

## Σύγχρονες τάσεις στη Μαθηματική Εκπαίδευση

Στό άρθρο αυτό επιχειρείται αναφορά στις τάσεις, που επικράτησαν τα τελευταία 30-40 χρόνια, στο χώρο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Το θέμα βέβαια αυτό είναι τεράστιο, γι' αυτό και απλά τίγονται ορισμένα καίρια, κατά την άποψή μας, σημεία, που οδηγούν σε κάποια συμπεράσματα, χρήσιμα ίσως για τον παραπέρα προβληματισμό μας.

### **1. Επιδράσεις των φιλοσοφιών αντιμετώπισης των Μαθηματικών στο χώρο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης**

Από τις αρχές του αιώνα μας υπάρχει μια διαρκής αντιπαράθεση μεταξύ δύο φιλοσοφιών αντιμετώπισης των μαθηματικών: της φορμαλιστικής-παραγωγικής, όπου η έμφαση δίνεται στο περιεχόμενο και της ευρετικής-διαισθητικής, όπου η προσοχή στρέφεται προς τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Σύμφωνα μάλιστα με τον Verstappen<sup>1</sup> η αντιπαράθεση αυτή εμφανίζεται από τις απαρχές των μαθηματικών με τη μορφή μιας ταλάντωσης, η περίοδος της οποίας είναι περίπου 50 έτη. Αν αυτό αληθεύει, σημαίνει ότι κάθε περίπου 50 χρόνια οι αντιλήψεις στη μαθηματική εκπαίδευση υφίστανται ριζικές αλλαγές. Στο ίδιο συμπέρασμα πάντως καταλήγει και ο Galbraith<sup>2</sup> μέσα από τη μελέτη ενός διαγράμματος, που οφείλεται στον Shirley και αναπαριστάει μια παράλληλη πορεία μεταξύ των μεταβολών των οικονομικών συνθηκών και των αλλαγών, που εμφανίζονται στα συστήματα μαθηματικής εκπαίδευσης των προηγμένων δυτικών χωρών, με την πάροδο του χρόνου.

Οι κοινωνικοοικονομικές συνθήκες, που δημιουργήθηκαν στις χώρες αυτές μετά τη λήξη του Β' παγκόσμιου πολέμου, έστρεψαν την προσοχή των ειδικών της εκπαίδευσης στην προσπάθεια ώστε, τα μαθηματικά ως αντικείμενο διδασκαλίας να έλθουν σε αρμονία με τα μαθηματικά ως επιστήμη, όπως αυτή διαμορφώθηκε κατά το τελευταίο τέταρτο του 19ου αιώνα, με συνέπεια τη δημιουργία ενός διαρκώς διευρυνόμενου χάσματος μεταξύ των σχολικών μαθηματικών (η ύλη των οποίων είχε παραμείνει αμετάβλητη για μισό αιώνα: Ευκλείδεια Γεωμετρία, Στοιχειώδης Αριθμητική και Άλγεβρα, Τριγωνομετρία) και των μοντέρνων μαθηματικών θεωριών της εποχής εκείνης. Μια μεγάλη μάλιστα μερίδα από αυτούς πίστευε ότι έπρεπε να γίνουν γρήγορα ριζοσπαστικές αλλαγές. Σε μια τέτοια πρόσφο-

---

Ο Μ. Βόσκογλου είναι Δρ. Μαθηματικός, καθηγητής-δ/ντής της Σχολής Διοίκησης και Οικονομίας του Τ.Ε.Ι. Μεσολογίου

ρη για αλλαγές ατμόσφαιρα, αποφασιστική ώθηση έδωσε η εκτόξευση του Sputnik από τη Σοβιετική Ένωση τον Οκτώβριο του 1957. Το μεγάλο αυτό επίτευγμα ξάφνιασε τις Η.Π.Α. και τη Δυτική Ευρώπη και αποτέλεσε το έναυσμα για έντονες προσπάθειες για τη βελτίωση της επιστημονικής εκπαίδευσης στις χώρες αυτές.

Ένα από τα βασικά αποτελέσματα των προσπαθειών αυτών ήταν, παρά τις ισχυρές αντιρρήσεις που υπήρξαν από πολύ καλούς και γνωστούς μαθηματικούς (R. Thom, A. Renouz, J. Adda, M. Kline κ.α.) η εισαγωγή, από τις αρχές της δεκαετίας του 1960, των «Νέων Μαθηματικών» στα σχολικά προγράμματα των χωρών αυτών και αργότερα και των περισσότερων άλλων χωρών του κόσμου (π.χ. δεξ [3], παραγρ. 6).

Ωστόσο, από τα αποτελέσματα των μελετών που άρχισαν να γίνονται από τα μέσα της δεκαετίας του 1960 με βάση όσα στοιχεία ήταν διαθέσιμα από την πρακτική εφαρμογή της διδασκαλίας των «Νέων Μαθηματικών», έγινε σιγά-σιγά αντιληπτό ότι τα νέα αυτά προγράμματα δεν λειτουργούσαν καθόλου ικανοποιητικά (π.χ. δεξ το [4]).

Ειδικότερα, η απόπειρα διδασκαλίας των θεμελιωμένων γενικεύσεων (θεωρία συνόλων, αλγεβρικών δομών κ.λπ.) πριν από την παρουσίαση του υλικού που γενικεύεται σημείωσε παταγώδη αποτυχία, αφού είχε ως συνέπεια τη στέρωση της χαράς της επαναανακάλυψης από τους μαθητές και την απογύμνωση της ύλης από παραδείγματα και εφαρμογές, που συνδέουν τα μαθηματικά με την καθημερινή ζωή και τις άλλες επιστήμες, που τα χρησιμοποιούν ως εργαλείο, οδηγώντας τη δημιουργία πολλών νέων μαθηματικών προβλημάτων και θεωριών.

Το τι ακριβώς δεν πήγε καλά το έχει ίσως διατυπώσει πολύ καθαρά ο διαπρεπής μαθηματικός R. Thom: «Δεν μαθαίνει να μιλά πιο γρήγορα ένα παιδί, αν διδαχθεί πρώτα τους γενικούς κανόνες της Γραμματικής».

Πέρα όμως από τον τρόπο παρουσίασης της ύλης, τα αίτια της αποτυχίας των «Νέων Μαθηματικών» εστιάζονται και σε αρκετούς άλλους παράγοντες, όπως στην έλλειψη της σωστής προετοιμασίας αυτών που ανέλαβαν να τα διδάξουν, στο γεγονός ότι τα νέα αναλυτικά προγράμματα δημιουργήθηκαν και τα νέα βιβλία γράφτηκαν κυρίως από Πανεπιστημιακούς δάσκαλους, που, παρά την άρτια επιστημονική τους κατάσταση, ήταν από χρόνια αποξενωμένοι από την ψυχολογία των μαθητών και τις βασικές παιδαγωγικές αρχές, στην υπερβολική συμπύκνωση της ύλης, αφού διατηρήθηκε σ' αυτή ένα μεγάλο μέρος από τα παραδοσιακά μαθηματικά κ.λπ.

Ανεξάρτητα πάντως από τα αίτια που την προκάλεσαν, η αποτυχία αυτή ήλθε να δικαιώσει όσους είχαν αντιρρήσεις για τη βιαστική και χωρίς τον κατάλληλο προγραμματισμό εισαγωγή των «Νέων Μαθηματικών» στη σχολική εκπαίδευση.

Ως φυσική συνέπεια επακολούθησε, από τα μέσα της δεκαετίας του 1970, μια νέα κίνηση στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, που αποδόθηκε με το μάλλον ασαφές σύνθημα «πίσω στα βασικά» (back to the basics). Πράγματι, η κεντρική ιδέα της κίνησης αυτής δεν ήταν η άνευ όρων επιστροφή στα παλιά μαθηματικά, αλλά η προσπάθεια για την πλαισίωση και το «δέσιμο» των μοντέρνων με τα παραδοσιακά μαθηματικά. Στα πλαίσια της προσπάθειας αυτής άρχισε να δίνεται και πάλι σταδιακά κάποια προσοχή στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η οποία, με την εισαγωγή των μοντέρνων μαθηματικών, είχε παραμεληθεί σημαντικά.

Στη δική μας χώρα, η «υιοθέτηση» των «Νέων Μαθηματικών» έγινε με καθυστέρηση φάσης περίπου 15 χρόνων, αλλά με τον ενθουσιασμό κάποιου που πιστεύει πως μόλις ανακάλυψε κάτι σημαντικό. Και αυτό παρόλο που, οι περισσότεροι από αυτούς που άνοιξαν το μονοπάτι, απογοητεύτηκαν από το που οδηγούσε και είχαν ήδη αλλάξει πορεία.

Έτσι, η διδασκαλία των μαθηματικών στηρίχτηκε πάνω στη θεωρία των συνόλων και των αλγεβρικών δομών, δόθηκε έμφαση στη μαθηματική λογική και περιορίστηκε σημαντικά η διδασκαλία της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Με ανάλογη καθυστέρηση πραγματοποιήθηκε, στα τέλη της δεκαετίας του 1980, η αναμόρφωση του Αναλυτικού Προγράμματος των μαθηματικών του Γυμνασίου και του Λυκείου και η έκδοση νέων σχολικών βιβλίων που δίδονται μέχρι σήμερα στους μαθητές. Τα κύρια χαρακτηριστικά της αλλαγής που επιχειρήθηκε ήταν η αφαίρεση της θεωρίας των Συνόλων από την ύλη του Γυμνασίου και των Αλγεβρικών Δομών από την ύλη του Λυκείου, η προσθήκη κάποιων κεφαλαίων από τη Στατιστική και τη θεωρία Πιθανοτήτων, η προσπάθεια σύνδεσης ορισμένων εννοιών με πρακτικές εφαρμογές από την καθημερινή ζωή και η ενσωμάτωση ιστορικών σημειωμάτων σε ορισμένα κεφάλαια της διδακτέας ύλης.

Όμως, παρά τις βελτιώσεις που πραγματοποιήθηκαν, μένουν ακόμη πολλά να γίνουν, αφού δεν είναι δυνατό να οικοδομούμε το εκπαιδευτικό μας μαθηματικό σύστημα κάμνοντας απλά και μόνο «ενέσεις» από τα παραδοσιακά στα νέα μαθηματικά ή και καταργώντας τελείως από τη διδακτέα ύλη κάποιες ενότητες, χωρίς προηγουμένως να προβληματιστούμε ιδιαίτερα για τα αίτια της αποτυχίας της μέχρι τώρα διδασκαλίας τους.

Αντίθετα, απαιτείται μια νέα οργάνωση της ύλης αλλά και της διδασκαλίας των σχολικών μαθηματικών που να βασίζεται στις σύγχρονες εξελίξεις στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, τις οποίες θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε παρακάτω.

## **2. Λύση προβλημάτων και σχήματα γνώσης**

Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1980 στη χρήση του προβλήματος ως εργαλείου, αλλά και κινήτρου, για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία και κατανόηση των μαθηματικών, με δύο κατευθύνσεις: Τη διαδικασία «Πρόβλημα-Λύση» (Problem-Solving), όπου η προσοχή στρέφεται στη χρήση των καταλλήλων ευρετικών στρατηγικών για την επίλυση καθαρών, κυρίως, μαθηματικών προβλημάτων (π.χ. δεξ [5] και τη «Μαθηματική Μοντελοποίηση και Εφαρμογές» (Mathematical Modelling and Applications), μια διαδικασία που χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων, που προκύπτουν από αντίστοιχα προβλήματα του πραγματικού κόσμου (π.χ. δεξ [6], παραγρ. 2).

Υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο ευρετική-στρατηγική (heuristic) εννοούμε μια γενική μέθοδο ή τεχνική, που βοηθά το λύτη να κατανοήσει καλύτερα ή να επιλύσει το πρόβλημά του (π.χ. εξέταση ειδικών περιπτώσεων, θεώρηση παρόμοιων γνωστών προβλημάτων, κατασκευή διαγράμματος, σύνθεση και ανάλυση, αντιθετοαντιστροφή, τέλεια επαγωγή κ.λπ.).

Ο Polya<sup>7</sup> ήταν ο πρώτος που περιέγραψε τις ευρετικές με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να διδαχθούν και έθεσε τις βάσεις για την παραπέρα εξερεύνησή τους, χωρίς όμως να δώσει κατηγορηματικές υποσχέσεις για τα αποτελέσματα αυτής της διδασκαλίας· απλά

υποστήριξε ότι μια καλύτερη κατανόηση των γενικών ευρετικών μέσα από τη διαδικασία Π-Λ (Πρόβλημα-Λύση) μπορεί να ασκήσει μια καλή επίδραση στη διδασκαλία των μαθηματικών. Ξεχωριστή θέση μέσα στη θεωρία του Polya κατέχουν τα γνωστά τρία αξιώματα μάθησης, για τα οποία ο ίδιος λέει ότι η διατύπωση και ο συνδυασμός τους είναι δική του επιλογή, αλλά ότι δεν είναι καθόλου πρωτότυπα, αφού έχουν βγει μέσα από την πείρα των αιώνων, έχουν υποστηριχτεί από μεγάλους διανοούμενους και έχουν προκύψει από την ψυχολογική μελέτη της μάθησης. Τα αξιώματα αυτά είναι η ενεργητική μάθηση (active learning), για την οποία πιστεύει ότι η κατάλληλη μορφή διδασκαλίας, είναι η επαναανακάλυψη βασισμένη στο Σωκρατικό διάλογο, το επιθυμητό κίνητρο (best motivation), δηλαδή η κατάλληλη ατμόσφαιρα (κατάσταση μάθησης), που πρέπει να δημιουργεί ο δάσκαλος, ώστε ο μαθητής να δέχεται τη νέα ύλη με ενδιαφέρον και ευχαρίστηση και τα διαδοχικά στάδια (consecutive phases), που κατά τον Polya πρέπει να είναι η εξερεύνηση (exploration), η διατύπωση (formalization) και η αφομοίωση (assimilation). Ο Hatfield<sup>8</sup> έδωσε ένα χρήσιμο χαρακτηρισμό της διδασκαλίας των μαθηματικών σε σχέση με τη διδασκαλία Π-Λ. Συγκεκριμένα διέκρινε τρεις τύπους διδασκαλίας:

α. Τη διδασκαλία για το Π-Λ, που, δίδοντας έμφαση στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, επικεντρώνεται στην απόκτηση γενικών μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων που είναι χρήσιμες για τη λύση προβλημάτων.

β. Τη διδασκαλία γύρω από το Π-Λ, που επικεντρώνεται στο αν ο δάσκαλος προσφέρει καλά μοντέλα συμπεριφοράς και οδηγεί την προσοχή των μαθητών του σε σωστές πορείες για τη λύση προβλημάτων και

γ. Τη διδασκαλία μέσα από το Π-Λ, που είναι ο τύπος που προτείνει ο Polya και επικεντρώνεται στην παρουσίαση του μαθηματικού περιεχομένου μέσα από κατάλληλα επιλεγμένα προβλήματα που δίδονται για λύση στο μαθητή.

Το έργο του Polya συνέχισαν με εργασίες και ερευνητικές τους μελέτες οι Lucas, Wickengren, Goldberg, Kantowski, Putt και άλλοι, που κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, πολλοί μαθητές μπορούν να μάθουν να χρησιμοποιούν σωστά τις ευρετικές, με αποτέλεσμα μια αξιοσημείωτη βελτίωση της ικανότητάς τους για λύση προβλημάτων (π.χ. δεξ [9]).

Ο Schoenfeld<sup>10</sup>, βελτιώνοντας τη θεωρία του Polya, παρουσίασε ένα μοντέλο για τη διαδικασία Π-Λ, που ο ίδιος ονόμασε «expert performance model». Στο μοντέλο αυτό διακρίνονται πέντε στάδια και περιγράφονται αναλυτικά οι ευρετικές που συνήθως χρησιμοποιούνται σε καθένα από τα στάδια αυτά, τα οποία είναι:

i) Η ανάλυση του προβλήματος (κατανόηση της εκφώνησης, απλοποίηση και αναμόρφωση του προβλήματος ώστε να επιδέχεται μαθηματική επεξεργασία).

ii) Ο σχεδιασμός (design) της λύσης, όπου, οδεύοντας από το γενικό (global) προς το ειδικό, θεμελιώνονται τα επιχειρήματα που οδηγούν στη λύση του προβλήματος.

iii) Η εξερεύνηση (exploration) της λύσης που αποτελεί την ευρετική «καρδιά» της όλης διαδικασίας (ψάχνοντας για ισοδύναμα προβλήματα και, αν χρειαστεί, ανάλογα με τη δυσκολία του τεθέντος προβλήματος, λιγότερο ή περισσότερο τροποποιημένα προβλήματα, που μπορούν να δώσουν ιδέες για την επίλυση του αρχικού προβλήματος).

iv) Η εκτέλεση (implementation) βήμα προς βήμα της λύσης.

v) Η επαλήθευση-διερεύνηση (verification) της λύσης, που έγκειται στην εφαρμογή ειδικών και γενικών tests, τα οποία σε τοπικό μεν επίπεδο μπορούν να πιστοποιήσουν κάποια ανόητα λάθη, σε γενικό δε επίπεδο είναι δυνατό να οδηγήσουν σε εναλλακτικές μεθόδους λύσης, να συνδέσουν το υπό μελέτη πρόβλημα με άλλες ήδη γνωστές περιπτώσεις και πολύ πιθανό να αποσαφηνίσουν μια γενική τεχνική (ή αλγόριθμο) που μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση μιας κατηγορίας παρόμοιων προβλημάτων.

Ο Schoenfeld συμβουλεύει το λύτη να προσπαθεί να ανακαλύψει μέσα στη διατύπωση των προβλημάτων τα κατάλληλα κλειδιά (clues), δηλαδή χαρακτηριστικές λέξεις ή εκφράσεις, που θα μπορούσαν να τον οδηγήσουν στη χρήση της κατάλληλης ευρετικής για την επίλυσή τους: Π.χ. η λέξη «μοναδικό» πιθανότατα οδηγεί στην επιτυχή χρήση της απαγωγής σε άτοπο, η έκφραση «για κάθε φυσικό αριθμό» στη χρήση της τέλει επαγωγής κ.λπ. Σήμερα αμφισβητείται από πολλούς ερευνητές η αποτελεσματικότητα ή έστω η αναγκαιότητα της συστηματικής διδασκαλίας των ευρετικών για την επίλυση προβλημάτων.

Οι Owen και Sweller<sup>11</sup> αμφιβάλλουν για το κατά πόσο συμβάλλει στο να ξεπεραστούν τα προβλήματα που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια της μεταφοράς της γνώσης (του μετασχηματισμού δηλαδή της προϋπάρχουσας για τη δημιουργία νέας γνώσης). Σύμφωνα με την άποψή τους, η αποτυχία της μεταφοράς είναι περισσότερο πιθανό να οφείλεται στην έλλειψη των κατάλληλων σχημάτων γνώσης και στην ανεπαρκή αυτοματοποίηση των κανόνων (π.χ. πράξεις κλασμάτων ή πολυώνυμων, υπολογισμός παραγώγων και ολοκληρωμάτων κ.λπ.).

Υπενθυμίζουμε ότι κατά τον Anderson<sup>12</sup> σχήμα γνώσης (schema) είναι μια αφηρημένη γνωστική δομή, η οποία δίδει πληροφορίες για πολλές παρόμοιες περιπτώσεις και τις σχέσεις μεταξύ αυτών. Κατά συνέπεια, το σχήμα προσδιορίζει λεπτομερώς την κατηγορία στην οποία ανήκει ένα πρόβλημα, καθώς και τις πλέον κατάλληλες κινήσεις για την επίλυση των προβλημάτων της κατηγορίας αυτής (π.χ. γεωμετρικός τόπος, υπολογισμός άκρων τιμών, υπολογισμός εμβαδού κ.λπ.).

Αντίθετα, ο Lawson<sup>13</sup>, αν και δέχεται ότι η ποσότητα του χρόνου και της προσπάθειας που αφιερώνονται για τη διδασκαλία των ευρετικών είναι ίσως υπερβολική, πιστεύει ότι η προσοχή που δίδεται σ' αυτές κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να συνεχιστεί, αφού η αποτελεσματική χρησιμοποίησή τους οδηγεί σε επιτυχή μεταφορά της γνώσης, εφόσον βέβαια ο μαθητής έχει αποκτήσει ήδη μια καλά οργανωμένη υποδομή γνώσης. Την άποψή του αυτή στηρίζει στη θεωρία του Voss<sup>14</sup>, σύμφωνα με την οποία η μάθηση είναι στην ουσία μια συνεχής διαδικασία επίλυσης προβλημάτων στα οποία τα δεδομένα αντιπροσωπεύονται από την προϋπάρχουσα γνώση και η λύση εμφανίζεται όταν τα δεδομένα αυτά ερμηνευτούν κατάλληλα. Προσωπικά, αν και συμφωνούμε ότι η έμφαση που δόθηκε κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1980 στη διδασκαλία των ευρετικών ήταν υπερβολική, πιστεύουμε ότι ο σύγχρονος δάσκαλος των μαθηματικών πρέπει να είναι απόλυτα ενημερωμένος πάνω στα θέματα αυτά.

Είναι χρήσιμο να γίνεται η παρουσίαση των ευρετικών μέσα στην τάξη, αλλά πρακτικά, μέσα από παραδείγματα, χωρίς ποτέ να μετατρέπεται σε αυτοσκοπό. Τα παραδείγματα αυτά μπορούν να αντληθούν λίγο πολύ μέσα από όλους τους κλάδους των σχολικών μαθηματικών, αλλά ιδιαίτερα από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, που τόσο έχει παραμεληθεί τελευταία.

Δεν μπορούμε να συνηγορήσουμε με την άποψη των Owen και Sweller ότι η χρήση αναλυτικών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων, έστω κι αν επιβάλλει ένα πρόσθετο βαρύνον φορτίο στο λύτη, παρεμποδίζει την κατάκτηση των σχημάτων γνώσης. Η γνώση δεν κατακτάται μόνο παθητικά μέσα από τη μελέτη, υποδειγματικά έστω, λυμένων ασκήσεων και προβλημάτων και στη συνέχεια εφαρμογή παρόμοιων λύσεων σε ομοειδή προβλήματα, όπως αυτοί προτείνουν, αλλά και με την εντατική προσπάθεια και σκέψη, μέσα από την ανάλυση διάφορων καταστάσεων και ακόμη από τα ίδια μας τα λάθη. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι το κύριο βάρος πρέπει να αφιερώνεται μόνο στην επίλυση ενός μεγάλου αριθμού προβλημάτων (όπως π.χ. παλαιότερα με τα προβλήματα γεωμετρικών τόπων και σύνθετων κατασκευών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας), πράγμα που όντως μπορεί να επιφέρει έναν αποπροσανατολισμό στη διαδικασία της μάθησης.

Τέλος, επισημιάνουμε τη σπουδαιότητα της μεθόδου της επαναανακάλυψης για την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης των μαθητών. Η μέθοδος όμως αυτή είναι χρονοβόρα και απαιτεί ιδιαίτερες ικανότητες από την πλευρά του διδάσκοντα, γι' αυτό και πρέπει να εφαρμόζεται με προσοχή σε επιλεγμένα γνωστικά αντικείμενα. Ο ισχυρισμός του Polya ότι κάθε νέα γνώση στα μαθηματικά μπορεί να δοθεί μέσα από ένα κατάλληλα επιλεγμένο πρόβλημα είναι μεν σωστός, αυτό όμως δεν σημαίνει, ούτε ο ίδιος ισχυρίζεται, ότι έτσι πρέπει να γίνεται πάντοτε.

Στη χώρα μας προσπάθειες για τη συστηματική διδασκαλία των ευρετικών έχουν γίνει μόνο σε πειραματικό επίπεδο. Περιστασιακά, κάποιοι από τους διδάσκοντες περιγράφουν στους μαθητές τους κάποιες ευρετικές που χρησιμοποιούνται συχνά κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, ή απόδειξης θεωρημάτων, δεν υπάρχουν όμως ειδικά κεφάλαια στα σχολικά βιβλία, ούτε οδηγίες προς τους διδάσκοντες (από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο) για την παρουσίαση τέτοιων στρατηγικών.

### **3. Μαθηματική μοντελοποίηση και εφαρμογές**

Ένα πρότυπο (model) ορίζεται ως μια απλοποιημένη αναπαράσταση των βασικών χαρακτηριστικών ενός συστήματος του πραγματικού κόσμου και συνήθως χρησιμοποιείται προκειμένου να αποφευχθεί ο πειραματισμός πάνω στο πραγματικό σύστημα, ο οποίος τις περισσότερες φορές είναι δυσχερής και πολυδάπανος, σε ορισμένες δε περιπτώσεις και ουσιαστικά αδύνατος (π.χ. βιολογικά συστήματα).

Έχουν επινοηθεί διάφορα είδη προτύπων (εικονικά, αναλογικά, μαθηματικά, προσομοίωσης, ευριστικά), τα οποία χρησιμοποιούνται ανάλογα με τη μορφή του πραγματικού συστήματος και τη δυσκολία του υπό μελέτη προβλήματος, που αφορά το παραπάνω σύστημα (π.χ. δεξ [15], Κεφ. 1).

Ειδικότερα, τα μαθηματικά ή συμβολικά πρότυπα χρησιμοποιούν ένα σύνολο μαθηματικών συμβόλων και συναρτήσεων για την αναπαράσταση της δομής και λειτουργίας του πραγματικού συστήματος, επιδέχονται την εφαρμογή μαθηματικών μεθόδων για την επίλυση τους και υπερέχουν από τα άλλα είδη προτύπων, επειδή δίνουν λύσεις ακριβείς και γενικές.

Παρεμφερτικά αναφέρουμε ότι, για την αναπαράσταση πολυπλόκων συστημάτων που εί-

να ιδιαίτερα δύσκολο ή και αδύνατο να περιγραφούν με τη βοήθεια μαθηματικών προτύπων (π.χ. προβλήματα των ανθρωπιστικών επιστημών, όπως ψυχολογία, κοινωνιολογία κ.λπ., στα οποία υπεισέρχεται ο παράγων άνθρωπος, ο τρόπος σκέψης και λήψης αποφάσεων του οποίου είναι πολύπλοκος), χρησιμοποιούνται πρότυπα προσομοίωσης (simulation). Με τα πρότυπα αυτά η αναπαράσταση του συστήματος γίνεται συνήθως με τη βοήθεια H/Y.

Μέχρι τη λήξη της δεκαετίας του '70 η μοντελοποίηση ήταν ένα εργαλείο κυρίως στα χέρια αυτών που δούλευαν με τα εφαρμοσμένα μαθηματικά στη βιομηχανία, τη φυσική, την οικονομία κ.λπ. Όμως, η αποτυχία των «Νέων Μαθηματικών» να δώσουν στο μαθητή τη δυνατότητα και κατά συνέπεια να αυξήσουν την ικανότητά του να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά για την επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής, έστρεψε σταδιακά το ενδιαφέρον των ειδικών της μαθηματικής εκπαίδευσης στη χρησιμοποίηση της μαθηματικής μοντελοποίησης ως εργαλείου για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία των μαθηματικών.

Σύμφωνα με τον Pollak<sup>16</sup>, που είναι ένας από τους πρώτους που συνέβαλαν αποφασιστικά προς την κατεύθυνση αυτή, για την αντιμετώπιση ενός προβλήματος του πραγματικού κόσμου, αφού το διαμορφώσουμε κατάλληλα ώστε να επιδέχεται μαθηματική επεξεργασία, μεταφερόμαστε στο «σύμπαν» των μαθηματικών. Από εκεί, αφού εφαρμόσουμε τις κατάλληλες μεθόδους για την επίλυσή του, επιστρέφουμε στον πραγματικό κόσμο, ερμηνεύοντας τα μαθηματικά αποτελέσματα και ελέγχοντας το κατά πόσο αυτά αποδίδουν σωστά την πραγματικότητα.

Μάλιστα, αν τα αποτελέσματα αυτά στην πράξη δεν είναι ικανοποιητικά, επαναλαμβάνουμε τον ίδιο κύκλο που είναι γνωστός ως κύκλος της μοντελοποίησης (circle of modeling), από την αρχή, όσες φορές χρειαστεί.

Από τότε που ο Pollak παρουσίασε τον κύκλο της μοντελοποίησης, μεγάλη προσπάθεια έχει καταβληθεί από ερευνητές και παιδαγωγούς για τη λεπτομερειακή ανάλυση της μοντελοποίησης ως μεθόδου διδασκαλίας των μαθηματικών (π.χ. δεξ [17] και [18]).

Μέσα από την ανάλυση αυτή προκύπτει ότι τα βασικά στάδια που ακολουθούνται κατά την εφαρμογή αυτής της μεθόδου είναι:

α. Η ανάλυση του υπό μελέτη προβλήματος (κατανόηση της εκφώνησης και αναγνώριση των περιορισμών και απαιτήσεων του πραγματικού συστήματος).

β. Η κατασκευή του μαθηματικού προτύπου, γνωστή ως στάδιο της μαθηματικοποίησης (mathematizing).

γ. Η επίλυση του προτύπου.

δ. Ο έλεγχος (δοκιμή) της αξιοπιστίας του προτύπου στο πραγματικό σύστημα (validation of the model), όπου εξετάζεται αν η ευρεθείσα λύση ικανοποιεί τους φυσικούς περιορισμούς του συστήματος, αν επαληθεύεται από γνωστές ειδικές περιπτώσεις, αν είναι συμβατή με τα τυχόν υπάρχοντα εμπειρικά δεδομένα από την προγενέστερη λειτουργία του συστήματος κ.λπ. και

ε. Η εφαρμογή (implementation) της λύσης στο πραγματικό σύστημα όπου δίδεται και η τελική απάντηση για το τεθέν πρόβλημα.

Μεταξύ των σταδίων αυτών η έμφαση δίνεται στο στάδιο της μαθηματικοποίησης. Πράγματι, το στάδιο αυτό είναι το πιο κρίσιμο της όλης διαδικασίας και συγχρόνως το πιο δύσκολο για το μαθητή, αφού απαιτεί μια ιδιαίτερα αυξημένη αφαιρετική ικανότητα. Και

αυτό επειδή η επιτυχής κατασκευή του πρότυπου προϋποθέτει την αναγωγή του προβλήματος σε μορφή τέτοια που να είναι κατάλληλη για μαθηματική επεξεργασία (formulation of the problem).

Προσωπικά πιστεύουμε ότι η μαθηματική μοντελοποίηση αποτελεί πράγματι ένα ισχυρό διδακτικό εργαλείο. Μέσα από τη διαδικασία αυτή, αν χρησιμοποιηθεί σωστά από το διδάσκοντα, ο μαθητής μπορεί να σχηματίσει μια ισορροπημένη άποψη για τα μαθηματικά, αντιμετωπίζοντας αποτελεσματικά τη φαινομενική αντίθεση μεταξύ του «μαθαίνω μαθηματικά» και «μαθαίνω να εφαρμόζω τα μαθηματικά». Πολλές φορές μάλιστα, η παρουσίαση μιας νέας μαθηματικής έννοιας μέσα από ένα πρόβλημα της καθημερινής μας ζωής μπορεί να αποτελέσει για το μαθητή το επιθυμητό κίνητρο μάθησης (δες παραγρ. 2).

Προσοχή όμως! Η μοντελοποίηση δεν πρέπει να θεωρηθεί ως γενική μέθοδος διδασκαλίας των μαθηματικών, αφού μια τέτοια θεώρηση μπορεί να οδηγήσει σε εξεζητημένες καταστάσεις όπου περισσότερο βάρος θα δίνεται στην αναζήτηση της κατάλληλης εφαρμογής, παρά στην εμπέδωση της νέας μαθηματικής γνώσης!

Στη χώρα μας, όπως προαναφέραμε και στην παράγραφο 1, έχει γίνει μια προσπάθεια, με την έκδοση των τελευταίων σχολικών βιβλίων, σύνδεσης ορισμένων εννοιών της διδασκαλίας ύλης (ιδίως στο Γυμνάσιο) με πρακτικές εφαρμογές της καθημερινής μας ζωής, όχι όμως, κατά την άποψή μας, στο βαθμό και την έκταση που πρέπει και μπορεί να γίνει.

#### **4. Η εισαγωγή της πληροφορικής στη βασική εκπαίδευση**

Θα κλείσουμε το άρθρο αυτό με μια σύντομη αναφορά σ' ένα θέμα, για το οποίο πολύς λόγος γίνεται τελευταία και στη χώρα μας, την εισαγωγή δηλαδή της πληροφορικής στη βασική εκπαίδευση.

Είναι γνωστό ότι στο θέμα αυτό έχουμε μείνει αρκετά πίσω σε σχέση με πολλές ευρωπαϊκές χώρες. Ωστόσο αυτό δεν σημαίνει ότι, κάτω από το άγχος αυτής της καθυστέρησης, πρέπει να προχωρήσουμε με βήματα σπασμωδικά, αφού κάποιες λαθεμένες επιλογές μπορεί να μας οδηγήσουν σε αποτελέσματα αντίθετα από τα αναμενόμενα, όπως συνέβη με την εισαγωγή των «Νέων Μαθηματικών» και όπως συχνά δυστυχώς συμβαίνει με τις καινοτομίες στην εκπαίδευση.

Ας πάρουμε όμως τα πράγματα με τη σειρά. Καταρχήν, χρειάζεται να μάθει σήμερα ο μαθητής προγραμματισμό, αφού τα έτοιμα προγράμματα που κυκλοφορούν στο εμπόριο σε αφθονία και διάφορες ποικιλίες για κάθε πρακτική εφαρμογή, φαίνεται να το καθιστούν περιττό; Πράγματι μια πρακτική εξάσκηση λίγων ημερών αρκεί για να μάθει κάποιος να χειρίζεται με άνεση τα μηχανήματα, αφού όλα τα άλλα μας τα δίδουν έτοιμα.

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δεν είναι δύσκολη. Και μόνο η απομυθοποίηση των Η/Υ που επιτυγχάνεται με την εισαγωγή της πληροφορικής στο σχολείο, θα κάνει τους σημερινούς μαθητές και αυριανούς πολίτες να πορεύονται στη ζωή τους χωρίς να βλέπουν τους Η/Υ με δέος, ως κάτι το μαγικό και απρόσιτο, αλλά ως κάτι που σε γενικές γραμμές κατανοούν πως λειτουργεί. Και βέβαια ο μελλοντικός ερευνητής λόγω των ιδιαιτεροτήτων που παρουσιάζονται στους διάφορους τομείς της έρευνας, θα χρειάζεται πάντοτε τη μετα-



τροπή ή βελτίωση των υπάρχοντων, αλλά και την κατασκευή νέων προγραμμάτων και, το κυριότερο, θα πρέπει να είναι σε θέση να τα φτιάχνει ή έστω να δίνει τις γενικές γραμμές της κατασκευής τους, ο ίδιος.

Ας έλθουμε τώρα στους κινδύνους που ελοχεύουν από την άμετρη χρήση των Η/Υ στην Εκπαίδευση. Σήμερα έχουμε τα μικρά κομπιουτεράκια (calculators) με τα οποία κάνουμε αμέσως κάθε είδους αριθμητικές πράξεις. Ακόμη κυκλοφορούν προγράμματα Η/Υ, που εκτελούν ταχύτατα όλες τις αλγεβρικές πράξεις αλλά και τον υπολογισμό ορίων, παραγώγων, ολοκληρωμάτων κ.λπ. Και ακόμη περισσότερο κυκλοφορούν πακέτα προγραμμάτων με τα οποία ο μαθητής μπορεί να παρακολουθήσει την τυπική απόδειξη ενός θεωρήματος ή τη λύση ενός προβλήματος στον Η/Υ και μάλιστα με διάφορους εναλλακτικούς τρόπους (αν υπάρχουν). Ιδιαίτερα αυτό συμβαίνει στη γεωμετρία, χάρη στις μεγάλες δυνατότητες των σύγχρονων Η/Υ για γραφικά. Ωστόσο, όπως επισημαίνουν ερευνητές και παιδαγωγοί (π.χ. δεξ [19]), όλα τα παραπάνω δεν πρέπει με κανένα τρόπο να μας οδηγήσουν στο συμπέρασμα ότι πρέπει πλέον να σταματήσει η εξάσκηση των μαθητών στην εκτέλεση πράξεων (στο λογισμό στην άλγεβρα και στην ανάλυση) καθώς και στην αποδεικτική διαδικασία (σε φυσική γλώσσα).

Πράγματι, αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, οι αυριανοί πολίτες και επιστήμονες θα έχαναν σιγά-σιγά σ' ένα βαθμό την αίσθηση των αριθμών και των συμβόλων, καθώς και την εφευρετικότητα και επινοητικότητα του νου και θα εδημιουργείτο μια εξάρτηση του ανθρώπου από τις μηχανές.

Κατά συνέπεια, η καθαρή και πειθαρχημένη σκέψη θα πρέπει να παραμείνει και στο μέλλον ο βασικός στόχος της μαθηματικής παιδείας, οι δε Η/Υ να χρησιμοποιηθούν παράλληλα στο αναλυτικό πρόγραμμα, ως εργαλείο, που αναμφίβολα βοηθά στην ανάπτυξη της πειθαρχημένης σκέψης.

Από όσα αναφέραμε παραπάνω, προκύπτει ότι κεντρικό ρόλο στο σχεδιασμό ενός πλαισίου για την εισαγωγή της πληροφορικής στη βασική εκπαίδευση θα πρέπει να έχει ο τρόπος με τον οποίο θα εκμεταλλευτούμε σωστά τις δυνατότητες, που μας προσφέρει ο Η/Υ, για να διδάξουμε καλύτερα τα μαθηματικά.

Με βάση αυτό το δεδομένο καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι παράλληλα με την εισαγωγή της πληροφορικής στη βασική εκπαίδευση, θα πρέπει να αναπροσαρμόσουμε (χωρίς κατ' ανάγκη και να την επεκτείνουμε), την ύλη των μαθηματικών που θα διδάξουμε έτσι ώστε να αποκτήσει περισσότερο εφαρμοσμένο χαρακτήρα, συμβατό με τη «γλώσσα» και τη λογική των Η/Υ. Με τον τρόπο αυτό θα δώσουμε στο μαθητή ένα «επιθυμητό κίνητρο» (κατά τον Polya) που θα τον ωθήσει στη χρήση των μαθηματικών και του Η/Υ για την επίλυση των προβλημάτων της καθημερινής του ζωής. Στη χώρα μας η εισαγωγή του μαθήματος της Πληροφορικής έχει γίνει, με σημαντική όπως προείπαμε καθυστέρηση, στην Γ' τάξη των περισσότερων Γυμνασίων και σε ορισμένες ειδικότητες στα Τεχνικά και Πολυκλαδικά Λύκεια, προγραμματίζεται δε η εισαγωγή της και στα Γενικά Λύκεια. Η εισαγωγή όμως αυτή έγινε και εξακολουθεί να γίνεται αποσπασματικά και απρογραμματίστα, χωρίς σε καμιά περίπτωση να έχει συνδυαστεί με αναπροσαρμογή της ύλης των μαθηματικών και να χρησιμοποιείται, όπως θα έπρεπε, ως μέσο για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία άλλων μαθημάτων.

### 5. Τελικά Συμπεράσματα

Από όσα αναφέρθηκαν στο άρθρο αυτό προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

— Οι κοινωνικοοικονομικές συνθήκες που δημιουργήθηκαν στις προηγμένες δυτικές χώρες μετά τον Β΄ παγκόσμιο πόλεμο, οδήγησαν από τις αρχές της δεκαετίας του 1960 στην εισαγωγή των «Νέων Μαθηματικών» στη σχολική εκπαίδευση. Η παταγώδης όμως αποτυχία τους, ανεξάρτητα από τους λόγους που την προκάλεσαν ήλθε να δικαιώσει όσους είχαν αντιρρήσεις για τη βιαστική και χωρίς τον κατάλληλο προγραμματισμό εισαγωγή τους.

— Ως φυσική συνέπεια αυτής της αποτυχίας επακολούθησε, από τα μέσα της δεκαετίας του 1970, μια νέα κίνηση στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης που αποδόθηκε με το σύνθημα «πίσω στα βασικά» και χαρακτηρίζεται από την προσπάθεια σύνδεσης των μοντέρων με τα παραδοσιακά μαθηματικά.

— Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1980 δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στη χρήση του προβλήματος ως εργαλείου για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία των μαθηματικών με δύο συνιστώσες: το problem-solving, όπου η προσοχή στρέφεται στη χρήση των κατάλληλων ευρετικών για τη λύση μαθηματικών προβλημάτων και τη μαθηματική μοντελοποίηση, που αναφέρεται στη μαθηματοποίηση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και συνδέει τα μαθηματικά με τις εφαρμογές τους.

— Αν και η έμφαση που δόθηκε στη διδασκαλία των ευρετικών ήταν υπερβολική, πιστεύουμε ότι είναι χρήσιμη και πρέπει να συνεχιστεί η παρουσίασή τους μέσα στην τάξη, με τρόπο όμως πρακτικό, μέσα από παραδείγματα και χωρίς ποτέ νά γίνεται αυτοσκοπός. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι το κύριο βάρος πρέπει να αφιερώνεται μόνο στην επίλυση προβλημάτων αφού η εμπέδωση του γνωστικού αντικειμένου και η ένταξή του στο κατάλληλο κάθε φορά «σχήμα γνώσης» απαιτεί και άλλες, εξίσου σημαντικές, διεργασίες (δες π.χ. θεωρίες των Owen-Sweller, Lawson κ.λπ.).

— Πάντως, ο προσανατολισμός της διδασκαλίας των μαθηματικών μέσα από την επίλυση προβλημάτων (επαναανακάλυψη), αν και είναι μια διαδικασία διδακτικά δύσκολη και χρονοβόρα, πιστεύουμε ότι βοηθά σημαντικά την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης των μαθητών και, κατά συνέπεια, πρέπει να εφαρμόζεται, αλλά με προσοχή, σε επιλεγμένα διδακτικά αντικείμενα.

— Η μαθηματική μοντελοποίηση πιστεύουμε ότι αποτελεί ένα ισχυρό διδακτικό εργαλείο για μια ισορροπημένη σύνδεση των μαθηματικών με τις εφαρμογές τους. Δεν πρέπει όμως να θεωρηθεί ως μια γενική μέθοδος διδασκαλίας των μαθηματικών, αφού μια τέτοια θεώρηση μπορεί να οδηγήσει σε εξεζητημένες καταστάσεις όπου η εφαρμογή θα έχει περισσότερο βάρος από την εμπέδωση της μαθηματικής γνώσης.

— Η εισαγωγή της Πληροφορικής στη σχολική εκπαίδευση, για να μπορέσει να χρησιμοποιηθεί και ως μέσο, όπως κατά την άποψή μας επιβάλλεται για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία και άλλων μαθημάτων, πρέπει να συνδυαστεί με μια αναπροσαρμογή της διδασκτέας ύλης των μαθηματικών, ώστε αυτά να γίνουν περισσότερο συμβατά με τη «γλώσσα» και τη «λογική» των Η/Υ.

— Στην Ελλάδα, μέσα στα πλαίσια της προχειρότητας και της ασυνεννοησίας μεταξύ των πολιτικών παρατάξεων, που διακρίνει την εκπαιδευτική μας πολιτική (αλλά και την

κοινωνία μας γενικότερα), οι αλλαγές στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης επέρχονται, συνήθως απρογραμμάτιστα, με μια διαφορά φάσης 10-15 ετών σε σχέση με τις προηγμένες δυτικές χώρες, χωρίς δυστυχώς να λαμβάνονται υπόψη οι αρνητικές εμπειρίες από την εφαρμογή τους στις χώρες αυτές που θα μπορούσαν να προλάβουν κάποιες λαθεμένες κινήσεις και επιλογές.

### **Παραπομπές — Βιβλιογραφία**

1. Verstappen Piet F.L., 1988, The pupil as a problem solver, in Steiner H.G. and Vermandel A., *Foundations and Methodology of the discipline mathematics education*, Proceedings of the second m.t.e. conference.
2. Galbraith P., 1988, Mathematics Education and the Future: A long wave view of Change, *For the learning of mathematics*, 8 (no 3).
3. Βόσκογλου Μ., 1986, Στοιχεία από τη Διδακτική των Μαθηματικών, *Ευκλείδης Γ΄*, 11, σσ. 34-51.
4. Kline M., 1990, *Γιατί ο Γιάννης δεν μπορεί να κάμει πρόσθεση — Η αποτυχία των μοντέρνων μαθηματικών*, εκδ. Βάνιας, Θεσ/νίκη.
5. Βόσκογλου Μ., 1991, Επιλογή της κατάλληλης ευρετικής στη διαδικασία Πρόβλημα-Λύση, *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 59, σσ. 40-42.
6. Boskoglou M.G., 1995, Measuring mathematical model building abilities, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 26, σσ. 29-35.
7. Polya G., 1963, On learning, teaching and learning teaching, *American Mathematical Monthly*, 70, σσ. 605-619.
8. Hatfield L., 1978, *Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving*, *Mathematical problem solving*, Columbus, Ohio.
9. Wickelgren W.A., 1974, *How to solve problems: Elements of a theory of problems and problem solving*, San Fransisco, W.H. Freeman.
10. Schoenfeld A., 1980, Teaching problem solving skills, *American Math. Monthly*, 87, pp. 794-805.
11. Owen E. and Sweller J., 1989, Should Problem Solving Be Used as a Learning Device in Mathematics?, *J. for Research in Mathematics Education*, 20, pp. 322-328.
12. Anderson R.C., 1984, Some reflections on the acquisition of knowledge, *Educational Researcher*, 13, pp. 5-10.
13. Lawson M., 1990, The Case for Instruction in the Use of General Problem-Solving Strategies in Mathematics Teaching: A Comment on Owen and Sweller, *J. for Research in Mathematics Education*, 21, pp. 403-410.
14. Voss J.F., 1987, Learning and transfer in subject-matter learning: A problem solving model, *Int. J. Educ. Research*, 11, pp. 607-622.
15. Βόσκογλου Μ., 1996, *Μαθηματικά για τον τομέα Διοίκησης και Οικονομίας*, Μακεδονικές Εκδόσεις Β΄, Εκδ., Αθήνα.
16. Pollak H.O., 1979, *The interaction between mathematics and other school subjects*, *New trends in mathematics teaching*, Vol. IV, Unesco, Paris.
17. Niss M., 1987, Applications and modelling in the mathematics curriculum-state and trends, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 18, pp. 487-505.
18. Κλαουδάτος Ν., 1990, Μοντελοποίηση: Ένα ισχυρό διδακτικό εργαλείο, *Ευκλείδης Γ΄*, 28, pp. 42-61.
19. Καλομητσίνη Σ., 1985, Η/Υ στη Μέση Εκπαίδευση, *Πρακτικά 2ου Πανελλ. Συνεδρ. Μαθημ. Παιδείας E.M.E.*, σσ. 162-173.