ἔχομεν ἐνώπιόν μας δύο διαφόρους συνδυασμοὺς τῆς αὐτῆς ποσότητος παραγωγικῶν συντελεστῶν. Δεδομένου ὅτι εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ γνωρίζωμεν τὸ καθαρὸν κέρδος ἑκάστου συνδυασμοῦ (διότι δίδεται ὑπὸ τοῦ προβλήματος τὸ ὑφ' ἑκάστου διανύσματος ἀναμενόμενον καθαρὸν κέρδος), δυνάμεθα νὰ ἀποφασίσωμεν ἐὰν συμφέρῃ ἢ ὄχι ἡ ἀφαίρεσις ποσοτήτων συντελεστῶν ἀπὸ τὰ διανύσματα τοῦ προγράμματος, διὰ τὴν δραστηριοποίησιν ἑνὸς νέου διανύσματος. Ἐνταῦθα βεβαίως ἡ σύγκρισις αὕτη γίνεται αὐτομάτως διότι γνωρίζομεν ὅτι τὰ διανύσματα ἀδρανείας δίδουν μηδὲν καθαρὸν κέρδος, ὁπότε συμφέρει ὁπωσδήποτε ἡ εἰσαγωγὴ ἑνὸς διανύσματος δράσεως εἰς τὸ πρόγραμμα. Ὅταν ὅμως τὸ πρόγραμμα περιλαμβάνῃ ἤδη διανύσματα δράσεως (ὡς εἰς τὰ ἑπόμενα πινάκια β' καὶ γ') τότε ἡ ἀνωτέρω σύγκρισις διὰ τοῦ τεχνάσματος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ εἶναι βασικὴ διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς καλλιτέρας δυνατῆς λύσεως [1].

Ὡς θὰ παρετήρησεν ὁ ἀναγνώστης τὰ διανύσματα Π_0, $\Pi_1 \ldots \Pi_8$ ἐκφραζόμενα ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων τοῦ προ-

---

1. Πᾶν διάνυσμα ἀδρανείας δύναται ἐπίσης νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος. Ἡ ἔννοια τοῦ συνδυασμοῦ αὐτοῦ δύναται νὰ καθορισθῇ κατ' ἀναλογίαν τῶν λεχθέντων διὰ τὰ λοιπὰ διανύσματα, λαμβανομένης βεβαίως ὑπ' ὄψιν τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας.

γράμματος, δὲν ἀλλάσσουν ἀριθμητικὴν μορφήν, παραμένοντα ὡς ἀκριβῶς ἐδόθησαν ἀρχικῶς ὑπὸ τοῦ προβλήματος. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει μόνον εἰς τὸ πρῶτον πινάκιον τῶν ὑπολογισμῶν, λόγῳ τῆς ἀριθμητικῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας [1] τὰ ὁποῖα ἐξελέγησαν εἰς τό ἀρχικὸν πρόγραμμα. Οὕτω ἐκλέγοντες ὡς ἀφετηρίαν ἓν πρόγραμμα ἀπαρτιζόμενον ἀπὸ τὰ διανύσματα ἀδρανείας εἰς οὐδένα σχεδὸν ὑπολογισμὸν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ προβῶμεν κατὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ πρώτου πινακίου. Ἀρκεῖ νὰ καταγράψωμεν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος κατὰ τὴν ὑποδειχθεῖσαν σειρὰν (πινάκ. α'). Οὗτος εἶναι εἷς ἐκ τῶν λόγων χρησιμοποιήσεως διανυσμάτων ἀδρανείας εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόγραμμα. Ἕτερος, πλέον οὐσιώδης λόγος, εἶναι ὅτι διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ ἀποφεύγεται ἡ ὑπερπήδησις τῆς «ἀρίστης» δυνατῆς λύσεως, ἐφ' ὅσον ἀρχίζομεν τοὺς ὑπολογισμοὺς ἀπὸ τὴν λύσιν ἐκείνην ἡ ὁποία δίδει καθαρὸν κέρδος μηδέν.

ε) Τὰ στοιχεῖα Κ.Κ. εἰς τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον τοῦ πινακίου σημαίνουν «καθαρὸν κέρδος». Ἡ φορὰ τῶν βελῶν δεικνύει ὅτι τὰ τετραγωνίδια τῆς ἔναντι σειρᾶς καὶ τῆς κάτωθεν στήλης χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ καθαροῦ κέρδους ἑκάστου διανύσματος. Ἐπειδὴ τὰ διανύσματα ἀδρανείας ἔχουν καθαρὸν κέρδος μηδέν, τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια μένουν κενά, ἀναγράφεται δὲ μόνον τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ διανύσματα δράσεως, κατὰ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος.

στ) Εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου, ἔναντι τῶν στοιχείων Ο.Κ. (=ὁριακὸν κέρδος) ἐγγράφεται ἡ διαφορὰ καθαροῦ κέρδους ἡ λαμβανομένη ἐκ τῆς ὑπὸ στοιχείων δ ἀνωτέρω ὑποδειχθείσης συγκρίσεως. Ἂς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι θέλωμεν νὰ καθορίσωμεν ποίαν ἐπίδρασιν θὰ ἔχῃ ἐπὶ τοῦ καθαροῦ κέρδους ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος δράσεως Π_3. Πρῶτον, ἐκφράζομεν τοῦτο ὡς γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως κατὰ τὰ γνωστά :

$$\Pi_3 = 1.\Pi_6 + 1.\Pi_7 + 2.\Pi_8$$

1. Ἐπειδὴ δηλαδὴ περιέχουν ἀνὰ μίαν μονάδα καὶ δύο μηδενικὰ ἕκαστον κατὰ τρόπον ὥστε χρησιμοποιούμενα εἰς τὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν ἀφήνουν τὴν ἀριθμητικὴν φύσιν τῶν ἄλλων διανυσμάτων ἀναλλοίωτον. Μαθηματικῶς τὰ διανύσματα ἀδρανείας ἀποτελοῦν τὴν ἀρχικὴν «βάσιν» τοῦ συστήματος ἢ τὰς συντεταγμένας ἑνὸς χώρου ν διαστάσεων (ν=ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν) βάσει τῶν ὁποίων δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τὰ ὑπόλοιπα διανύσματα τοῦ προβλήματος, κείμενα ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χώρου.

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις σημαίνει ὅτι ἡ ἀπαιτουμένη ποσότης συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ Π_9 εἰς ἐπίπεδον δράσεως 1, εἶναι ἴση μὲ τὰς ποσότητας συντελεστῶν τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν τὸ διάνυσμα Π_6 εἰς ἐπίπεδον 1, τὸ διάνυσμα Π_7 εἰς ἐπίπεδον 1 καὶ τὸ διάνυσμα Π_8 εἰς ἐπίπεδον 2.

Δεύτερον, συγκρίνομεν τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ὁποῖον δίδουν οἱ δύο ἀνωτέρω συνδυασμοὶ(1) τῶν αὐτῶν ποσοτήτων συντελεστῶν παραγωγῆς. Γνωρίζομεν ὅτι πάντα τὰ διανύσματα ἀδρανείας φέρουν ἐξ ὑποθέσεως καθαρὸν κέρδος μηδὲν (ἤτοι, $1 \times 0 + 1 \times 0 + 2 \times 0 = 0$, ὅπου τὰ τρία πρῶτα μηδενικὰ εἶναι τὰ καθαρὰ κέρδη τῶν Π_6, Π_7, Π_8), τὸ δὲ Π_9 εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς μονάδος φέρει κέρδος 3. Συγκρίνοντες συνεπῶς λαμβάνομεν $0-3=-3$, ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ ὁριακὸν κέρδος τοῦ διανύσματος Π_9 εἶναι 3 μονάδες(2). Ἑπομένως ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ Π_9 εἰς τὸ πρόγραμμα δύναται νὰ βελτιώσῃ τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως. Κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον γίνεται ὁ προσδιορισμὸς τοῦ «ὁριακοῦ κέρδους» ὅλων τῶν διανυσμάτων. Γενικῶς ὅταν ὑπάρχῃ ἓν ἢ περισσότερα ἀρνητικὰ στοιχεῖα εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου βελτίωσις τοῦ συνολικοῦ κέρδους εἶναι δυνατὴ δι' εἰσαγωγῆς εἰς τὸ πρόγραμμα ἑνὸς ἐκ τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων. Κατ' ἀντιστοιχίαν ὅταν ἓν στοιχεῖον εἶναι θετικὸν ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ ἀντιστοίχου διανύσματος μειώνει τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ὡς τοῦτο καθορίζεται ὑπὸ τοῦ ἤδη ἐκλεγέντος προγράμματος. Ὅταν ἓν ἢ περισσότερα στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου εἶναι μηδέν, οὔτε κέρδος οὔτε ζημία προκαλοῦνται ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων εἰς τὸ πρόγραμμα.

Λόγῳ τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας, τὰ ὁποῖα δίδουν κέρδος μηδέν, οὐδεμία σχεδὸν σκέψις ἀπαιτεῖται διὰ τὴν κατάρτισιν τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου α'. Ἁπλῶς ἐγγράφομεν τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης σειρᾶς εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια μὲ ἀντίθετον σημεῖον.

Κατόπιν τῶν ὅσων ἤδη ἐλέχθησαν, ἁπλῆ ἐπισκόπησις τοῦ πινακίου α' δεικνύει ὅτι ἡ ἐπιχείρησις δύναται νὰ ἐπιτύχῃ καθαρὸν κέρδος ἂν μεταβάλῃ τὸ ἀρχικὸν πρόγραμμα. Τὸ πρόβλημα εἶναι τώρα πῶς

1. Ὡς παριστῶνται ἐκ τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως.

2. Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον τοῦ ὁριακοῦ κέρδους ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ Π_9 τίθεται ὡς ἀφαιρέτης, δὲν πρέπει δὲ νὰ ἐκλαμβάνεται ὡς ὁριακὴ ζημία ἡ ὁποία σημειοῦται διὰ θετικοῦ σημείου. Ὁ τρόπος αὐτὸς παρουσιάσεως ἔχει ὡρισμένα πλεονεκτήματα ἀπὸ ἀπόψεως ὑπολογισμοῦ.

θὰ γίνῃ ἡ μεταβολή. Εἰδικώτερον πρέπει νὰ καθορισθοῦν: α) Ποῖον διάνυσμα πρέπει νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὸ πρόγραμμα, β) Ποῖον διάνυσμα πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τοῦ προγράμματος.

Ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιχείρησις ἐνδιαφέρεται διὰ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος, λογικὸν εἶναι νὰ ἐπιζητῆται ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος τὸ ὁποῖον δίδει τὸ μεγαλύτερον ὁριακὸν κέρδος. Ἐνταῦθα τὸ διάνυσμα αὐτὸ εἶναι τὸ Π_5 εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ κέρδος 6 μονάδες. Γενικῶς, ἐπιβάλλεται ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀ ρ ν η τ ι κ ὸ ς ἀ ρ ι θ μ ὸ ς μ ὲ τ ὴ ν μ ε γ α λ υ τ έ ρ α ν ἀ π ό λ υ τ ο ν τ ι μ ή ν, ὁ εὑρισκόμενος εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου [1].

Πρὸς καθορισμὸν τοῦ διανύσματος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τοῦ προγράμματος, ἀντικαθιστώμενον ὑπὸ τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος, σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως: Ἐφ' ὅσον τὸ Π_5 εἶναι τὸ πλέον ἐπικερδὲς διάνυσμα, συμφέρει ἡ χρησιμοποίησις αὐτοῦ εἰς τὸ ἀνώτατον δυνατὸν ἐπίπεδον δράσεως. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ποσότητος τῶν ἐν ἀδρανείᾳ συντελεστῶν παραγωγῆς, κυρίως δὲ [2] ἐκ τῆς ποσότητος τοῦ ἐν σχετικῇ (ὡς πρὸς τὰς τεχνολογικὰς συνθήκας τοῦ Π_5) ἀνεπαρκείᾳ εὑρισκομένου συντελεστοῦ. Ὁ ἐν σχετικῇ ἀνεπαρκείᾳ συντελεστὴς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μικρότερον ἐκ τῶν πηλίκων, τὰ ὁποῖα λαμβάνονται ἂν διαιρέσωμεν τὰς ποσότητας καὶ τῶν τριῶν συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ Π_5. Ἐνταῦθα ἔχομεν $100/2=50$, $80/2=40$, $150/2=75$, συνεπῶς ὁ συντελεστὴς β εἶναι ὁ ἐν σχετικῇ ἀνεπαρκείᾳ εὑρισκόμενος καὶ καθορίζει ἀνώτατον ἐπίπεδον δράσεως τοῦ Π_5 40 μονάδας. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ λ ό κ λ η ρ ο ς ἡ ποσότης τοῦ συντελεστοῦ β $(40\times2=80)$ χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος καὶ συνεπῶς τὸ διάνυσμα Π_7 (τὸ ὁποῖον ὑποδηλοῖ ἀδράνειαν τοῦ συντελεστοῦ β), δὲν ἔχει θέσιν εἰς τὸ πρόγραμμα. Γενικῶς, πρὸς καθορισμὸν τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος: Διαιροῦμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ Π_0 διὰ τῶν ἀντιστοίχων θετικῶν [3] στοιχείων τοῦ εἰσερχομένου διανύσματος καὶ καθορίζομεν ἐν συνεχείᾳ ὡς «ἐξερχόμενον» διάνυσμα τὸ διάνυσμα τοῦ προγράμματος τὸ ἀντι-

---

1. Ἂν ὑπάρχουν εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν δύο ἢ περισσότεροι ἴ σ ο ι ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ μὲ ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλυτέραν τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῶν ἄλλων ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἐκλέγεται πρὸς εἰσαγωγὴν εἰς τὸ πρόγραμμα οἱονδήποτε ἐκ τῶν διανυσμάτων τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς ἴσους ἀρνητικοὺς ἀριθμούς.
2. Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.
3. Δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν τὰ μηδενικὰ καὶ τὰ ἀρνητικὰ στοιχεῖα.

στοιχοῦν εἰς τὸ μικρότερον πηλῖκον [1]. Τὸ «εἰσερχόμενον» διάνυσμα $Π_6$ καὶ τὸ «ἐξερχόμενον» διάνυσμα $Π_7$ καταδεικνύονται διὰ τῶν ἐντόνων καθέτων καὶ ὁριζοντίων γραμμῶν τοῦ πινακίου.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ περατοῦται τὸ πρῶτον στάδιον τῶν ὑπολογισμῶν. Μηχανικῶς αἱ μέχρι τοῦδε ὑποδειχθεῖσαι κινήσεις ἔχουν ὡς ἀκολούθως:

α) Κατάστρωσις τοῦ πινακίου α' βάσει τῶν δοθεισῶν πληροφοριῶν: ἐγγραφὴ εἰς τό πινάκιον τῶν διανυσμάτων δράσεως καὶ ἀδρανείας κατὰ τὴν ὑποδειχθεῖσαν τάξιν· ἐγγραφὴ τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰ καθαρὰ κέρδη τῶν διανυσμάτων εἰς τὰ οἰκεῖα τετραγωνίδια τῆς πρώτης σειρᾶς τοῦ πινακίου· ἐγγραφὴ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἀλλὰ μὲ ἀρνητικὸν σημεῖον εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου (βλ. πινάκ. α').

β) Καθορισμὸς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος βάσει τοῦ ἀρνητικοῦ στοιχείου μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν, τοῦ εὑρισκομένου εἰς τὴν τελευταίαν σειράν.

γ) Καθορισμός τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος βάσει τοῦ μικροτέρου ἐκ τῶν πηλίκων τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ $Π_0$ διὰ τῶν ἀντιστοίχων θετικῶν στοιχείων τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος.

Καταφαίνεται ὅτι ὁ χρόνος τοῦ μηχανικοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ πινακίου α' εἶναι ἐλάχιστος.

Δεύτερον στάδιον ὑπολογισμῶν. Μὲ ἀφετηρίαν τὰς πληροφορίας τοῦ πινακίου α', προχωροῦμεν εἰς τὸ δεύτερον στάδιον τῶν ὑπολογισμῶν ἐκ τῶν ὁποίων τελικῶς συντίθεται τὸ πινάκιον β'.

---

1. Ἂν εὑρεθοῦν δύο ἢ περισσότερα πηλίκα ἴσα καὶ μικρότερα τῶν ἄλλων πηλίκων, πρὸς εὕρεσιν τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως: Διαιροῦμεν τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα κεῖνται ἀμέσως δεξιὰ τῶν διαιρετέων τῶν ἴσων πηλίκων (καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου κατὰ σειρὰν διανύσματος ἀδρανείας), διὰ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ «εἰσερχομένου», διανύσματος. τὸ διάνυσμα τῆς βάσεως τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ (ἀλγεβρικῶς) μικρότερον ἐκ τῶν οὕτω ληφθέντων πηλίκων, χαρακτηρίζεται ὡς «ἐξερχόμενον» διάνυσμα. Ἂν δύο ἢ περισσότερα ἐκ τῶν νέων πηλίκων, εἶναι ἴσα καὶ μικρότερα τῶν ἄλλων πηλίκων, συνεχίζεται ὁ ὑπολογισμὸς καθ' ὅμοιον τρόπον, μὲ διαιρετέους τὰ ἀμέσως ἑπόμενα στοιχεῖα κ.ο.κ. μέχρις ὅτου εὑρεθῇ ἓν (ἀλγεβρικῶς) μικρότερον πηλῖκον.

Πινάκιον β'.

Κ.Κ.	→					2	2	3	4	6
↓	Β	Π_0	Π_6	Π_7	Π_8	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
	Π_6	20	1	-1			2		1	
→ 6	Π_5	40		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	Π_8	70		-1	1	-2	1	1		
Ο.Κ.	→	240		3		4	-2		-1	

Τὸ πινάκιον β' διαφέρει σημαντικῶς ἀπὸ τὸ πινάκιον α'. Αἱ διαφοραὶ ὀφείλονται εἰς τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ διανύσματος Π_7 διὰ τοῦ διανύσματος Π_5 εἰς τὴν βάσιν. Λόγῳ τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης κατέστη ἀναγκαῖον, ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ ὑπολογισθοῦν ἐκ νέου τὰ ἐπίπεδα τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ ἀναπροσαρμοσθοῦν τὰ στοιχεῖα πάντων τῶν διανυσμάτων (Π_1—Π_8) κατὰ τρόπον ὥστε νὰ δύναται ἓν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, μὲ πολλαπλασιαστὰς τὰ στοιχεῖα τοῦ ὑπ' ὄψιν διανύσματος.

Δὲν εἶναι δύσκολον νὰ ἑρμηνευθῇ οἰκονομικῶς διατὶ ἀπαιτεῖται ὑπολογισμὸς νέων ἐπιπέδων διὰ τὰ διανύσματα τῆς βάσεως. Καθωρίσθη ἤδη ὅτι τὸ ἀνώτατον δυνατὸν ἐπίπεδον δράσεως τοῦ Π_5 εἶναι 40 μονάδες. Διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ Π_5 εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ἀπαιτοῦνται: 1) ὁλόκληρος ἡ ἐν ἀδρανείᾳ ποσότης τοῦ συντελεστοῦ β (συνεπῶς τὸ Π_7 ἀφαιρεῖται ἐκ τῆς βάσεως), 2) 80 μονάδες (2×40), ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α καὶ συνεπῶς τὸ διάνυσμα Π_6 ἐξακολουθεῖ νὰ παραμένῃ εἰς τὸ πρόγραμμα μὲ ἐπίπεδον ἀδρανείας 20 μονάδας ($=100-80$), 3) 80 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ γ καὶ συνεπῶς τὸ διάνυμα ἀδρανείας Π_8 παραμένει εἰς τὸ πρόγραμμα μὲ ἐπίπεδον 70 μονάδας ($=150-80$).

Ἡ ἀριθμητικὴ ἀναπροσαργογὴ τῶν διανυσμάτων Π_1—Π_8, οὕτως ὥστε νὰ δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, εἶναι ἀναγκαία, ὡς ἤδη ἐλέχθη, διὰ τὴν σύγκρισιν τοῦ καθαροῦ κέρδους ἑκάστου διανύσματος μὲ τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ὁποῖον δίδει ἡ α ὐ τ ὴ ποσότης συντελεστῶν χρησιμοποιουμένη ὅμως ὑπὸ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως. Ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς θὰ καταφανῇ ἂν ὑπάρχῃ δυνατότης καταρτίσεως ἄλλου καλλιτέρου προγράμματος ἢ ἐὰν τὸ ἤδη καταρτισθὲν εἶναι τὸ ζητούμενον.

Μηχανικῶς ἡ κατάστρωσις τοῦ πινακίου β, γίνεται ὡς ἀκολούθως :

α) Αἱ δύο πρῶται σειραὶ τοῦ πινακίου α′ μεταφέρονται εἰς τὸ πινάκιον β′ ἄνευ οὐδεμιᾶς μεταβολῆς [1].

β) Εἰς τὴν βάσιν ἀναγράφεται τὸ διάνυσμα Π_6 ἀντὶ τοῦ διανύσματος Π_7. Ἀριστερὰ τοῦ Π_6 ἀναγράφεται τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ διανύσματος 6 νομισματικαὶ μονάδες.

γ) Διαιροῦνται πάντα τὰ στοιχεῖα τὰ εὑρισκόμενα εἰς τὴν σειρὰν τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος Π_7 εἰς τὸ πινάκιον α′, διὰ τοῦ στοιχείου τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς αὐτῆς καὶ τῆς στήλης τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος εἰς τὸ πινάκιον α′. Τὰ προκύπτοντα πηλίκα ἐγγράφονται εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς σειρᾶς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος Π_6 εἰς τὸ πινάκιον β′. Οὕτω π.χ. τὸ ἕβδομον στοιχεῖον τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ Π_6 (πινάκ. β′) προσδιορίζεται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ στοιχείου 1, ἑβδόμου εἰς τὴν σειρὰν ἔναντι τοῦ Π_7 εἰς τὸ πινάκ. α′, διὰ τοῦ στοιχείου 2 τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς αὐτῆς σειρᾶς καὶ τῆς στήλης τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος εἰς τὸ πινάκ. α′. Ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ ἐλέγξῃ δι᾽ ἀναλόγων ὑπολογισμῶν τὰς λοιπὰς ἐγγραφὰς τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ Π_6 εἰς τὸ πινάκ. β′.

δ) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν λοιπῶν στοιχείων τοῦ πινακίου β′ χρειάζεται περισσοτέραν προσοχήν. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ στοιχεῖον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ τετραγωνίδιον τ τοῦ πινακ. β′ [2].

1) Εὑρίσκομεν τὸ στοιχεῖον τοῦ ἀντιστοίχου τετραγωνιδίου τ′ εἰς τὸ πινάκιον α [3].

2) Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ εὑρεθὲν στοιχεῖον τοῦ τ′ τὸ γινόμενον: τοῦ στοιχείου τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς τοῦ τ′ καὶ τῆς στήλης τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος, εἰς τὸ πινάκιον α′ ἐ π ὶ τὸ στοιχεῖον τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διασταυρώσεως τῆς στήλης τοῦ τ εἰς τὸ πινάκ. β′ καὶ τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος εἰς τὸ πινάκ. β′.

1. Ὅταν τὰ πινάκια τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐνσωματοῦνται εἰς ἕνα πίνακα, δὲν ἀπαιτεῖται βεβαίως ἐπανάληψις τῶν δύο πρώτων σειρῶν.

2. τ δύναται νὰ εἶναι οἱονδήποτε τετραγωνίδιον ἐκτὸς βεβαίως τῶν τετραγωνιδίων τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος τὰ ὁποῖα ὑπολογίζονται κατὰ τὰ ὑπὸ στοιχεῖον γ′ ἀναγραφόμενα.

3. Τὸ στοιχεῖον τοῦτο δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.

3) Τὴν εὑρεθεῖσαν διαφορὰν ἐγγράφομεν εἰς τὸ τετραγωνίδιον τ (τοῦ πινακ. β′).

Διὰ νὰ κατανοηθῇ ὁ τελευταῖος ὑπολογισμὸς χρειάζεται παρακολούθησις τῶν ὑποδεικνυομένων κινήσεων ἐπὶ τῶν πινακίων α′ καὶ β′. Μὲ ὀλίγην ἐξάσκησιν ὁ ὑπολογισμὸς αὐτὸς γίνεται σχεδὸν αὐτομάτως, ὡς δύναται νὰ διαπιστώσῃ ὁ ἀναγνώστης πειραματιζόμενος βάσει τῶν δεδομένων τῶν πινακίων α′ καὶ β′. Δίδομεν ἐνταῦθα μερικὰ παραδείγματα:

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ πρῶτον στοιχεῖον τοῦ Π_0 εἰς τὸ πινάκ. β.′. 1) Τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον εἰς τὸ πινάκ. α′ εἶναι 100. 2) Ἀπὸ τὸ 100 ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ στοιχείου 2 (εὑρισκομένου εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς τοῦ 100 μὲ τὴν στήλην τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος Π_5 εἰς τὸ πινάκ. α′), ἐπὶ τὸ στοιχεῖον 40 (τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς στήλης τοῦ πρὸς ὑπολογισμὸν στοιχείου καὶ τῆς σειρᾶς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος Π_5 εἰς τὸ πινάκ. β′). 3) Ἐγγράφομεν τὴν διαφορὰν $100-80=20$ εἰς τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον κάτωθεν τοῦ Π_0.

Καθ' ὅμοιον τρόπον, πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τετάρτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_0 εἰς τὸ πινάκιον β′ (διασταύρωσις στήλης Π_8 καὶ τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_0) ἔχομεν: $0-2\times 0=0$.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἕκτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_8 (διασταύρωσις τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_8 καὶ τῆς στήλης Π_9) ἔχομεν: $1-2\times 0=1$.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τρίτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_8 ἔχομεν: $0-2\times 1/2=-1$, κ.ο.κ.

ε) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακ. β′ γίνεται, εἴτε δι' ἐφαρμογῆς τῶν ὑπὸ στοιχεῖον δ′ λεχθέντων, εἴτε δι' ἐφαρμογῆς τῶν ὑπὸ στοιχεῖον στ′ (πρῶτον στάδιον ὑπολογισμῶν) λεχθέντων. Οὕτω, πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τρίτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακ. β′ ἔχομεν: $0-(-6\times 1/2)=3$ ἢ $[0\times(-1)+6\times 1/2+0\times(-1)]-0=3$ ὅπου 0,6,0 (ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν) παριστοῦν τὸ καθαρὸν κέρδος τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ὁποίων θὰ ἠδύνατο νὰ ἐκφρασθῇ τὸ διάνυσμα Π_7 τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τρίτον στοιχεῖον τῆς τελευταίας σειρᾶς.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἕκτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πιν. β′ ἔχομεν $(-2)-(-6)\times 0=-2$ ἢ $(2\times 0+0\times 6+1\times 0)-2=-2$.

Ἐπειδὴ οἱ ὡς ἄνω δύο τρόποι ὑπολογισμοῦ εἶναι ἰσοδύναμοι, δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν ταὐτοχρόνως πρὸς ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας τῶν ἐγγραφῶν ἑκάστου νέου πινακίου. Ἂν δηλαδὴ παρατηρηθῆ διαφορὰ ἀποτελέσματος τῶν δύο ὑπολογισμῶν σημαίνει ὅτι ἔγινε λάθος εἰς τὴν σύνταξιν τοῦ πινακίου.

Μετὰ τὴν ἀποπεράτωσιν τῶν ὡς ἄνω ὑπολογισμῶν, ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὸ πινάκιον β'. Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ νέον πρόγραμμα (Π_6 : 20, Π_5 : 40, Π_8 : 70) εἶναι καλλίτερον ἀπὸ τὸ ἀρχικὸν (Π_6 : 100, Π_7 : 80, Π_8 : 150) διότι δίδει καθαρὸν κέρδος 240 νομισματικὰς μονάδας (40X6). Τὸ καθαρὸν κέρδος καταγράφεται ὡς πρῶτον στοιχεῖον τῆς τελευταίας σειρᾶς (1). Παρατηροῦμεν ὅμως ἐπίσης ὅτι δύο ἐκ τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς φέρουν ἀρνητικὸν σημεῖον, ὅπερ σημαίνει ὅτι εἶναι δυνατὴ περαιτέρω βελτίωσις τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως δι' εἰσαγωγῆς εἰς τὴν βάσιν τοῦ διανύσματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ τὸ ἀρνητικὸν στοιχεῖον μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν ἤτοι τοῦ Π_2 καὶ δι' ἀφαιρέσεως τοῦ Π_6, ἐπειδὴ $20/2 < 70/1$. Ἑπομένως οἱ ὑπολογισμοὶ δέον νὰ συνεχισθοῦν διὰ τὴν κατάρτισιν νέου πινακίου.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ δίδομεν τὸ γενικὸν κριτήριον τῆς μεθόδου simplex περὶ τῆς συνεχίσεως ἢ μὴ τῶν ὑπολογισμῶν.

Κριτήριον simplex. Μετὰ τὴν κατάρτισιν ἑκάστου πινακίου :

1) Ἂν ἓν ἢ περισσότερα στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς φέρουν ἀρνητικὸν σημεῖον, βελτίωσις τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος εἶναι δυνατή, καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ συνεχίζονται, ἐκτός, 2) ἂν πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος εἶναι μὴ θετικὰ (2) ὁπότε συνήθως σημαίνει ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει λανθασμένην διατύπωσιν· 3) ἂν πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι μὴ ἀρνητικὰ (3), τὸ ἐν λόγῳ πινάκιον περιέχει τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ πρέπει νὰ σταματήσουν. Τὸ μέγιστον οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα δίδεται ἐκ τοῦ πρώτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς.

Συνέχεια ὑπολογισμῶν. Ἡ κατάστρωσις τοῦ ἑπομένου πινακίου γίνεται βάσει τῶν πληροφοριῶν τοῦ πινακίου β', ὅπως ἀκριβῶς ἐγένετο ἡ κατάστρωσις τοῦ πινακίου β' βάσει τῶν πληροφοριῶν τοῦ πινακίου α.'

---

1. Τὸ στοιχεῖον αὐτὸ μολονότι δὲν ὑποδηλοῖ ὁριακὸν κέρδος, τίθεται εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν διότι ἐξομοιοῦται ὑπολογιστικῶς πρὸς τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τῆς σειρᾶς ταύτης.
2. Ἤτοι ἀρνητικὰ ἢ μηδέν.
3. Ἤτοι θετικὰ ἢ μηδέν.

Πινάκιον γ'.

	Κ.Κ.	→					2	2	3	4	6
		Β	Π_0	Π_6	Π_7	Π_8	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
→	2	Π_2	10	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			1		$\frac{1}{2}$	
	6	Π_5	40		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
		Π_8	60	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2		1	$-\frac{1}{2}$	
	Ο.Κ.	→	260	1	2		4				

Ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως τοῦ πινακ. γ' συνάγεται ὅτι : α) Τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ νέου προγράμματος (260 ν. μ.) εἶναι ἀνώτερον τοῦ καθαροῦ κέρδους τοῦ προηγουμένου προγράμματος (240 ν. μ.). β) Οὐδὲν ἐκ τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι ἀρνητικόν· συνεπῶς, συμφώνως πρὸς τὸ κριτήριον simplex, τὸ πινάκιον γ' περιέχει τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως, ἤτοι Π_2 : 10, Π_5 : 40 καὶ Π_8 : 60 καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ πρέπει νὰ σταματήσουν. Τὸ ζητούμενον μέγιστον κέρδος εἶναι 260 νομισματικαὶ μονάδες.

Τὰ ἀποτελέσματα τοῦ πινακ. β' ἱκανοποιοῦν ἐπίσης τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος. Οὕτω ἔχομεν :

Ἐπίπεδον δράσεως		$\Pi_1 = \lambda_1 = 0$
»	»	$\Pi_2 = \lambda_2 = 10$
»	»	$\Pi_3 = \lambda_3 = 0$
»	»	$\Pi_4 = \lambda_4 = 0$
»	»	$\Pi_5 = \lambda_5 = 40$
Ἐπίπεδον ἀδρανείας		$\Pi_6 = \lambda_6 = 0$
»	»	$\Pi_7 = \lambda_7 = 0$
»	»	$\Pi_8 = \lambda_8 = 60$ (1)

Συνεπῶς αἱ (5) καὶ (6) γίνονται :

$$\varphi(\lambda) = 2\times 0 + 2\times 10 + 3\times 0 + 4\times 0 + 6\times 40 = 260 = \text{μέγιστον}$$

1. Ἡ μὴ χρησιμοποίησις τῶν 60 μονάδων ὀφείλεται προφανῶς εἰς τὴν ἔλλειψιν ἀντιστοίχων ποσοτήτων ἐκ τῶν συμπληρωματικῶν συντελεστῶν *α* καὶ *β* (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν).

καὶ $0 . \Pi_1 + 10 . \Pi_2 + 0 . \Pi_3 + 0 . \Pi_4 + 40 . \Pi_5 + 0 . \Pi_6 + 0 . \Pi_7 + 60 . \Pi_8 = \Pi_0$ ἢ ἀναλυτικώτερον :

$$0\times2+10\times2+0\times1+0\times2+40\times2+0\times1+0\times0+60\times0=100$$
$$0\times2+10\times0+0\times1+0\times1+40\times2+0\times0+0\times1+60\times0=80$$
$$0\times0+10\times1+0\times2+0\times1+40\times2+0\times0+0\times0+60\times1=150$$

Ἐκθέτομεν κατωτέρω συστηματικῶς τὸ εὑρεθὲν πρόγραμμα:

«Ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως τῆς ἐπιχειρήσεως Α.

Ἐπιλεγεῖσαι Παραγ. Διαδικασίαι (Ε.π.δ.)	Ἐπίπεδον δράσεως Ε.π.δ.	Κέρδος κατὰ μονάδα Ε.π.δ.	Σύνολον κέρδος ἐξ ἑκάστης Ε.π.δ.	Συνολικὸν κέρδος τοῦ προγράμματος	Ἀχρησιμοπ. ποσότης συντ/στῶν
Π_2	10	2	20		60 μον.
Π_5	40	6	240	$\boxed{260}$	ἐκ τοῦ συντ. γ

4. *Παρατηρήσεις.*

1. Τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου μεγιστοποιήσεως [1] παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον.

α) Τὸ πρῶτον στοιχεῖον παριστᾷ πάντοτε τὸ «μέγιστον» δυνατὸν οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα (κέρδος, παραγωγὴ κλπ.).

β) Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ διανύσματα ἀδρανείας, ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων διαθεσίμων ποσοτήτων συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα, λαμβάνομεν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος. Οὕτω ἐνταῦθα: $1\times100+2\times80+0\times150=260$.

Ἡ σχέσις αὕτη ὀφείλεται εἰς τὴν λεγομένην «δυαδικὴν» φύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἕκαστον πρόβλημα μεγιστοποιήσεως ἔχει λύσιν ἴσην πρὸς τὴν λύσιν τοῦ ἀντιστοίχου «διδύμου προβλήματος» ἐλαχιστοποιήσεως καὶ ἀντιστρόφως. Αἱ λύσεις τῶν δύο προβλημάτων δίδονται ὑπὸ τοῦ τελικοῦ πινακίου τῶν ὑπολογισμῶν. Ἐνταῦθα τὰ στοιχεῖα 1, 2, 0 τῆς τελευταίας σειρᾶς, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ διανύσματα ἀδρανείας, εἶναι λύσεις τοῦ διδύμου προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως. Ἡ ἀνάπτυξις τῆς σημασίας τῆς δυαδικῆς φύσεως τῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἐκφεύγει τῶν πλαισίων τῆς παρούσης εἰσαγωγικῆς ἐργασίας. Τὴν ἀνω-

1. «Πινάκιον μεγιστοποιήσεως» καλεῖται συνήθως τὸ τελευταῖον πινάκιον τῶν ὑπολογισμῶν εἰς τὰ προβλήματα μεγιστοποιήσεως.

τέρω ἀναφερθεῖσαν σχέσιν δυνάμεθα ἐν τούτοις νὰ χρησιμοποιήσωμεν πρὸς τελικὸν ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας τῶν ὑπολογισμῶν. Ἄν, ὁ ἐν ἀρχῇ τῆς παρούσης παραγράφου (β) ἀναφερόμενος ὑπολογισμός, δίδῃ ἀποτέλεσμα διάφορον τοῦ πρώτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς, τότε οἱ ὑπολογισμοὶ εἶναι λανθασμένοι.

γ) Τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι μὴ ἀρνητικά· τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὴν βάσιν ἑνὸς ἐκ τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων δὲν αὐξάνει τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα, δυνατὸν δὲ νὰ τὸ μειώσῃ (περίπτωσις τοῦ Π_1).

2. Ὑπετέθη ὅτι ἡ μὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων ἐξ ἑνὸς συντελεστοῦ δὲν ζημιώνει τὴν ἐπιχείρησιν. Ἂν ὅμως αἱ μὴ χρησιμοποιούμεναι ποσότητες προκαλοῦν ζημίας, λόγῳ π.χ. ἀδυναμίας διατηρήσεως αὐτῶν ἢ ἐξόδων ἀποθηκεύσεως κλπ., τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως πρέπει νὰ μειωθῇ ἀντιστοίχως. Εἶναι δυνατὸν τότε νὰ ἀπαιτῆται συνέχισις τῶν ὑπολογισμῶν πρὸς εὕρεσιν καλυτέρου προγράμματος ὑπὸ τὰς νέας συνθήκας [1].

3. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πινακίων ὑπολογισμοῦ δὲν εἶναι συνήθως μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν παραγωγῆς, δυνατὸν δὲ νὰ εἶναι πολὺ μικρότερος. Πρὸς διευκόλυνσιν τῶν ὑπολογισμῶν συνιστῶνται τὰ ἀκόλουθα : α) Χρῆσις τετραγωνισμένου χάρτου διὰ τὴν κατάστρωσιν τῶν πινακίων, β) ἐνσωμάτωσις τῶν πινακίων εἰς ἕνα συνεχῆ πίνακα, οὕτως ὥστε νὰ ἀποφεύγεται ἡ ἐπανάληψις τῶν δύο πρώτων σειρῶν καὶ νὰ διευκολύνεται ὁ ὑπολογισμὸς ἑκάστου πινακίου δι' ἀμέσου συσχετίσεως πρὸς τὸ προηγούμενον πινάκιον. γ) Ὅταν τὸ «εἰσερχόμενον» διάνυσμα ἔχει ἓν ἢ περισσότερα μηδενικὰ στοιχεῖα, τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν σειρῶν τῶν μηδενικῶν στοιχείων, μεταφέρονται ἀναλλοίωτα εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τοῦ νεο - καταρτιζομένου πινακίου. Ὁμοίως, πάντα τὰ στοιχεῖα τῶν στηλῶν αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς μηδενικὰ στοιχεῖα τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος μεταφέρονται ἀναλλοίωτα εἰς τὰς ἀντιστοίχους θέσεις τοῦ νεοκαταρτιζομένου πινακίου. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν μηδενισμὸν τοῦ ὑπὸ στοιχ. δ, παρ. *3* τοῦ παρόντος τμήματος (δεύτερον στάδιον ὑπολογισμῶν) προσδιοριζομένου γινομένου. Εἰς τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις εἶναι, νομίζομεν,

---

1. Ἡ περίπτωσις αὕτη μολονότι ἀναμφισβητήτου πρακτικοῦ ἐνδιαφέροντος δὲν ἀναφέρεται εἰς τὴν φιλολογίαν τοῦ Γ.Π. Ὁ γράφων διεβεβαιώθη, κατόπιν ἐπανειλημμένων πειραματισμῶν, ὅτι ὁ χειρισμὸς τῆς παρούσης περιπτώσεως εἶναι δυνατὸς ἄνευ οὐσιαστικῆς ἀλλοιώσεως τῆς περιγραφείσης τεχνικῆς.

σκόπιμον νὰ σημειοῦνται αἱ ἐν λόγῳ στῆλαι ἢ σειραί, τὰ δὲ στοιχεῖα των νὰ μεταφέρωνται ἀμέσως εἰς τὸ νέον πινάκιον.

4. Εἶναι δυνατὴ ἡ παράλειψις τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας πρὸς συντόμευσιν τῶν ὑπολογισμῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ἐξασφαλίζεται ὅμως τὸ ὑπ' ἀριθ. (1) ἀνωτέρω, κριτήριον τελικοῦ ἐλέγχου.

5. Τὸ ληφθὲν ἐνταῦθα πρόβλημα εἶναι βεβαίως εὐκολώτατον [1] καὶ δύναται νὰ λυθῇ καὶ δι' ἄλλων μεθόδων. Ἡ μέθοδος simplex ἐσχεδιάσθη διὰ τὴν λύσιν πολὺ συνθετωτέρων προβλημάτων. Ἐχρησιμοποιήσαμεν ἐν τούτοις τὸ ἀνωτέρω ἁπλοῦν πρόβλημα δι' εὐκολίαν ἀναπτύξεως τῆς μεθόδου καὶ διότι ἡ διαδικασία λύσεως τῶν συνθέτων προβλημάτων εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἰδία μὲ τὴν ἐνταῦθα χρησιμοποιηθεῖσαν.

6. Διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως ἀκολουθεῖται ἡ περιγραφεῖσα διαδικασία τῆς μεθόδου simplex, μὲ μικρὰς μόνον ἀλλαγὰς ὑπαγορευομένας ὑπὸ τῆς φύσεως τῶν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως [2].

5. *Περίληψις.*

Ἡ διαδικασία λύσεως τῶν προβλημάτων μεγιστοποιήσεως δύναται νὰ συνοψισθῇ ὡς ἀκολούθως:

α) Ταξινόμησις καὶ ἔλεγχος τῶν πληροφοριῶν. Ἀπαιτοῦνται συνήθως πληροφορίαι περί: 1) τῆς ποσότητος καὶ τοῦ εἴδους τῶν διαθεσίμων οἰκονομικῶν μέσων (συντελεστῶν παραγωγῆς ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν), 2) τῶν διαθεσίμων μεθόδων δράσεως (παραγωγικῶν διαδικασιῶν ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν) καὶ 3) τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος (κέρδους, παραγωγῆς κλπ.) τὸ ὁποῖον ἐπιζητεῖται ὅπως καταστῇ μέγιστον.

β) Ἐπιλογὴ διανυσμάτων ἀδρανείας.

γ) Διατύπωσις τοῦ προβλήματος (καὶ ἔλεγχος τῆς «γραμμικότητος» αὐτοῦ).

δ) Κατάρτισις τοῦ πινακίου α' δι' εἰσαγωγῆς τῶν πληροφοριῶν καὶ τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας εἰς τὰς οἰκείας θέσεις καὶ δι' ἐγγραφῆς τῶν στοιχείων τῆς πρώτης σειρᾶς εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς τελευταίας σειρᾶς μὲ ἀντίθετον σημεῖον.

---

1. Μὲ ὀλίγην πεῖραν ἡ ἐκτέλεσις τῶν ὑπολογισμῶν δύναται νὰ γίνῃ ἐντὸς πενταλέπτου.

2. Charnes A., W. W. Cooper, and A. Henderson. «An introduction to Linear Programming», New York, 1953. Neuman, P., «Some calculations on least - cost diets», Oxford Bulletin of Statistics, Aug. 1954.

ε) Καθορισμὸς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος (ὡς ἐν παρ. 3, ἀνωτέρω, πρῶτον στάδιον ὑπολογισμῶν).

ϛ) Καθορισμὸς τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος (ὡς ἐν παρ. 3. πρῶτον στάδιον ὑπολογισμῶν).

ζ) Κατάστρωσις τοῦ δευτέρου πινακίου ὡς ἀκολούθως:

1) Εἰσαγωγὴ τοῦ νέου διανύσματος εἰς τὴν βάσιν.

2) Ὑπολογισμὸς τῶν στοιχείων τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ νέου διανύσματος (ὡς ἐν παρ. 3, δεύτερον στάδιον ὑπολογ.).

3) Ὑπολογισμὸς τῶν λοιπῶν στοιχείων τοῦ πινακίου (ὡς ἐν παρ. 3, δεύτερον στάδιον ὑπολογισμῶν).

η) Ἐπισκόπησις τοῦ δευτέρου πινακίου πρὸς καθορισμόν:

1) Τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος τοῦ νέου προγράμματος.

2) Τῆς δυνατότητος περαιτέρω βελτιώσεως τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος (ἐφαρμογὴ «κριτηρίου simplex»).

Ἂν ὑπάρχῃ δυνατότης βελτιώσεως, τότε ἐπιβάλλεται:

θ) Κατάρτισις τρίτου πινακίου κατὰ τὰ γνωστά, κ.ο.κ. μέχρις ὅτου ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ κριτηρίου simplex δείξῃ ὅτι ἐπετεύχθη τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως ἢ ὅτι λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἀδύνατος.

ι) Ἔλεγχος τῆς ὀρθότητος τῶν ἐγγραφῶν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ὑπὸ στοιχ. β′ τῆς παρ. 4 κριτηρίου.

ια) Ἔλεγχος τῆς οἰκονομικῆς λογικῆς τοῦ «ἀρίστου» προγράμματος δράσεως διὰ συσχετίσεως πρὸς τὰ δεδομένα καὶ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος.

ιβ) Συστηματικὴ ἔκθεσις τοῦ εὑρεθέντος «ἀρίστου» προγράμματος δράσεως διὰ σαφοῦς καθορισμοῦ: 1) τοῦ εἴδους καὶ τοῦ ἐπιπέδου δράσεως τῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν, 2) τοῦ συνολικῶς ἐπιτυγχανομένου οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ προγράμματος, 3) τῶν μὴ χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τοῦ προγράμματος ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α (1)

D o r f m a n R., «Application of Linear Programming to the theory of the Firm», University of California Press, 1951.

» » «Mathematical or Linear Programming», American Ecom. Review, 1953.

C h a r n e s A., W. W. C o o p e r and A. H e n d e r s o n, «An introduction to Linear Programming», New York, 1953.

B o l e s N. J., «Linear Programming and Farm Management Analysis», Journal of Economics, February 1955.

L o m a x K. S., «Allocation and Programming in Modern Economics», The Manchester School of Economics No 3, Sept. 1953.

M o r t o n G., «Notes on Linear Programming», Economica, Nov. 1953.

H e a d y O., «Simplified Presentation and Logical Aspects of Linear Programming Technique», Journal of Farm Economics, Proceedings, 1954.

N e u m a n P., «Some calculations on least-cost diets», Oxford Bulletin of Statistics, Aug. 1954.

Β.

C h a m p e r n o w n e D. G., «A note on J. V. Neumann's article on a model of Economic Equilibrium», The Review of Economic Studies III. D a n t z i g G. B. «A procedure for maximizing a linear function subject to linear inequalities» Washington: Headquarters, U.S.Air Forces Comptroller, 1948. Τοῦ ἰδίου, «A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem», Washington: Headquarters, U.S.Air forces Comptroller, 1948. Τοῦ ἰδίου, «Maximization of a Linear form whose variables are subject to a system of Linear Inequalities», Washington: Headquarters, U.S.Air forces Comptroller, 1949. Τοῦ ἰδίου, «Optimal solution of a dynamic Leontief model with substitution», Econometrica, July. 1955. Τοῦ ἰδίου, «Programming of interdependent activities, II mathematical model» Econometrica, 1949. Τοῦ ἰδίου, «The dual Simplex Algorithm», The Rand Corporation Research Memorandum R.M - 1270, July 1954. G a l e D., V. W. K u h n, and A. W. T u c k e r, «Four equivalent Linear - Convex Problems». Princeton, 1949. G e o r g e s c u - R o e g e n N. «Leontief's system in the light of recent results», Review of

1. Αἱ ὑπὸ στοιχεῖον Α ταξινομιμούμεναι ἐργασίαι περιέχουν ἐνδιαφέροντα τμήματα μὴ τεχνικῆς φύσεως.

Economics and Statistics, XXXVI. H a w k i n s, D. «Some conditions of Macroeconomic stability», Econometrica, XVI (1948). H o l l e y, J. L., «A dynamic model : I Principles of model structure», Econometrica, XX, Oct. 1952. K o o p m a n s, T. C., ed. «Activity analysis of production and allocation». Cowles Commission for Research in Economics, 1951. Τοῦ ἰδίου, «A mathematical model of production», Cowles Commission for Research in Economics, 1949. Τοῦ ἰδίου, «Efficient allocation of resources», Cowles Commission for Research in Economics, 1949. Τοῦ ἰδίου, «Optimum utilization of the transportation system», Econometrica (Supplement), July, 1949. M o r g e n s t e r n ed., «Economic activity analysis», N.Y., 1954. W e y l H., «The elementary theory of Convex Polyhedra», in Contributions to the theory of games, ed. A.W, Kuhn and Tucker, Princeton: Princeton University Press, 1950.