

Σχόλια του Μεταφραστή στο άρθρο του David Gale

του
Γιώργου Σωτήρχου

Το άρθρο του David Gale με τίτλο “Το κλειστό γραμμικό μοντέλο παραγωγής” ήταν η παρουσίασή του στα *Annals of Mathematics* του 1956 με το γενικό θέμα “Linear Inequalities and Related Systems”. Ο Gale στο άρθρο του αυτό αποδείκνυε ανεξάρτητα από τους Kemeny / Morgenstern / Thompson την ύπαρξη λύσης ως προς τον ενιαίο συντελεστή μεγέθυνσης και το ενιαίο ποσοστό κέρδους σε ένα γενικευμένο μοντέλο von Neumann.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η μαθηματική απόδειξη των ισχυρισμών των Kemeny / Morgenstern / Thompson δεν δόθηκε στο εν λόγω άρθρο τους αλλά δόθηκε από τον Thompson στο ίδιο τεύχος των *Annals* που δημοσιεύθηκε το παρόν άρθρο του Gale. Τόσο ο Gale όσο και οι Kemeny / Morgenstern / Thompson στα άρθρα τους αποδείκνυαν την ύπαρξη λύσεων ισορροπίας για το μοντέλο γενικής οικονομικής ισορροπίας του von Neumann αίροντας την ιδιαίτερα ανεδαφική, από οικονομική άποψη, υπόθεση του τελευταίου ότι:

«Κάθε αγαθό στην οικονομία συμμετέχει σε κάθε διαδικασία παραγωγής είτε ως εισροή είτε ως εκροή».

Παρά το γεγονός ότι τα δύο άρθρα φαίνεται ότι χρησιμοποιούν διαφορετικές μαθηματικές μεθόδους για την εξαγωγή των συμπερασμάτων τους, αυτό δεν είναι απόλυτα αληθές. Ενώ ο Gale χρησιμοποιεί στοιχειώδεις έννοιες της θεωρίας των κυρτών συνόλων, και οι Kemeny / Morgenstern / Thompson χρησιμοποιούν το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των παιγνίων, είχε ήδη αποδειχθεί από τον Ville η σύνδεση της θεωρίας των παιγνίων με την θεωρία των κυρτών συνόλων, δεδομένου ότι είχε αποδείξει το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των παιγνίων βάσει στοιχειωδών θεωρημάτων της θεωρίας των κυρτών συνόλων. Οι Kemeny / Morgenstern / Thompson συνέδεσαν την θεωρία των μοντέλων μεγέθυνσης von Neumann με την θεωρία των κυρτών συνόλων *εμμέσως* χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των παιγνίων για να αποδείξουν την ύπαρξη (όχι όμως την μοναδικότητα) ενός ενιαίου συντελεστή μεγέθυνσης και ενός ενιαίου ποσοστού κέρδους στο μοντέλο μεγέθυνσης von Neumann. Πρέπει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι την απόδειξη του Ville χρησιμοποίησαν οι von Neumann και Morgenstern στο περίφημο “*Game Theory and Economic Behaviour*” δεδομένου

ότι οι αυθεντικές αποδείξεις του von Neumann που εδώθησαν το 1928 ήταν από μαθηματική πλευρά ιδιαίτερα περίπλοκες.

Πέρα από την αποδεικτική μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε αυτό που διαφοροποιεί τα δύο άρθρα είναι η σύνδεση του μοντέλου γενικής οικονομικής ισορροπίας με την θεωρία των παιγνίων, η οποία κυριαρχεί στο άρθρο των Kemeny / Morgenstern / Thompson ενώ απουσιάζει παντελώς από το άρθρο του Gale πλην ενός μοναδικού σχολίου. Ο von Neumann είχε ήδη από το 1928 στο άρθρο του “Zur Theorie der Gesellschaftsspiele” υποδείξει, ως πρόγραμμα έρευνας, την σύνδεση ανάμεσα στην θεωρία των παιγνίων και το μοντέλο γενικής οικονομικής ισορροπίας, πράγμα που επανέλαβε και στο άρθρο του για το μοντέλο της γενικής οικονομικής ισορροπίας.

Το παρόν άρθρο του Gale απομακρύνεται από την οπτική αυτή και αποσυνδέει την θεωρία των μοντέλων μεγέθυνσης von Neumann από την θεωρία των παιγνίων, θεωρώντας την πρώτη ανεξάρτητο προς διερεύνηση αντικείμενο της οικονομικής επιστήμης.

Ένα από τα σημεία που αξίζουν ιδιαίτερης μνείας είναι η αναφορά του Gale σε τεχνικές παραγωγής που έχουν συντελεστή μεγέθυνσης $g = \alpha - 1$, όπου α ο συντελεστής διαστολής, μικρότερο του μηδενός, είναι οι λεγόμενες μη-παραγωγικές τεχνικές παραγωγής, οι οποίες μπορούν να αναπαράγονται στο βαθμό που διαθέτουν προς ανάλωση κάποια αρχικά αποθέματα εμπορευμάτων και τα αναλώνουν μαζί με τα προϊόντα που παράγει η δεδομένη μη-παραγωγική τεχνική σε κάθε περίοδο παραγωγής, έως την εξάντληση αυτών των αποθεμάτων ή την εξωγενή εισαγωγή νέων αποθεμάτων στο μοντέλο, τα οποία αναλώνονται με την σειρά τους έως την εξάντληση τους.

Το μοντέλο του von Neumann έχει ερμηνευθεί από πολλούς σχολιαστές του ότι περιγράφει συναρτήσεις παραγωγής σταθερών αναλογιών ανάμεσα στους συντελεστές παραγωγής ή τις εισροές, σταθερές αναλογίες ανάμεσα στις εκροές και τέλος σταθερές αναλογίες ανάμεσα στις εισροές και στις εκροές, δηλαδή οι συναρτήσεις παραγωγής του μοντέλου von Neumann είναι γραμμικές συναρτήσεις παραγωγής συνθέτων ή απλών εμπορευμάτων. Αυτό είναι αληθές ως αναφορά το άρθρο του von Neumann και σχεδόν όλες τις εργασίες σχολιαστών του οι οποίοι περιορίζουν την ανάλυση τους σε γραμμικές και πεπερασμένες το πλήθος διαδικασίες παραγωγής. Το παρόν μοντέλο του Gale διαφοροποιείται από την οπτική αυτή και έχει ισχύ και στην περίπτωση που η παραγωγική διαδικασία περιγράφεται από νεοκλασικές συναρτήσεις παραγωγής μη-σταθερών αναλογιών ανάμεσα στις εισροές, ανάμεσα στις εκροές και ανάμεσα στις εισροές και στις εκροές με μόνη υπόθεση την ομογένεια πρώτου βαθμού των συναρτήσεων παραγωγής. Π.χ., στην περίπτωση δύο εμπορευμάτων, οι παρακάτω διαδικασίες παραγωγής:

$$\beta_{1j} y_1 + \beta_{2j} y_2 = (\alpha_{1j} x_1^{\delta_j} + \alpha_{2j} x_2^{\delta_j})^{1/\delta_j} : j = 1, \dots, n \quad \delta_j > 0.$$

$$\beta_j y_1^{\delta_j} y_2^{1-\delta_j} = \alpha_j x_1^{\delta_j} x_2^{1-\delta_j} : j = 1, \dots, n \quad 0 < \delta_j < 1.$$

ικανοποιούν την συνθήκη της ομογένειας πρώτου βαθμού.

Θα ξενίσουν τον αναγνώστη οι όροι διαστολή (expansion), ρυθμός διαστολής (expansion rate ή coefficient), συστολή (contraction) και συντελεστής συστολής (contraction rate ή coefficient) που χρησιμοποιεί ο Gale. Οι όροι αυτοί, αν και μοιάζουν να αρμόζουν περισσότερο στην Φυσική ή τις Θετικές Επιστήμες και προφανώς προέρχονται από αυτές, εκφράζουν με μεγαλύτερη ακρίβεια το περιεχόμενο των συντελεστών α και β δεδομένου ότι οι συντελεστές αυτοί δεν εκφράζουν το ρυθμό αύξησης ή μείωσης ενός μεγέθους x σε ένα χρονικό διάστημα, δηλαδή το μέγεθος $x_t - x_{t-1} / x_t$ ή το μέγεθος $x_t - x_{t-1} / x_{t-1}$, που αντιστοιχεί στα μεγέθη $\alpha-1$ και $\beta-1$, αλλά τον λόγο x_t / x_{t-1} την αύξηση ή μείωση του x μετρούμενη ποσοστιαία σε μονάδες του ίδιου μεγέθους x .

Το παράδειγμα του Gale για το μοντέλο παραγωγής που περιέχει μια ιδιαίτερα αποδοτική διαδικασία παραγωγής κουνελιών είναι σωστό όπως είναι διατυπωμένο μόνον όταν η παραγωγή κουνελιών αποτελεί ένα υποσύστημα στο οποίο δεν εισέρχεται καμιά άλλη εισροή εκτός από τα ίδια τα κουνέλια και ως εκ τούτου οι καπιταλιστές απορρίπτουν τις λιγότερο κερδοφόρες διαδικασίες παραγωγής και παράγουν μόνον κουνέλια έστω και αν δύνανται να παράγουν χιλιάδες άλλα εμπορεύματα με χαμηλότερο υλικό ρυθμό αναπαραγωγής. Στην περίπτωση όμως που στην αναπαραγωγή των κουνελιών εισέρχεται ένα τουλάχιστον άλλο εμπόρευμα με μικρότερο υλικό ρυθμό αναπαραγωγής, π.χ. σιτάρι, τότε από το σύστημα δεν θα παράγονται μόνο κουνέλια αλλά και σιτάρι το οποίο είναι αναγκαίο τόσο για την αναπαραγωγή των κουνελιών όσο και του ίδιου. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Τα κουνέλια εισέρχονται στην αναπαραγωγή του σιταριού, π.χ. ως μισθιακό εμπόρευμα, και το οικονομικό σύστημα περιγράφεται από τον κατωτέρω πίνακα εισροών-εκροών:

		ΕΙΣΡΟΕΣ		ΕΚΡΟΕΣ	
		σ	κ	σ	κ
σ	1	1		2	0
κ	1	2		0	6

όπου σ =σίτος, κ =κουνέλια

παρά το γεγονός ότι η διαδικασία παραγωγής των κουνελιών έχει ιδιαίτερα ψηλό φυσικό ρυθμό αναπαραγωγής και ως εκ τούτου είναι ιδιαίτερα αποδοτική, χρησιμοποιούνται και οι δύο διαδικασίες. Ισχύει $\alpha=\beta=1,39$, $r=g=0,39$ και $\pi_1/\pi_2=2,28$, $x_1/x_2=2,28$ και $x_i(t)=1,39^t x_i(0)$, $i=1,2$.

2. Τα κουνέλια δεν εισέρχονται στην αναπαραγωγή του σίτου, τότε ο πίνακας εισροών-εκροών είναι:

		ΕΙΣΡΟΕΣ		ΕΚΡΟΕΣ	
		σ	κ	σ	κ
σ		2	2	3	0
κ		0	1	0	8

Είναι προφανές ότι η διαδικασία 2 δεν χρησιμοποιείται γιατί δεν υπάρχει ζήτηση για κουνέλια εφόσον δεν εισέρχονται στην αναπαραγωγή κανενός εμπορεύματος πλην των ιδίων.

Ισχύει $\alpha=\beta=1,5$, $r=g=0,5$, $\pi_1/\pi_2=13/6$ και $x_1(t)=(3/2)^t x_1(0)$, $x_2=0$.

3. Οι διαδικασίες είναι διαδικασίες παραγωγής συνθέτων εμπορευμάτων και έχουν τον παρακάτω πίνακα εισροών-εκροών:

		ΕΙΣΡΟΕΣ		ΕΚΡΟΕΣ	
		σ	κ	σ	κ
σ		1	1	0	2
κ		0	1	2	8

Η διαδικασία I μπορεί να ερμηνευτεί ως διαδικασία σύλληψης άγριων κουνελιών με την χρήση σίτου και η διαδικασία II ως διαδικασία αναπαραγωγής κουνελιών και καλλιέργειας σίτου.

Είναι φανερό ότι καθαρό προϊόν της διαδικασίας II είναι μεγαλύτερο από το καθαρό προϊόν της διαδικασίας I, δηλαδή έχουμε να κάνουμε με κατώτερη και ανώτερη διαδικασία παραγωγής. Είναι προφανές ότι δεν είναι δυνατόν να εξισωθούν οι ονομαστικές αποδόσεις, το ποσοστό κέρδους, των δύο διαδικασιών με θετικές τιμές, δεδομένου ότι η II υπερέχει απόλυτα, ως εκ τούτου χρησιμοποιείται μόνο η διαδικασία II. Η διαδικασία όμως αυτή παράγει κάθε περίοδο περισσότερα κουνέλια από αυτά που χρησιμοποιεί ως εισροή την επόμενη περίοδο δεδομένου ότι το μέγεθος της δραστηριότητας περιορίζεται από τον ρυθμό αύξησης του σίτου που δεν είναι μεγαλύτερο από 100%. Τα κουνέλια πλεονάζουν και

κατά συνέπεια η τιμή τους είναι μηδέν. Οι λύσεις είναι: $\alpha=\beta=2$, $r=g=1$, $\pi_1=1$, $\pi_2=0$, $x_1=0$ και $x_2(t)=2^t x_2(0)$.

Η παρατήρηση του Gale για την *ομοιότητα* της θεωρίας του γραμμικού προγραμματισμού και της θεωρίας των παιγνίων με το μοντέλο του von Neumann είναι η μόνη αναφορά στην θεωρία των παιγνίων και την θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού που υπάρχει σε όλο το άρθρο. Ο Gale, βέβαια, μιλάει μόνο για ομοιότητα και όχι για σύνδεση του μοντέλου οικονομικής ισορροπίας με την θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού και την θεωρία παιγνίων, δεδομένου ότι η μεν πρώτη περιγράφει την ενδοεπιχειρησιακή κατανομή γραμμικών δραστηριοτήτων παραγωγής και όχι την οικονομική πορεία των μεγεθών μιας κοινωνίας ανεξάρτητων και αυτόνομων απλών εμπορευματοπαραγωγών ή καπιταλιστών εμπορευματοπαραγωγών πράγμα που φιλοδοξεί να κάνει το μοντέλο von Neumann. Η δε θεωρία παιγνίων έχει πολύ γενικότερο χαρακτήρα από το μοντέλο von Neumann δεδομένου ότι περιγράφει τις ενέργειες ή δράσεις ανεξάρτητων και αυτόνομων ενεργούντων υποκειμένων που συμμετέχουν σε ένα κοινωνικό παίγνιο, ένα παίγνιο με καθορισμένους εκ των προτέρων κανόνες. Στην δε περίπτωση που τα ενεργούντα υποκείμενα είναι ενεργούντα οικονομικά υποκείμενα και ταυτόχρονα ανεξάρτητοι απλοί ή καπιταλιστικοί εμπορευματοπαραγωγοί τότε το μοντέλο von Neumann περιγράφει, στο βαθμό που μπορεί να το κάνει αυτό, ορισμένες όψεις μιας εμπορευματικής ή καπιταλιστικής κοινωνίας.

Μια διαφορά, κατά τον Gale, ανάμεσα στη θεωρία των παιγνίων και στο μοντέλο von Neumann είναι ότι ο συντελεστής διαστολής είναι δυνατόν να είναι ένας άρρητος πραγματικός αριθμός (όχι όμως υπερβατικός) συνάρτηση των συντελεστών των πινάκων εισροών και εκροών του μοντέλου von Neumann ενώ η τιμή ενός παιγνίου είναι σε όλες τις περιπτώσεις ρητή συνάρτηση των ρητών ή άρρητων συντελεστών του παιγνίου.

Στο μοντέλο Leontief στο παρόν άρθρο του Gale αποδίδεται ιδιαίτερη σημασία όπως και σε άλλα κείμενα του συγγραφέα. Οι λόγοι δεν είναι απόλυτα σαφείς δεδομένου ότι δεν φαίνεται από τα γραφόμενά του εάν ο συγγραφέας ενστερνίζεται την άποψη των Dorfman / Samuelson και Solow ότι το μοντέλο Leontief είναι η απλούστερη μορφή παρουσίασης της βαλρασιανής θεωρίας της γενικής ισορροπίας ή το θεωρεί ειδική περίπτωση του μοντέλου οικονομικής μεγέθυνσης von Neumann. Αναμφίβολα ο Gale κάνει μνεία στο μοντέλο Leontief και σε σχεδόν όλες τις οικονομικές εργασίες του που δημοσίευσε. Στο “The Law of Supply and Demand” το αναφέρει ως “ειδική περίπτωση” και ως “συγκεκριμένο παράδειγμα της έννοιας της ισορροπίας”.

Η συνεισφορά όμως του Gale στην θεωρία των γραμμικών συστημάτων παραγωγής δεν σταματά στην εισαγωγή του μοντέλου Leontief στη συζήτηση του

μοντέλου μεγέθυνσης και των μοντέλων γενικής ισορροπίας. Συνεχίζει δίνοντας ρητά μια στοιχειώδη απόδειξη των γνωστών θεωρημάτων Perron-Frobenius από τα οποία προκύπτει η θετικότητα του διανύσματος τιμών και του ποσοστού κέρδους στα γραμμικά μοντέλα παραγωγής απλών εμπορευμάτων και διατυπώνοντας σαφώς, αλλά άρρητα, δύο έννοιες που απασχόλησαν τους οικονομολόγους τις επόμενες δεκαετίες.

- α. Την έννοια των βασικών και μη-βασικών εμπορευμάτων και αντίστοιχα την έννοια των υποσυστημάτων που παράγουν βασικά και μη-βασικά εμπορεύματα.
- β. Την έννοια του προτύπου à la Charaschoff υποσυστήματος, ενός υποσυστήματος που έχει ίδια σύνθεση καθαρού προϊόντος, ακαθάριστου προϊόντος και υπερπροϊόντος (την παρατήρηση αυτή την οφείλω στον Γιώργο Σταμάτη).

Βιβλιογραφία

- 1) Dorfman / Samuelson / Solow (1958), *Linear Programming and Economic Analysis*, N.Y.
- 2) Gale, D. (1955), "The Law of Supply and Demand", *Math. Scan.* pp. 155-169.
- 3) Gale, D. (1960), *The Theory of Linear Economic Models*, N.Y.
- 4) Kemeny / Morgenstern / Thompson (1956), "A Generalisation of the von Neumann Model of an Expanding Economy", *Econometrica*, Vol. 23, pp. 115-135.
- 5) Koopmans, T. (1956), *Activity Analysis of Production and Allocation*, New Haven & London.
- 6) Morgenstern / Thomson (1976), *Mathematical Theory of Expanding and Contracting Economies*. Lexington.
- 7) von Neumann, J. (1945), "A model of General Economic Equilibrium", *Review of Economic Studies*, pp. 1-9.
- 8) von Neumann, J. (1928), "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", *Mathematische Annalen I*, 100, pp. 295-320.
- 9) von Neumann / Morgenstern (1947), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton.