

Χάος και μορφοκλασματικά στην κβαντική Φυσική

1. Εισαγωγή

Στα τέλη του 19ου αιώνα, ο γάλλος μαθηματικός Poincaré διαπίστωνε πως απλά αιτιοκρατικά συστήματα συχνά δείχνουν αδυναμία κανονικότητας και επανάληψης, με διαδικασίες εξέλιξης υπερβολικά ευαίσθητες στις αρχικές συνθήκες. Η απρόβλεπτη, πολύπλοκη και τυχαία συμπεριφορά που προκύπτει αίρει την απόλυτα προβλέψιμη εξέλιξη του μη επιδεχόμενου μέχρι τότε αμφισβήτηση ωρολογιακού κόσμου του Laplace. Σήμερα είναι γνωστή με το όνομα *κλασικό χάος*. Λίγο αργότερα, στις αρχές του 20ού αιώνα, συσσωρευμένα αδιέξοδα στην ερμηνεία διάφορων φυσικών φαινομένων (ακτινοβολία μέλανος σώματος, φωτοηλεκτρικό φαινόμενο κ.λπ.) οδήγησαν το γερμανό φυσικό Planck σε μια νέα επιστημονική επανάσταση. Αυτή ήταν η κβαντική Φυσική, που εκτός από την ευρύτατη αποδοχή της στη συντριπτική πλειοψηφία των φυσικών, παράλληλα αποτέλεσε ένα γόνιμο πεδίο φιλοσοφικών συζητήσεων. Οι κβαντικές ιδέες αντιβαίνουν τη συνηθισμένη κλασική λογική και περιλαμβάνουν το δυϊσμό σωματίου-κύματος, τη μη τοπικότητα των αλληλεπιδράσεων και, κυρίως, την αντίστοιχη με το κλασικό χάος απόρριψη της αιτιοκρατίας, εισάγοντας τον αποφασιστικό ρόλο του παρατηρητή στην κβαντική διαδικασία μέτρησης, με ιδιότητες που υπάρχουν μόνο όταν τις μετράμε. Ο ευρύτερα γνωστός σε ιστορικά, κοινωνικά, ακόμη και ψυχικά φαινόμενα όρος του χάους μπορεί σήμερα να επεκταθεί και στην κβαντική Μηχανική, που περιγράφει τον κόσμο στις πολύ μικρές κλίμακες μεγέθους με το όνομα *κβαντικό χάος*.

Ο όρος κβαντικό χάος διατυπώνεται αρχικά με μια ερώτηση που αποδίδεται στον Einstein, το 1917, και αφορά τις συνέπειες του ευρύτατα διαδομένου κλασικού ή αιτιοκρατικού χάους στην κβαντική Φυσική. Στα τέλη του 20ού αιώνα είναι ευρέως αποδεκτό πως η κβαντική είναι η σύγχρονη Φυσική για το σύμπαν στις ατομικές κλίμακες μέτρησης, ενώ στο όριο της μακροσκοπικής ανθρώπινης κλίμακας η φύση δεν κάνει διάκριση της κλασικής από την κβαντική Φυσική. Επιπλέον, παράλληλα με την ύπαρξη χάους στην κλασική Φυσική, είναι αποδεκτός ο πιθανοκρατικός χαρακτήρας της κβαντικής. Επομένως η τυχειότητα της κβαντικής Φυσικής θα μπορούσε να αναζητηθεί σε κάποιου είδους κβαντικό χάος που αναδύεται από την κβαντική εξίσωση του Schrödinger όπως το κλασικό χάος στις εξισώσεις του Newton.

Το κυριότερο χαρακτηριστικό της κβαντικής είναι η κβάντωση των φυσικών μεγεθών αντί του γνωστού συνεχούς της κλασικής Φυσικής. Π.χ., η ενέργεια δεν λαμβάνει πια οποιαδήποτε τιμή, αλλά συνήθως εμφανίζεται με διακριτές τιμές ανάλογες της σταθεράς του Planck h , οι οποίες αποτελούν τα μικρού μεγέθους κβάντα. Επίσης δεν γνωρίζουμε πού ακριβώς βρίσκεται ένα κβαντικό σωματίο μια δεδομένη χρονική στιγμή. Οι λύσεις της κβαντικής εξίσωσης του Schrödinger δίνουν μόνο την πιθανότητα να βρεθεί σε κάποιο σημείο του χώρου. Αυτή είναι η ουσία του πιθανοκρατικού χαρακτήρα της κβαντικής Φυσικής που, όπως διατυπώνεται με την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg, εκφράζει την αδυναμία της ταυτόχρονης μέτρησης με ακρίβεια δυο φυσικών μεγεθών, π.χ. της θέσης και της ορμής ενός σωματίου. Επομένως, η αβεβαιότητα στη μέτρηση είναι αναπόσπαστο στοιχείο της κβαντικής θεωρίας, που ό,τι δεν μπορεί να καλύψει το αποδίδει στο τυχαίο. Με αυτή την έννοια, η κβαντική Μηχανική αποτελεί μια «τελική» θεωρία που δύσκολα επιδέχεται περαιτέρω βελτίωση, αντίθετα με την κλασική Φυσική που διέυρνε την περιοχή εφαρμογής της στον υπατομικό κόσμο με την κβαντική Φυσική.

Είναι πεποίθησή μας ότι η φιλοσοφία, λίγο πριν τον 21ο αιώνα, όλο και περισσότερο θα αδυνατεί να αρθρώσει σοβαρό λόγο αν οι φιλόσοφοι δεν διαθέτουν κάποιο υπόβαθρο στις θετικές επιστήμες. Ο επιστημονικός τρόπος σκέψης οδήγησε στις επιστημονικές ανακαλύψεις που βελτίωσαν τον τρόπο ζωής μας, αλλά επιτρέπει και περαιτέρω φιλοσοφικές συζητήσεις. Επανερχόμαστε, λοιπόν, στο στόχο μας να δείξουμε αν υπάρχει και σε ποια μορφή υπάρχει χάος στον κβαντικό κόσμο. Το σημαντικότερο πρόβλημα σ' αυτή την αναζήτηση είναι ότι το κλασικό χάος εκδηλώνεται με ακανόνιστο χαρακτήρα και πολυπλοκότητα στις πολύ μικρές κλίμακες, γεγονός που δύσκολα συμβιβάζεται με την ομαλή φύση των κβαντικών φαινομένων. Άρα, προκύπτει ένα βασικό ερώτημα ύπαρξης καθαντού του κβαντικού χάους, αφού η *ακραία ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες* που υπεισέρχεται στον ορισμό του κλασικού χάους δεν είναι εφικτή στην κβαντική. Στις κβαντικές αρχικές συνθήκες υπάρχει ήδη μια αβεβαιότητα της τάξης της σταθεράς του Planck h , με αποτέλεσμα μια ομαλοποίηση στις μικρότερες κλίμακες. Επομένως, το χάος στην κβαντική Φυσική δεν διαπιστώνεται όπως το κλασικό χάος στη χρονική εξέλιξη αλλά, αντίθετα, στην κατανομή των κβαντικών ενεργειών (ενεργειακό φάσμα) που προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης του Schrödinger. Όπως ακριβώς στο κλασικό χάος η χρονική εξέλιξη μοιάζει με ένα «καρδιογράφημα» και δηλώνει χρονική μεταβολή χωρίς περιοδικότητα, που σχεδόν αντιστοιχεί στην τυχαία ρίψη ενός νομίσματος (άλλοτε κορώνα, άλλοτε γράμματα), στο κβαντικό χάος οι ενέργειες κατανέμονται με στατιστικό ή εργοδικό τρόπο.

Στα κβαντικά χαοτικά συστήματα, τα φάσματα των ενεργειών δείχνουν μια ιδιότυπη στατιστική συμπεριφορά που δείχνει περιέργως μια κανονικότητα(!), αλλά προσομοιάζει τις μαθηματικές λύσεις που προκύπτουν από τυχαίες μήτρες. Η στατιστική των κβαντικά χαοτικών συστημάτων είναι σήμερα ευρύτερα γνωστή ως στατιστική Wigner. Θα δούμε επίσης ότι και οι κβαντικά χαοτικές κατανομές πιθανότητας (κυματοσυναρτήσεις) που προκύπτουν από τις λύσεις της εξίσωσης Schrödinger εμφανίζουν ουλές στην απεικόνισή τους στο χώρο. Οι ουλές στην κατανομή της πιθανότητας αντιστοιχούν σε υποκείμενες κλασικές περιοδικές τροχιές, σε ευθεία αντιστοιχία με την κλασική Φυσική. Θα πρέπει, επίσης, να αναφερθεί πως το κβαντικό χάος δεν είναι απλώς μια διανοητική άσκηση, αλλά έχει παρα-

τηρηθεί σε πειράματα της Φυσικής. Μια τέτοια κατηγορία πειραμάτων που δείχνει κβαντικό χάος είναι οι υψηλά διεγερμένες καταστάσεις (υψηλές ενεργειακές στάθμες) των μορίων. Επίσης κβαντικό χάος δείχνουν τα ενεργειακά φάσματα των ενδιάμεσου μεγέθους μεσοσκοπικών συστημάτων. Είναι γεγονός πως οι ηλεκτρονικές διατάξεις γίνονται όλο και πιο μικρές, ώστε από μεγέθη της τάξης του χιλιοστού ($1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ cm}$) τη δεκαετία του '60, έγιναν της τάξης του μικρού ($\mu\text{m} = 10^{-6} \text{ cm}$, ένα εκατομμυριοστό) το '80 και σήμερα είναι της τάξης του νάνο ($\text{nm} = 10^{-9} \text{ cm}$, ένα δισεκατομμυριοστό), ώστε να αναρωτιέται κανείς πού μπορεί να φτάσει αυτή η μείωση; Τα μεσοσκοπικά μεγέθη, τα οποία δεν είναι ούτε μικροσκοπικά ούτε μακροσκοπικά, πλησιάζουν την πολύ μικρή τιμή της σταθεράς του Planck h . Άρα, τα κβαντικά φαινόμενα και το κβαντικό χάος είναι πλέον ορατά στο εργαστήριο σε μικρές διατάξεις (π.χ. στις λεγόμενες κβαντικές τελείες). Η θεωρητική μελέτη γίνεται με τα κβαντικά μιλιάρδα που επιτρέπουν να φανούν τα χαοτικά χαρακτηριστικά της κβαντικής Φυσικής.

2. Πολύπλοκα συστήματα (μη αναγωγικά)

Στο γύρισμα του 20ού αιώνα έχει αρχίσει να αναπτύσσεται έντονη επιστημονική δραστηριότητα σε πολλές περιοχές της επιστήμης (Φυσική, Βιολογία, Χημεία, Γλωσσολογία, Οικονομία κ.λπ.) με το κοινό όνομα πολυπλοκότητα. Νέα ερευνητικά ινστιτούτα δημιουργούνται για τη μελέτη μη γραμμικών (nonlinear) και πολύπλοκων (complex) συστημάτων. Η έρευνα σ' αυτή την περιοχή συμβαδίζει με την εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, που μόλις τα τελευταία χρόνια μπορούν να αντιμετωπίσουν παρόμοια προβλήματα. Τα υπολογιστικά πειράματα μπορούν να υποκαταστήσουν πλέον πραγματικά πειράματα στο εργαστήριο ή ακόμη την απλή παρατήρηση των φυσικών φαινομένων. Επομένως, στη θέση του πραγματικού κόσμου μπορεί να μελετηθεί ένας εικονικός κόσμος, όπου αντί των φυσικών νόμων εκτελούνται αριθμητικοί αλγόριθμοι στον υπολογιστή.

Το κλασικότερο παράδειγμα πολύπλοκου συστήματος είναι ο ανθρώπινος εγκέφαλος, που αποτελείται περίπου από 10 δισ. νευρόνια. Τα νευρόνια είναι απλά συστατικά που υπακούουν σε απλούς νόμους (ανταλλάσσουν μεταξύ τους ηλεκτρικούς παλμούς), αλλά συνολικά στον εγκέφαλο προκύπτει πολύπλοκη ολική συμπεριφορά από όπου μπορεί να αναδύεται τάξη (σκέψη, μνήμη, ομιλία κ.λπ.). Άλλα χαρακτηριστικά παραδείγματα πολύπλοκων συστημάτων είναι η νιφάδα χιονιού, το έμβρυο, το βακτηρίδιο κ.λπ. Στον ορισμό της έννοιας της πολυπλοκότητας είναι δύσκολο να αποφευχθεί πλήρως η ταυτολογία. Επισημαίνεται όμως πως η τόσο χρήσιμη στις επιστήμες αναγωγική μέθοδος, όπου η κατανόηση των επιμέρους συστατικών αυτόματα οδηγεί στην κατανόηση του συνόλου που αποτελείται απ' αυτά, καταρρέει στα πολύπλοκα συστήματα. Με την αναγωγική μέθοδο, για την κατανόηση, π.χ., ενός αερίου είναι αρκετή η επίλυση ενός και μόνο μορίου του. Επομένως, είναι φυσιολογικό πολλοί κλάδοι της Φυσικής να στηρίζονται αποκλειστικά στη γνώση των επιμέρους για να συμπεράνουν για το σύνολο με την αναγωγική μέθοδο. Πολύπλοκο μπορεί να θεωρηθεί άβιαστα ό,τι δεν είναι αναγώγιμο στα επιμέρους και δεν αρκεί απλώς η γνώση των επιμέρους στοιχείων που το αποτελούν για την κατανόηση του. Τα πολύπλοκα συστήματα αποτελούνται από απλά επιμέρους συστατικά που υπακούουν σε απλούς νό-

μους, αλλά εμφανίζουν πολύπλοκη ολική συμπεριφορά απ' όπου αναδύεται κάποιου είδους τάξη ή αυτοοργάνωση. Η έννοια της πολυπλοκότητας συνήθως περιορίζεται κυρίως στην κλασική Φυσική. Έχουν όμως προταθεί και κβαντικά πολύπλοκα συστήματα. Αναμένεται πως στη λειτουργία του εγκεφάλου το κβαντικό χάος ίσως να διαδραματίζει κάποιο ρόλο. Τα πολύπλοκα συστήματα περιέχουν μεγάλο πληροφοριακό περιεχόμενο και ο βασικός στόχος της έρευνας στην πολυπλοκότητα είναι η αναζήτηση θεμελιωδών αρχών και βασικών νόμων συμπαντικής (ή οικουμενικής) φύσης, οι οποίοι δεν εξαρτώνται από το συγκεκριμένο σύστημα.

Ανακεφαλαιώνοντας την πορεία των επιστημονικών ανακαλύψεων, θα λέγαμε πως η κλασική Φυσική περιγράφει ένα απολύτως ωρολογιακό σύμπαν που το χαρακτηρίζει επανάληψη και προβλεψιμότητα. Με τη θεωρία του χάους έρχεται στο προσκήνιο η μη γραμμική φύση πολλών επιστημών, τις οποίες χαρακτηρίζει *μη γραμμικότητα* των εξισώσεων της κλασικής Μηχανικής, που οδηγεί στο αιτιοκρατικό χάος και την πολυπλοκότητα. Παράλληλα, η κβαντική Φυσική θέτει σε δοκιμασία τον κλασικό τρόπο σκέψης, εισάγοντας τα όρια του μικρόκοσμου με τη σταθερά του Planck h . Νέες ιδέες όμως εμφανίζονται και στις μαθηματικές επιστήμες, π.χ. γραμμές άπειρου μήκους χωρίς επαπτόμενες ή επιφάνειες χωρίς εμβαδό κ.λπ. Μια από τις βασικές τέτοιες ιδέες είναι η μη αναλυτικότητα των συναρτήσεων που περιγράφουν την πολυπλοκότητα στη μορφοκλασματική (fractal) Γεωμετρία.

Η μη αναλυτικότητα αφορά συναρτήσεις που, ενώ μπορεί να είναι συνεχείς, δεν είναι απαραίτητα και παραγωγίσιμες —δηλαδή υπάρχει αδυναμία να φέρουμε τις επαπτόμενες στα σημεία που τις αποτελούν. Αυτό συμβαίνει επειδή στη λήψη της επαπτομένης είναι απαραίτητη η προσέγγιση της καμπύλης με μια ευθεία γραμμή στο σημείο που θέλουμε, γεγονός που εμποδίζεται από την παρουσία της νέας δομής που εμφανίζεται στις μικρότερες κλίμακες. Οι γραμμές του Peano, τα σύνολα του Cantor κ.λπ. ήταν μερικά από τα μαθηματικά «τέρατα» που απασχόλησαν τους μαθηματικούς στις αρχές του 20ού αιώνα, όπου παρά τη συνέχεια η παραγωγισιμότητα δεν ήταν εφικτή. Η μορφοκλασματική Γεωμετρία περιγράφει τέτοιου είδους συστήματα, που επιπλέον είναι αναλλοίωτα σε σμικρύνσεις ή μεγεθύνσεις. Αξιοσημείωτο είναι επίσης πως τα μορφοκλασματικά χαρακτηρίζονται από μη ακέραιες (μορφοκλασματικές) διαστάσεις χώρου. Η μορφοκλασματική είναι η Γεωμετρία του χάους, που εκφράζεται με τη βοήθεια υπολογιστών.

3. Το κλασικό χάος (ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες)

Σκοπός της επιστήμης είναι η πρόβλεψη μελλοντικών συμβάντων και ο περιορισμός του απρόβλεπτου (τυχαίου ή ψευδοτυχαίου) στη χρονική εξέλιξη. Εφοδιασμένοι με τη γνώση, μέσω της παρατήρησης και του πειράματος, πιστεύουμε πως μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων την εξέλιξη ενός φαινομένου, όπως μια αντίδραση στη Χημεία, τον καιρό τις επόμενες μέρες κ.λπ. Πώς όμως γίνεται ποσοτικά αυτή η πρόβλεψη; Με την επίλυση των κατάλληλων κλασικών εξισώσεων του Newton, που περιγράφουν το σύστημα μαζί και με τις απαραίτητες αρχικές συνθήκες, μπορούμε να οδηγηθούμε στο τελικό αποτέλεσμα μετά από ορισμένους μαθηματικούς (ή αριθμητικούς με την υπολογιστική μηχανή) υπολογι-

σμούς. Θα δούμε ότι, παρά το γεγονός πως η διαδικασία είναι συγκεκριμένη (αιτιοκρατική), πολύ συχνά η τυχαιότητα και το απρόβλεπτο βρίσκουν τον τρόπο και παρεισφρύνουν στο τελικό αποτέλεσμα. Αποτέλεσμα είναι μια ποικιλία φαινομένων να παρουσιάζει πολύπλοκη, απρόβλεπτη και τυχαιά συμπεριφορά, που είναι γνωστή με το όνομα κλασικό χάος. Παραδείγματα τέτοιας συμπεριφοράς έχουμε: (i) στην τυρβώδη ροή των ρευστών (π.χ. οι στρόβιλοι σε τυφώνα), (ii) στη μακρόχρονη πρόβλεψη του καιρού ή ακόμη και (iii) στο σχήμα που παίρνει η κρέμα μέσα στον καφέ μας μετά από ένα ανακάτεμα. Επομένως, μπορεί να ειπωθεί πως στον κλασικό κόσμο η τυχαιότητα και το απρόβλεπτο κυριαρχούν και η πρόβλεψη του μέλλοντος είναι πολύ περιορισμένη.

Θα μπορούσε κάποιος να αποδώσει τη μη προβλεψιμότητα στην πολυπλοκότητα του προβλήματος, λόγω του μεγάλου αριθμού των παραμέτρων που πρέπει να καθοριστούν και να υπολογιστούν σε κάθε χρονική στιγμή. Π.χ., στο πρόβλημα της πρόγνωσης του καιρού χρειάζεται ένας φανταστικά μεγάλος αριθμός από εξισώσεις για να περιγράψουμε όλα τα μόρια του αέρα, πράγμα που αποτελεί το γνωστό μοριακό ή στατιστικό χάος. Όμως ένα πλήρως ορισμένο (αιτιοκρατικό) σύστημα είναι δυνατό να οδηγηθεί σε μη προβλέψιμη συμπεριφορά ακόμη κι όταν περιγράφει ένα μόνο μόριο με μια μόνο εξίσωση! Αυτό συμβαίνει όταν οι κλασικές εξισώσεις είναι μη γραμμικές, δηλαδή δεν διασπώνται στα επιμέρους στοιχεία τους ή το άθροισμα δυο λύσεών τους δεν αποτελεί πάλι λύση. Επειδή η συντριπτική πλειοψηφία των φαινομένων σχετίζεται με τέτοιες εξισώσεις (έστω κι αν πολύ συχνά περιοριζόμαστε σε γραμμικές προσεγγίσεις, που φυσικά δεν δίνουν χάος), το χάος είναι αναπόφευκτο στη φύση, όπως και η ταυτόχρονη αδυναμία μας να προβλέψουμε το μέλλον.

Ο Θαλής ο Μιλήσιος είχε προβλέψει με επιτυχία μια έκλειψη ηλίου που έγινε κατά τη διάρκεια μιας μάχης μεταξύ Ληδών και Μήδων —ένα γεγονός που του έδωσε μεγάλη φήμη. Το 1910 ο κομήτης του Halley πέρασε πολύ κοντά από τη γη. Επανήλθε πάλι, με σχετική ακρίβεια, το 1986, θα επανέλθει πάλι σε 76 χρόνια κ.λπ. Φαινόμενα όπως οι εκλείψεις του ηλίου και της σελήνης, οι παλίρροιες, οι τροχιές των πλανητών κ.λπ. εμφανίζουν τάξη και χαρακτηρίζονται από περιοδικότητα και κανονικότητα, ώστε μικρά λάθη στις αρχικές συνθήκες αναμένεται να δώσουν μικρά λάθη στον αντίστοιχο προσδιορισμό τους σε επόμενες χρονικές στιγμές. Οι κλασικές εξισώσεις διατυπώνονται σε διαφορική μορφή, η οποία περιλαμβάνει όχι μόνο τα φυσικά μεγέθη αλλά και τους αντίστοιχους ρυθμούς μεταβολής τους, δηλαδή τις παραγώγους τους. Π.χ., στην ελεύθερη πτώση ενός σώματος η θέση και ο ρυθμός μεταβολής της θέσης, που είναι η ταχύτητα, δεν είναι σταθερές, αλλά μόνο ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας (ο ρυθμός μεταβολής του ρυθμού μεταβολής της θέσης), που είναι η επιτάχυνση, παραμένει σταθερός. Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο Laplace, το 18ο αιώνα, συμπέρανε πως το σύμπαν ακολουθεί μια μοναδική προδιαγεγραμμένη πορεία στο χρόνο, ώστε ζούμε σε έναν ωρολογιακό κόσμο, όπου όλα είναι απολύτως προκαθορισμένα!

Είδαμε πως το κλασικό αιτιοκρατικό χάος δίνει τη δυνατότητα ακόμη και σε απλές αλλά μη γραμμικές εξισώσεις να παράγουν κίνηση τόσο πολύπλοκη και ευαίσθητη στις δεδομένες αρχικές συνθήκες, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί, για σχεδόν όλους τους πρακτικούς σκοπούς, τυχαιά και απρόβλεπτη, αναιρώντας την υπόθεση του Laplace. Στα χαστικά συστήματα η τελική τους χρονική κατάσταση καταλήγει να είναι ανεξάρτητη από τις αρχικές συνθήκες, με όσο μεγάλη ακρίβεια κι αν τις έχουμε προσδιορίσει. Αυτό συμβαίνει επειδή

ένα απειροελάχιστο σφάλμα στις αρχικές συνθήκες μπορεί να οδηγήσει σε ένα τεράστιο σφάλμα στο τελικό αποτέλεσμα και, πρακτικά, οποιαδήποτε εξέλιξη μπορεί να προκύψει, σχεδόν όπως στη ρίψη ενός νομίσματος. Η ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες εκφράζεται με το γεγονός ότι το αρχικό σφάλμα των αρχικών συνθηκών αυξάνει εκθετικά, δηλαδή πολύ γρήγορα, γεγονός που μας οδηγεί σε ανεξέλεγκτα μεγάλους αριθμούς. Παρατηρήστε την εκθετική αύξηση σε μια κατάσταση ενός χρηματικού ποσού σε μια τράπεζα με τόκο 10%. Σε 5 χρόνια θα γίνει 2.5 φορές μεγαλύτερο, σε 10 χρόνια 6.2 φορές και μετά από 20 χρόνια θα πάρουμε όσο κι αν φαίνεται παράξενο 38 περίπου φορές το αρχικό ποσό! Η εκθετική αύξηση του λάθους στις αρχικές συνθήκες φαίνεται και στο πρόβλημα της μπάλας του μπιλιάρδου, όπου μια μικρή αλλαγή δθ στη γωνία θ της κατεύθυνσης της μπάλας στο πρώτο χτύπημα οδηγεί σε μια τελείως διαφορετική τροχιά μετά από μερικά χτυπήματα, αν το σχήμα του μπιλιάρδου είναι ελλειπτικό ή έχει τη μορφή σταδίου.

Επομένως, ένα απλό αιτιοκρατικό σύστημα, που περιγράφεται με συγκεκριμένες μη γραμμικές κλασικές εξισώσεις και δεδομένες αρχικές συνθήκες, είναι δυνατό να λειτουργήσει ως φαινομενικά τυχαίο. Το κλασικότερο παράδειγμα αποτελεί ίσως το «φαινόμενο της πεταλούδας» του Lorentz, το 1961, που μπόρεσε να αναγάγει το πρόβλημα του καιρού στην επίλυση τριών μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων για τρεις μεταβλητές που περιγράφουν γενικά χαρακτηριστικά του καιρού, όπως πίεση, ταχύτητα ανέμου κ.λπ. Οι εξισώσεις του Lorentz είναι μια χοντρική προσέγγιση στο πρόβλημα του άπειρου αριθμού εξισώσεων που πρέπει να διατυπωθούν για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα του καιρού και επιλύονται με τη βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η εικόνα εξέλιξης του συστήματος στο χρόνο, σχεδιασμένη στον τρισδιάστατο φασικό χώρο, έχει τη μορφή μιας πεταλούδας, που είναι γνωστή ως ο «παράξενος ελκυστής του Lorentz», και το φαινόμενο ως «φαινόμενο της πεταλούδας». Μια διαφορά της τάξης ενός χιλιοστού στις αρχικές συνθήκες οδηγεί γρήγορα σε δραματικές συνέπειες στην εξέλιξη μιας μεταβλητής, ενώ η γραμμικού τύπου υπόθεση θα ήταν πως ένα μικρό σφάλμα στις αρχικές συνθήκες δεν αλλάζει σημαντικά την εξέλιξη του καιρού. Αυτό συμβαίνει επειδή η μικρή αυτή διαφορά στις αρχικές συνθήκες αυξάνει εκθετικά. Η ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες εκλαμβάνεται με το παράδειγμα μιας πεταλούδας που χτυπάει τα φτερά της, ας πούμε κάπου στα Γιάννενα, και μπορεί να επηρεάσει μετά από μερικές μέρες τον καιρό, π.χ., της Βραζιλίας ή ακόμη να δημιουργήσει έναν τυφώνα στο Τόκιο. Έτσι, λόγω της ακραίας εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες, μικρές τοπικές επιρροές, παρόλο που φαίνονται ασήμαντες λεπτομέρειες για την πρόβλεψη, δεν είναι. Σήμερα είναι γνωστό ότι ο καιρός είναι αδύνατο να προβλεφθεί για διάστημα άνω των 5 ημερών. Η εκθετική αύξηση της απόστασης μεταξύ δύο σημείων καθώς μεταβάλλεται ο χρόνος ορίζεται από τον εκθέτη Lyapunov, που αποτελεί την ποσοτική εκτίμηση της χαοτικής συμπεριφοράς ενός συστήματος.

Η ιδέα της ακραίας εξάρτησης των χαοτικών συστημάτων από τις αρχικές συνθήκες δεν είναι καινούρια ούτε στο κοινωνιολογικό επίπεδο. Από το 1650 ο Pascal είχε πει πως αν η μύτη της Κλεοπάτρας δεν ήταν τόσο καλοσχηματισμένη, αλλά λίγο πιο μεγάλη, η ιστορία της ανθρωπότητας ίσως να ήταν πολύ διαφορετική. Αυτό γιατί έπεται η αλληλουχία: αν είχε άσχημη μύτη η Κλεοπάτρα, ενδεχομένως να μην την ερωτευόταν ο Αντώνιος, δεν θα ερχόταν σε πόλεμο με τον Οκτάβιο, επομένως δεν θα κατέρρεε η Ρωμαϊκή Αυτοκρατορία.

Σε πιο πρακτικό επίπεδο, αν μας συμβεί ένα ατύχημα, μια δεδομένη χρονική στιγμή, είναι αδύνατο να μη σκεφτούμε: «Αν είχα φύγει ένα λεπτό νωρίτερα, θα είχα αποφύγει το αυτοκίνητο που ήρθε πάνω μου». Επομένως, η θεωρία του χάους ανοίγει το κουτί της Πανδώρας, γιατί είναι γνωστή σε όλους μας η αδυναμία μακρόχρονης πρόβλεψης. Το σύμπαν, κι εμείς μαζί, ή οι αναπαραστάσεις του σύμπαντος στον ηλεκτρονικό υπολογιστή εξελισσόμαστε με απρόβλεπτο αντί για προβλέψιμο τρόπο. Με το χάος παρά τη σκοπιμότητα, αν και το πρώτο δεν αποκλείει το δεύτερο, αφού υπάρχει και τάξη κρυμμένη στο χάος.

Παράδειγμα κλασικού χάους έχουμε στη ροή των ρευστών όταν παρεμβάλλεται ένα εμπόδιο. Η ροή είναι απόλυτα φυσιολογική όταν η ταχύτητα (και η μη γραμμικότητα) είναι πολύ μικρή, ενώ αυξάνοντάς την αρχίζουν να δημιουργούνται στρόβιλοι. Τελικά, για πολύ μεγάλες ταχύτητες η ροή γίνεται ακανόνιστη και χαοτική. Απλά μαθηματικά συστήματα αναδρομικών σχέσεων συνδέουν την τιμή της μεταβλητής τη χρονική στιγμή $n+1$ (φέτος) με την τιμή στη χρονική στιγμή n (πέρυσι). Η λογιστική επεικόνιση $x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)$, $n=0, 1, 2, \dots$ δείχνει χάος στη χρονική εξέλιξη της μεταβλητής x_n , αφού είναι μη γραμμική λόγω του όρου $a x_n^2$. Αν αρχίσουμε από μια αυθαίρετη αρχική συνθήκη x_0 και επαναλάβουμε τη διαδικασία στο χρόνο, εμφανίζεται χάος για ορισμένες τιμές της παραμέτρου a . Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: (i) $0 < a < 1$, (ii) $1 < a < 3$, (iii) $a = 4$. Στην (i) η x_n για μεγάλο n σταθεροποιείται στην τιμή $x^* = 0$, ενώ για τη (ii) στην επίσης σταθερή τιμή $1-1/a$. Για $a > 3$ η περίοδος διπλασιάζεται, ώστε ο πληθυσμός είναι μεγάλος τον ένα χρόνο, μικρός τον επόμενο κ.λπ. Για $a = 3.45\dots$ η περίοδος διπλασιάζεται πάλι, τώρα σε κύκλους των 4 ετών. Για $a = 3.54\dots, 3.564\dots$ και $3.569\dots$ η περίοδος διπλασιάζεται όλο και γρηγορότερα. Για $a = 4$ [περίπτωση (iii)] ο πληθυσμός x_n δεν σταθεροποιείται σε μια σταθερή περίοδο και έχουμε χάος. Το χάος εμφανίζεται με διακλαδώσεις τιμών με περιοδικότητες $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^N, \dots$, ισοδύναμες με χάος για μεγάλο N .

Είδαμε ότι ένα χαοτικό σύστημα με δεδομένες δυο αρχικές συνθήκες, πολύ κοντά η μία στην άλλη, θα εξελιχθεί στο χρόνο σε δυο τελείως διαφορετικές καταστάσεις. Η θεωρία του χάους, επομένως, αντιβαίνει την κοινή (λαπλασιανή) λογική σύμφωνα με την οποία, με δεδομένες τις αρχικές συνθήκες, μπορούμε να προβλέψουμε τη συμπεριφορά εκκρεμών, πλανητών κ.λπ. σε κάθε χρονική στιγμή. Όπως σε ένα παιχνίδι δημιουργίας ενός αμμόλοφου, αδειάζοντας άμμο από ψηλά το αποτέλεσμα εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο αρχίζουμε. Αν επιχειρήσουμε να προβλέψουμε τη μελλοντική συμπεριφορά του συστήματος, βλέπουμε πως το παραμικρό λάθος στις αρχικές συνθήκες δημιουργεί ένα πολύ μεγάλο σφάλμα στην πρόβλεψη της τελικής κατάστασης, η οποία δεν είναι πλέον προβλέψιμη.

Ένα ακόμη παράδειγμα χαοτικού συστήματος αποτελεί και η χρονική εξέλιξη του ηλιακού συστήματος, παρόλο που η κίνηση των πλανητών γύρω από τον ήλιο είναι ήδη γνωστή και θεμελιωμένη από τους Kepler, Newton και Einstein. Αυτό συμβαίνει επειδή είναι αδύνατος ο υπολογισμός της χρονικής εξέλιξης συστήματος των 3 ή περισσότερων σωμάτων που κινούνται με βάση τις βαρυτικές δυνάμεις, αφού είναι αδύνατη η γνώση των αρχικών συνθηκών με άπειρη ακρίβεια. Ανεξάρτητα του πόσο μικρά είναι τα σφάλματα στις αρχικές συνθήκες, θα οδηγήσουν, για αρκετά μεγάλους χρόνους, σε υπερβολικά (εκθετικά μεγάλα) σφάλματα και μη προβλέψιμη συμπεριφορά. Άρα, δεν γνωρίζουμε πώς συμπεριφέρεται το ηλιακό σύστημα σε πολύ μεγάλους χρόνους. Ευτυχώς όμως, για να ξεχάσει το ηλιακό σύ-

στημα τις αρχικές του συνθήκες και να εμφανιστεί το χάος απαιτούνται πολύ μεγάλοι χρόνοι, ακόμη μεγαλύτεροι κι από την ηλικία του σύμπαντος, και ο κίνδυνος της χαοτικής συμπεριφοράς δεν είναι άμεσος.

Το χάος είναι πολυπρόσωπο και εμφανίζεται σε μια πληθώρα από περιπτώσεις που διέπουν φυσικές διαδικασίες, όπως στην υδροδυναμική, τις χημικές αντιδράσεις, την επιδημιολογία κ.λπ. Ήδη τονίστηκε ότι η χαοτική συμπεριφορά που προκύπτει από την επίλυση απλών μη γραμμικών εξισώσεων οδηγεί σε στατιστική αντιμετώπιση ακόμη και αν το σύστημα είναι λίγων βαθμών ελευθερίας. Αναμένεται, επομένως, πως η ιδιαίτερη πολυπλοκότητα των χαοτικών λύσεων μπορεί να μας οδηγήσει και στο αντίστροφο συμπέρασμα: πίσω από τη στατιστική πολυπλοκότητα φαινομένων όπως η τυρβώδης ροή μπορεί να κρύβεται η απλότητα λίγων μη γραμμικών εξισώσεων. Εκεί, ενδεχομένως, ανάγεται η ευρεία ισχύς του δεύτερου θερμοδυναμικού νόμου, με την παρουσία μη αντιστρεπτότητας. Επιπλέον έχει διαπιστωθεί πως η συντριπτική πλειοψηφία των κλασικών συστημάτων είναι χαοτικά, ενώ τα μη χαοτικά (ολοκληρώσιμα) κλασικά συστήματα αποτελούν μάλλον απίθανες περιπτώσεις.

4. Η μορφοκλασματική Γεωμετρία (αυτοομοιότητα — μη ακέραιες διαστάσεις)

Για να κατανοήσουμε το χάος με τους παράξενους ελκυστές που το περιγράφουν, αλλά και το φυσικό κόσμο που μας περιβάλλει, δεν αρκεί η ευκλείδεια Γεωμετρία που περιγράφει μόνο τα πολύ απλά γεωμετρικά σχήματα (κύκλους, τετράγωνα, τρίγωνα κ.λπ.). Τα δέντρα, οι ακτές, τα βουνά, ένα χταπόδι, αποτελούν πολύπλοκα, ακανόνιστα και κομματιαστά σχήματα που δεν τα καλύπτει η ευκλείδεια Γεωμετρία. Στη θέση της, η μορφοκλασματική Γεωμετρία περιγράφει τέτοια πολύπλοκα σχήματα και συστήματα, που περιλαμβάνουν τις ακανόνιστες μορφές και δομές του κόσμου στον οποίο ζούμε. Τα μορφοκλασματικά ορίζονται ως: (i) Συστήματα ή αντικείμενα που δείχνουν αυξανόμενη λεπτομέρεια σε μεγεθύνσεις ή σμικρύνσεις και η νέα δομή δείχνει ακριβώς ίδια (ή κατά μέσο όρο η ίδια) με την προηγούμενη. Έχουν τη συμμετρία της αυτοομοιότητας σε αλλαγές κλίμακας, με απαραίτητη βέβαια προϋπόθεση την ύπαρξη ποικιλίας μεγεθών και δομής σε όλες τις κλίμακες μεγέθους. (ii) Μη ομαλά, ακανόνιστα και κομματιαστά στον ίδιο βαθμό σε όλες τις κλίμακες, αφού αφορούν μη αναλυτικές (συνεχείς αλλά μη παραγωγίσιμες) συναρτήσεις.

Στα μορφοκλασματικά, με μεγεθυντικούς φακούς όλο και αυξανόμενης διακριτικότητας παρατηρούμε νέες λεπτομέρειες στη δομή, που κατά μέσο όρο παραμένει όμοια με την αρχική. Επομένως, το πρώτο χαρακτηριστικό τους είναι η ύπαρξη δομής σε μεγάλη ποικιλία διαφορετικών κλιμάκων μήκους, από τις πολύ μεγάλες έως τις πολύ μικρές, και κατά δεύτερο λόγο το γεγονός ότι η δομή στις διαφορετικές κλίμακες παραμένει η ίδια. Η ιδιότητα της διατήρησης της δομής σε αλλαγές κλίμακας είναι γνωστή ως αυτοομοιότητα, μια νέα συμμετρία. Τα μορφοκλασματικά όμως χαρακτηρίζονται και από μη ακέραιες (κλασματικές) διαστάσεις· π.χ., ένα μορφοκλασματικό σύννεφο δεν είναι ένα τρισδιάστατο αντικείμενο, αλλά, όσο κι αν φαίνεται παράξενο, περίπου δυομισδιάστατο (έχει τρύπες και δεν καλύπτει τον τρισδιάστατο χώρο)! Τα μορφοκλασματικά είναι συστήματα μη ομα-

λά αλλά ακανόνιστα και κομματιαστά στον ίδιο βαθμό σε όλες τις κλίμακες μεγέθους. Τα φυσιολογικά αντικείμενα μη ακέραιων διαστάσεων αποκτούν μια πληθώρα από παράξενους νέους γείτονες.

Ο πνεύμονας είναι ένα μορφοκλασματικό αντικείμενο, αφού έχει όλα τα μεγάλα χαρακτηριστικά του (τους βρόγχους) ίδια με τα επιμέρους (μικρότερους βρόγχους), με τα επιμέρους των επιμέρους κ.ο.κ., μέχρι να εξασθενήσει η ισχύς του φακού μας και να μην μπορούμε να παρεισφύσουμε σε νέα λεπτομέρεια. Εκτός όμως από τα βιολογικά συστήματα, η μορφοκλασματική περιγραφή συνεισφέρει και στην κατανόηση μιας μεγάλης κατηγορίας αντικειμένων ή υλικών, που ενώ φαίνονται άμορφα κρύβουν τη σημαντική συμμετρία της αυτοομοιότητας. Αν και τα μορφοκλασματικά είναι από τη φύση τους ελκυστικά, δεν απουσιάζει και η πρακτική σκοπιμότητα στη μελέτη τους, αφού είναι χρήσιμα και σε διάφορες κατασκευές. Όμως είναι η συνδεσή τους με τη μοντέρνα Φυσική και τα Μαθηματικά που τα κάνει ευρύτερα αποδεκτά. Πρωτίστως μας ενδιαφέρουν στην προσπάθεια για την κατανόηση του πώς είναι φτιαγμένος ο κόσμος μας, πώς δηλαδή προκύπτει η ποικιλία των μορφών και των δομών που παρατηρούμε γύρω μας. Η γνώση των φυσικών ιδιοτήτων στα μορφοκλασματικά βοηθάει στην κατανόηση των ιδιοτήτων στο κρίσιμο σημείο των μεταβάσεων φάσης, όπου υπάρχουν όλες οι κλίμακες μεγέθους (π.χ., στη θερμοκρασία βρασμού υπάρχουν φουαλλίδες όλων των μεγεθών). Οι μεταβάσεις φάσης αποτελούν ένα από τα πλέον βασικά προβλήματα της Φυσικής, που εμπλουτίζει τις γνώσεις μας για τα πολύπλοκα συστήματα. Η συναρπαστικότερη από τις διάφορες μεταβάσεις φάσης είναι η γέννηση του σύμπαντος πριν από περίπου 20 δις χρόνια (10^{18} δευτερόλεπτα).

Είδαμε την εικόνα του χάους με τους παράξενους ελκυστές, που περιλαμβάνουν αναρίθμητες κλίμακες μεγέθους, αλλά και την παρουσία μιας εσωτερικής απλότητας, της αυτοομοιότητας, ώστε σε αυξανόμενη λεπτομέρεια να φαίνεται μια νέα δομή, ίδια με την προηγούμενη. Το μεγάλο μοιάζει με το μικρό, εικόνες μέσα σε εικόνες, φτιάχνουν μια ονειρική περιγραφή του κόσμου μας. Τέτοιες αναπαραστάσεις σήμερα μπορούμε να πάρουμε με τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, όπου απλές μαθηματικές απεικονίσεις μάς οδηγούν κατευθείαν στην ψυχρότητα των εικόνων. Συνέπεια της αυτοομοιότητας είναι ότι το οσοδήποτε μικρό είναι αναγκαστικά εξίσου πολύπλοκο με το όλο, ενώ ταυτόχρονα παραμένει η διατήρηση της εικόνας σε διαφορετικούς μεγεθυντικούς φακούς. Από ψυχολογική άποψη έχει αναφερθεί μια ανεξήγητη έλξη των ανθρώπων στις μορφοκλασματικές εικόνες.

5. Κβαντικό χάος (στατιστική περιγραφή των ενεργειακών φασμάτων)

Είδαμε πώς από την πολυπλοκότητα μπορεί να εμφανιστεί απλότητα, αφού το κλασικό χάος αποδίδεται σε απλές αλλά μη γραμμικές εξισώσεις. Αντίστροφα, απλά αιτιοκρατικά συστήματα μπορούν να λειτουργούν αβίαστα ως τυχαία, αν και δεν έχουν τίποτα το τυχαίο, ούτε καν εισαγόμενη τυχειότητα από τον εξωτερικό κόσμο, δείχνοντας πιθανοκρατική και τελικά στατιστική συμπεριφορά. Το λεγόμενο κβαντικό χάος δεν εμφανίζεται στη χρονική εξέλιξη όπως το κλασικό χάος. Μπορούμε, επομένως, να συμπεράνουμε πως η κβαντική Φυσική δεν είναι τόσο χαοτική όσο η κλασική Φυσική. Το χάος εμφανίζεται και

στην κβαντική Φυσική του μικρόκοσμου, αλλά στα ενεργειακά φάσματα των ενεργειών που αντιστοιχούν στις κβαντικές καταστάσεις. Επιπλέον, οι ενέργειες στα κβαντικά χαοτικά συστήματα περιγράφονται με στατιστικές μεθόδους και ταιριάζουν με μεγάλη ακρίβεια στα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις λύσεις τυχαίων μητρών, δηλαδή μητρών με όλα τα στοιχεία τους τυχαίους αριθμούς.

Τα ίχνη του χάους στην κβαντική Μηχανική αναγνωρίζονται κυρίως σε απλά συστήματα τα οποία ονομάζονται κβαντικά μπιλιάρδα. Σε αυτά ένα κβαντικό σωματίο ανακλάται όπως μια μπάλα στο χείλος μιας περιοχής ενός τραπέζιου. Εάν η περιοχή είναι κυκλικού σχήματος, τότε η κλασική συμπεριφορά της μπάλας με ελαστική σκέδαση στα όρια εμφανίζει κανονικότητα. Εάν το μπιλιάρδο έχει σχήμα έλλειψης ή σταδίου, η κίνηση είναι ακανόνιστη και χαοτική (εργοδική), ώστε παρά την απλότητα του μπιλιάρδου το σύνολο των τροχιών είναι εξαιρετικά πολύπλοκο. Δύο τροχιές που αρχίζουν πολύ κοντά αποκλίνουν εκθετικά (κλασικό χάος). Η έλλειψη μορφής στην κλασική πορεία της μπάλας στην περίπτωση του χαοτικού μπιλιάρδου με σχήμα σταδίου αντανακλάται άμεσα στις κβαντικές λύσεις. Παραδόξως όμως οι κβαντικές ενέργειες στην περίπτωση του κλασικά χαοτικού συστήματος δείχνουν μια κανονικότητα, αντίθετα με την περίπτωση του μη χαοτικού κυκλικού μπιλιάρδου, όπου είναι ακανόνιστες. Το ενεργειακό φάσμα στη χαοτική περίπτωση αποτελείται από συσχετισμένες ενέργειες, που λέμε ότι «γνωρίζουν και επικοινωνούν» καθεμιά με τη γειτονική της, ενώ στην κανονική, μη χαοτική περίπτωση είναι ασυσχέτιστες και «δεν μιλούν μεταξύ τους». Στην χαοτική περίπτωση υπακούουν σε στατιστική τύπου Wigner, που τα κύρια χαρακτηριστικά της είναι η άπωση μεταξύ των ενεργειών και η φασματική ακαμψία. Με μια έννοια, το κβαντικό χαοτικό φάσμα είναι πιο τακτοποιημένο από το κανονικό! Τα ίχνη του κβαντικού χάους εμφανίζονται και στις κυματοσυναρτήσεις που εκφράζουν την πιθανότητα εύρεσης του σωματίου σε κάθε σημείο του χώρου. Το κβαντικό χάος είναι αποτυπωμένο σε χαρακτηριστικές ουλές στην κατανομή της πιθανότητας, παρά την ύπαρξη ομαλότητας που επιβάλλει η παρουσία κυματικής μορφής της κβαντικής εξίσωσης Schrödinger.

Τα κύρια χαρακτηριστικά του κβαντικού χάους τα επιδεικνύουν τα χαοτικά μπιλιάρδα, αλλά και μεσοσκοπικά μεταλλικά συστήματα παρουσία τυχειότητας. Ένα αινιγματικό μαθηματικό αντικείμενο που σχετίζεται με το κβαντικό χάος είναι η συνάρτηση $\zeta(s)$ του Riemann. Η συνάρτηση αυτή έχει ρίζες που καθορίζουν τις διακυμάνσεις στην πυκνότητα των πρώτων αριθμών (π.χ. 2, 3, 5, 7, ... —που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα). Έχει προταθεί με την εικασία του Riemann ότι όλες οι μη τετριμμένες ρίζες της συνάρτησης $\zeta(s)$ έχουν πραγματικό μέρος $1/2$, ώστε $\zeta(1/2+iE_j) = 0$, όπου οι ρίζες E_j είναι πραγματικές. Η υπόθεση έχει επαληθευτεί αριθμητικά με υπολογισμούς περίπου μερικών δισεκατομμυρίων ριζών. Εάν δείχτεί ότι οι E_j είναι ενέργειες ενός κβαντικού συστήματος, αποδεικνύεται αυτόματα η εικασία του Riemann που αφορά τους πρώτους αριθμούς. Αριθμητικοί υπολογισμοί δείχνουν πως οι E_j εμφανίζουν όλες τις ιδιότητες ενός κβαντικού χαοτικού συστήματος, όπως άπωση των κοντινότερων γειτονικών τιμών και φασματική ακαμψία. Επομένως η μαθηματική συνάρτηση $\zeta(s)$ αποτελεί ένα βασικό παράδειγμα κβαντικού χάους.

6. Επίλογος

Το χάος δεν εμφανίζεται μόνο στην κλασική αλλά και στην κβαντική Φυσική, που περιγράφει το μικρόκοσμο. Ιδιαίτερα σημαντικό είναι το όριο κλασικής-κβαντικής Φυσικής που καθορίζεται από τη σταθερά του Planck h . Το κβαντικό χάος, σε αυτό το οιονεί-κλασικό όριο, εμφανίζεται στις υψηλά διεγερμένες καταστάσεις των μορίων αλλά και στα ενεργειακά φάσματα των μεσοσκοπικών συστημάτων. Η χαοτική συμπεριφορά των κβαντικών συστημάτων συνδέεται με την παρουσία κανονικότητας στη στατιστική περιγραφή των ενεργειακών φασμάτων και την εμφάνιση ουλών στις αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας (κυματοσυναρτήσεις). Στην περιγραφή υπάρχει συμπαντικότητα, που δηλώνει παρόμοια συμπεριφορά σε τελείως διαφορετικά κβαντικά συστήματα, αφού το ενεργειακό φάσμα ταυτίζεται με μεγάλη ακρίβεια με τις λύσεις τυχαίων μητρών στη μαθηματική περιγραφή της στατιστικής Wigner. Το χάος έχει ιδιαίτερη βαρύτητα στην κατανόηση πολύπλοκων συστημάτων και ηλεκτρονικών διατάξεων που συνεχώς μικραίνουν, φτάνοντας ακόμη και μέχρι το μοριακό επίπεδο, με αναπόφευκτη την παρουσία της κβαντικής περιγραφής. Επομένως, κβαντικά χαοτικά φαινόμενα είναι πλέον ορατά στο μικροσκόπιο σε νανοκλίμακες.

Αναφορές

1. Stewart I., *Παίζει ο Θεός ζάρια; Η Επιστήμη του Χάους*, Εκδόσεις Κωσταράκη, Αθήνα 1990.
2. Mandelbrot B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Co, N. York 1983.
3. Berry M.V., *Dynamical Chaos*, Princeton University Press, 1987.
4. Ευαγγέλου Σ.Ν., *Στατιστική Φυσική*, Τόμοι I και II, 1993, 1994.