

Το κλειστό γραμμικό μοντέλο παραγωγής*

του

David Gale

(μετάφραση: Γιώργος Σωτήρχος)

1. Εισαγωγή

Το 1937 ο John von Neumann έδωσε την πρώτη μαθηματική πραγμάτευση ενός οικονομικού μοντέλου διαστελόμενου με σταθερό ρυθμό. Το μοντέλο αυτό είναι ένα σύστημα παραγωγής αποτελούμενο από ένα σύνολο τεχνολογικών διαδικασιών, κάθε μια από τις οποίες δύναται να αναλώνει ορισμένες ποσότητες διάφορων αγαθών και να τις μετατρέπει σε προσδιορισμένες ποσότητες άλλων αγαθών. Το μοντέλο είναι κλειστό με την έννοια ότι δεν υπάρχει ροή αγαθών από και προς το μοντέλο και όλα τα αγαθά, τα οποία έχουν παραχθεί από το μοντέλο κατά την διάρκεια μιας δεδομένης περιόδου, χρησιμοποιούνται, όχι απαραίτητα εξ ολοκλήρου, ως εισροές του ιδίου μοντέλου σε κάποια μεταγενέστερη χρονική περίοδο. Ως εκ τούτου η μόνη λειτουργία του μοντέλου είναι να διαιωνίζει κατά κάποιο τρόπο την ύπαρξή του.

Ο όρος γραμμικός, εφαρμοσμένος στο μοντέλο αυτό, δηλώνει ότι εάν όλες οι εισροές πολλαπλασιαστούν με μία μη-αρνητική σταθερά τότε και οι εκροές του μοντέλου πολλαπλασιάζονται με την ίδια σταθερά. Με διαφορετική ορολογία οι συναρτήσεις παραγωγής είναι ομογενείς πρώτου βαθμού. Η σταθερά, με την οποία πολλαπλασιάζεται μία δεδομένη διαδικασία παραγωγής, ονομάζεται *ένταση* αυτής της διαδικασίας παραγωγής. Στην συνέχεια αποδεικνύεται ότι, με την ταυτόχρονη λειτουργία των διαδικασιών παραγωγής σε κατάλληλες εντάσεις, είναι δυνατόν να αυξάνονται οι ποσότητες όλων των αγαθών. Αυτή η έννοια της διαστολής είναι η κεντρική ιδέα του άρθρου του von Neumann. Μιλώντας κατά προσέγγιση, ο John von Neumann ορίζει για το μοντέλο έναν συντελεστή διαστολής α και στην συνέχεια αποδεικνύει πως οι τιμές μπορούν να επιλεγούν κατά τέτοιο τρόπο ώστε η διαστολή του μοντέλου με ρυθμό α μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα είδος δυναμικής οικονομικής ισορροπίας.

* Δημοσιεύτηκε στο "Annals of Mathematics Studies, 1956", Study 38 με υπότιτλο "*Linear Inequalities and Related Systems*", εκδότες ήσαν Kuhn και Tucker.

** Υποσημ, του Μεταφραστή: Ο Gale ονομάζει διαδικασία παραγωγής αυτό που οι αναγνώστες του ανά χείρας περιοδικού γνωρίζουν ως τεχνική παραγωγής.

Οι αυθεντικές αποδείξεις του John von Neumann ήταν ιδιαίτερα περίπλοκες, εξαρτώμενες από τα θεωρήματα του σταθερού σημείου της τοπολογίας. Πρόσφατα διάφοροι αρθρογράφοι έχουν δώσει στοιχειώδεις αποδείξεις του θεωρήματος του von Neumann [2], [3]. Εντούτοις, όλες οι αποδείξεις που έχουν εμφανιστεί έως τώρα περιέχουν μια σοβαρή αδυναμία. Αυτή είναι η χρήση της υπόθεσης:

(H) Κάθε διαδικασία παραγωγής περιλαμβάνει κάθε αγαθό στην οικονομία είτε ως εισροή είτε ως εκροή.

Αυτή η συνθήκη, που είναι προφανώς αφύσικη από οικονομική σκοπιά, χρησιμοποιήθηκε στο [1] για να αποδειχθεί η μοναδικότητα του συντελεστή διαστολής¹.

Στο παρόν άρθρο αναπτύσσουμε ένα μοντέλο, το οποίο είναι ασθενής γενίκευση του [1]. Τα θεωρήματα διαστολής και ισορροπίας αποδεικνύονται με στοιχειώδη τρόπο χωρίς την χρήση της υπόθεσης (H). Η προσέγγιση και οι ορισμοί μας διαφέρουν κατά τι από αυτούς του von Neumann, έχοντας ως σκοπό την διαφάνεια της οικονομικής ερμηνείας του μοντέλου. Στο επόμενο τμήμα δίνουμε μια ακριβή περιγραφή του υπό πραγμάτευση μοντέλου. Στο τμήμα 3 αποδεικνύεται το θεμελιώδες θεώρημα διαστολής και ερμηνεύεται οικονομικά. Στην συνέχεια το αποτέλεσμα αυτό εφαρμόζεται σε “ομαλά” μοντέλα, όπου η συνθήκη της ομαλότητας είναι μία ουσιώδης εξασθένιση της συνθήκης (H). Στο τμήμα 4 τα θεμελιώδη θεωρήματα χρησιμοποιούνται για να δώσουν νέα αποτελέσματα για το μοντέλο von Neumann, τα οποία παρουσιάζονται με αριθμητικά παραδείγματα στο τμήμα 5. Το τελευταίο τμήμα πραγματεύεται την ειδική περίπτωση του μοντέλου Leontief, όπου η θεωρία διαστολής έχει μια ιδιαίτερα απλή και κομψή μορφή.

2. Το μοντέλο

Συμβολισμός. Σε όλο το άρθρο τα λατινικά γράμματα θα συμβολίζουν διανύσματα και τα ελληνικά γράμματα πραγματικούς αριθμούς. Το βαθμωτό γινόμενο των διανυσμάτων x και y θα γράφεται xy .

Εάν $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ είναι ένα διάνυσμα, τότε θα λέμε ότι

το x είναι θετικό, $x > 0$, εάν $\xi_i > 0$ για κάθε i ,

το x είναι μη-αρνητικό, $x \geq 0$, εάν $\xi_i \geq 0$ για κάθε i ,

1. Αφού είχε γραφτεί το παρόν άρθρο (βλέπε [5] και [6]) οι Kemeny, Morgenstern και Thompson έφεραν εις πέρας μία ανεξάρτητη διερεύνηση ενός μοντέλου von Neumann χωρίς την υπόθεση (H).

το x είναι ημι-θετικό, $x \geq 0$, εάν $x \geq 0$ και $x \neq 0$.

Το διάνυσμα e_j θα συμβολίζει το j -οστό μοναδιαίο διάνυσμα, δηλαδή, το διάνυσμα του οποίου η j -οστή συντεταγμένη του είναι ίση με την μονάδα και όλες οι άλλες ίσες με μηδέν.

Θα φανεί χρήσιμο να προσαρθήσουμε στους πραγματικούς αριθμούς το σύμβολο του απείρου, ∞ . Συμβολίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς (το σύνολο των πραγματικών αριθμών - Σ.τ.Μ.) με R και τους πραγματικούς αριθμούς με προσαρμοσμένο το ∞ (το σύνολο των πραγματικών αριθμών με προσαρμοσμένο το ∞ - Σ.τ.Μ.) με R_∞ . Στην συνέχεια επεκτείνουμε την διάταξη των πραγματικών αριθμών από το R στο R_∞ βάσει του κανόνα:

για κάθε $\lambda \in R$, $\lambda < \infty$.

Η περιγραφή του μοντέλου θα χωριστεί σε δύο μέρη, το πρώτο, καθαρά τεχνολογικό, επικεντρώνεται μόνο στις δυνατότητες παραγωγής του μοντέλου. Το δεύτερο μέρος είναι οικονομικό, στο οποίο συσχετίζουμε την λειτουργία του μοντέλου με τις τιμές. Τα θεμελιώδη θεωρήματα του επομένου τμήματος θα συνδέσουν τις δύο αυτές όψεις του μοντέλου.

A. Τεχνολογία

Το υπό εξέταση μοντέλο θα περιέχει n αγαθά, $G_1, \dots, G_n$. Ο όρος αγαθά μπορεί να θεωρηθεί ότι συμπεριλαμβάνει υπηρεσίες, διαφορές μορφές εργασίας, κλπ. Τα αγαθά παράγονται μέσω διαδικασιών όπου η ποσότητα ξ_i του αγαθού G_i αναλώνεται κάθε χρονική περίοδο και παράγεται η ποσότητα η_i του ιδίου αγαθού. Μία διαδικασία μπορεί κατά συνέπεια να συμβολίζεται από ένα ζεύγος μη-αρνητικών διανυσμάτων (x, y) , όπου $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ονομάζεται το διάνυσμα εισροής και το $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ονομάζεται το διάνυσμα εκροής. Το αγαθό G_i ονομάζεται εισροή (εκροή) της διαδικασίας (x, y) , εάν $\xi_i > 0$, ($\eta_i > 0$).

Χρειαζόμαστε μια περαιτέρω συνθήκη για την διαδικασία (x, y) ώστε να εκφράσουμε το γεγονός ότι δεν μπορεί να παραχθεί τίποτα χωρίς εισροές. Αυτή η συνθήκη παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Υπόθεση 1. Εάν (x, y) είναι μια διαδικασία, τότε εάν $x = 0$, συνεπάγεται ότι $y = 0$.

Το σύνολο Z όλων των διαδικασιών παραγωγής είναι κατά φυσικό τρόπο ένα υποσύνολο του πραγματικού χώρου με διάσταση $2n$, R_{2n} . Ονομάζεται δε χώρος παραγωγής και υποθέτουμε ότι ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:

Υπόθεση 2. Ο χώρος Z είναι ένας κλειστός κυρτός κώνος, δηλαδή,

(a) ο Z είναι κλειστός στο R_{2n} ,

(b) εάν $z_1, z_2 \in Z$, τότε $z_1 + z_2 \in Z$,

(c) εάν $z \in Z$ και $\lambda \geq 0$, τότε $\lambda z \in Z$.

Η συνθήκη (b) εκφράζει το γεγονός ότι από δύο διαδικασίες μπορεί να διαμορφωθεί μία τρίτη συνδυάζοντας ταυτόχρονα τη λειτουργία των δύο πρώτων. Η συνθήκη (c) είναι ο περιορισμός της γραμμικότητας που έχει ήδη περιγραφεί. Το μοντέλο von Neumann αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο κώνος είναι πολυεδρικός, δηλαδή, στην περίπτωση που παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων.

Το σύνολο των αγαθών μαζί με το χώρο παραγωγής Z θα αποτελεί το μοντέλο M .

ΟΡΙΣΜΟΣ. Εάν $(x, y) \in Z$, $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ και G_j είναι ένα αγαθό, ορίζουμε το ρυθμό διαστολής του G_j στην διαδικασία (x, y) ως

$$\alpha(x, y) = \left\{ \begin{array}{c} \eta_j / \xi_j \\ \infty \\ \text{απροσδιόριστο} \end{array} \right\} \text{ για } \left\{ \begin{array}{c} \xi_j > 0 \\ \xi_j = 0, \eta_j > 0 \\ \xi_j = \eta_j = 0 \end{array} \right\}$$

Ο τεχνολογικός ρυθμός διαστολής της διαδικασίας (x, y) ορίζεται ως

$$\alpha(x, y) = \min_j \alpha_j(x, y)$$

(Από την Υπόθεση 1, ο συντελεστής $\alpha(x, y)$ είναι ορισμένος σε όλες τις περιπτώσεις για $(x, y) \neq 0$ και είναι πάντα ένας πραγματικός αριθμός).

Με άλλα λόγια, η διαδικασία (x, y) παράγει τουλάχιστον $\alpha(x, y)$ φορές την ποσότητα του αγαθού που καταναλώνει. Εάν θεωρήσουμε την διαδικασία (x, y) ως μια διαδικασία που λειτουργεί για ένα χρονικό διάστημα, τότε το $\alpha(x, y)$ αντιπροσωπεύει το μέγιστο ποσοστό κατά το οποίο η διαδικασία αυτή μπορεί να διαστέλλεται, “ανατροφοδοτούμενη” κατά την διάρκεια της επομένης περιόδου παραγωγής με εισροές τις εκροές μιας περιόδου παραγωγής.

Ο τεχνολογικός ρυθμός διαστολής α του μοντέλου M ορίζεται ως

$$\alpha_M = \max \alpha(x, y), \text{ για } (x, y) \in Z \text{ και } (x, y) \neq 0.$$

Το γεγονός ότι η συνάρτηση α έχει μέγιστο μπορεί να αποδειχθεί παρατηρώντας ότι η α είναι παντού συνεχής στο Z εκτός από το σημείο $(0, 0)$. Έστω ότι $\hat{Z}$ είναι η τομή του Z με την μοναδιαία σφαίρα στον χώρο $2n$ διαστάσεων. Δεδομένου ότι το Z είναι κλειστό σύνολο, το $\hat{Z}$ είναι συμπαγές και συνεπώς μια συνάρτηση α έχει

μέγιστο $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$ στο $\hat{Z}$. Στην πραγματικότητα το μέγιστο αυτό είναι μέγιστο του Z , διότι εάν $(x, y) \in Z$, $(x, y) \neq 0$, $\lambda > 0$, τότε $(x, y) = \lambda(\hat{x}, \hat{y})$, όπου $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{Z}$, $\lambda > 0$, και από τον ορισμό του α συνεπάγεται ότι $\alpha(x, y) = \alpha(\lambda\hat{x}, \lambda\hat{y}) = \alpha(\hat{x}, \hat{y}) \leq \alpha(\bar{x}, \bar{y})$.

Θα ονομάζουμε μία διαδικασία παραγωγής (x, y) *άριστη* εάν $\alpha(x, y) = \alpha_M$. (Ο όρος *άριστη* διαδικασία χρησιμοποιείται εδώ με καθαρά τεχνική έννοια και δεν θα έπρεπε να ερμηνεύεται ότι σημαίνει κάποιο είδος ιδανικής λειτουργίας της οικονομίας. Για παράδειγμα μία άριστη διαδικασία παραγωγής θα μπορούσε να αποτελείται από κουνέλια πολλαπλασιαζόμενα με έναν εκπληκτικά γρήγορο ρυθμό ενώ όλα τα άλλα αγαθά στην οικονομία πολλαπλασιάζονται με ένα μικρότερο ρυθμό², το οποίο γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι είναι δίχως νόημα. Όμως, εάν δεχτούμε την μη ρεαλιστική υπόθεση ενός κλειστού μοντέλου, δηλαδή την υπόθεση ότι δεν υπάρχει εξωγενής ζήτηση, τότε δεν υπάρχει κανένας λόγος για αυτό το μοντέλο να “επιθυμεί” να παράγει οτιδήποτε άλλο εκτός από κουνέλια, εάν η παραγωγή κουνελιών είναι αυτό που κάνει καλύτερα. (για ομαλά μοντέλα, τα οποία θα οριστούν στο επόμενο τμήμα, αυτός ο ιδιαίτερος τύπος μη-ομαλής συμπεριφοράς δεν μπορεί να υπάρξει.)

Εξ ορισμού ο συντελεστής διαστολής α είναι μη-αρνητικός. Μοντέλα των οποίων ο συντελεστής διαστολής είναι μηδέν δεν θα μας απασχολήσουν εδώ, δεδομένου ότι τέτοια μοντέλα θα πάψουν να λειτουργούν άμεσα. Για να αποκλείσουμε την περίπτωση αυτή επιβάλουμε ακόμη μία συνθήκη.

Υπόθεση 3. Κάθε αγαθό G_j είναι εκροή τουλάχιστον μίας διαδικασίας του Z .

Για μοντέλα που ικανοποιούν την Υπόθεση 3, $\alpha_M > 0$, έστω (x_j, y_j) μία διαδικασία τέτοια ώστε $\eta_j > 0$. Τότε εάν $(x, y) = \sum_j (x_j, y_j)$, βλέπουμε ότι $y > 0$ και ως εκ τούτου $0 < \alpha(x, y) \leq \alpha_M$.

Μολονότι χρησιμοποιήσαμε τον όρο διαστολή, δεν υπάρχει τίποτα στις υποθέσεις μας που να απαιτεί το α_M να είναι μεγαλύτερο της μονάδας. Όντως, η θεωρία που θα αναπτυχθεί στα επόμενα τμήματα δεν εξαρτάται από την τιμή του α_M (εάν είναι μεγαλύτερη της μονάδας -Σ.τ.Μ.), αλλά θα έχει εξίσου ισχύ και για συσσελλόμενα μοντέλα (όπου η τιμή του M είναι μικρότερη της μονάδας -Σ.τ.Μ.).

2. Αυτή η παρατήρηση και το παράδειγμα οφείλονται στον κριτή του άρθρου αυτού, στον οποίο ο συγγραφέας είναι υπόχρεος για πολλές χρήσιμες υποδείξεις.

B. Οικονομικά

Ένα διάνυσμα τιμών, $p = (\pi_1, \dots, \pi_n) \geq 0$ είναι μία αντιστοιχία των τιμών προς τα αγαθά $G_1, \dots, G_n$, όπου π_j είναι η τιμή μιας μονάδας του G_j . Δεδομένων των τιμών p και μιας διαδικασίας (x, y) , βλέπουμε ότι το κόστος της διαδικασίας είναι xp και τα έσοδα από την διαδικασία είναι yp , έτσι ώστε, η διαδικασία είναι κερδοφόρα ή όχι εάν το yp είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του xp . Αυτό μας οδηγεί στον δεύτερο βασικό ορισμό.

Ορισμός. Δεδομένου ενός διανύσματος p και μίας διαδικασίας (x, y) ο οικονομικός ρυθμός διαστολής της διαδικασίας (x, y) για τιμές p ορίζεται από

$$\beta(x, y; p) = \begin{cases} yp/xp \\ \infty \\ \text{απροσδιόριστο} \end{cases} \text{ για } \begin{cases} xp > 0 \\ xp = 0, yp > 0 \\ xp = yp = 0 \end{cases}$$

Ο οικονομικός ρυθμός διαστολής μετρά το ρυθμό με τον οποίο αυξάνει η αξία των αγαθών που συμμετέχουν σε μία διαδικασία. Η σημασία του είναι: Ενδιαφερόμαστε για μία οικονομία, στην οποία κάθε διαδικασία θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μία επιχείρηση, που ο μόνος σκοπός της είναι να επεκτείνεται, δηλαδή να αυξάνει την κλίμακα λειτουργίας της. Εάν θεωρήσουμε ότι η παραγωγή πραγματοποιείται σε διακριτές χρονικές περιόδους, π.χ. διάρκειας ενός έτους, τότε η επιθυμία του χειριστή κάθε διαδικασίας είναι να αυξήσει το επίπεδο δραστηριότητας της διαδικασίας αυτής το τρέχον έτος ρ φορές σε σχέση με το προηγούμενο έτος. Αυτό που προσδιορίζει τον παράγοντα ρ είναι ακριβώς το κέρδος από την παραγωγή του τελευταίου έτους, για την οποία υποθέτουμε ότι ο χειριστής της διαδικασίας μπορεί μόνον να χρησιμοποιήσει τα έσοδα του τελευταίου έτους για να πληρώσει τα έξοδα του τρέχοντος έτους. Ως εκ τούτου ο ρυθμός διαστολής ρ της διαδικασίας (x, y) είναι πάνω φραγμένος από τον οικονομικό συντελεστή διαστολής $\beta(x, y; p)$.

Κατ' αναλογία με τον ορισμό της συνάρτησης α ορίζουμε

$$\beta(p) = \max \beta(x, y; p), \text{ για } (x, y) \in Z.$$

Κατά συνέπεια το $\beta(p)$ αντιπροσωπεύει το μέγιστο ρυθμό με τον οποίο μπορεί να αυξηθεί η αξία των αγαθών στο μοντέλο για τιμές p . Η συνάρτηση β δεν έχει εν γένει ως πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών, και για ορισμένες τιμές του p παίρνει την τιμή ∞ .

Τέλος ορίζουμε

$$\beta_m = \min_p \beta(p)$$

Είναι προφανές ότι το β είναι ένας πραγματικός αριθμός δεδομένου ότι για $p > 0$, $\beta(p) < \infty$, χρησιμοποιώντας την Υπόθεση 1. Οι σχέσεις ανάμεσα στις συναρτήσεις α και β είναι τα κεντρικά αντικείμενα του επόμενου τμήματος.

3. Τα θεωρήματα διαστολής

Είμαστε τώρα σε θέση να παραθέσουμε τα κεντρικά αποτελέσματα αυτού του άρθρου.

Θεώρημα 1. Εάν M είναι ένα μοντέλο με τεχνολογικό συντελεστή διαστολής α τότε υπάρχει μία άριστη διαδικασία και ένα διάνυσμα τιμών p , τέτοια ώστε

$$\beta(\bar{x}, \bar{y}; p) = \alpha_M \quad (1)$$

$$\beta(x, y; p) \leq \alpha_M \text{ για κάθε } (x, y) \in Z \text{ για τα οποία το } \beta(x, y; p) \quad (2)$$

ορίζεται.

Διακόπτουμε στο σημείο αυτό για να ερμηνεύσουμε το θεώρημα αυτό. Όπως σημειώθηκε στο τελευταίο τμήμα, υποθέτουμε ότι κάθε διαδικασία (x, y) “επιθυμεί” να αυξάνεται με τον μέγιστο ρυθμό που είναι *οικονομικά εφικτός*, ήτοι $\beta(x, y; p)$. Από την άλλη πλευρά, εάν οι τιμές δεν έχουν οριστεί “κατάλληλα”, μπορεί να μην είναι *τεχνολογικά δυνατόν* η διαδικασία αυτή να αυξάνεται με αυτό τον ρυθμό, το οποίο σημαίνει απλά ότι το υπόλοιπο της οικονομίας δεν μπορεί να προσφέρει τις εισροές, τις οποίες ο χειριστής της διαδικασίας αυτής (x, y) αδημονεί και δύναται να αγοράσει. Αυτή η υπερβάλλουσα ζήτηση δεν παρουσιάζεται εάν οι τιμές ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος 1, για το οποίο βλέπουμε ότι ενώ κάποια άριστη διαδικασία $(\bar{x}, \bar{y})$ θα είναι από οικονομική άποψη ικανή να διαστέλλεται στο μέγιστο ρυθμό α_M , καμία διαδικασία δεν θα “δελεαστεί”, ή ακόμη δεν θα μπορεί από οικονομική άποψη, να διαστέλλεται με ρυθμό μεγαλύτερο από τον μέγιστο δυνατό. Κατά συνέπεια το διάνυσμα τιμών p μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος διανύσματος τιμών ισορροπίας που εξασφαλίζει ότι η ζήτηση δεν υπερβαίνει την προσφορά.

Απόδειξη. Ορίζουμε το σύνολο:

$$C = \{ c \mid c = \alpha_M x - y, (x, y) \in Z \}.$$

Από το γεγονός ότι το Z είναι κυρτός κώνος στο R_{2n} επαληθεύεται άμεσα ότι το C είναι επίσης ένας κυρτός κώνος στο R_n . Τώρα ανάμεσα σε όλες τις άριστες διαδικασίες επιλέγουμε μία, την $(\bar{x}, \bar{y})$ τέτοια ώστε $\bar{\eta}_j > 0$ σε ένα μέγιστο σύνολο αγαθών, έστω, $G_1, \dots, G_k$. Αυτό συνεπάγεται ότι καμία άριστη διαδικασία δεν έχει

περισσότερες από k αγαθά ως εκροή. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι ο κώνος C δεν περιέχει κανένα διάνυσμα $c = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \leq 0$, τέτοιο ώστε $\gamma_j < 0$, για όλα τα $j \leq k$, διότι εάν $\alpha_M x - y$ ήταν ένα τέτοιο διάνυσμα τότε, δεδομένου ότι $\gamma_j = \alpha_M \xi_j - \eta_j$, θα είχαμε $\alpha_j(x, y) \geq \alpha_M$, όπου αυτό ορίζεται, και $\alpha_j(x, y) > \alpha_M$ για $j \leq k$. Κατά συνέπεια η διαδικασία (x, y) θα ήταν άριστη. Από την παραπάνω υπόθεση μεγιστοποίησης ισχύει για $j > k$, $\eta_j = 0$ και ως εκ τούτου $\xi_j = 0$, και σε αυτή την περίπτωση το $\alpha_j(x, y)$ είναι απροσδιόριστο. Αυτό, όμως, θα σήμαινε ότι $\alpha(x, y) > \alpha_M$, που αποτελεί αντίφαση.

Τώρα έστω

$$Q_k = \{q \mid q = (\theta_1, \dots, \theta_n), \theta_j \geq 0, \text{ για } j \leq k\}$$

$$D = Q_k + C = \{d \mid d = q + c, q \in Q_k, c \in C\}$$

Τότε ο D είναι επίσης ένας κυρτός κώνος (στο R_n - Σ.τ.Μ.) και δεδομένου ότι κανένα διάνυσμα στο C δεν έχει τα j πρώτα στοιχεία του αρνητικά, το ίδιο ισχύει και για το D . Ιδιαίτέρως το D δεν ταυτίζεται με τον χώρο με διάσταση n και ως εκ τούτου από την θεμελιώδη ιδιότητα των κυρτών κώνων περιέχεται σε έναν ημιχώρο H . Έστω ότι $p = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ είναι ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο H τότε $pd \geq 0$ για κάθε $d \in D$. Τώρα για $j \leq k$, $\pi_j = pe_j > 0$ δεδομένου ότι $e_j \in Q_k \subset D$. Για $j > k$, $\pi_j = 0$, δεδομένου ότι αμφότερα τα e_j και $-e_j$ ανήκουν στο Q_k . Ως εκ τούτου το p είναι ένα ημιθετικό διάνυσμα (αφού είναι ένα διάνυσμα τιμών) και τουλάχιστον μία από τις k πρώτες συντεταγμένες του είναι θετική. Επίσης $pc \geq 0$ για κάθε $c \in C$ και δεδομένου ότι $p(\alpha_M x - y) \geq 0$ για κάθε $(x, y) \in Z$. Κατά συνέπεια $\alpha_M xp \geq yp$, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι $\beta(x, y; p) \leq \alpha_M$, όταν αυτό ορίζεται, το οποίο είναι ο ισχυρισμός (2) του θεωρήματος.

Για να επαληθεύσουμε τον ισχυρισμό (1), απλά παρατηρούμε ότι $\bar{y} \geq \alpha_M \bar{x}$ και ως εκ τούτου $\bar{y}p \geq \alpha_M \bar{x}p$. Δεδομένου ότι οι πρώτες k συντεταγμένες του y είναι θετικές προκύπτει ότι $\bar{y}p > 0$, και ως εκ τούτου το $\beta(\bar{x}, \bar{y}; p)$ ορίζεται και $\alpha_M \leq \beta(x, y; p)$, και συνδυάζοντας αυτό με τον παραπάνω ισχυρισμό (2) καταλήγουμε στον ισχυρισμό (1), και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πόρισμα 1. Για κάθε μοντέλο, $\alpha_M \geq \beta_m$.

Ονομάζουμε κάθε διάνυσμα που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος 1 *άριστο*. Μια από τις συνθήκες που χαρακτηρίζουν το άριστο διάνυσμα τιμών στο μοντέλο von Neumann ήταν ότι οι τιμές όλων των αγαθών που υπερπαράγονται θα πρέπει να είναι ίσες με μηδέν. Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό αυτό ως μία απλή συνέπεια του Θεωρήματος 1.

Πόρισμα 2. Έστω ότι p είναι ένα άριστο διάνυσμα τιμών και (x, y) μια άριστη διαδικασία. Τότε, εάν $\eta_j > \alpha_M \xi_j$, συνεπάγεται ότι $\pi_j = 0$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα, $p(y - \alpha_M x) = 0$, και δεδομένου ότι και το p και το $y - \alpha_M x$ είναι μη-αρνητικά δεν μπορούν και τα δύο να έχουν θετικές j -οστές συντεταγμένες.

Τώρα θα αναφερθούμε σε μία σημαντική ειδική περίπτωση.

Ορισμός. Το μοντέλο M θα ονομάζεται *ομαλό* εάν για κάθε άριστη διαδικασία (x, y) ισχύει $y > 0$.

Στα ομαλά μοντέλα κάθε άριστη διαδικασία παράγει μία θετική ποσότητα όλων των αγαθών, δηλαδή η οικονομία δεν μπορεί να διασταλεί με τον μέγιστο ρυθμό χωρίς να παράγονται όλα τα αγαθά. Στο επόμενο τμήμα παρουσιάζουμε μια “εύλογη” οικονομική συνθήκη που εγγυάται την ομαλότητα του μοντέλου.

Για τα ομαλά μοντέλα παίρνουμε το ακόλουθο περιεκτικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2. Εάν το M είναι ομαλό, τότε $\alpha_M = \beta_m$.

Βάσει του Πορίσματος 1, χρειάζεται μόνο να δείξουμε ότι $\alpha_M \leq \beta_m$. Δεδομένου ότι $\beta_m = \min \beta(p)$ πρέπει να δείξουμε ότι $\beta(p) \geq \alpha_M$ για κάθε p . Έστω ότι (x, y) είναι μία άριστη διαδικασία. Τότε $y - \alpha_M x \geq 0$ και ως εκ τούτου για κάθε διάνυσμα τιμών p , $yp \geq \alpha_M x p$. Δεδομένου ότι $y > 0$, $yp > 0$, ώστε το $\beta(x, y; p)$ ορίζεται (πιθανώς άπειρο) και $\beta(x, y; p) \geq \alpha_M$. Αλλά $\beta(p) = \max_{(x', y')} \beta(x', y'; p)$ ώστε $\beta(p) \geq \beta(x, y; p) \geq \alpha_M$.

Πόρισμα 3. Εάν (x, y) είναι μία διαδικασία και p ένα διάνυσμα τιμών τέτοιο ώστε $\alpha(x, y) = \beta(p)$, τότε η (x, y) είναι μια άριστη διαδικασία και το p είναι ένα άριστο διάνυσμα τιμών.

Αυτό το πόρισμα μας εφοδιάζει με ένα απλό κριτήριο για να δοκιμάσουμε κατά πόσον είναι άριστη μία διαδικασία (x, y) .

Σημείωση: Η μόνη περίπτωση στην οποία το θεώρημα 2 μπορεί να μην ισχύει είναι όταν υπάρχει μία άριστη διαδικασία (x, y) και ένα διάνυσμα τιμών p τέτοιο ώστε το $\beta(x, y; p)$ δεν ορίζεται, δηλαδή, όταν όλα τα αγαθά που “εμπλέκονται” στην διαδικασία (x, y) είναι ελεύθερα αγαθά. Ένα παράδειγμα αυτής της περίπτωσης θα δοθεί στο Τμήμα 5.

4. Το μοντέλο von Neumann

Όπως σημειώθηκε νωρίτερα το μοντέλο von Neumann αντιστοιχεί στην ειδική περίπτωση στην οποία ο χώρος παραγωγής Z δημιουργείται από ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων (a_i, b_i) $i = 1, \dots, m$, τα οποία θα ονομάζουμε *βασικές διαδικασίες*. Η γενική διαδικασία είναι ένας μη-αρνητικός γραμμικός συνδυασμός των βασικών διαδικασιών, κατά συνέπεια

$$(x, y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (a_i, b_i)$$

όπου $\lambda_i \geq 0$ ονομάζεται η ένταση της i -οστής διαδικασίας. Σαφώς το διάνυσμα των εντάσεων $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ προσδιορίζει την διαδικασία (x, y) . Αυτό εκφράζεται με βολικό τρόπο με τον συμβολισμό πινάκων όπως στην συνέχεια. Έστω ότι οι πίνακες εισροών A και εκροών B του M είναι οι πίνακες που η i -οστή γραμμή είναι το διάνυσμα a_i και b_i αντίστοιχα. Τότε η διαδικασία (x, y) που αντιστοιχεί στο διάνυσμα έντασης v δίνεται από την σχέση $(x, y) = (vA, vB)$. Για το μοντέλο von Neumann είναι βολικό να δουλέψουμε με το διάνυσμα v παρά με την διαδικασία (x, y) . Εάν συμβολίσουμε με a_j και b_j το j -οστό διάνυσμα στήλη των A και B , τότε οι τεχνολογικές συναρτήσεις διαστολής γίνονται:

$$\alpha_j(v) = v b^j / v a^j, \quad \alpha(v) = \min_j \alpha_j(v)$$

Οι οικονομικές συναρτήσεις διαστολής για τις βασικές διαδικασίες μπορούν τώρα να γραφούν,

$$\beta_i(p) = b_i p / a_i p$$

(με τις συμβάσεις του τμήματος 2 στην περίπτωση που $a_i p = 0$).

Εξ ορισμού η συνάρτηση $\beta(p) = \max_{(x, y)} (y p / x p) = \max_v (v B p / v A p)$.

Αποδεικνύεται εύκολα, εντούτοις, ότι το μέγιστο αυτό επιτυγχάνεται σε κάποιες βασικές διαδικασίες, υποθέτουμε ότι $\beta(p) = v B p / v A p$. Τότε $0 = v B p - \beta(p) v A p = v(B p - \beta(p) A p)$. Δεδομένου ότι $v \geq 0$ συνεπάγεται ότι όλες οι συντεταγμένες $b_i p - \beta(p) a_i p$ είναι αρνητικές και η απόδειξη του ανωτέρω ισχυρισμού έπεται. Κατά συνέπεια

$$\beta(p) = \max_i \beta_i(p)$$

(Για την περίπτωση στην οποία $vAp = 0$, $\beta(p) = \infty$, ένα ακόμη απλούστερο επιχείρημα δείχνει ότι η παραπάνω εξίσωση είναι σωστή.)

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 1 για να δώσουμε μία απλή απόδειξη του αποτελέσματος του von Neumann.

Θεώρημα 3. (von Neumann). Υπάρχουν ημιθετικά διανύσματα v και p και θετικοί αριθμοί α και β τέτοιοι ώστε

$$\alpha vA \leq vB, \text{ και} \quad (3)$$

$$\text{εαν } \alpha a^j < v b^j \text{ τότε } \pi_j = 0. \quad (3')$$

$$\beta Ap \geq Bp, \text{ και} \quad (4)$$

$$\text{εαν } \beta a_i p > b_i p \text{ τότε } \lambda_i = 0. \quad (4')$$

Απόδειξη. Έστω $\alpha = \beta = \alpha_M$ και έστω ότι το v είναι ένα διάνυσμα άριστων εντάσεων (δηλαδή, το (vA, vB) είναι μια άριστη διαδικασία). Η συνθήκη (3) δηλώνει απλά ότι το v είναι άριστο. Εάν τώρα το p είναι ένα άριστο διάνυσμα τιμών τότε η (3') έχει ακριβώς το περιεχόμενο του Πορίσματος 2.

Η συνθήκη (4) δηλώνει ότι $\alpha_M a_i p \geq b_i p$ για κάθε i , ή $\beta_i(p) \leq \alpha_M$, η οποία είναι το συμπέρασμα (2) του Θεωρήματος 1. Η συνθήκη (4') έπεται από το συμπέρασμα (1) του Θεωρήματος 1, το οποίο είναι, ότι για το άριστο διάνυσμα v ,

$$\alpha_M vAp = vBp \text{ ή } v(\alpha_M Ap - Bp) = 0,$$

και δεδομένου ότι $\alpha_M Ap - Bp \geq 0$, από την (4) έπεται ότι τα διανύσματα $(\alpha_M Ap - Bp)$ και v δεν μπορούν να έχουν θετική την i -οστή συντεταγμένη.

Για τα μοντέλα von Neumann που είναι ομαλά, το Θεώρημα 2 μπορεί να γραφεί σε μία ιδιαίτερα κομψή μορφή:

Θεώρημα 2'. Για ομαλά μοντέλα von Neumann

$$\max_v \alpha(v) = \min_p \beta(p) \text{ ή εναλλακτικά, } \max_v \min_j \alpha_j(v) = \min_p \max_i \beta_i(p)$$

Στην πρώτη μορφή ανωτέρω το αποτέλεσμα θυμίζει το δυαδικό θεώρημα του γραμμικού προγραμματισμού, ενώ η δεύτερη μορφή υποδηλώνει το minmax θεώρημα της θεωρίας των παιγνίων. Εντούτοις, πρέπει να σημειωθεί η ακόλουθη ουσιαστική διαφορά. Το άριστο ενός γραμμικού προγράμματος και η τιμή ενός παιγνίου μπορούν να εκφραστούν πάντα ως ρητοί αριθμοί συναρτήσεων των (ρητών -Σ.τ.Μ.) συντελεστών του προβλήματος. Από την άλλη πλευρά ο συντελεστής διαστολής ενός γραμμικού μοντέλου μπορεί να είναι άρρητος αριθμός, όπως θα

δούμε από τα παραδείγματα, ακόμη και αν οι βασικές διαδικασίες δίνονται από ρητά διανύσματα. Κατά συνέπεια δεν μπορεί να δοθεί απόδειξη για τα θεωρήματα διαστολής, ότι οι λύσεις είναι ρητοί αριθμοί, όπως είναι δυνατόν στις άλλες δύο περιπτώσεις.

Θα δώσουμε τώρα μία συνθήκη που εγγυάται την ομαλότητα του μοντέλου von Neumann και αποτελεί μια σημαντική εξασθένιση της συνθήκης (H).

Ορισμός. Έστω ότι M είναι ένα μοντέλο von Neumann και έστω ότι S είναι ένα υποσύνολο των δεικτών $1, \dots, M$. Το σύνολο των διαδικασιών (a_i, b_i) , $i \in S$ συνιστούν ένα υπομοντέλο M' του M , εάν το μοντέλο M' ικανοποιεί την Υπόθεση 3. Με άλλα λόγια κάθε αγαθό αναλωνόμενο από μία διαδικασία του M' παράγεται από τουλάχιστον μία διαδικασία του M' . Αυτό εγγυάται ότι ο τεχνολογικός συντελεστής διαστολής του M είναι θετικός.

Ένα μοντέλο M ονομάζεται *μη-αναγώγιμο*, εάν δεν περιέχει πλήρη υπομοντέλα.

Ένα μοντέλο M ονομάζεται *διασπώμενο*, εάν είναι η ένωση ξένων υπομοντέλων.

Ένα αγαθό G_j θα ονομάζεται *εισροή (εκροή)* του υπομοντέλου M' , εάν υπάρχει τουλάχιστον μία διαδικασία του M' η οποία έχει το G_j εισροή (εκροή).

Τώρα κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση:

(H'). Κάθε υπομοντέλο M' του M έχει όλα τα αγαθά G_j ως εκροές.

Αυτή η υπόθεση (H') έχει μία ευλογοφανή οικονομική ερμηνεία. Σημαίνει ότι καμία διαδικασία στο μοντέλο δεν μπορεί να διατηρήσει την παραγωγή εκτός εάν παράγεται κάθε αγαθό στην οικονομία. Αυτό δεν σημαίνει, φυσικά, ότι κάθε αγαθό χρησιμοποιείται ως εισροή σε κάθε διαδικασία. Εν τούτοις, εάν μία διαδικασία δεν χρησιμοποιεί το αγαθό G_j , πρέπει αυτό να χρησιμοποιεί κάποιο άλλο αγαθό G_k του οποίου η παραγωγή απαιτεί με την σειρά της το αγαθό G_j , πιθανώς πάλι εμμέσως, κλπ. Η υπόθεση (H) μαζί με την Υπόθεση (3) συνεπάγονται προφανώς την (H'), μολονότι η (H') είναι αρκετά ασθενέστερη της (H). Τα μη-αναγώγιμα μοντέλα προφανώς ικανοποιούν την (H').

Θεώρημα 4. Εάν το M ικανοποιεί την (H'), τότε είναι ομαλό.

Απόδειξη. Έστω ότι $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ είναι μία άριστη διαδικασία. Τότε η διαδικασία (a_i, b_i) για την οποία $\lambda_i > 0$ αποτελεί ένα υπομοντέλο M' , δεδομένου ότι κάθε εισροή του M' είναι επίσης και εκροή, εφόσον ο συντελεστής διαστολής του M' είναι $\alpha_{M'} > 0$. Ως εκ τούτου κάθε αγαθό είναι εκροή του M' και δεδομένου ότι

κάθε βασική διαδικασία του M' χρησιμοποιείται στην άριστη διαδικασία, έπεται ότι το M είναι ομαλό.

Επιστρέφουμε τώρα στην περίπτωση του γενικού μοντέλου von Neumann και αποδεικνύουμε ένα θεώρημα αναγωγής το οποίο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο όταν ο αριθμός των βασικών διαδικασιών είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των αγαθών.

Θεώρημα 5. Εάν το M είναι ένα μοντέλο von Neumann που περιέχει n αγαθά, τότε υπάρχει μία άριστη διαδικασία που χρησιμοποιεί το πολύ n βασικές διαδικασίες.

Η απόδειξη εξαρτάται από το ακόλουθο ιδιαίτερα σημαντικό γεωμετρικό δεδομένο.

Λήμμα. Έστω ότι S είναι ένα σύνολο διανυσμάτων στον χώρο n διαστάσεων τέτοιο ώστε το διάνυσμα v είναι ένας θετικός γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του S . Τότε

- (a) εάν $v \neq 0$, υπάρχει ένα σύνολο το πολύ n διανυσμάτων του S τέτοιο ώστε το v είναι ένας θετικός γραμμικός συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων, και
- (b) εάν $v = 0$, τότε υπάρχει ένα σύνολο το πολύ $n+1$ διανυσμάτων του S τέτοιο ώστε το v είναι ένας θετικός γραμμικός συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων.

Για μία απόδειξη του λήμματος αυτούς ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [4].

Απόδειξη του Θεωρήματος 5. Έστω ότι $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ είναι μία άριστη διαδικασία και υποθέτουμε ότι $\lambda_i > 0$ για $i \leq k$ και $\lambda_i = 0$ για $i > k$. Έστω ότι

$$c = v(\alpha A - B) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\alpha a_i - b_i)$$

όπου α είναι ο συντελεστής διαστολής και το v είναι άριστη ένταση παραγωγής τέτοιο ώστε $c \geq 0$. Έστω ότι το p είναι ένα άριστο διάνυσμα τιμών. Τότε από την (4') ισχύει $(\alpha a_i - b_i)p = 0$ για $i \leq k$, ως εκ τούτου τα διανύσματα $\alpha a_i - b_i$ βρίσκονται σε ένα γραμμικό υποχώρο με διάσταση το πολύ $n-1$. Από το παραπάνω λήμμα μπορούμε να επιλέξουμε ένα υποσύνολο S που περιέχει το πολύ n από τους δείκτες $i \leq k$, και θετικά βαθμωτά μ_i τέτοια ώστε

$$c = \sum_{i \in S} \mu_i (\alpha a_i - b_i)$$

Εάν v_0 είναι το διάνυσμα του οποίου η i -οστή συντεταγμένη είναι μ_i , για $i \in S$

και μηδέν οπουδήποτε αλλού, έχουμε $c = v_0 (\alpha A - B)$ και κατά συνέπεια το v_0 δίνει τη ζητούμενη άριστη διαδικασία.

5. Ορισμένα παραδείγματα

Στο τμήμα αυτό διευκρινίζουμε την προηγηθείσα θεωρία μέσω ορισμένων αριθμητικών παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 1: Το μοντέλο περιλαμβάνει 3 βασικές διαδικασίες και 4 αγαθά. Τα διανύσματα των διαδικασιών είναι:

$$\begin{array}{ll} a_1 = (0, 1, 0, 0) & b_1 = (1, 0, 0, 0) \\ a_2 = (1, 0, 0, 1) & b_2 = (0, 0, 2, 0) \\ a_3 = (0, 0, 1, 0) & b_3 = (0, 1, 0, 1) \end{array}$$

Το μοντέλο είναι ομαλό, στην πραγματικότητα είναι μη-αναγώγιμο, ως εκ τούτου $\alpha_M = \beta_m$, ώστε να αρκεί να βρεθούν v και p τέτοια ώστε $\alpha(v) = \beta(p)$, η κοινή τιμή των οποίων θα είναι ο συντελεστής διαστολής. Αποδεικνύεται άμεσα ότι τα διανύσματα

$$v = (2^{-1/3}, 2^{-2/3}, 1), \quad p = (1, 2^{-1/3}, 2^{-2/3}, 0)$$

ικανοποιούν την συνθήκη και

$$\alpha(v) = \beta(p) = 2^{1/3}.$$

Σημειώστε ότι το αγαθό G_4 υπερπαράγεται, δεδομένου ότι $\alpha_4(v) = 4^{1/3} > 2^{1/3}$, και ως εκ τούτου $\pi_4 = 0$.

Είναι εύκολο να δοθούν παραδείγματα μοντέλων για τα οποία α_M και β_m δεν είναι ίσα. Χρειάζεται μόνον να εξετάσουμε ένα σύνθετο μοντέλο M από δύο μοντέλα M' και M'' τα οποία λειτουργούν ταυτόχρονα. Υποθέτουμε επίσης ότι τα M' και M'' παράγουν ξεχωριστά σύνολα αγαθών και έχουν τεχνολογικούς συντελεστές διαστολής $\alpha_{M'} < \alpha_{M''}$. Τότε $\beta_m \leq \beta_{m'}$ δεδομένου ότι $\beta_m = \min \beta(p)$, και $\beta_{m'} \leq \alpha_{M''}$, από το Πόρισμα 1. Τελικά $\alpha_M \geq \alpha_{M''}$ και ως εκ τούτου $\beta_m < \alpha_M$.

Στο επόμενο παράδειγμα αποδεικνύουμε ότι μπορούμε να έχουμε $\beta_m < \alpha_M$ ακόμη και για μη-διασπώμενα μοντέλα.

Παράδειγμα 2. Το παράδειγμα περιλαμβάνει πέντε διαδικασίες και έξι αγαθά.

$$\begin{array}{ll} a_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 0) & b_1 = (1, 0, 0, 1, 0, 0) \\ a_2 = (1, 0, 1, 0, 0, 0) & b_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0) \\ a_3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0) & b_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ a_4 = (0, 0, 1, 0, 0, 1) & b_4 = (0, 0, 0, 0, 2, 0) \\ a_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0) & b_5 = (0, 0, 0, 1, 0, 1) \end{array}$$

Σημειώστε ότι το υπομοντέλο που αποτελείται από τις τρεις τελευταίες διαδικασίες είναι το μοντέλο του πρώτου Παραδείγματος και συνεπώς έχει συντελεστή διαστολής $2^{1/3}$. Από την άλλη πλευρά το υπομοντέλο αποτελούμενο από τις τρεις πρώτες διαδικασίες έχει συντελεστή διαστολής 1 όπως αποδεικνύεται θέτοντας

$$v = (1, 1, 1, 0, 0), \quad p = (1, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Κατά συνέπεια $\alpha_M = 2^{1/3}$, $\beta_m = 1$. Το μοντέλο είναι μη διασπώμενο δεδομένου η διαδικασία (a_3, b_3) ανήκει και στα δύο υπομοντέλα.

Σε αυτό το παράδειγμα τα πιο πάνω διανύσματα v και p καθώς και τα διανύσματα

$$v' = (0, 0, 2^{-1/3}, 2^{-2/3}, 1), \quad p' = (0, 0, 1, 2^{-1/3}, 2^{-2/3}, 0)$$

είναι λύσεις ισορροπίας στα μοντέλα ισορροπίας von Neumann του θεωρήματος 3. Κατά συνέπεια βλέπουμε ότι ένα μοντέλο von Neumann χωρίς κάποια συνθήκη ομαλότητας μπορεί να έχει πολλαπλά σημεία ισορροπίας. Αυτή η περίπτωση έχει ερευνηθεί από τους Kemeny, Morgenstern και Thompson [5].

Παράδειγμα 3. Το μοντέλο αυτό περιλαμβάνει 5 διαδικασίες και 4 αγαθά. Δεν είναι ομαλό δεδομένου ότι η άριστη διαδικασία δεν χρησιμοποιεί όλα τα αγαθά. Εν τούτοις ισχύει $\alpha_M = \beta_m$.

$$\begin{array}{ll} a_1 = (0, 1, 0, 0) & b_1 = (2, 0, 0, 0) \\ a_2 = (1, 0, 0, 0) & b_2 = (0, 0, 2, 0) \\ a_3 = (0, 0, 1, 0) & b_3 = (0, 2, 0, 0) \\ a_4 = (0, 0, 0, 1) & b_4 = (0, 0, 1, 0) \\ a_5 = (0, 1, 0, 0) & b_5 = (0, 0, 0, 1) \end{array}$$

Υπάρχουν δύο υπομοντέλα αποτελούμενα το πρώτο από τις τρεις πρώτες διαδικασίες και το δεύτερο από τις τρεις τελευταίες. Επιβεβαιώνουμε ότι $\alpha_M = \beta_m = 2$ επιλέγοντας

$$v = (1, 1, 1, 0, 0), \quad p = (1, 1, 1, 1).$$

Ο ισχυρισμός μας θα αποδειχθεί εάν δείξουμε ότι $\alpha_M \leq 2$ και $\beta_m \geq 2$. Για να

αποδείξουμε το πρώτο μέρος, υποθέτουμε ότι $\alpha_M > 2$ και έστω ότι το $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_5)$ είναι ένα άριστο διάνυσμα. Δεδομένου ότι η διαδικασία (α_3, β_3) υπάρχει και στα δύο υπομοντέλα, τότε $\lambda_3 > 0$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_3 = 1$. Δεδομένου ότι ο ρυθμός διαστολής $\alpha_2(v)$ πρέπει να είναι μεγαλύτερος από 2, παίρνουμε

$$\lambda_1 + \lambda_5 < 1 \quad (5)$$

Όμοια, από το $\alpha_1(v)$ παίρνουμε

$$\lambda_2 < \lambda_1, \quad (6)$$

και από το $\alpha_3(v)$

$$2\lambda_2 + \lambda_4 > 2, \quad (7)$$

και από το $\alpha_4(v)$

$$2\lambda_4 < \lambda_5. \quad (8)$$

Από τις (5) και (6) έχουμε $\lambda_2 + \lambda_5 < 1$, από όπου και σε συνδυασμό με την (8) $\lambda_2 + 2\lambda_4 < 1$ ή $-2\lambda_2 - 4\lambda_4 > -2$. Προσθέτοντας αυτή την ανισότητα στην (7) δίνει $-3\lambda_4 > 0$, μία αντίφαση δεδομένου ότι $\lambda_4 \geq 0$.

Τώρα υποθέτουμε ότι $\beta_m < 2$ και έστω ότι $p = (\pi_1, \dots, \pi_4)$ είναι ένα άριστο διάνυσμα τιμών. Τότε $\pi_1 > 0$, διότι εάν όχι, δεδομένου ότι $\beta_2(p) < \infty$, $\pi_3 = 0$, δεδομένου ότι $\beta_3(p) < \infty$, $\pi_2 = 0$, και δεδομένου ότι $\beta_5(p) < \infty$, $\pi_4 = 0$. Υποθέτουμε ότι $\pi_1 = 1$. Τότε δεδομένου ότι $\beta_1(p) < 2$, $\pi_2 > 1$, και δεδομένου ότι $\beta_3(p) < 2$, $\pi_3 > 1$, αλλά αυτό σημαίνει $\beta_2(p) = 2\pi_3/\pi_1 > 2$, το οποίο αποτελεί αντίφαση.

Το ανωτέρω παράδειγμα δείχνει ότι η συνθήκη της ομαλότητας δεν είναι αναγκαία για να ισχύει $\alpha_M = \beta_m$. Το πρόβλημα της εύρεσης ασθενέστερων ικανών συνθηκών παρουσιάζεται ως ένα ενδιαφέρον ερώτημα για περαιτέρω μελέτη.

6. Το μοντέλο Leontief

Σε αυτό το τμήμα θα πραγματευτούμε την θεωρία της διαστολής για την ειδική περίπτωση του μοντέλου Leontief. Το μοντέλο Leontief είναι ένα μοντέλο von Neumann που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

- (i) Υπάρχει ο ίδιος αριθμός αγαθών και βασικών διαδικασιών.
- (ii) Η μόνη εκροή της διαδικασίας (a_i, b_i) είναι το αγαθό G_i .

Η υπόθεση (ii) δηλώνει ότι η πίνακας εκροών του μοντέλου Leontief είναι ένας διαγώνιος πίνακας. Εάν σε αυτό το σημείο τυποποιήσουμε την βασική διαδι-

κασία (a_i, b_i) έτσι ώστε a_i να είναι το διάνυσμα εισροών που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας του G_i , τότε δεν χρειάζεται να αναγράφεται καθόλου ο πίνακας εκροών δεδομένου ότι το μοντέλο περιγράφεται πλήρως εάν δοθεί ο πίνακας εισροών A . Εάν v είναι ένα διάνυσμα άριστων εντάσεων και α ο συντελεστής διαστολής του M , τότε από τον ορισμό του αρίστου,

$$\alpha_M vA \leq v.$$

Θα δείξουμε ότι στα μοντέλα Leontief η ανωτέρω ανισότητα γίνεται ισότητα. Το αποτέλεσμα αυτό και τα υπόλοιπα αποτελέσματα του τμήματος αυτού έπονται από, και σε πολλές περιπτώσεις είναι ισοδύναμα με, γνωστά θεωρήματα για πίνακες με θετικούς συντελεστές. Συμπεριλαμβάνουμε τα θεωρήματα αυτά για την πληρότητα της συζήτησης και γιατί οι αποδείξεις μας είναι, στο βαθμό που γνωρίζουμε, τόσο άμεσες και στοιχειώδεις όσο καμία άλλη στην βιβλιογραφία.

Θεώρημα 6. Στα μοντέλα Leontief, εάν το v είναι ένα άριστο διάνυσμα εντάσεων παραγωγής, τότε

$$\alpha_M vA = v.$$

(Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει υπερπαραγωγή σε καμία άριστη διαδικασία.)

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα άριστο διάνυσμα $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, τέτοιο ώστε $\alpha_M vA \leq v$, δηλαδή $\alpha_M \left(\sum_i \lambda_i \alpha_{ij} \right) < \lambda_j$ για ένα τουλάχιστον δείκτη j . Η αυστηρή ανισότητα δεν μπορεί να ισχύει για όλα τα j , διότι τότε το α_M θα μπορούσε να ήταν μεγαλύτερο και δεν θα ήταν ο πραγματικός συντελεστής διαστολής. Υποθέτουμε τώρα ότι το v έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε η ανωτέρω ανισότητα να ισχύει για τις περισσότερες συντεταγμένες που είναι δυνατόν. Με κατάλληλη αναδιάταξη των συντεταγμένων μπορούμε να υποθέσουμε

$$\alpha_M \sum_i \lambda_i \alpha_{ij}, \quad j < k \leq n. \quad (9)$$

$$\alpha_M \sum_i \lambda_i \alpha_{ij} = \lambda_j, \quad \text{για } j \geq k. \quad (10)$$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε

$$\lambda_i \alpha_{ij} = 0, \quad \text{για } i < k, \quad j \geq k. \quad (11)$$

διότι εάν δεν ίσχυε, τότε έστω ότι για $\lambda_1 \alpha_{1k} > 0$, θα μπορούσαμε τότε να αντικαταστήσουμε το λ_1 με το $\lambda_1(1 - \epsilon)$, όπου $\epsilon > 0$, αλλά αρκετά μικρό έτσι ώστε οι ανισότητες (9) να εξακολουθούν να ισχύουν. Αλλά αυτό θα μείωνε την αριστερή πλευρά της εξίσωσης (10) για $j = k$ δίνοντας

$$\alpha_M \sum_i \lambda_i \alpha_{ij} < \lambda_k$$

το οποίο είναι σε αντίφαση με τον τρόπο που έχει επιλεγεί το v .

Έστω τώρα $v' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, 0, \dots, 0)$. Εάν αντικαταστήσουμε το v με το v' στην (9) βλέπουμε ότι η ανισότητα εάν μεταβληθεί γίνεται ισχυρότερη, και εάν το v αντικατασταθεί από το v' στην (10) τότε από την (11) και οι δύο πλευρές της εξίσωσης (10) είναι ίσες με το μηδέν. Αλλά κάτω από αυτές τις συνθήκες μπορούμε να αυξήσουμε το α_M χωρίς να διαταράξουμε τις σχέσεις (9) και (10) σε αντίφαση με τον ορισμό του α_M . Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη.

Σημειώστε ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος συνεπάγεται ότι το v είναι ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $1/\alpha_M$. Δεδομένου ότι είναι ένα αυθαίρετος μη-αρνητικός πίνακας, αποδείξαμε συμπτωματικά την γνωστή ιδιότητα ότι ένας μη-αρνητικός πίνακας έχει μη-αρνητικές ιδιοτιμές και μη-αρνητικά χαρακτηριστικά διανύσματα. (Αυτή η σχέση έχει ήδη παρατηρηθεί από τον Woodbury [7].)

Προχωρούμε τώρα στην διερεύνηση των υπομοντέλων ενός μοντέλου Leontief. Εστω ότι S είναι ένα υποσύνολο των δεικτών $1, \dots, n$. Τότε η διαδικασία a_i , $i \in S$ σχηματίζει ένα υπομοντέλο του μοντέλου Leontief M εάν και μόνο εάν $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i \in S$, $j \notin S$. Για τα μοντέλα Leontief αυτό αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του τμήματος 4. Τώρα παρατηρούμε :

Λήμμα. Για τα μοντέλα Leontief η τομή υπομοντέλων είναι ένα υπομοντέλο.

Απόδειξη. Εστω ότι τα S και S' είναι υποσύνολα δεικτών που αντιστοιχούν σε υπομοντέλα του M . Εάν $i \in S \cap S'$, $j \notin S \cap S'$, τότε ισχύει ή $j \notin S$ ή $j \notin S'$ και σε κάθε περίπτωση $\alpha_{ij} = 0$. Από την παραπάνω παρατήρηση $S \cap S'$ αντιστοιχεί σε ένα υπομοντέλο. Σημειώστε ότι αυτό το λήμμα δεν ισχύει εν γένει για τα μοντέλα von Neumann όπως δείξαμε με τα παραδείγματα 2 και 3 του προηγούμενου τμήματος στο οποίο η διαδικασία (a_3, b_3) είναι η τομή δύο υπομοντέλων αλλά αυτή η ίδια δεν αποτελεί ένα υπομοντέλο.

Πόρισμα. Τα μη-αναγώγιμα υπομοντέλα του M είναι ξένα μεταξύ τους και κανένα αγαθό δεν είναι εισροή σε περισσότερα από ένα μη-αναγώγιμο υπομοντέλο.

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός έπεται άμεσα από το λήμμα. Εάν G_j ήταν μία εισροή σε δύο μη αναγώγιμα υπομοντέλα M' και M'' , θα ήταν επίσης προϊόν και των δύο έτσι ώστε η j -οστή διαδικασία θα έπρεπε να ανήκει σε αμφότερα τα M' και M'' , το οποίο αντιφάσκει με την πρώτη υπόθεση του πορίσματος.

Το πόρισμα αυτό δηλώνει ότι, με κατάλληλη αναδιάταξη, ο πίνακας A ενός μοντέλου Leontief διασπάται κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k & 0 \\ & & & A' & \end{bmatrix}$$

όπου οι υποπίνακες A_i είναι οι πίνακες εισροών των μη-αναγώγιμων υπομοντέλων και ο ορθογώνιος πίνακας A' αντιστοιχεί σε αυτές τις διαδικασίες που δεν ανήκουν σε καμία μη-αναγώγιμη διαδικασία. Εάν α_i είναι ο συντελεστής διαστολής του υπομοντέλου A_i , παίρνουμε

Θεώρημα 7. $\alpha_M = \max_i \alpha_i$

Απόδειξη. Εστω ότι το $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ είναι ένα οποιοδήποτε άριστο διάνυσμα εντάσεων και έστω ότι το M' είναι ένα υπομοντέλο του M αποτελούμενο από διαδικασίες a_i τέτοιες ώστε $\lambda_i > 0$, έστω, $a_i \in M'$ για $i \leq r$. Εάν όχι, έστω ότι το M'' είναι ένα μη-αναγώγιμο υπομοντέλο του M' που έχει τον μέγιστο ρυθμό διαστολής $\alpha_{M''}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το M'' αποτελείται από τις διαδικασίες $a_i, i \leq s < r$.

Από το Θεώρημα 6

$$\alpha_M \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_{ij} = \lambda_j \quad \text{για κάθε } j. \quad (12)$$

Έστω ότι $v'' = (\lambda_1, \dots, \lambda_s, 0, \dots, 0)$, τότε

$$\alpha_M \sum_{i=1}^s \lambda_i \alpha_{ij} \leq \lambda_j \quad \text{για } j \leq s, \quad (13)$$

το οποίο έχουμε εάν κάποιο στοιχείο της αριστερής πλευράς της (12) μειωθεί. Αλλά v'' είναι ένα διάνυσμα εντάσεων παραγωγής για το υπομοντέλο M'' , και ως εκ τούτου $\alpha_{M''} > (v'')$ και από την άλλη πλευρά, η (13) δείχνει ότι $\alpha(v'') \geq \alpha_M$. Ως εκ τούτου $\alpha_{M''} = \alpha_M$, και δεδομένου ότι το M'' είναι ένα μη-αναγώγιμο υπομοντέλο το αποτέλεσμα του θεωρήματος έπεται.

Πόρισμα. Εάν η διαδικασία a_k δεν ανήκει σε κανένα μη-διαχωρίσιμο υπομοντέλο τότε $\lambda_k = 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι το v είναι το διάνυσμα εντάσεων παραγωγής του θεωρή-

ματος. Τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι για $i \leq r$, το a_i ανήκει σε κάποιο μη-αναγώγιμο υπομοντέλο. Το παραπάνω διάνυσμα v'' είναι άριστο, ως εκ τούτου από το θεώρημα 6 οι ανισότητες (13) γίνονται ισότητες,

$$\alpha_M \sum_{i=1}^s \lambda_j \alpha_{ij} = \lambda_j,$$

και συνδυάζοντας την ισότητα αυτή με την (12), παίρνουμε, για $j \leq s$

$$\alpha_M \sum_{i=s+1}^r \lambda_j \alpha_{ij} = 0. \quad (14)$$

Δεδομένου ότι $\lambda_i > 0$ για $i \leq r$ πρέπει να έχουμε $\alpha_{ij} = 0$ για $s < i \leq r, j \leq s$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι τα $a_{s+1}, \dots, a_r$ σχηματίζουν ένα υπομοντέλο του M' , και επαναλαμβάνοντας το ανωτέρω επιχείρημα, εάν είναι αναγκαίο, έπεται ότι το M' είναι η ένωση μη-αναγώγιμων υπομοντέλων.

Το ανωτέρω θεώρημα και πόρισμα ανάγει την μελέτη των μοντέλων Leontief στην μελέτη των μη-αναγώγιμων υπομοντέλων τους. Στην περίπτωση αυτή εξάγουμε το ακόλουθο περιεκτικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8. Για τα μη-αναγώγιμα υπομοντέλα Leontief τα άριστα διανύσματα εντάσεων παραγωγής και τιμών είναι θετικά και μονοσήμαντα προσδιορισμένα με εξαίρεση τον πολλαπλασιασμό με μία θετική σταθερά.

Απόδειξη. Ένα άριστο διάνυσμα εντάσεων παραγωγής $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ πρέπει να είναι θετικό διότι εάν δεν ήταν οι διαδικασίες a_i για τις οποίες $\lambda_i > 0$ θα σχημάτιζαν ένα υπομοντέλο. Εάν $v' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ είναι ένα δεύτερο τέτοιο διάνυσμα, έστω ότι $\mu = \max(\lambda'_i / \lambda_i)$, και ότι το μέγιστο αυτό είναι, π.χ., το $\mu = \lambda'_1 / \lambda_1$. Έστω ότι $v'' = \mu v - v' = (0, \lambda''_2, \dots, \lambda''_n) \geq 0$.

Αλλά το v'' ικανοποιεί την

$$\alpha_M v'' A = \alpha_M (\mu v - v') A = \alpha_M \mu v A - \alpha_M v' A = (\mu v - v') = v''.$$

Από τον πρώτο ισχυρισμό του θεωρήματος, το v'' δεν μπορεί να είναι άριστο δεδομένου ότι $\lambda''_1 = 0$, ως εκ τούτου $v'' = 0$, και κατά συνέπεια $v' = \mu v$ όπως έπρεπε να αποδειχθεί. Ένα ακριβώς ανάλογο επιχείρημα αποδεικνύει την μοναδικότητα και την θετικότητα του άριστου διανύσματος τιμών.

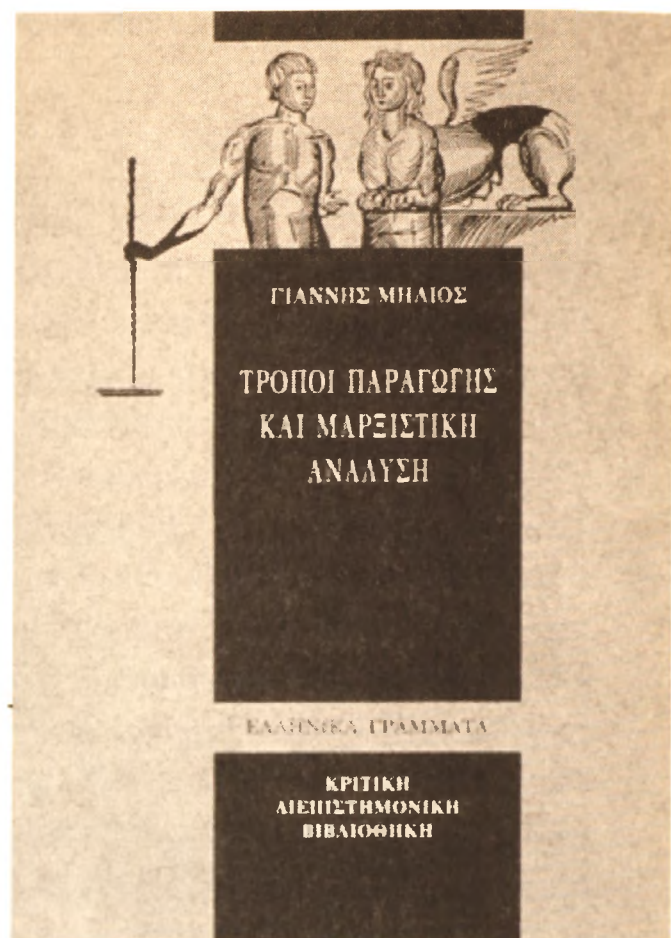
Βιβλιογραφία

- [1] von NEUMANN, J., “Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes”, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, No. 8, Vienna, 1937. translated in *Review of Economic Studies*, as: A model of general economic Equilibrium, 1945-46, σελ. 1-9. Ελληνική μετάφραση *Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας*, Τεύχος 8.
- [2] LOOMIS, L.H., “On a Theorem of von Neumann”, Proceedings of the National Academy of Science, 32, (1946), pp. 213-215.
- [3] GEORGESCU-ROEGEN, N. “The aggregate linear production function and its applications to von Neumann’s economic model”, Cowles Commission Series, #13, Koopmans, T. “*Activity Analysis of Production and Allocation*”. John Wiley and Sons, New York (1951) pp. 98-115.
- [4] STEINITZ, E. “Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme”, *Zeitschrift für reine und angewandte Mathematik*, Bd. 143 (1913), pp. 153-154.
- [5] KEMENY, J.G., MORGENSTERN, O. and THOMPSON, G.L., “A generalisation of the von Neumann model of an expanding economy”, *Econometrica*, vol.23, (1956), pp.115-135.
- [6] THOMPSON, G.L., “On a solution of a game theoretic problem”, *Annals of Mathematics*, vol. 38, (1956), pp.275-284.
- [7] WOODBURY, MAX A., “Characteristic roots of input output matrices”, in “*Economic Activity Analysis*”, edited by Morgenstern Oscar, Wiley , (1954) pp. 365-382.

ΤΡΟΠΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΜΑΡΞΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Το παρόν βιβλίο εξετάζει συγκεκριμένες όψεις της μαρξιστικής θεωρίας, θεμελιώνοντας την άποψη ότι ο Μαρξισμός συνιστά μια τομή στην ιστορία των οικονομικών θεωριών, αλλά και γενικότερα στην ιστορία των ιδεών και των «επιστημών» που έχουν ως αντικείμενο το κοινωνικό γίγνεσθαι.

- * Έρχεται σε ρήξη με τις ανθρωπολογικές φιλοσοφικές αρχές, πάνω στις οποίες οικοδομούνται παραδοσιακά η Πολιτική Οικονομία και οι κοινωνικές επιστήμες.
- * Συγκροτεί ένα νέο θεωρητικό χώρο, που διακρίνεται από ένα ιδιαίτερο σύστημα εννοιών.
- * Αποτελεί κριτική των κοινωνικών σχέσεων α) διότι αναζητά τις εσωτερικές δομικές σχέσεις και αιτιότητες που τις



διέπουν, και οι οποίες δεν είναι ορατές διά γυμνού οφθαλμού· β) διότι αποκαλύπτει ότι οι σχέσεις αυτές έχουν το χαρακτήρα σχέσεων εξουσίας και εκμετάλλευσης, γεγονός από το οποίο πηγάζει και η στρεβλή, αναγκαστικά, μορφή με την οποία εμφανίζονται στην επιφάνεια των κοινωνικών διαδικασιών και αποτυπώνονται στη συνείδηση των ανθρώπων-φορέων των κοινωνικών πρακτικών

ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ

Δύναμις στη γνώση