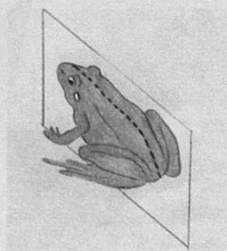
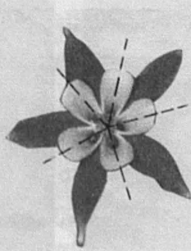
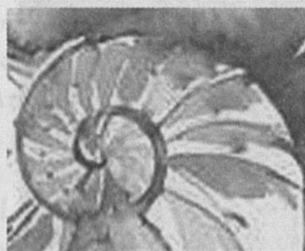
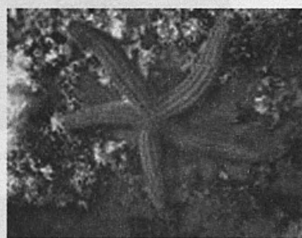
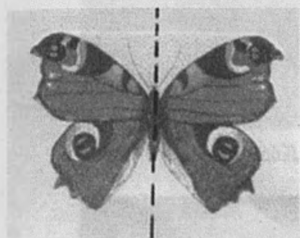


Συμμετρία και αντίθεση στη φύση και τη φυσική



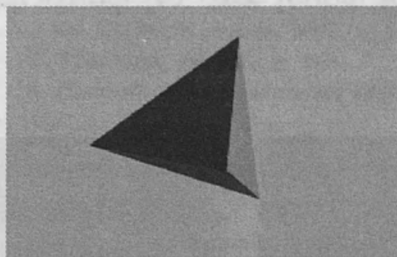
1. Γενική θεώρηση

Η πολυπλοκότητα των διάφορων αντικειμένων που εμφανίζονται στη φύση καθώς και η χρονική εξέλιξη των διαφόρων φυσικών συστημάτων, έμβιων και άβιων, δεν εμπόδισαν τον άνθρωπο να αναζητεί την απλότητα τόσο των φυσικών φαινομένων όσο και των μορφών των διαφόρων αντικειμένων. Η απλότητα αυτή είχε σαν συνέπεια την αναζήτηση συμμετριών.

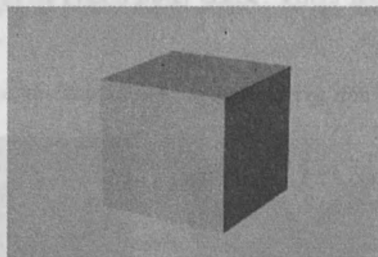
Έτσι, δεν είναι τυχαίο που η συμμετρία έχει επηρεάσει ακόμη και τη φιλοσοφία, με ακραία περίπτωση την πλατωνική. Ο Πλάτων στον *Τίμαιο*, παίρνο-

* Η Antonietta Pellegrini είναι μαθηματικός. Ο Ανδρέας Θεοφίλου είναι διευθυντής ερευνών στο ΕΚΕΦΕ «Δημόκριτος». Ο Michele Barone είναι ερευνητής στο ΕΚΕΦΕ «Δημόκριτος».

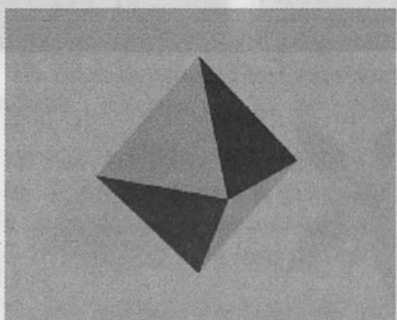
ντας τα κατά Εμπεδοκλή συστατικά του κόσμου (γαία, πυρ, αήρ και ύδωρ), θεώρησε ότι αυτά αποτελούνται από άλλα μικρότερα συστατικά, που είναι τέλεια πολύεδρα, δηλαδή πολύεδρα των οποίων οι κορυφές βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Έτσι, το πυρ αποτελούνταν από τετράεδρα, η γη από κύβους, ο αέρας από οκτάεδρα, ο αιθέρας από δωδεκάεδρα και το ύδωρ από εικοσάεδρα.



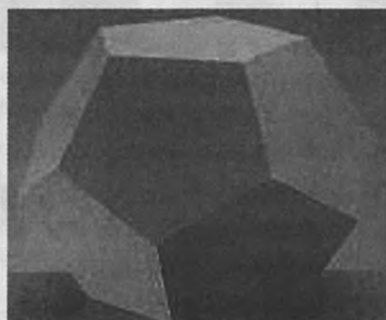
Κανονικό τετράεδρο, Πυραμίδα



Κύβος



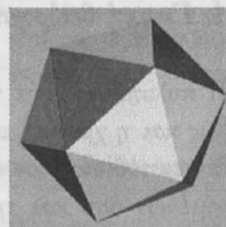
Κανονικό οκτάεδρο



Κανονικό δωδεκάεδρο

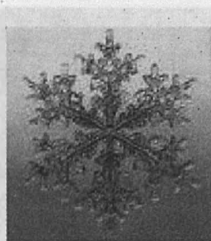
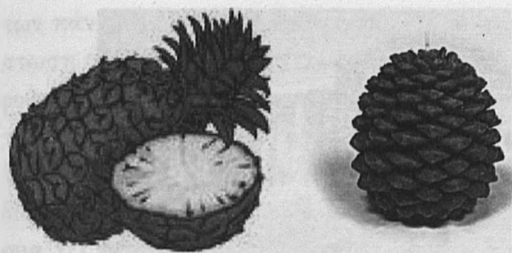
Προτού προχωρήσουμε στη σημασία των συμμετριών στη φυσική και τη φιλοσοφία, ας δούμε μερικά παραδείγματα από τη φύση, όπου η συμμετρία είναι παντού παρούσα.

Μια πεταλούδα, ένα πουλάκι, ένας αστερίας, ένα κοχύλι, ένα λουλούδι, ένας βάτραχος έχουν, τουλάχιστον στην εξωτερική τους εμφάνιση, στοιχεία συμμετρίας. Μια φυσαλίδα διαθέτει αρκετά μεγάλη συμμετρία αφού είναι σφαιρική. Τα περισσότερα φρούτα έχουν κατά προσέγγιση σφαιρικό ή ελλειψοειδές σχήμα. Πιο σύνθετα μοτίβα εμφανίζει ένας ανανάς ή ένα κουκουνάρι. Οι κρύσταλλοι του χιονιού είναι κι αυτοί συμμετρικοί αν τους κοιτάξει κανείς με ένα μικροσκόπιο.

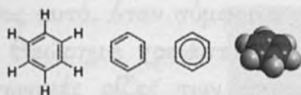


Κανονικό εικοσάεδρο

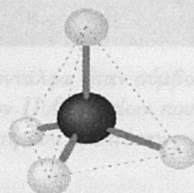
Το ίδιο συμβαίνει με έναν κόκκο άλατος ή ζάχαρης. Αλλά και σε πολλά μό-



Κρύσταλλος
νιφάδας χιονιού



Μόριο βενζολίου



Carbon Hydrogen

Μόριο μεθανίου

ρια, όπως αυτό του βενζολίου ή του μεθανίου, εντοπίζουμε συμμετρία κανονικού εξαγώνου και κανονικού τετραέδρου αντίστοιχα.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν πολλές συμμετρίες και όχι μόνο μία. Πριν μπούμε όμως στο θέμα της ταξινόμησής τους, ας δούμε μερικά έργα του ανθρωπίνου που παρουσιάζουν συμμετρίες.

Η συμμετρία είναι κύριο στοιχείο της αρχιτεκτονικής. Οι πυραμίδες έχουν συνήθως σχήμα τετραέδρου. Πολλοί αρχαίοι ναοί είναι εξαγωνικοί ή οκταγωνικοί, ενώ ο Παρθενώνας παρουσιάζει κατοπτρική και μεταθετική συμμετρία με το αναγκαίο σπάσιμό της. Οι πύργοι έχουν πολυγωνική ή κυλινδρική συμμετρία, ενώ οι αρχαίοι φούρνοι είναι συνήθως ημισφαιρικοί. Τα πατώματα με πλακάκια παρουσιάζουν τετραγωνικές ή εξαγωνικές συμμετρίες επιπλέον των μεταθέσεων. Στα διάφορα χρηστικά αντικείμενα έχουμε επίσης συμμετρίες, όπως είναι η κυλινδρική συμμετρία στα περισσότερα μαγειρικά σκευή. Ιδιαίτερη όμως εφαρμογή της συμμετρίας παρα-



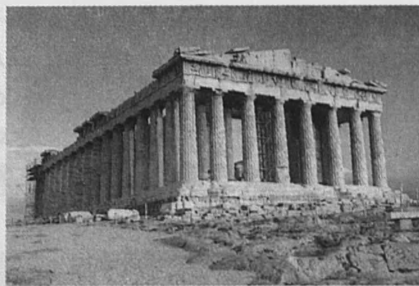
Πάνθεον, Ρώμη



Santa Spirito, Φλωρεντία



Κολοσσαίο, Ρώμη



Παρθενώνας



Συμμετρία φράκταλ

τηρούμε στη διακοσμητική τέχνη, όπου ακόμη και η γεωμετρία φράκταλ (fractal) έχει ανακαλυφθεί από πολύ παλιά.

2. Συμμετρίες στην επιστήμη

Όλες οι συμμετρίες που περιγράψαμε παραπάνω, μέσω αντίστοιχων αντικειμένων, είναι γεωμετρικές συμμετρίες δηλαδή συμμετρίες στο χώρο. Υπάρχουν όμως και συμμετρίες που δεν είναι γεωμετρικές. Τέτοιες είναι για παράδειγμα οι συμμετρίες στο χρόνο, όπως είναι η περιστροφή της Γης γύρω από τον εαυτό της ανά 24 ώρες. Τη συμμετρία αυτή την αντιλαμβανόμαστε με το φως και το σκοτάδι. Ομοίως, έχουμε τη συμμετρία που προκύπτει από τη περιστροφή της Γης γύρω από τον Ήλιο, δηλαδή τη διαγραφή της ίδιας τροχιάς ανά έτος. Οι συμμετρίες αυτές στη μαθηματική τους έκφραση ταυτίζονται με αντίστοιχες γεωμετρικές. Συμμετρίες στο χρόνο συναντούμε και στην ποίηση με το μέτρο, αλλά και στη μουσική, πάντα με το αναγκαίο σπάσιμό της για αισθητικούς λόγους. Στη φυσική έχουμε και τις λεγόμενες φαινομενολογικές συμμετρίες, που δεν οφείλουν την προέλευσή τους σε χωροχρονικές κανονικότητες.

Η συμμετρία στους Πυθαγόρειους αποτελούσε βασική φιλοσοφική αρχή. Μάλιστα θεωρούσαν ότι όλοι οι αριθμοί είναι σύμμετροι και αποτελούσαν τη βάση

των πάντων. Αυτό προέκυψε από τη διαπίστωσή ότι τα κλάσματα των ακεραίων μπορούν να εκφραστούν με περιοδικότητα (μεταθετική συμμετρία). Για παράδειγμα $1/7=0,142857\ 142857\ 142857\dots$ Έτσι, αν επιδίωκε κανείς μεγαλύτερη ακρίβεια στο κλάσμα $1/7$ δεν είχε παρά να γράψει όσες φορές ήθελε το 142857 μετά την υποδιαστολή. Έτυχε όμως στους ίδιους να διαπιστώσουν το λάθος αυτό, όταν σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα χρειάστηκε να βρουν τις τετραγωνικές ρίζες των ακεραίων. Έτσι, διαπίστωσαν ότι πολλοί αριθμοί, όπως η τετραγωνική ρίζα του 2 ή του 3, που η ύπαρξή τους προέκυψε από τη γεωμετρία των τριγώνων, δεν μπορούσαν να εκφραστούν σαν περιοδικοί αριθμοί. Γι' αυτό αποφάσισαν να κρατούν σαν μυστικό των μυημένων της εταιρείας τους την ύπαρξη αυτών των αριθμών, καθώς ήταν αντίθετοι στην κοσμοθεωρία τους. Γι' αυτόν το λόγο τούς ονόμασαν άρρητους (δηλαδή αριθμούς που δεν επιτρεπόταν να ειπωθούν έξω από τους μυημένους). Αλλά, ουδέν κακόν αμιγές καλού: Για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας εφαρμόζεται μια επαναληπτική διαδικασία, ή ένας αλγόριθμος όπως λέμε σήμερα. Η διαδικασία αυτή χαρακτηρίζεται από τη μεταθετική συμμετρία. Έτσι, οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν μια ατέρμονη διαδικασία που διέθετε μια άλλη συμμετρία, την επανάληψη ενός κύκλου πράξεων που οδηγούσε σε ένα όριο το οποίο ήταν μη συμμετρικός αριθμός. Έτσι, για παράδειγμα, ενώ μπορούσε να πλησιάσει κανείς όσο ήθελε την τετραγωνική ρίζα του 2 με έναν δεκαδικό αριθμό προσθέτοντας δεκαδικά ψηφία, δεν μπορούσε ποτέ να την εκφράσει με έναν δεκαδικό αριθμό.

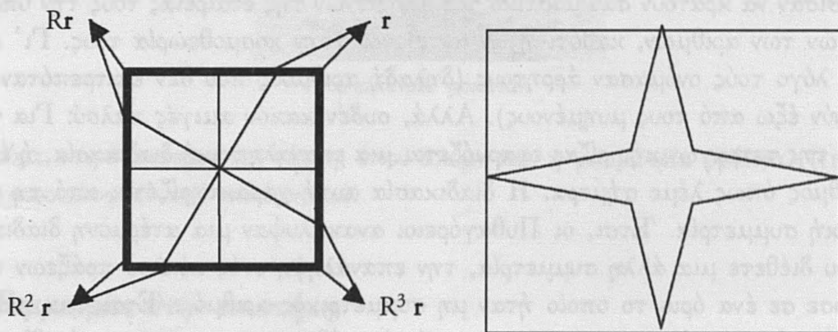
Από το γεγονός ότι η τετραγωνική ρίζα αποτελούσε το μήκος της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν την ύπαρξη του ορίου γεωμετρικά, εφόσον το μήκος της υποτείνουσας αποτελούσε ένα υπαρκτό φυσικό μέγεθος, δείχνοντας έτσι πόσο η θεωρία των αριθμών ήταν συνυφασμένη με τη γεωμετρία. Αργότερα, ο Αρχιμήδης έδειξε την ύπαρξη του ορίου μιας ακολουθίας αριθμών αλγεβρικά, παρότι ξεκίνησε από γεωμετρικές έννοιες, προσπαθώντας να εκφράσει την περιφέρεια του κύκλου συναρτήσει της ακτίνας του, περικλείοντας την περιφέρεια του κύκλου μεταξύ ενός εγγεγραμμένου και ενός περιγεγραμμένου κανονικού πολύγωνου. Έτσι το μήκος της περιφέρειας ήταν μεταξύ ενός κάτω και ενός πάνω ορίου (φράγματος), που προσεγγίζαν το ένα το άλλο όταν ο αριθμός των πλευρών των δυο πολυγώνων αυξανόταν. Σήμερα, ο κλάδος των μαθηματικών που λέγεται Αναλυτική Τοπολο-



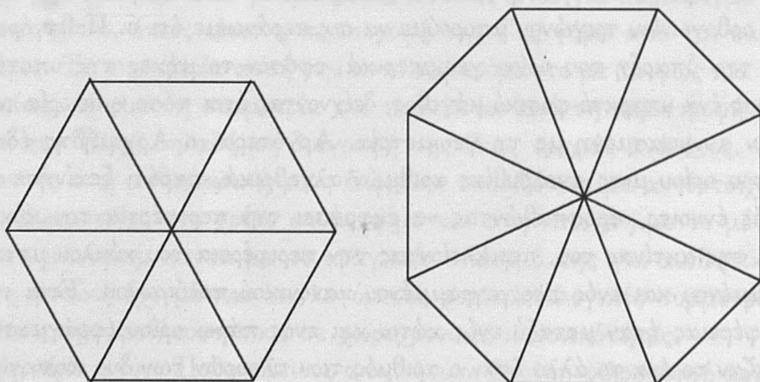
Η πεντάλφα ήταν σύμβολο των Πυθαγορείων που η σχεδιάσή του κρατιόταν μυστική.

για ενοποιεί τις αναλυτικές και γεωμετρικές δομές. Ας σημειώσουμε ότι η ανακάλυψη της ύπαρξης των άρρητων αριθμών είναι απαραίτητη για τη θεμελίωση της έννοιας της συνέχειας στα σύγχρονα μαθηματικά, τονίζοντας ότι η έννοια της συνέχειας, αποτελεί δομικό στοιχείο της φυσικής στην οποία στηρίζεται η θεωρία με το πείραμα. Κι αυτό γιατί το πείραμα δίνει πάντοτε πεπερασμένο αριθμό σημείων, που με την υπόθεση (αξίωμα) της συνέχειας στα πειραματικά σημεία αντιστοιχεί μια συνεχής γραμμή που περιγράφει τον φυσικό νόμο.

Η συμμετρία παίζει καθοριστικό ρόλο στη σύγχρονη φυσική, μπορούμε να πούμε μάλιστα ότι δεν νοείται σύγχρονη φυσική χωρίς συμμετρία. Με βάση τη συμμετρία μπορεί να προσδιοριστεί η μορφή των ευσταθών κβαντομηχανικών καταστάσεων ενός φυσικού συστήματος, ενός μορίου για παράδειγμα, χωρίς να γίνεται επίλυση των σχετικών εξισώσεων. Αυτό δεν είναι δυνατό στην Κλασική Μηχανική (ΚλΜηχ) λόγω της μη γραμμικότητάς της, σε αντίθεση με την Κβαντική Μηχανική (ΚβΜηχ) που είναι γραμμική.



Σχ. 1. Με περιστροφή κατά 90 μοίρες αριστερά, το κάθε μικρό τρίγωνο απεικονίζεται στο επόμενο. Έτσι το σχήμα συνολικά απεικονίζεται στον εαυτό του. Στο τετράγωνο έχουμε και κατοπτρική συμμετρία.



Σχ. 2. Κανονικό εξάγωνο

Κανονικό οκτάγωνο

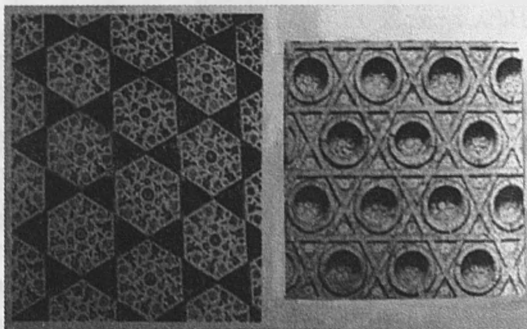
Από τις προηγούμενες παραγράφους συνάγεται το συμπέρασμα ότι αξίζει να αναζητήσουμε το λόγο που οι άνθρωποι όσο και η φύση «προτιμούν» τις συμμετρικές κατασκευές.

Για τη μελέτη των συμμετριών είναι απαραίτητο να εισάγουμε κάποιες απλές έννοιες. Ας αρχίσουμε από τις συμμετρίες στο χώρο. Στη γεωμετρία ένα αντικείμενο λέμε ότι έχει μια συμμετρία όταν, παρατηρώντας το από διαφορετικές οπτικές γωνίες, βλέπουμε την ίδια εικόνα. Για παράδειγμα, σε ένα τετράγωνο κτίριο, όταν μετακινηθούμε κατά μία ορθή γωνία, έχουμε εντελώς την ίδια εικόνα. Το ίδιο συμβαίνει με ένα εξαγωνικό κτίριο όταν μετακινηθούμε κατά 60 μοίρες. Έτσι, αν ξέρουμε τη μία όψη ενός κτιρίου, νοητικά μπορούμε να φανταστούμε όλο το κτίριο εφόσον γνωρίζουμε τη συμμετρία του. Σε μια σφαίρα, αρκεί να ξέρουμε το κέντρο και την ακτίνα της για να προσδιορίσουμε όλη την επιφάνειά της. Το ίδιο και σε έναν κύκλο. Αν έχουμε το μισό μας πρόσωπο, με ένα καθρέφτη μπορούμε να συμπληρώσουμε το άλλο μισό. Αν ξέρουμε το ένα πόδι ενός αστερία, τότε μπορούμε να τον συμπληρώσουμε ζωγραφίζοντας τα άλλα τέσσερα πόδια του.

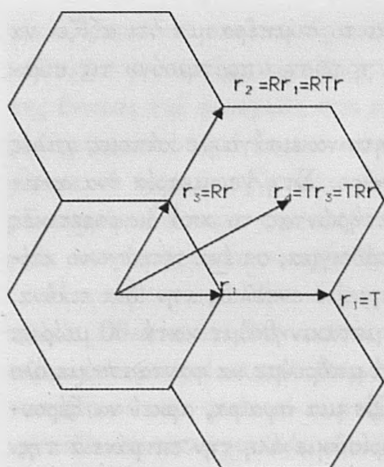
Αν ξέρουμε τη μία κορυφή και το κέντρο ενός ισόπλευρου τριγώνου, μπορούμε με στροφές κατά 120 μοίρες να προσδιορίσουμε όλες τις κορυφές του, και επομένως όλο το τρίγωνο. Σε ένα τετράγωνο, αν ξέρουμε το κέντρο συμμετρίας του και μια πλευρά του, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την κατασκευή του. Στην πράξη είναι πολύ εύκολη αυτή η κατασκευή, αφού με μια περιστροφή κατά 90 μοίρες της μιας πλευράς γύρω από το κέντρο συμμετρίας του σχήματος μπορούμε να κατασκευάσουμε την επόμενη.

Είναι δυνατόν να έχουμε συμμετρίες που να προκύπτουν από δυο διαφορετικού τύπου στοιχεία συμμετρίας. Για παράδειγμα, το ένα στοιχείο συμμετρίας μπορεί να είναι μια μετάθεση στο χώρο κατά ένα μέτρο σε μια καθορισμένη διεύθυνση και στη συνέχεια μια στροφή 60 μοιρών.

Μια τέτοια συμμετρία που γεννάται από δυο διαφορετικού τύπου στοιχεία συμμετρίας (γεννήτορες) βλέπουμε σε ένα δάπεδο με πλακάκια. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι οι στροφές οι συμβάσεις με τις μεταθέσεις είναι οι κατά 60, 90, και 180 μοίρες, και γι' αυτόν το λόγο έχουμε πλακάκια που είναι κανονικά εξάγωνα, τετράγωνα και ορθογώνια, ή αποτελούν απλά παραλληλόγραμμα. Αν συνδυάσουμε τις μεταθέσεις και με άλλες στροφές –αν για παράδειγμα έχουμε πενταγωνικά πλακάκια– θα δούμε ότι δεν θα



Εξαγωνικά δάπεδα ισλαμικής τέχνης.



Σχ. 3. Όπως φαίνεται από το σχήμα το σημείο $RT\Gamma = \Gamma_2$ δεν συμπίπτει με το $TR\Gamma = \Gamma_4$ και άρα $RT \neq TR$.

εφαρμόζουν. Ομοίως στα κανονικά πολύγωνα έχουμε και κατοπτρική συμμετρία (ανάκλαση) εκτός από την περιστροφική.

3. Η αναγκαιότητα της συμμετρίας

Συμμετρίες δεν έχουμε μόνο στα οικοδομικά έργα αλλά και σε άλλες ανθρώπινες κατασκευές. Για παράδειγμα, στα πλεκτά και τα υφαντά έχουμε πάντοτε μεταθετική συμμετρία, που πολλές φορές συνδυάζεται με στροφές κατά 90 ή 120 μοίρες. Τους κόμβους στην προκειμένη περίπτωση τούς ονομάζουμε πλεγματικά σημεία. Ένα πλέγμα στο οποίο διακρίνονται με σαφήνεια οι κόμβοι του είναι το δίκτυ.

Οι συμμετρίες στα υφαντά προέκυψαν όχι μόνο για λόγους αισθητικής αλλά και για λόγους που απαιτούσε η οικονομική εφαρμογή μιας τεχνικής. Έτσι ένα πλεκτό στο χέρι απαιτούσε μια διαδικασία που επαναλαμβανόταν. Η επανάληψη αυτή αυτομάτως δημιουργεί συμμετρία, και μαζί ένα αισθητικό αποτέλεσμα.

Η ίδια επαναληπτική διαδικασία παρατηρείται και σε έναν αργαλειό, όπου οι κλωστές είναι παράλληλες. Βέβαια για τη δημιουργία καλύτερου αισθητικού αποτελέσματος ήταν απαραίτητο να σπάει η συμμετρία ώστε να σπάει η ρουτίνα της επανάληψης και να δημιουργείται η έκπληξη, δηλαδή το μη αναμενόμενο αποτέλεσμα.

Εκτός από τις πρακτικές τέχνες, η συμμετρία σπάει και στη μουσική. Για τις συμμετρίες στη μουσική καθώς και για το αισθητικό αποτέλεσμα που δημιουργείται από το σπάσιμό τους, γίνεται διεξοδική ανάλυση στο άρθρο του P. Zielinski (βλ. Βιβλιογραφία αρ. 1).

Όταν θεωρήσουμε μεταθέσεις στις 3 διαστάσεις, τότε έχουμε ένα τρισδιάστατο πλέγμα. Το πλέγμα αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από την παράλληλη τοποθέτηση πολλών δικτύων με σταθερή απόσταση μεταξύ τους, όπου οι κόμβοι βρίσκονται σε ευθεία γραμμή. Τέτοια πλέγματα αποτελούν οι τοίχοι που κτίζονται με τούβλα. Βέβαια έχουμε σπάσιμο της συμμετρίας στις επιφάνειες, δηλαδή η επανατοποθέτηση τούβλων κάποτε τερματίζεται. Αλλά και οι θέσεις των ατομικών πυρήνων στους κρυστάλλους αποτελούν πλέγμα. Εκτός από τη μεταθετική συμμετρία, σε έναν κρύσταλλο, μπορεί να έχουμε και περιστροφική συμμετρία, όπως και στις δυο διαστάσεις. Πιο οικεία μάς είναι η πυκνή διάταξη των

σφαιρών του ίδιου μεγέθους σε ένα κουτί, όπου εκτός από τη μεταθετική συμμετρία μπορεί να έχουμε και περιστροφική κατά 60 ή 90 μοίρες.

Στα παραδείγματα που παραθέσαμε βλέπουμε ότι πάντοτε έχουμε κάποιο σπάσιμο της συμμετρίας, δηλαδή η συμμετρία αποτελεί μια θεωρητική εξιδανίκευση. Αυτή όμως η εξιδανίκευση συμβάλλει τόσο στην κατανόηση όσο και στην εύρεση απλών λύσεων σε διάφορα προβλήματα.

Ας σημειώσουμε μερικά ακόμη παραδείγματα για να δούμε τους λόγους που επέβαλαν τις διάφορες συμμετρίες. Στη νεολιθική εποχή για μια μεγάλη περίοδο τα κτίρια είχαν κυλινδρικό σχήμα. Για τη χάραξη του σχεδίου τους στο έδαφος αρκούσε ένας σπάγκος κι ένα ξύλο καρφωμένο στο έδαφος. Με την υιοθέτηση του κυλινδρικού σχήματος δεν είχαν προβλήματα ορθογωνιότητας ή επιπεδοποίησης. Αντιθέτως, σε ένα ορθογώνιο κτίριο ήταν απαραίτητη η χάραξη της ορθής γωνίας, που απαιτούσε στοιχειώδεις γνώσεις γεωμετρίας.

Εκτός από τους λόγους απλής σχεδίασης και εκτέλεσης, υπήρχαν και άλλοι λόγοι που επέβαλαν καθορισμένα γεωμετρικά σχήματα. Έτσι, εκτός από τη σχεδίαση, ένα άλλο πλεονέκτημα της κυκλικής κατασκευής είναι ότι έχει το μέγιστο εμβαδόν δαπέδου για καθορισμένο ολικό μήκος τοίχων και επομένως και υλικών. Βέβαια, είναι δύσκολο να φανταστούμε πως στη λίθινη εποχή είχαν διαπιστώσει ότι για δεδομένο εμβαδόν δαπέδου απαιτούνται τα λιγότερα υλικά όταν η κάτοψη είναι κυκλική.

Στην κατασκευή φούρνων, λόγοι δομικής ευστάθειας και λειτουργικότητας επέβαλαν το ημισφαιρικό σχήμα. Η κατασκευή αυτή γινόταν με τοποθέτηση λίθων σε κύκλους που η διάμετρος τους μίκραινε από στρώμα σε στρώμα. Για τη στήριξη, το εσωτερικό το γέμιζαν με μικρές πέτρες χωρίς πηλό, που αφαιρούνταν όταν χτιζόταν και η τελευταία πέτρα. Αυτή η ανακάλυψη ήταν σημαντική στην αρχαιότητα, μια και αν ο φούρνος είχε ξύλινη οροφή θα καίγόταν. Στη περίπτωση επίπεδης οροφής έπρεπε να χρησιμοποιούν πλάκες, που όμως είχαν περιορισμούς ως προς τις διαστάσεις και δεν ήταν πάντοτε εύκολο να τις προμηθευτούν. Με το ημισφαιρικό σχήμα, παράλληλα με τη δομική ευστάθεια, εξασφαλιζόταν και το εύκολο καθάρισμα από τις στάχτες, καθώς δεν υπήρχαν γωνίες. Άλλο πλεονέκτημα ήταν η ομοιόμορφη θερμοκρασία στον ημισφαιρικό φούρνο λόγω των πολλαπλών ανακλάσεων της θερμικής ακτινοβολίας, σε αντίθεση με τη περίπτωση των ορθογώνιων κατασκευών. Βέβαια, μεγαλύτερη ομοιομορφία έχουμε στον σφαιρικό φούρνο, ο οποίος όμως δεν χρησιμοποιούνταν, όχι μόνο λόγω της δυσκολίας κατασκευής του αλλά και λόγω τού ότι η βάση για την τοποθέτηση των διαφόρων αντικειμένων ψησίματος δεν είναι επίπεδη.

Λόγοι αισθητικής αλλά και αποδοτικότητας της εργασίας επέβαλαν τις συμμετρικές κατασκευές στα δάπεδα. Στα πλακόστρωτα δάπεδα η τοποθέτηση είναι πολύ πιο απλή όταν χρησιμοποιεί κανείς πλάκες του ίδιου σχήματος. Έτσι, ένας

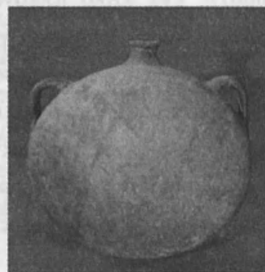


Γοτθικά τόξα

εργάτης χωρίς μεγάλη ειδικευση μπορούσε να στρώσει με ορθογώνιες ή εξαγωνικές πλάκες πολλαπλάσια επιφάνεια απ' όση με ακανόνιστες στον ίδιο χρόνο.

Αλλά και η κατασκευή τοίχων με τούβλα που ήταν ορθογώνια παραλληλεπίπεδα ήταν πολύ απλούστερη εργασία από το χτίσιμο με ακανόνιστη πέτρα. Ομοίως, λόγοι ευστάθειας επέβαλαν τα γοτθικά τόξα στους μεγαλύτερου ύψους ναούς.

Στην αγγειοπλαστική, η πιο βολική συμμετρία είναι η αξονική, όταν πρόκειται για αντικείμενα που κατασκευάζονται από πηλό με τροχό. Επιπλέον έχει κανείς πιο ομοιόμορφο ψήσιμο. Και από πλευράς ευστάθειας όμως η κυλινδρική συμμετρία έχει πολλά πλεονεκτήματα. Το καθάρισμα είναι επίσης πιο εύκολο. Βέβαια μεγαλύτερα πλεονεκτήματα έχει το σφαιρικό σχήμα, και γι' αυτό οι σφαιρικές στάμνες ήταν προτιμότερες για μεταφορά νερού, εφόσον με το ίδιο βάρος κενού δοχείου μπορούσαν να μεταφέρουν περισσότερο νερό. Επιπροσθέτως, διέθεταν πλεονεκτήματα και στο θέμα της ευστάθειας, αφού η μόνη επίπεδη επιφάνεια ήταν αυτή που άγγιζε το έδαφος. Έτσι το ευάλωτο στα σπασίματα μέρος δεν ήταν εκτεθειμένο.



Στάμνα

Οι μπάλες ποδοσφαίρου κατασκευάζονται από δώδεκα πανομοιότυπα τεμάχια δέρματος σε σχήμα κανονικού πεντάγωνου. Αυτό δεν είναι κάτι καινούριο. Όσο παράξενο κι αν φαίνεται, τα αρχαιολογικά ευρήματα δείχνουν ότι η κατασκευή γινόταν με τον ίδιο τρόπο μερικές χιλιάδες χρόνια τώρα. Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούνταν τα πεντάγωνα ήταν καθαρά πρακτικός, καθώς η συρραφή τους οδηγούσε σε κανονικό δωδεκάεδρο, που όλες οι κορυφές του βρίσκονται στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Έτσι με το φούσκωμα διαμορφωνόταν το σφαιρικό σχήμα. Η κατασκευή αυτή θα μπορούσε να γίνει και με ισόπλευρα τρίγωνα, πλην όμως για το σκοπό αυτόν απαιτούνται είκοσι τεμάχια δέρματος, κι έτσι ο χρόνος της συρραφής τους είναι πολύ μεγαλύτερος.

Από τα παραπάνω παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι η συμμετρία δεν ήταν

απλώς προτίμηση σε συγκεκριμένη αισθητική, αλλά προέκυψε από πραγματικές ανάγκες, είτε κατασκευαστικές είτε λειτουργικές.

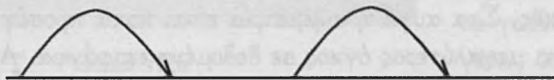
Ας παρατηρήσουμε για λίγο τη συμμετρία στη φύση, ξεκινώντας από τα μη έμβια όντα. Μια φυσαλίδα έχει κυκλικό σχήμα, διότι με τη σφαίρα κλείνουμε τον μεγαλύτερο όγκο για δεδομένη επιφάνεια. Αντιστρόφως, για δεδομένο όγκο απαιτείται ελάχιστη επιφάνεια όταν τον εγκλείσουμε σε σφαίρα. Από πλευράς ευστάθειας, οποιαδήποτε παραμόρφωση της σφαίρας συνεπάγεται αύξηση της επιφάνειάς της και συνεπώς αύξηση της επιφανειακής ενέργειάς της. Έτσι αν άρουμε τη δύναμη που προκάλεσε την παραμόρφωση, η φυσαλίδα επανέρχεται στο κυκλικό της σχήμα. Ομοίως, όταν ενωθούν πολλές φυσαλίδες σε ένα μπουκάλι με αφρό, δημιουργούνται διάφορα πολύεδρα, καθότι με αυτό τον τρόπο δημιουργούνται τοπικά ελάχιστα της ενέργειας. Λόγοι ελάχιστης ενέργειας επιβάλλουν επίσης τις διάφορες συμμετρίες στους κρυστάλλους. Ομοίως στις κυψέλες οι κυψελίδες είναι εξαγωνικές. Στα αυγά η συμμετρία είναι κατά προσέγγιση σφαιρική, γιατί έτσι εγκλείεται μεγαλύτερος όγκος σε δεδομένη επιφάνεια. Λόγοι ελάχιστης ενέργειας επιβάλλουν τη κατά προσέγγιση σφαιρική επιφάνεια σε πολλά φρούτα. Επιπλέον, με αυτό το σχήμα εξασφαλίζεται η μικρότερη απώλεια υγρασίας.

4. Η συμμετρία στη φυσική

Για να δούμε τη συνέπεια της συμμετρίας στην εξέλιξη της κατάστασης ενός φυσικού συστήματος, όπως είναι η κίνηση των κυμάτων στη θάλασσα ή η κατάσταση των ηλεκτρονίων ενός ατόμου, είναι απαραίτητο να εισάγουμε κάποιες έννοιες από τη μηχανική: Η χρονική εξέλιξη της κατάστασης ενός φυσικού συστήματος περιγράφεται από δύο σκέλη. Το πρώτο αφορά τη σχέση αιτίας και αποτελέσματος ενώ το δεύτερο την αρχική του κατάσταση. Η σχέση αιτίας και αποτελέσματος στη κλασική μηχανική περιγράφεται από την εξίσωση: δύναμη = μάζα $\times$ επιτάχυνση. Πιο καλή περιγραφή όμως δίνεται από τη Χαμιλτονιανή του συστήματος. Απλοποιώντας, μπορούμε να πούμε ότι η Χαμιλτονιανή είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του φυσικού συστήματος. Βασική ιδιότητα της κινητικής ενέργειας είναι ότι το μαθηματικό αντικείμενο που την περιγράφει δεν πρέπει να εξαρτάται από τις θέσεις των σωματιδίων που αποτελούν το φυσικό σύστημα, αλλά μόνο από τα μέτρα των ορμών τους. Κατά συνέπεια, η μαθηματική έκφραση της κινητικής ενέργειας πρέπει να είναι αναλλοίωτη ως προς τις μεταθέσεις και τις στροφές. Ένας άλλος όρος της Χαμιλτονιανής είναι η εσωτερική δυναμική ενέργεια, η οποία οφείλεται στις δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων που αποτελούν το φυσικό σύστημα (εσωτερικές δυνάμεις) και γι' αυτό το λόγο ονομάζεται και ενέργεια αλληλεπίδρασης. Και στην περίπτωση

αυτή η μετάθεση ή στροφή του συστήματος σαν συνόλου δεν πρέπει να επηρεάζει την εσωτερική του ενέργεια. Έτσι, αν έχουμε έναν πυρήνα ατόμου και τον μεταθέσουμε, η εσωτερική ενέργεια των ηλεκτρονίων του ατόμου παραμένει η ίδια.

Σε ένα φυσικό σύστημα μπορεί να ασκούνται και εξωτερικές δυνάμεις. Η ενέργεια που οφείλεται σε αυτές τις δυνάμεις λέγεται εξωτερική ενέργεια και αποτελεί ακόμη έναν όρο της Χαμιλτονιανής. Αν με τη μετάθεση του συστήματος μεταθέσουμε αντίστοιχα και τις εξωτερικές δυνάμεις, η Χαμιλτονιανή του συστήματος δεν αλλάζει. Αν μαζί με τις εξωτερικές δυνάμεις θεωρήσουμε αντίστοιχη μετάθεση της αρχικής κατάστασης, τότε η χρονική εξέλιξη του φυσικού συστήματος πρέπει να είναι αντίστοιχη. Για παράδειγμα, αν εκτοξεύσουμε ένα βλήμα από δυο διαφορετικές θέσεις Α και Β με την ίδια αρχική ταχύτητα και κατεύθυνση, το βλήμα θα διαγράψει αντίστοιχες τροχιές.



Σχ. 4. Με τη μετάθεση των δυνάμεων και των αρχικών συνθηκών έχουμε όμοιες τροχιές.

Έτσι, αν μεταθέσουμε την πρώτη καμπύλη ώστε το σημείο Α να συμπίπτει με το Β, τότε θα συμπίψουν οι δυο τροχιές. Αν το σύστημά μας είναι τα ηλεκτρόνια ενός ατόμου και οι εξωτερικές δυνάμεις είναι οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις που ασκεί ο πυρήνας πάνω στα ηλεκτρόνια, τότε μια μετάθεση όλου του πυρήνα συνεπάγεται αντίστοιχη μετάθεση της κατάστασης των ηλεκτρονίων. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι οι συμμετρίες στη φυσική μάς βοηθούν να διατυπώσουμε φυσικές θεωρίες που δεν θα δώσουν αποτελέσματα αντίθετα με τις βασικές φυσικές αρχές της. Αυτό δεν συνεπάγεται όμως ορθότητα της θεωρίας. Η ορθότητα ελέγχεται από τα πειραματικά δεδομένα που ερμηνεύει.

Εκτός από τις μεταθέσεις στο χώρο μπορούμε να έχουμε και μεταθέσεις στο χρόνο με αντίστοιχα αποτελέσματα. Αν για παράδειγμα εκτοξεύσουμε δυο οβίδες σε διαφορετικούς χρόνους από ένα κανόνι με την ίδια αρχική κλίση, η τροχιά που θα ακολουθήσει η δεύτερη θα είναι η ίδια με αυτή της πρώτης. Εδώ δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι οι συμμετρίες μας είναι πάντα προσεγγιστικές. Έτσι, αν στη διάρκεια της πτήσης της δεύτερης οβίδας φυσήξει άνεμος, τότε έχουμε διαφορετικές δυνάμεις, και το δεύτερο βλήμα θα ακολουθήσει κάπως διαφορετική τροχιά.

Οι πράξεις συμμετρίας δεν περιορίζονται στο χώρο ή το χρόνο ξεχωριστά. Είναι δυνατόν να έχουμε μεταθέσεις και στροφές στο χωροχρόνο που να αφήνουν τη δυναμική ενός συστήματος αναλλοίωτη. Έτσι, στις ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις οι μετασχηματισμοί κάτω από τους οποίους οι εξισώσεις αυτές είναι αναλλοίωτες (εξισώσεις Maxwell) περιλαμβάνουν και «στροφές» στο «επίπεδο» μιας

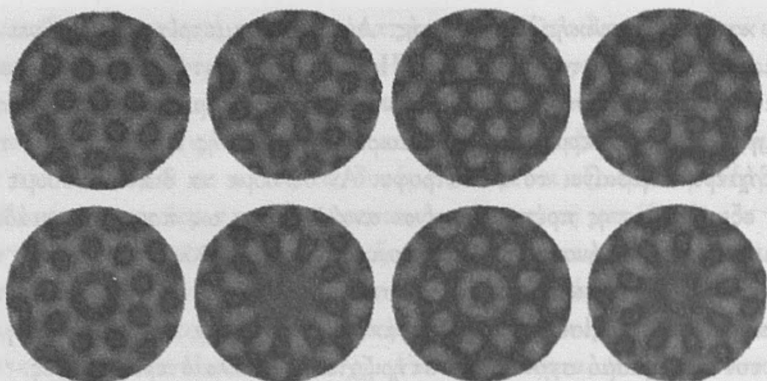
χωρικής και μιας χρονικής μεταβλητής. Αυτή η συμμετρία υποδηλώνει μια άλλη συμμετρία ως προς το χωροχρόνο. Η συμμετρία αυτή, που αρχικά είχε διαπιστωθεί από τον Λόρεντζ, και γι' αυτό η αντίστοιχη ομάδα φέρει το όνομα του, βρήκε τη φυσική της ερμηνεία στη θεωρία της ειδικής σχετικότητας του Αϊνστάιν. Σήμερα συμβαίνει το αντίστροφο: Αν θέλουμε να διατυπώσουμε μια θεωρία, οι εξισώσεις της πρέπει να είναι αναλλοίωτες ως προς την ομάδα μετασχηματισμών που αφήνουν το χωροχρονικό μήκος αναλλοίωτο (ομάδα του Λόρεντζ). Έτσι η διατύπωση των εξισώσεων που διέπουν τη δυναμική των συστημάτων, όπως η εξίσωση του Ντιράκ, είναι σήμερα απλή υπόθεση και δεν απαιτεί τον εμπειρισμό στον οποίο στηριζόταν σε παλαιότερες εποχές.

Αν εκτός από την εσωτερική ενέργεια και η ενέργεια που οφείλεται σε εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε ένα φυσικό σύστημα (εξωτερική ενέργεια της Χαμιλτονιανής) είναι αναλλοίωτη ως προς κάποιους μετασχηματισμούς, τότε μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για τις ευσταθείς καταστάσεις του συστήματος. Έτσι, αν το εξωτερικό δυναμικό δεν εξαρτάται από τη κατεύθυνση, οι ευσταθείς καταστάσεις του φυσικού συστήματος έχουν καθορισμένη στροφομή. Επιπλέον μπορεί να βγάλουμε συμπεράσματα για διάφορα φυσικά μεγέθη, όπως για παράδειγμα την ηλεκτρονική πυκνότητα σε ένα μέταλλο.

Προκειμένου να έχουμε ένα χειροπιαστό παράδειγμα για τις συνέπειες της συμμετρίας, θα πάρουμε το παράδειγμα των επιφανειακών κυμάτων. Οι εξισώσεις που περιγράφουν τα επιφανειακά κύματα στο νερό (κατάσταση της επιφάνειας της θάλασσας) είναι αναλλοίωτες ως προς μεταθέσεις και στροφές όταν το βάθος του νερού είναι σταθερό. Η μόνη κατάσταση όμως που έχει αυτή τη συμμετρία είναι η κατάσταση της θάλασσας που δεν έχει καθόλου κύματα. Ένα κύμα όμως που προκαλείται από τον άνεμο έχει μεταθετική συμμετρία. Έτσι η νέα συμμετρία δεν είναι οποιαδήποτε μετάθεση αλλά μετάθεση κατά ένα μήκος κύματος (δηλαδή η απόσταση από τη μια κορυφή στην άλλη). Δεν έχουμε όμως κυκλική συμμετρία, ενώ η συμμετρία αυτή υπάρχει στη δυναμική εξίσωση. Αν το κύμα αυτό περάσει από ένα στένωμα, όπως για παράδειγμα το στόμιο ενός λιμανιού, τότε από το στόμιο βλέπουμε ότι ξεκινάει ένα ημικυκλικό κύμα. Έτσι έχουμε μετάβαση από μια συμμετρία σε μιαν άλλη. Δεν έχουμε όμως τη συμμετρία της αρχικής εξίσωσης. Ομοίως αν ρίξουμε μια πέτρα στην ήρεμη θάλασσα έχουμε κυκλική συμμετρία, όχι όμως μεταθετική.

Σε έναν κυκλικό δίσκο (τύμπανο) μπορούμε να δημιουργήσουμε διαφόρων τύπων ταλαντώσεις, δηλαδή εξαρτώμενες από το χρόνο παραμορφώσεις, όπως φαίνεται στην εικόνα. Όπως βλέπουμε, οι παραμορφώσεις έχουν διάφορες συμμετρίες μικρότερες από αυτή του δίσκου.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι συμμετρία στο αίτιο, δηλαδή στις δυνάμεις (Χαμιλτονιανή), δεν συνεπάγεται συμμετρία στο αποτέλεσμα.



Διάφορες ελαστικές παραμορφώσεις κυκλικού δίσκου που έχουν διαφορετική συμμετρία.

Γενικά, βλέπουμε ότι έχουμε ένα σπάσιμο της συμμετρίας στις φυσικές καταστάσεις ενός φυσικού συστήματος που οι δυνάμεις του παρουσιάζουν συμμετρία. Αυτό το σπάσιμο παλιότερα φαινόταν αξιοπερίεργο, όχι όμως σήμερα πλέον. Με διάφορα θεωρήματα μπορούμε να δείξουμε ότι οι ευσταθείς φυσικές καταστάσεις έχουν καθορισμένα χαρακτηριστικά που μαθηματικά εκφράζονται με διαφόρων τύπων μετασχηματισμούς. Οι μετασχηματισμοί αυτοί καθορίζονται από καθορισμένες μαθηματικές οντότητες που λέγονται *μη αναγώγιμες αναπαράστασεις* της ομάδας συμμετρίας της Χαμιλτονιανής. Έτσι το «σπάσιμο της συμμετρίας» δεν είναι τυχαίο αλλά απόλυτα νομοτελειώδες. Μια εικόνα αυτού του σπασίματος μπορεί να έχουμε στα στάσιμα κύματα που εμφανίζονται σε έναν κυκλικό δίσκο.

Ας δούμε ακόμη ένα αποτέλεσμα της συμμετρίας στην κβαντική μηχανική: Η συμμετρία στις δυνάμεις συνεπάγεται μόνο μερικό προσδιορισμό της κατάστασης ενός φυσικού συστήματος. Έτσι, ενώ στην περίπτωση απουσίας συμμετρίας, όταν δοθεί η ενέργεια ενός ευσταθούς συστήματος, μπορούμε αμέσως να προσδιορίσουμε την κατάστασή του, όταν έχουμε συμμετρία για μια δεδομένη ενεργειακή στάθμη, έχουμε απειρία καταστάσεων των οποίων ξέρουμε μόνο το χώρο. (Η διάσταση του χώρου λέγεται βαθμός εκφυλισμού). Για παράδειγμα, στα άτομα, όπου το ηλεκτροστατικό δυναμικό που οφείλεται στη δύναμη που ασκεί ο πυρήνας στα ηλεκτρόνια δεν εξαρτάται από τη διεύθυνση (έχουμε σφαιρική συμμετρία), οι ενεργειακές στάθμες είναι εκφυλισμένες. Στον εκφυλισμό αυτόν συμβάλλει και η συμπεριφορά της περιφοράς του ηλεκτρονίου γύρω από τον εαυτό του (spin).

Μπορεί πολλές φορές να εμφανίζονται φαινόμενα ασυμβίβαστα με τη συμμετρία της Χαμιλτονιανής. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι η συμμετρία είναι προσεγγιστική, ή αντιθέτως στο ότι η ομάδα συμμετρίας που λάβαμε υπ'

όψιν είναι υποομάδα (υποσυμμετρία) μιας μεγαλύτερης. Μέσω των ποιοτικών χαρακτηριστικών των ευσταθών καταστάσεων μπορούμε να δούμε τι από τα δύο συμβαίνει. Για παράδειγμα, στη θεωρία των στοιχειωδών σωματιδίων, η συμμετρία που λάμβαναν υπ' όψιν ήταν η SU_2 που οφείλεται στο γεγονός ότι οι πυρηνικές δυνάμεις δεν εξαρτώνται από το ηλεκτρικό φορτίο. Με αυτή την ομάδα συμμετρίας, τα πρωτόνια και τα νετρόνια εμφανίζονταν σαν διαφορετικές καταστάσεις του ίδιου σωματιδίου, του νουκλονίου. Η συμμετρία αυτή συνέβαλε στον θεωρητικό προσδιορισμό των ιδιοτήτων των πυρήνων, που θεωρούνται ευσταθείς καταστάσεις πολυνουκλεονικών συστημάτων. Κάποιες όμως αποκλίσεις από τις προβλέψεις αυτής της θεωρίας, καθώς και η ανακάλυψη περισσότερων βαρυονίων και μεσονίων (σωματιδίων με μάζα εκατοντάδες φορές μεγαλύτερη από αυτή του ηλεκτρονίου) ανάγκασε τους φυσικούς να προσφύγουν σε μια Χαμιλτονιανή με μεγαλύτερη συμμετρία. Αυτή ήταν η SU_3 που περιέχει τη SU_2 σαν υποομάδα. Έτσι, μπόρεσαν να ερμηνεύσουν την παράδοξη συμπεριφορά που παρουσιαζόταν στους πυρήνες. Επιπλέον μπόρεσαν να ταξινομήσουν τα γνωστά σωματίδια σύμφωνα με τις μη αναγώγιμες αναπαράστάσεις της SU_3 και να προβλέψουν τις ιδιότητες άλλων που ανακαλύφθηκαν αργότερα.

Πρέπει να τονίσουμε ότι οι πιο πάνω συμμετρίες δεν είναι συμμετρίες στο χωροχρόνο αλλά φαινομενολογικές συμμετρίες κάτω από τις οποίες η Χαμιλτονιανή που περιγράφει τα σωματίδια αυτά είναι αναλλοίωτη. Για να καταλάβουμε τη SU_3 , μπορούμε να θεωρήσουμε μια ισόμορφη συμμετρία της. Αυτή είναι η ομάδα των 3×3 μητρών που έχουν ορίζουσα 1 και την ιδιότητα σύμφωνα με την οποία η αντίστροφη μιας μήτρας U είναι η συζυγής της. Εδώ όμως πρέπει να σημειώσουμε ότι η μαθηματικά ισοδύναμη ομάδα δεν συνεπάγεται κάποια φυσική ιδιότητα που αναπαρίσταται με μήτρες. Η αντιστοιχία είναι μαθηματική και όχι φυσική. Στην περίπτωση της SU_3 τα απαραίτητα στοιχειώδη σωματίδια από τα οποία μπορεί να αναπαράγει κανείς τα άλλα μεσόνια και βαρυόνια είναι τα 3 κουάρκ (με τα αντίστοιχα αντικουάρκ τους).

Η επιτυχία της θεωρίας των φαινομενολογικών συμμετριών στην πρόβλεψη των πειραματικά παρατηρήσιμων «στοιχειωδών σωματιδίων» της ύλης οδήγησε στην αναζήτηση μεγαλύτερων συμμετριών που σήμερα αποτελούν το καθιερωμένο μοντέλο (standard model).

Για να δούμε καλύτερα τη συμμετρία στη φυσική, ας πάρουμε τη Χαμιλτονιανή ενός πολυηλεκτρονικού συστήματος με N ηλεκτρόνια (ενός ατόμου με πολλά ηλεκτρόνια, ενός μορίου ή ενός στερεού). Ένεκα του ότι όλα τα ηλεκτρόνια έχουν την ίδια μάζα και το ίδιο φορτίο, η Χαμιλτονιανή παραμένει αναλλοίωτη ως προς τις μεταβλητές θέσης και ορμής. Αν δηλαδή εναλλάξουμε τις μεταβλητές δυο ηλεκτρονίων η Χαμιλτονιανή μένει η ίδια. Αυτό συνεπάγεται ότι οι ευσταθείς καταστάσεις του φυσικού συστήματος θα έχουν καθορισμένες ιδιότητες

μετασχηματισμού όταν εναλλάσσονται δύο μεταβλητές θέσης. Οι ποιοτικά διαφορετικές λύσεις είναι της τάξης του $N!$ ($N! = 1 \cdot 2 \dots N$). Έτσι, αν έχουμε 5 ηλεκτρόνια, οι ποιοτικά διαφορετικές λύσεις είναι 120. Ας φανταστούμε τώρα πόσες έχουμε όταν τα ηλεκτρόνια είναι της τάξης των μερικών χιλιάδων, όπως σε ένα μόριο πρωτεΐνης, ή της τάξης των τρισεκατομμυρίων ηλεκτρονίων, όπως σε ένα μεταλλικό ρίνισμα! Αν όμως υποθέσουμε ότι σε κάποια χρονική στιγμή $t = 0$ κάποιος θεός έβαλε όλα αυτά τα συστήματα σε μια κατάσταση με καθορισμένο τρόπο μετασχηματισμού, τότε, σύμφωνα με την κβαντική μηχανική και τη θεωρία των Ομάδων, οι καταστάσεις των πολυηλεκτρονικών συστημάτων θα αλλάζουν αλλά ο τρόπος μετασχηματισμού τους δεν θα αλλάζει ποτέ. Ευτυχώς, κάποιος τις έβαλε στην αντισυμμετρική μορφή, δηλαδή στη κατάσταση που περιγράφεται από μια συνάρτηση που αλλάζει πρόσημο όταν εναλλάξουμε δυο μεταβλητές θέσης. Έτσι, ευτυχώς, έχουμε μόνο μια κατηγορία λύσεων, και αυτό μας διευκολύνει στην ανεύρεση λύσεων που πάντοτε είναι προσεγγιστικές. Όσο μεγαλώνει το μόριο μεγαλώνει και ο αριθμός των ηλεκτρονίων αλλά και ο χρόνος υπολογισμού, και γι' αυτό για τα μεγάλα μόρια, όπως των πρωτεϊνών, δεν είναι δυνατόν να έχουμε με τους σημερινούς υπολογιστές αρκετά ακριβείς λύσεις. Βέβαια η ανάπτυξη της θεωρίας (εύρεση νέων θεωρημάτων που αφορούν τις ιδιότητες των λύσεων, η συμμετρία του σπιν κ.ά.) βοηθά στην αύξηση της ακρίβειας των λύσεων. Στα στερεά, παρά το ότι ο αριθμός των ηλεκτρονίων είναι τεράστιος, η κρυσταλλική συμμετρία μάς βοηθά να επιλύσουμε το πρόβλημα με αρκετή ακρίβεια.

Μέχρι τώρα δεν αναφερθήκαμε στο θέμα της θερμοδυναμικής, που στη σύγχρονη φυσική το αντικείμενό της είναι η στατιστική φυσική. Στη στατιστική φυσική ένα φυσικό μέγεθος που περιγράφει μια ιδιότητα ενός φυσικού συστήματος έχει πάντοτε τη συμμετρία της Χαμιλτονιανής. Έτσι, η ηλεκτρονική πυκνότητα σε έναν κρύσταλλο σε μια θερμοκρασία T έχει την περιοδικότητα του κρυστάλλου, έχει δηλαδή τη συμμετρία του πλέγματος στο οποίο είναι τοποθετημένοι οι πυρήνες των ατόμων. Ενόσω η θερμοκρασία αυξάνει, αυξάνει και η απόκλιση των πυρήνων από την αρχική συμμετρία, καθώς αυτό συμβάλλει στην αύξηση της εντροπίας του φυσικού συστήματος. Έτσι έχουμε «σπάσιμο» και της συμμετρίας της ηλεκτρονικής πυκνότητας, ώστε η συμμετρία μας να είναι προσεγγιστική.

Τελειώνοντας, πρέπει να τονίσουμε ότι πολλά συστήματα εξαιτίας της αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον δεν βρίσκονται σε ευσταθείς καταστάσεις. Για να δούμε αυτές τις καταστάσεις είναι απαραίτητο να κατεβάσουμε τη θερμοκρασία τους αρκετά και να τα απομονώσουμε από το περιβάλλον τους. Αυτό πρακτικώς είναι αδύνατο. Έτσι, η θεώρηση ενός πλήρως απομονωμένου συστήματος είναι μια προσέγγιση που κάνουμε για τη μελέτη του φυσικού μας συστήμα-

τος. Η προσέγγιση αυτή εξαρτάται από την ενέργεια αλληλεπίδρασης των μερών του φυσικού συστήματος. Σε ένα μόριο η ενέργεια αυτή είναι μικρή, ενώ αντίθετα στους πυρήνες είναι πολύ μεγάλη. Έτσι, ένας ατομικός πυρήνας μπορεί να θεωρηθεί απομονωμένο σύστημα χωρίς να είναι απαραίτητο να κατεβάσουμε τη θερμοκρασία του σώματος στο οποίο βρίσκεται.

5. Περίληψη και συμπεράσματα

Από τα προηγούμενα κεφάλαια συμπεραίνουμε ότι οι συμμετρίες, εκτός από την πρακτική και την αισθητική τους πλευρά στην τέχνη, αποτελούν σήμερα βασικό εργαλείο της φυσικής, ενώ η αντίστοιχη μαθηματική θεωρία λέγεται Θεωρία Ομάδων. Βάσει της Θεωρίας Ομάδων, διατυπώνονται φυσικές αρχές που διέπουν τη δυναμική των φυσικών συστημάτων. Οι ευσταθείς καταστάσεις των φυσικών συστημάτων που η δυναμική τους έχει μια συμμετρία έχουν γενικά μικρότερη συμμετρία. Αυτό εμφανιζόταν στους παλαιότερους φυσικούς σαν σπάσιμο της συμμετρίας. Βέβαια, μπορεί να έχουμε πραγματικό σπάσιμο της συμμετρίας λόγω του ότι οι συμμετρίες γενικά είναι προσεγγιστικές, τόσο στη φύση όσο και στη δυναμική των φυσικών συστημάτων. Πολλές φορές συμβαίνει και το αντίθετο: δηλαδή η συμμετρία της δυναμικής του φυσικού συστήματος μπορεί να είναι πιο μεγάλη από αυτές που αρχικά υποθέτουμε, με αποτέλεσμα την απόκλιση από κάποια πειραματικά δεδομένα. Για το λόγο αυτόν, αναζητούνται μεγαλύτερες συμμετρίες. Τέτοια, όπως αναφέραμε είναι η περίπτωση της SU_2 που αποτελεί υποομάδα της SU_3 , αλλά και αυτή θεωρήθηκε υποομάδα μιας άλλης ομάδας που αποτελεί σήμερα το γενικά αποδεκτό μοντέλο (standard model) των στοιχειωδών σωματιδίων της ύλης τα οποία, όπως είδαμε, είναι σύνθετα με δομικά στοιχεία τα κουάρκς.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι συμμετρία στη φυσική σημαίνει απλότητα. Η απλότητα αυτή έχει σαν συνέπεια την εύκολη διατύπωση φυσικών αρχών και την απλοποίηση των λύσεων. Έτσι γίνεται δυνατή η μελέτη μεγάλων συστημάτων που περιέχουν πολλά σωματίδια. Τέτοια συστήματα είναι όλα τα άτομα, τα μόρια και τα στερεά, των οποίων είναι σήμερα δυνατό να μελετήσουμε τις διάφορες ευσταθείς καταστάσεις τους χάρις στη συμμετρία που συνεπάγεται η ταυτότητα των ηλεκτρονίων. Αν δηλαδή θεωρήσουμε ένα «υποθετικό μόριο» αποτελούμενο από κάποιους ατομικούς πυρήνες και ηλεκτρόνια, μπορούμε να αποφανθούμε αν αυτό υπάρχει στη φύση και ποιες είναι οι ιδιότητές του, καθώς και ποιες είναι οι αντιδράσεις του με άλλα μόρια διαφορετικού τύπου. Έτσι, ουσιαστικά έχουμε παραγωγή όλης της Χημείας από μερικές μόνο φυσικές αρχές που μπορούμε να γράψουμε σε μια μόνο σελίδα βιβλίου.

Η συμμετρία μπορεί να είναι συνέπεια μιας άλλης φυσικής αρχής. Τέτοια για παράδειγμα είναι στην κλασική φυσική η αρχή της ελάχιστης ενέργειας. Για το λόγο αυτό, μια φουσαλίδα έχει σφαιρικό σχήμα, και για τον ίδιο λόγο πολλοί καρποί των δέντρων είναι κατά προσέγγιση σφαιρικοί. Ομοίως στις διάφορες κατασκευές επιβάλλονται διάφορες συμμετρίες για λόγους ευστάθειας και οικονομίας υλικών και εργασίας.

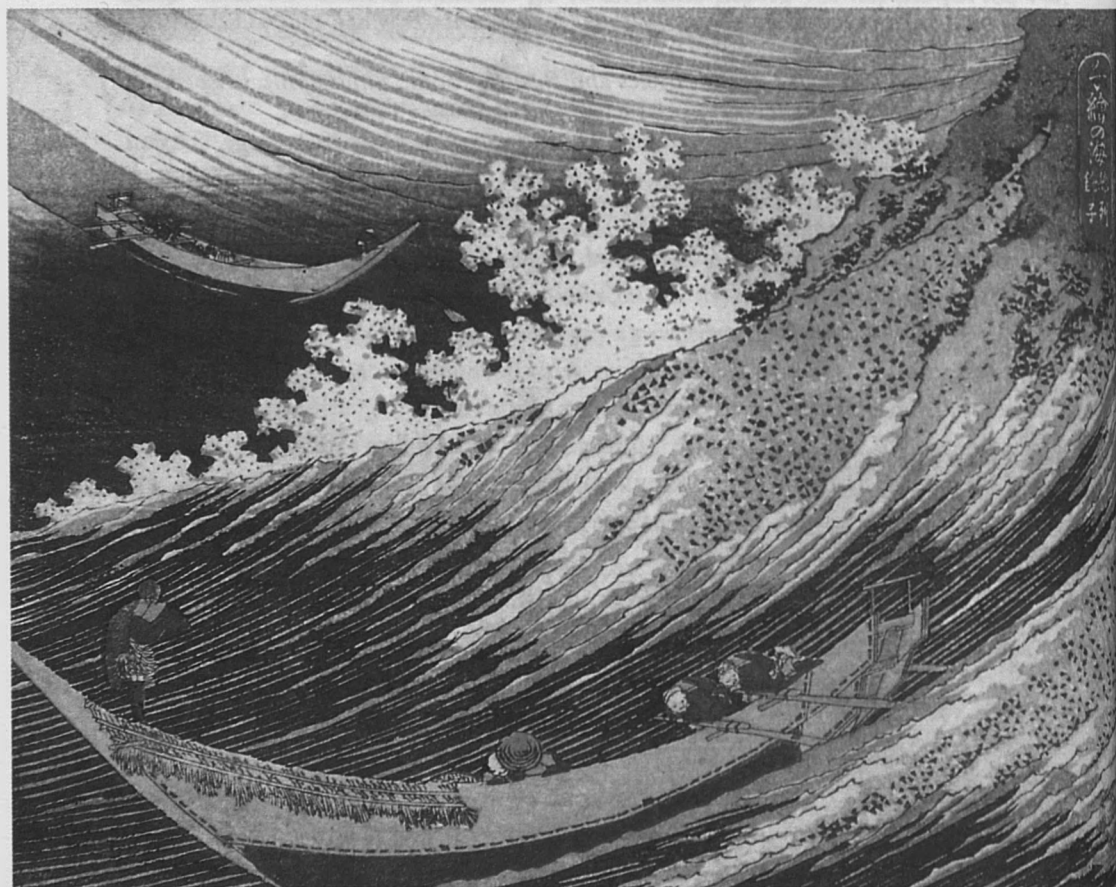
Τελικά πρέπει να τονίσουμε ότι οι συμμετρίες είναι πάντοτε προσεγγιστικές, αποτελούν δηλαδή εξιδανικεύσεις στις οποίες ένα φυσικό σύστημα θεωρείται απομονωμένο από τον υπόλοιπο κόσμο. Αυτό όμως είναι δυνατό ύστερα από αρκετή πειραματική προσπάθεια, και η διάρκεια αυτής της απομόνωσης είναι χρονικά περιορισμένη. Έτσι πάντοτε προσεγγίζουμε ένα φυσικό φαινόμενο με εξιδανικεύσεις. Στα συστήματα που βρίσκονται σε θερμική ισορροπία, τα διάφορα φυσικά μεγέθη έχουν τη συμμετρία της Χαμιλτονιανής. Αυτή η συμμετρία όμως σπάει λόγω των αλληλεπιδράσεων με το υπόλοιπο μέρος του περιβάλλοντός του, δηλαδή της θερμικής δεξαμενής. Και αυτό συμβαίνει διότι ένα σύστημα σε θερμοδυναμική ισορροπία ανταλλάσσει μικρά ποσά ενέργειας με το περιβάλλον του, με συνέπεια τη θερμοδυναμική ισορροπία του.

Εδώ τίθεται το φιλοσοφικό ερώτημα. Ποια είναι η βαθύτερη αιτία των συμμετριών της φυσικής, ιδιαίτερα των φαινομενολογικών, που δεν προέρχονται από συμμετρίες στο χωροχρόνο; Η ύπαρξη αυτών των συμμετριών είναι συνέπεια περισσότερων μεταβλητών του χώρου και του χρόνου ή κάποιας άλλης βασικής φυσικής που ακόμη δεν ξέρουμε; Τα σχεδιαζόμενα πειράματα στον νέο επιταχυντή καδρονιών του CERN θα δώσουν κάποιες απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα.

Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε ότι οι συμμετρίες αποτελούν δυναμικό ζεύγος με την αντίθεση. Οι ευσταθείς καταστάσεις είναι καταστάσεις ισορροπίας ανάμεσα σε αντίθετες δυνάμεις. Το σπάσιμο της συμμετρίας λόγω εξωτερικής ή ενδογενούς διαταραχής οδηγεί σε νέες καταστάσεις όπου η συμμετρία προϋποθέτει νέες αντιθετικές δυνάμεις και την προσωρινή ή πάγια ισορροπία της (βλ. βιβλιογραφία αρ. 10).

Βιβλιογραφία

1. P. Zielinski, "Spatial and temporal symmetries in Arts and in Music, στο *Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter Physics*, σελ. 449, T. Lulec/B. Lulec/A. Wal (επιμ.), World Scientific 2001, Singapore/New Jersey/London/Hong Kong (2001).
2. M. Barone/A. K. Theophilou, *Symmetry and Symmetry breaking in Modern Physics*, J. Physics, Conf. Ser 104, 012037 (2008).
3. Th. Brody, *Philosophy behind Physics*, L. de la Pena/P. Hodgson (επιμ.), Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/N. York (1993).
4. "Symmetry and Symmetry breaking", *Standford Encyclopedia of Philosophy*. <http://plato.stanford.edu>.
5. L. Bonolis, *From the Rise of the Group Concept to the Stormy Onset of Group Theory in New Quantum Mechanics. A saga of the invariant characterization of physical objects, events and theories*, Rivista del Nuovo Cimento, τόμ. 27, N4-5 (2004).
6. L. B. Okun, *The impact of the Sakata Model*, J. Lipkin, rXiv:hep-ph/0611298v2 26 Feb. 2007.
7. H. J. Lipkin, *From Sakata Model to Goldberg-Ne'eman Quarks and Nambu QCD Phenomenology and "Right" and "Wrong" experiments*, rXiv:hep-ph/0611298v2, 26 Feb. 2007.
8. H. Zinkernagel, *High Energy Physics and Reality - Some Philosophical Aspects of Science*, Ph. D. Thesis (διδακτορική διατριβή), Φεβρουάριος 1998.
9. Karin Knorr Cetina, *Epistemic Cultures, How the Sciences Make Knowledge*, Harvard University Press 2003.
10. E. Bitsakis, "Symmetry and Contradiction", *Science and Society* XXXVIII, 3, 1974, σ. 326. Του ιδίου, *Physique et Matérialisme*, Ed. Sociales, Paris 1983, κεφάλαιο 3. Του ιδίου *Διαλεκτική και νεώτερη φυσική*, Δαίδαλος-I. Ζαχαρόπουλος, 2001, κεφάλαιο 7.



Katsushika Hokusai, Ιαπωνία. Χίλιες όψεις της θάλασσας, 1832-1834 περ.