ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ - **10** -ΑΝΟΙΞΗ 2002 - σ.σ. 125 - 132

Για τις Εξισώσεις Παραγωγής της Οικονομικής Θεωρίας της Αξίας
(ΙΙ. Ανακοίνωση)*

του

Abraham Wald

Στην πρώτη ανακοίνωση του τεύχους 6, σελ. 12, αυτών των Ergebuisse[1] (στα ακόλουθα καλείται PI) αποδείχτηκε η υπό ορισμένες προϋποθέσεις μονοσήμαντη και μη αρνητική επιλυσιμότητα, ενός τροποποιημένου συστήματος εξισώσεων παραγωγής των Walras και Cassel. Σε αυτή την ανακοίνωση θα αποδειχτεί πλέον η επιλυσιμότητα υπό πολύ ασθενέστερες προϋποθέσεις. Έστωσαν $R_1, R_2, \ldots, R_m$ όλα τα μέσα παραγωγής (οικονομικά και ελεύθερα), από τα οποία παράγονται με διάφορους συνδυασμούς n προϊόντα $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Έστω ότι είναι γνωστός ο αριθμός r_i των μονάδων του R_i για $i = 1, 2, \ldots, m$, που διαθέτει ο παραγωγός· περαιτέρω, ότι για την παραγωγή μιας μονάδας του S_j απαιτείται η χρησιμοποίηση α_{1j} μονάδων του R_1, α_{2j} μονάδων του $R_2, \ldots, \alpha_{mj}$ μονάδων του R_m για $j = 1, 2, \ldots, n$· τέλος, ότι, εάν παρήγοντο s_1 μονάδες του S_1, περαιτέρω s_2 μονάδες του $S_2, \ldots, s_n$ μονάδες του S_n, τότε μια μονάδα του S_j θα επιτύγχανε την τιμή $f_j(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, για $j = 1, 2, \ldots, n$. *Άγνωστοι* είναι: ο αριθμός s_j των παραγόμενων μονάδων του S_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), περαιτέρω ο αριθμός $\ddot{u}_i$ των ενδεχομένως μη χρησιμοποιηθεισών στην παραγωγή μονάδων του R_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), τέλος η τιμή ρ_i της μονάδας του R_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) και η τιμή σ_j της μονάδας του S_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Για αυτούς τους 2m + 2n αγνώστους παίρνουμε σε αυτή τη δεύτερη ανακοίνωση τις ακόλουθες 2m + 2n εξισώσεις:

$$
\begin{aligned}
&r_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} s_j + \ddot{u}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad \rho_i \ddot{u}_i = 0 \; (i = 1, 2, \ldots, m), \\
&\sigma_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \rho_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad \sigma_j = f_j(s_1, s_2, \ldots, s_n) \; (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
\tag{II}
$$

* Από το: Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, unter Mitwirkung von K. Gödel und A. Wald herausgegebenen von Karl Menger (Wien), Heft 7 (1934-1935), Leipzig und Wien, Verlag Franz Deutzicke 1936, S. 1-6.

1. Εννοεί τα Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums (Σ.τ.Μ).

Στο PI αυτό το σύστημα εξισώσεων εξετάστηκε κάτω από την απλουστευτική παραδοχή, ότι για $j = 1, 2, \dots, n$ η συνάρτηση $f_j(s_1, s_2, \dots, s_n)$ εξαρτάται μόνον από το s_j και φθίνει μονότονα με αυξανόμενο s_j. Εγκαταλείπουμε λοιπόν τώρα αυτήν την μη ανταποκρινόμενη στα πράγματα παραδοχή –διότι η τιμή ενός αγαθού εξαρτάται όχι μόνον από την διαθέσιμη ποσότητα αυτού του αγαθού, αλλά από τις ποσότητες και των υπόλοιπων αγαθών– και αποδεικνύουμε το:

Θεώρημα: *Το σύστημα εξισώσεων (II) έχει ένα σύστημα μη αρνητικών λύσεων για τους 2m + 2n άγνωστους, και μάλιστα για τους άγνωστους* $s_1, \dots, s_n$, $\ddot{u}_1, \dots, \ddot{u}_m$, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ *μια μοναδική λύση, όταν πληρούνται οι παρακάτω συνθήκες:*

1) $r_i > 0 \ (i = 1, \dots, m)$
2) $\alpha_{ij} \geqq 0 \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$
3) *Για κάθε j υπάρχει τουλάχιστον ένα i, έτσι ώστε* $a_{ij} > 0$.

   (Ότι οι συνθήκες (1), (2), (3) πληρούνται, προκύπτει άμεσα από την οικονομική σημασία των αριθμών r_i και α_{ij}).

4) *Η συνάρτηση* $f_j(s_1, \dots, s_n)$ *είναι για όλες τις n-άδες μη αρνητικών αριθμών* $s_1, \dots, s_n$, *για το οποίο* $s_j \neq 0$, *ορισμένη, θετική και συνεχής για* $j = 1, 2, \dots, n$.
5) *Για καθένα από τους αριθμούς* $j = 1, \dots, n^2$ *ισχύει* $\lim_{k=\infty} f_j(s_1^k, \dots, s_n^k) = \infty$, *όταν οι n-άδες μη αρνητικών αριθμών* $s_1^k, \dots, s_n^k$ *(k = 1, 2, ..., ad infinitum), στις οποίες είναι* $s_j^k > 0$ *για κάθε k, τείνει προς μια n-άδα* $s_1, \dots, s_n$, *στην οποία* $s_j = 0$.
6) *Αν τα* $\Delta s_1, \dots, \Delta s_n$ *είναι κάποιοι n αριθμοί, μεταξύ των οποίων τουλάχιστον ένας είναι < 0, και ισχύει* $\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \Delta s_j \leqq 0$, *τότε ισχύει* $\sum_{j=1}^{n} \sigma_j' \Delta s_j < 0$, *όπου*

   $\sigma_j' = f_j(s_1 + \Delta s_1, \dots, s_n + \Delta s_n)$ *(j = 1, 2, ..., n).*

2. Όπως παρατήρησε ο κ. Menger, η (5) δύναται να γίνει ασθενέστερη μέσω της παραδοχής ότι το $\lim f_j(s_1^k, \dots, s_n^k)$ είναι μεγαλύτερο από έναν ορισμένο πεπερασμένο αριθμό, ο οποίος εξαρτάται από τους mn συντελεστές α_{ij} και ο οποίος δύναται να υπολογισθεί εύκολα βάσει αυτών των συντελεστών.

Είναι φανερό ότι η (6) προκύπτει από τις επόμενες περιοριστικότερες συνθήκες:

6′) *Εάν τις ποσότητες $s_1, \ldots, s_n$ των $S_1, \ldots, S_n$ μεταβληθέν κατά $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$, όπου για ένα τουλάχιστον απ' αυτά τα Δs_l είναι $\Delta s_l \neq 0$, τότε ισχύει για την κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτουσα μεταβολή της τιμής της μονάδας του S_j ($j = 1, \ldots, n$) πάντα: $\Delta\sigma_j = f_j(s_1 + \Delta s_1, \ldots, s_n + \Delta s_n) - f_j(s_1, \ldots, s_n)$:*

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta\sigma_j \Delta s_j < 0$$

Η (6′) είναι μια σημαντική εξασθένιση της προϋπόθεσης του PI, ότι οι συναρτήσεις f_j είναι μονότονες. Διότι σύμφωνα με αυτήν την προϋπόθεση του PI ισχύει προφανώς $\Delta\sigma_j \Delta s_j < 0$ για κάθε ένα j, για το οποίο $\Delta s_j \neq 0$, ενώ η (6′) απαιτεί μόνον το άθροισμα των n αριθμών $\Delta\sigma_j \Delta s_j$ να είναι αρνητικό όταν ένας από τους n αριθμούς Δs_j είναι $\Delta s_j \neq 0$. Εάν παραστήσει κανείς τις δύο n-άδες $(\Delta\sigma_1, \ldots, \Delta\sigma_n)$ και $(\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n)$ ως ανύσματα ενός Ευκλείδειου χώρου n διαστάσεων τότε η (6′) σημαίνει ότι τα δύο αυτά ανύσματα σχηματίζουν μια γωνία > 90°.

Ο ισχυρισμός του θεωρήματος ότι υπάρχει μια και μόνη λύση βασίζεται στην ακόλουθη βοηθητική πρόταση:

1. Εάν τα $\ddot{u}_i, s_j, \varrho_i, \sigma_j$ είναι ένα σύστημα θετικών λύσεων των παραπάνω εξισώσεων (II) και τα $\ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_i, s_j + \Delta s_j, \varrho_i + \Delta\varrho_i, \sigma_j + \Delta\sigma_j$ ένα σύστημα θετικών λύσεων του συστήματος εξισώσεων (II′), το οποίο προκύπτει από το (II), όταν αντικαταστήσει κανείς τα r_i με $r_i + \Delta\sigma_i$ ($i = 1, \ldots, m$) και τις $f_j(s_1, \ldots, s_n)$ με οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f_j^*(s_1, \ldots, s_n)$ ($j = 1, \ldots, n$), τότε ισχύει:

α) $$\sum_{i=1}^{m} \rho_i \Delta r_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \Delta s_j + \sum_{i=1}^{m} \rho_i \Delta \ddot{u}_i \ ,$$

β) $$\sum_{i=1}^{m} (\rho_i + \Delta\rho_i)\Delta r_i = \sum_{j=1}^{n} (\sigma_j + \Delta\sigma_j)\Delta s_j + \sum_{i=1}^{m} (\rho_i + \Delta\rho_i)\Delta \ddot{u}_i \ ,$$

γ) $$\sum_{i=1}^{m} \rho_i \Delta \ddot{u}_i \geqq 0 \geqq \sum_{j=1}^{n} (\rho_i + \Delta\rho_i)\Delta \ddot{u}_i \ .$$

Για να λάβει κανείς τις (α) και (β), εκκινεί από τις προφανώς υφιστάμενες εξισώσεις:

$$\Delta r_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \Delta s_j + \Delta ü_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$\sigma_j + \Delta \sigma_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} (\rho_i + \Delta \rho_i) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

πολλαπλασιάζει τις m πρώτες κατά σειρά με $\rho_1, \ldots, \rho_m$ ή, αντιστοίχως, με $\rho_1 + \Delta\rho_1, \ldots, \rho_m + \Delta\rho_m$ και προσθέτει. Για την απόδειξη της (γ) εκκινεί κανείς από το ότι, όταν $\Delta ü_i \geqq 0$, τότε ισχύει επίσης $\rho_i \Delta ü_i \geqq 0$, όταν αντιθέτως $\Delta ü_i < 0$, τότε ισχύει $ü_i > 0$ λόγω της $ü_i + \Delta ü_i \geqq 0$ και συνεπώς ισχύει $\rho_i = 0$ και $\rho_i \Delta ü_i = 0$· και περαιτέρω ότι όταν $\Delta ü_i > 0$, τότε ισχύει επίσης $ü_i + \Delta ü_i > 0$ και συνεπώς ισχύει $\rho_i + \Delta\rho_i = 0$· λόγω της $\rho_i + \Delta \rho_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ προκύπτει τότε το δεύτερο μισό της ανισότητας (γ). Από την **1** έπεται τώρα: Εάν το s_j, $ü_i$, ρ_i, σ_j και το $s_j + \Delta s_j$, $ü_i + \Delta ü_i$, $\rho_i + \Delta\rho_i$, $\sigma_j + \Delta\sigma_j$ είναι δύο συστήματα λύσεων του (II), τότε έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \Delta s_j + \sum_{i=1}^{m} \rho_i \Delta ü_i = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\sigma_j + \Delta \sigma_j) \Delta s_j + \sum_{i=1}^{m} (\rho_i + \Delta \rho_i) \Delta ü_i = 0,$$

δηλαδή σύμφωνα με την (**1**γ): $\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \Delta s_j \leqq 0 \leqq \sum_{j=1}^{n} (\sigma_j + \Delta\sigma_j) \Delta s_j$. Εάν τώρα οι δύο λύσεις στα s_j, $ü_i$, s_j δεν ήσαν ταυτές και συνεπώς ήταν $\Delta s_j \neq 0$ για τουλάχιστον ένα j, τότε αυτές οι ανισότητες θα αντίφασκαν στην συνθήκη (6) – κι έτσι απεδείχθη ο ισχυρισμός ότι το σύστημα έχει μια και μόνη λύση.

Πριν δώσουμε την απόδειξη του ισχυρισμού ύπαρξης λύσης, διατυπώνουμε την ακόλουθη πρόταση, η οποία δύναται να αποδειχθεί ακριβώς όπως στο PI (σελ.13):

2. Εάν η m-άδα των θετικών αριθμών $\{r_1^{(k)}, \ldots, r_m^{(k)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots,$ ad infinitum$)$ συγκλίνει στην m-άδα $\{r_1, \ldots, r_m\}$ και η ακολουθία των συναρτήσεων $\{f_j^{(k)}(s_1, \ldots, s_n)\}$ ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f_j(s_1, \ldots, s_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ και εάν το $ü_i^{(k)}, s_j^{(k)}, \rho_i^{(k)}, \sigma_i^{(k)}$ είναι ένα σύστημα θετικών λύσεων των εξισώσεων (II^k), οι οποίες προκύπτουν, όταν αντικαταστήσει κανείς τα $r_1, \ldots, r_m$ στο (II) με τα $r_1^{(k)}, \ldots, r_m^{(k)}$ και τις $f_j(s_1, \ldots, s_n)$ με τις $f_j^{(k)}(s_1, \ldots, s_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$, τότε είναι οι ακολουθίες αριθμών $\{\ddot{u}_1^{(k)}\}, \ldots, \{\ddot{u}_m^{(k)}\}$, $\{s_1^{(k)}\}, \ldots, \{s_n^{(k)}\}$ (k = 1, 2, ..., ad infinitum) είναι φραγμένες, ομοίως η αριθμητική ακολουθία $\{\rho_i^{(k)}\}$ (k = 1, 2, ..., ad infinitum) για κάθε i, για το οποίο $r_i \neq 0$. Εάν το σύστημα λύσεων $\ddot{u}_i^{(k)}, s_j^{(k)}, \rho_i^{(k)}, \sigma_j^{(k)}$ του (II^k) συγκλίνει με αυξανόμενο k σε μια (2m + 2n)-άδα $\ddot{u}_i, s_j, \varrho_i, \sigma_j$, τότε το τελευταίο είναι ένα σύστημα λύσεων του (II).

Την ύπαρξη μιας λύσης θα αποδείξουμε τώρα μέσω επαγωγής στο n κατά τρόπο παρόμοιο όπως στο θεώρημα στο PI. Οι περιπτώσεις n = 1 είναι ταυτόσημες και στα δύο θεωρήματα. Για να αποδείξουμε την περίπτωση n βάσει της περίπτωσης n–1, ορίζουμε το $\bar{\lambda}$ όπως ακριβώς στο PI και, για κάθε $0 \leqq \lambda < \bar{\lambda}$, το σύστημα εξισώσεων ($\Pi_{n-1}^{\lambda}$) το οποίο διαφέρει από το (Sch_{n-1}^{λ}) μόνον κατά το ότι οι τελευταίες n–1 εξισώσεις έχουν τώρα τη μορφή $\sigma_j = f_j(s_1, \ldots, s_{n-1}, \lambda)$. Όπως στο PI, εισάγουμε το Π(λ). Από την **2** συμπεραίνει κανείς εύκολα, ότι για κάθε $\lambda_0 < \bar{\lambda}$ υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός A, τέτοιος ώστε οι αριθμοί του συνόλου Π(λ) είναι όλοι < A. Το σύνολο Π(λ) είναι λοιπόν για κάθε $\lambda < \bar{\lambda}$ φραγμένο, λόγω της **2** κλειστό, και την κυρτότητα την αποδεικνύει κανείς όπως στο PI. Το Π(λ) είναι λοιπόν ένα κλειστό διάστημα, του οποίου τα ενδεχομένως συμπίπτοντα τελικά σημεία ας τα ονομάσουμε $\underline{\pi}(\lambda)$ και $\bar{\pi}(\lambda)$. Εάν $\lim\limits_{k=\infty} \lambda_k = \lambda$ και $0 \leqq \lambda < \bar{\lambda}$, τότε προκύπτει, λαμβανομένης υπόψη της **2** εύκολα η πρόταση (*): Το σύνολο $\operatorname*{Limsup}\limits_{i=0} \Pi(\lambda_i)$ είναι τμήμα του Π(λ). Ορίζουμε τώρα $\underline{\tau}(\lambda) = \underline{\pi}(\lambda) - f_n(s_1^{\lambda}, \ldots, s_{n-1}^{\lambda}, \lambda)$, όπου τα $s_1^{\lambda}, \ldots, s_{n-1}^{\lambda}$ είναι η (βάσει της επαγωγικής παραδοχής υπάρχουσας στα $s_1, \ldots, s_{n-1}$ μονοσήμαντης) λύσης των εξισώσεων (Π_{n-1}^{λ}), και ανάλογα ορίζουμε το $\bar{\tau}(\lambda)$. Ονομάζουμε T(λ) το κλειστό διάστημα μεταξύ $\bar{\tau}(\lambda)$ και τ(λ). Από την **2** έπεται ότι οι $s_1^{\lambda}, \ldots, s_{n-1}^{\lambda}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του λ. Συνεπώς είναι και η $f_n(s_1^{\lambda}, \ldots, s_{n-1}^{\lambda}, \lambda)$ μια συνεχής συνάρτηση του λ. Από την παραπάνω πρόταση (*) κατόπιν προκύπτει η πρόταση, την οποία στο PI συμβολίσαμε με (**).

Η απόδειξη της ύπαρξης μιας λύσης του II προκύπτει τώρα όπως στην περίπτωση 1 του PI (σελ. 16) βάσει της πρότασης (**), όταν υπάρχει ένας θετικός αριθμός $\lambda_0 < \bar{\lambda}$, για τον οποίο ισχύει $\bar{\pi}(\lambda_0) \geqq f_n(s_1^{\lambda_0}, \ldots, s_{n-1}^{\lambda_0}, \lambda)$, και όπως στην περίπτωση 2 του PI, όταν δεν υπάρχει ένα τέτοιο λ_0.

Προσθέτουμε ακόμη ορισμένες παρατηρήσεις για την οικονομική σημασία της συνθήκης (6). Έστω W ένα ορισμένο οικονομικό υποκείμενο, το οποίο ζητάει, στις τιμές $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, s_{w_1} μονάδες του $S_1, \dots$ και s_{w_1} μονάδες του S_n. Ο αριθμός s_j, των παραχθεισών μονάδων του αγαθού S_j, είναι το άθροισμα των αριθμών s_{w_j}, για όλα τα οικονομικά υποκείμενα W. Μπορεί κανείς τώρα για καθένα W να διατυπώσει μια, όπως θα δούμε, βάσει προϋποθέσεων της θεωρίας της αξίας αποδείξιμη παραδοχή, η οποία είναι ανάλογη της (6), συγκεκριμένα την:

6_w) *Εάν στις τιμές* $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ *το* W *ζητάει* $s_{w_1}, \dots, s_{w_n}$ *και στις τιμές* $\sigma'_1, \dots, \sigma'_m$ *η ζητάει είναι* $s_{w_1} + \Delta s_{w_1}, \dots, s_{w_n} + \Delta s_{w_n}$, *όπου ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς* $\Delta s_{w_j} < 0$ *και εάν ισχύει* $\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \Delta s_{w_j} \leqq 0$, *τότε ισχύει* $\sum_{j=1}^{n} \sigma'_j \Delta s_{w_j} < 0$.

Παρατηρούμε εν πρώτοις: Από την (6) δεν έπεται, ότι ισχύει η (6_w) για καθένα οικονομικό υποκείμενο W, όπως επίσης το αντίστροφο, από την παραδοχή ότι ισχύει η (6_w) για καθένα W, δεν έπεται η ισχύς της (6). Όταν όμως ισχύει η (6_w) για καθένα W και δεν ισχύει η (6), τότε πρέπει, όπως θα εκτεθεί σε μια επόμενη ανακοίνωση, να υφίστανται ιδιαίτερες σχέσεις μεταξύ των ζητήσεων των επιμέρους οικονομικών υποκειμένων, οι οποίες είναι στατιστικά απίθανες, έτσι ώστε *με μια στατιστική πιθανότητα από την παραδοχή ότι ισχύει η (6_w) για καθένα W, έπεται η ισχύς της (6).* Αλλά, όπως θέλουμε τώρα να δείξουμε, η παραδοχή (6_w) προκύπτει από την πρόταση της θεωρίας της αξίας:

α_w) *Το οριακό όφελος του αγαθού* S_j *για το οικονομικό υποκείμενο W εξαρτάται μόνον από την ποσότητα του αγαθού* S_j *που έχει στην κατοχή του και είναι με τη στενή έννοια μια μονότονα φθίνουσα συνάρτηση* ($j = 1, \dots, n$).[3]

Διότι από (α_w) προκύπτει εν πρώτοις η πρόταση:

6^*_w) Εάν από τους n αριθμούς $\Delta s_{w_{r_1}}, \dots, \Delta s_{w_{r_{n-m}}}$ οι k αριθμοί $\Delta s_{w_{\ell_1}}, \dots,$ $\Delta s_{w_{\ell_k}}$ ($k \geqq 1$) είναι αρνητικοί, οι δε υπόλοιποι $\Delta s_{w_{r_1}}, \dots, \Delta s_{w_{r_{n-k}}} \geqq 0$, τότε ισχύει $\sigma'_{r_j} : \sigma'_{\ell_i} < \sigma_{r_j} : \sigma_{\ell_i}$ ($i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n-k$).

3. Για να προλάβουμε παρανοήσεις παρατηρούμε ρητά, ότι η (α_w) δεν ενέχει κατά κανέναν τρόπο την παραδοχή που έγινε στο PI, ότι η ζήτηση ενός αγαθού εξαρτάται μόνον από την τιμή αυτού του αγαθού. Αυτό το ενεχόμενο θα υφίστατο μόνο, όταν το οριακό όφελος του χρήματος θα ήταν σταθερό.

Διότι, εάν η $\varphi_{w_j}(s_{w_j})$ παριστά την συνάρτηση οριακού οφέλους του W για το αγαθό S_j, τότε ως γνωστόν ισχύει:

$$\sigma_1 : \varphi_{w_1}(s_{w_1}) = \sigma_2 : \varphi_{w_2}(s_{w_2}) = \ldots = \sigma_n : \varphi_{w_n}(s_{w_n}) \quad \text{και}$$

$$\sigma'_1 : \varphi_{w_1}(s'_{w_1}) = \sigma'_2 : \varphi_{w_2}(s'_{w_2}) = \ldots = \sigma'_n : \varphi_{w_n}(s'_{w_n}),$$

απ' όπου, λόγω της δια της (α_w) δεδομένης μονοτονίας της συνάρτησης φ_{w_j}, έπεται προφανώς η (6^*_w).

Αλλά από την (6^*_w) προκύπτει εύκολα η συνθήκη (6_w), την οποία μπορεί κανείς επίσης να διατυπώσει ως εξής: Εάν $k \geq 1$, τότε από την

$$(\sigma_{r_1}\Delta s_{w_{r_1}} + \ldots + \sigma_{r_{n-k}}\Delta s_{w_{r_{n-k}}}) : (\sigma_{\ell_1}|\Delta \sigma_{w_{\ell_1}}| + \ldots + \sigma_{\ell_k}|\Delta s_{w_{\ell_k}}|) \leqq 1$$

έπεται πάντα

$$(\sigma'_{r_1}\Delta s_{w_{r_1}} + \ldots + \sigma'_{r_{n-k}}\Delta s_{w_{r_{n-k}}}) : (\sigma'_{\ell_1}|\Delta s_{w_{\ell_1}}| + \ldots + \sigma'_{\ell_k}|\Delta s_{w_{\ell_k}}|) < 1$$

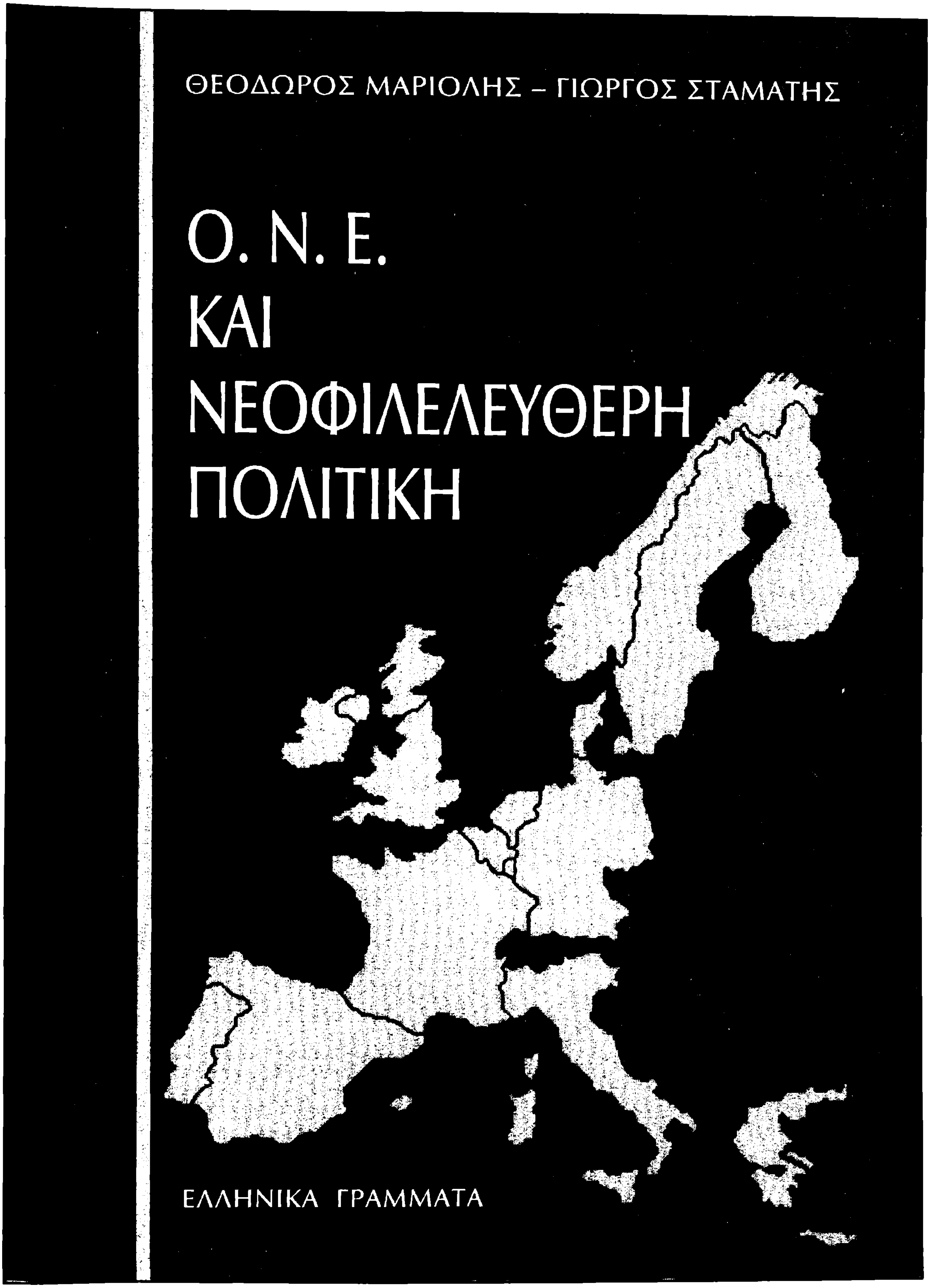
Επειδή από την (6^*_w) για κάθε j, για το οποίο ισχύει $\Delta s_{w_{r_j}} \neq 0$, έπεται

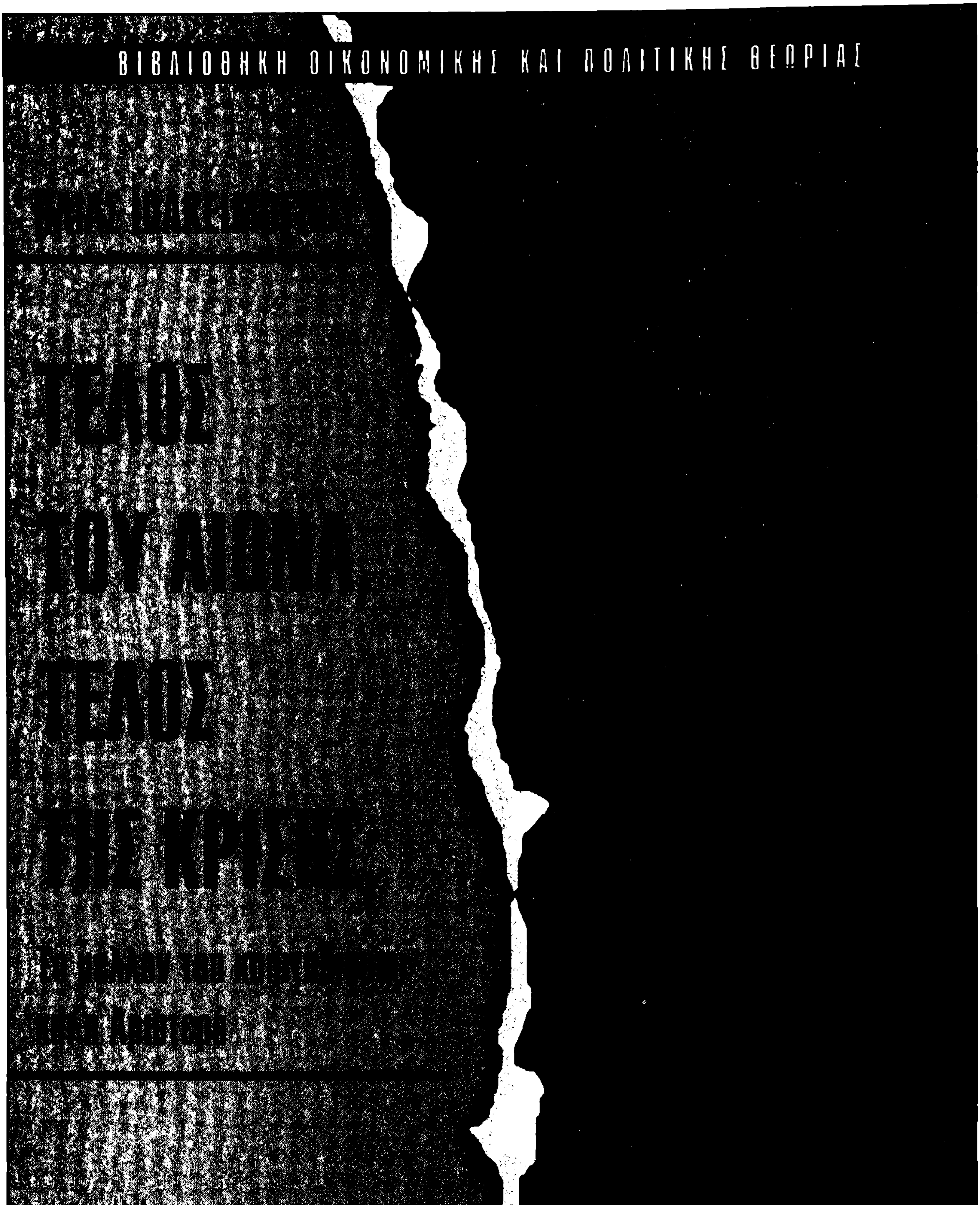
$$\sigma_{r_j}\Delta s_{w_r} : (\sigma'_{\ell_1}|\Delta s_{w_{\ell_1}}| + \ldots + \sigma'_{\ell_k}|\Delta s_{w_{\ell_k}}|) < \sigma_{r_j}\Delta s_{w_{r_j}} : (\sigma_{\ell_1}|\Delta s_{w_{\ell_1}}| + \ldots + \sigma_{\ell_k}|\Delta s_{w_{\ell_k}}|),$$

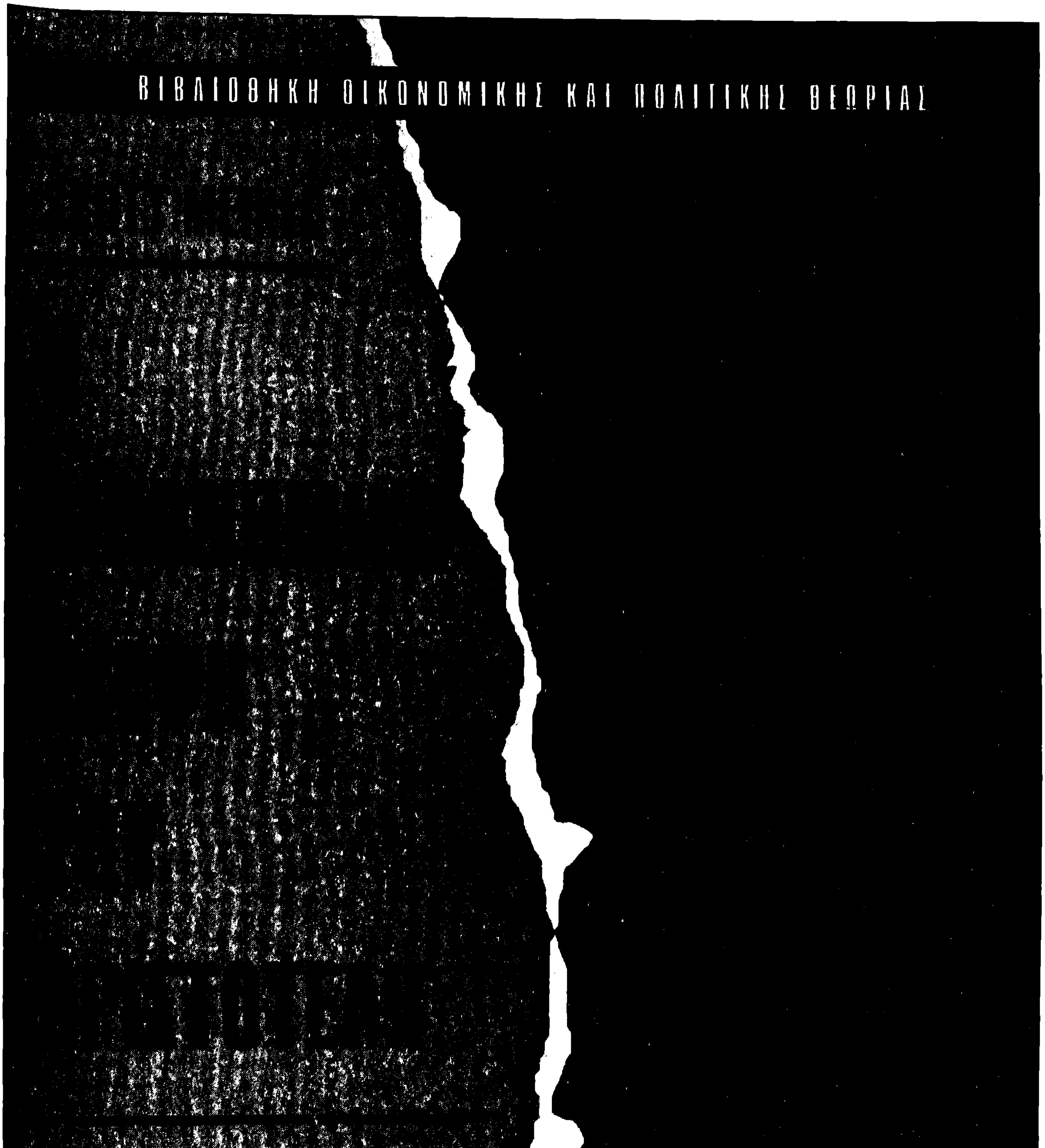
ο ισχυρισμός μας προκύπτει άμεσα.

Επισημαίνουμε ακόμη, ότι λογική παραγωγή της (6_w) θα αρκούσε μια πολύ πιο ασθενής παραδοχή από την α_w, συγκεκριμένα ότι για κάθε j ο αριθμός $\frac{\partial \varphi_{w_j}}{\partial s_{w_i}}$ είναι αρνητικός και ως προς το απόλυτο ποσόν μεγάλος εν συγκρίσει με τους αριθμούς $\frac{\partial \varphi_{w_j}}{\partial \varphi_{w_k}}$ για $k \neq j$, δηλαδή ότι δεν είναι αναγκαίο να υποθέσουμε, ότι το οριακό όφελος του αγαθού S_j για το οικονομικό υποκείμενο W είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αγαθά που έχει στην κατοχή του, αλλά αρκεί να υποθέσουμε ότι το οριακό όφελος του S_j θα επηρεαστεί πολύ περισσότερο από μια μεταβολή της ποσότητας του S_j που έχει στην κατοχή του το W παρά από μια μεταβολή στις ποσότητες των υπόλοιπων αγαθών που έχει στην κατοχή του το W.

Kurt Gödel (παρατήρηση κατά τη διάρκεια της συζήτησης): Στην πραγματικότητα η ζήτηση κάθε επιμέρους οικονομικού υποκειμένου εξαρτάται επίσης από το εισόδημά του και αυτό πάλι από την τιμή των μέσων παραγωγής. Μπορεί κανείς να διατυπώσει ένα σχετικό σύστημα εξισώσεων και να το διερευνήσει ως προς την επιλυσιμότητά του.


ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΜΑΡΙΟΛΗΣ - ΓΙΩΡΓΟΣ ΣΤΑΜΑΤΗΣ
Ο. Ν. Ε.
ΚΑΙ
ΝΕΟΦΙΛΕΛΕΥΘΕΡΗ
ΠΟΛΙΤΙΚΗ
ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ

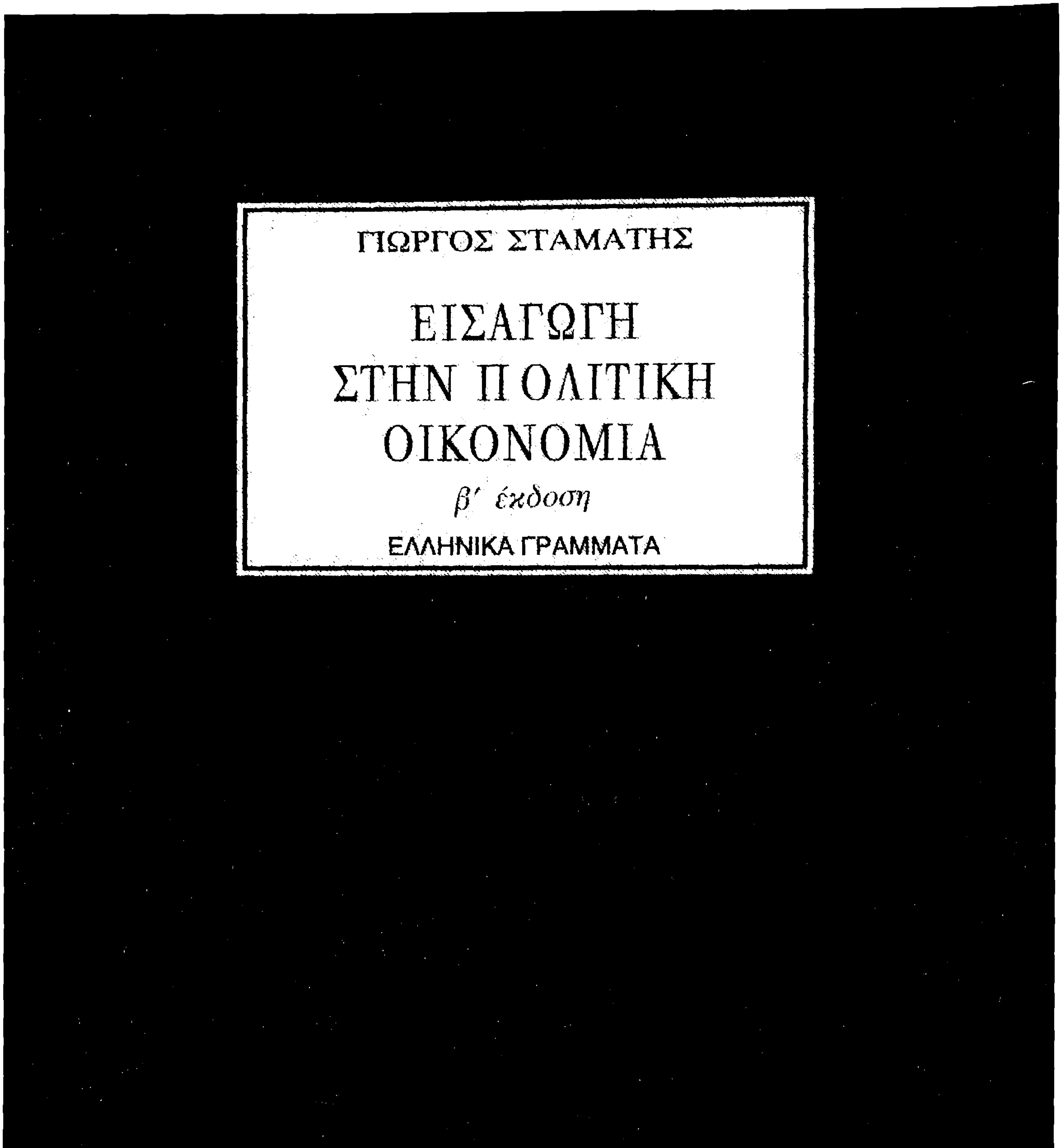

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ
ΤΕΛΟΣ
ΤΟΥ ΑΙΩΝΑ
ΤΕΛΟΣ
Ελληνικά
γράμματα



Γραφεία : Εμμ. Μπενάκη 59, 106 81 Αθήνα. Τηλ.: 010 3891800 - fax: 010 3836658

Βιβλιοπωλεία : Γ. Γενναδίου 6, 106 78 Αθήνα. Τηλ. - fax: 010 3817826
Στοά Ορφέως, Στοά Βιβλίου, Πεσμαζόγλου 5, 105 59 Αθήνα. Τηλ.: 010 3211246

Κεντρική Διάθεση : Ζωοδόχου Πηγής 21 & Τζαβέλλα 1, 106 81 Αθήνα. Τηλ.: 010 3302033 - Fax: 010 3817001
Μοναστηρίου 183, 54 627 Θεσσαλονίκη. Τηλ.: (0310) 500035 - fax: (0310) 500034
Μαιζώνος 1 & Καρόλου 32, 262 23 Πάτρα. Τηλ.: (0610) 620384 - fax: (0610) 272072



Γραφεία : Εμμ. Μπενάκη 59, 106 81 Αθήνα. Τηλ.: 010 3891800 - fax: 010 3836658
Βιβλιοπωλεία : Γ. Γενναδίου 6, 106 78 Αθήνα. Τηλ. - fax: 010 3817826
Στοά Ορφέως, Στοά Βιβλίου, Πεσμαζόγλου 5, 105 59 Αθήνα. Τηλ.: 010 3211246
Κεντρική Διάθεση : Ζωοδόχου Πηγής 21 & Τζαβέλλα 1, 106 81 Αθήνα. Τηλ.: 010 3302033 - Fax: 010 3817001
Μοναστηρίου 183, 54 627 Θεσσαλονίκη. Τηλ.: (0310) 500035 - fax: (0310) 500034
Μαιζώνος 1 & Καρόλου 32, 262 23 Πάτρα. Τηλ.: (0610) 620384 - fax: (0610) 272072