Karl Schlesinger: Για τις Εξισώσεις Παραγωγής της Οικονομικής Θεωρίας της Αξίας

Για τον προσδιορισμό των τιμών των μέσων παραγωγής και των προς παραγωγήν ποσοτήτων προϊόντων επί τη βάση δεδομένων ποσοτήτων των μέσων παραγωγής και γνωστών δεδομένων (τα οποία αφορούν πρώτον τα είδη παραγωγικών χρήσεων των μέσων παραγωγής και δεύτερον την εξάρτηση των τιμών των προϊόντων από τις παραγόμενες ποσότητες προϊόντων) ο Walras διατύπωσε ένα σύστημα εξισώσεων, το οποίο ο Cassel έκανε ευρύτερα γνωστό σε μια απλουστευμένη μορφή. Αν $R_1, \ldots, R_m$ είναι τα μέσα παραγωγής με έναν διαφορετικό συνδυασμό δύνανται να παραχθούν n προϊόντα $S_1, \ldots, S_n$ και μάλιστα, έτσι ώστε για να παραχθεί μια μονάδα του προϊόντος S_j απαιτείται να χρησιμοποιηθούν α_{1j} μονάδες του μέσου παραγωγής R_1, α_{2j} μονάδες του μέσου παραγωγής R_2, ... και α_{mj} μονάδες του μέσου παραγωγής R_m (για $j = 1, 2, \ldots, n$) και αν γνωρίζουμε ότι, σε περίπτωση που παράγονται s_1 μονάδες του S_1, ..., s_n μονάδες του S_n, η τιμή μιας μονάδας του προϊόντος S_j είναι $f_j(s_1, \ldots, s_n)$, και αν περαιτέρω ο παραγωγός έχει στη διάθεση του r_i μονάδες μέσου παραγωγής R_i $(i = 1, \ldots, m)$, τότε οι $m + 2n$ εξισώσεις του Cassel για τις m άγνωστες τιμές ϱ_i της μονάδας του μέσου παραγωγής R_i, για τους n άγνωστους αριθμούς s_j των προς παραγωγήν μονάδων του προϊόντος S_j $(j = 1, \ldots, n)$ και για τις n άγνωστες τιμές σ_j της μονάδας του προϊόντος S_j $(j = 1, \ldots, n)$ είναι

$$r_1 = \alpha_{11} s_1 + \alpha_{12} s_2 + \ldots + \alpha_{1n} s_n$$

$$r_2 = \alpha_{21} s_1 + \alpha_{22} s_2 + \ldots + \alpha_{2n} s_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_m = \alpha_{m1} s_1 + \alpha_{m2} s_2 + \ldots + \alpha_{mn} s_n$$

$$\sigma_1 = \alpha_{11} \rho_1 + \alpha_{21} \rho_2 + \ldots + \alpha_{m1} \rho_m$$

$$\sigma_2 = \alpha_{12} \rho_1 + \alpha_{22} \rho_2 + \ldots + \alpha_{m2} \rho_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_n = \alpha_{1n} \rho_1 + \alpha_{2n} \rho_2 + \ldots + \alpha_{mn} \rho_m$$

$$\sigma_1 = f_1(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

$$\sigma_2 = f_2(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_n = f_n(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

Ότι αυτές οι εξισώσεις δεν έχουν αναγκαστικά λύσεις και προπαντός δεν έχουν αναγκαστικά θετικές λύσεις (και μόνον αυτές μπορούμε να λάβουμε υπόψη μας αναλογιζόμενοι την σημασία των αριθμών ϱ_i, σ_j, S_i) έχει επισημανθεί από τους von Stackelberg[1] και Neisser[2].

Οι Walras και Cassel εννοούν όμως ότι στα μέσα παραγωγής $R_1, \ldots, R_m$ συγκαταλέγονται μόνον τα «σπάνια» μέσα παραγωγής, δηλαδή εκείνα, των οποίων η συνολική διαθέσιμη ποσότητα χρησιμοποιείται στην παραγωγή και επομένως δεν μπορούν να αποκτηθούν η σειρά των σπάνιων μέσων παραγωγής θεωρείται από αυτούς τους συγγραφείς ως ένα δεδομένο της οικονομίας. Αυτή όμως η παραδοχή είναι ανεπίτρεπτη, διότι το θέμα της σπανιότητας ή της μη σπανιότητας ενός μέσου παραγωγής εξαρτάται από τις καμπύλες ζήτησης, από τις τεχνικές δυνατότητες παραγωγής κ.τ.λ. των σπάνιων μέσων παραγωγής θεωρείται από αυτούς τους συγγραφείς ως ένα δεδομένο της οικονομίας. Εάν τώρα με $R_1, \ldots, R_m$ εννοούμε *όλα* τα μέσα παραγωγής (σπάνια και ελεύθερα), τότε τα μέσα παραγωγής $R_1, \ldots, R_m$ χωρίζονται σε δύο ομάδες· για τα μεν (δηλαδή για τα σπάνια μέσα παραγωγής) ισχύει:

$$r_i = \alpha_{i1} s_1 + \alpha_{i2} s_2 + \ldots + \alpha_{in} s_n \quad \text{και} \quad \rho_i > 0,$$

για τα δε (δηλαδή για τα ελεύθερα μέσα παραγωγής) ισχύει:

$$r_i = \alpha_{j1} s_1 + \alpha_{j2} s_2 + \ldots + \alpha_{jn} s_n \quad \text{και} \quad \rho_j > 0.$$

Εάν συμβολίσει κανείς το μη χρησιμοποιημένο πλεόνασμα των μέσων παραγωγής R_j με $\ddot{u}_j$, τότε προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις για όλα τα μέσα παραγωγής στη θέση των πρώτων m εξισώσεων του παραπάνω συστήματος:

$$r_1 = \alpha_{11} s_1 + \alpha_{12} s_2 + \ldots + \alpha_{1n} s_n + \ddot{u}_1$$

$$r_2 = \alpha_{21} s_1 + \alpha_{22} s_2 + \ldots + \alpha_{2n} s_n + \ddot{u}_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1. Zeitschrift für Nationalökonomie 1933.
2. Wertwirtschaftliches Archiv 1932.

$$r_m = \alpha_{m1}s_1 + \alpha_{m2}s_2 + \ldots + \alpha_{mn}s_n + \ddot{u}_m$$

όπου αυτοί οι m νέοι άγνωστοι $\ddot{u}_1, \ldots, \ddot{u}_m$, που δε μπορούν να είναι αρνητικοί, συνδέονται με τους υπόλοιπους αγνώστους μέσω των ακόλουθων m πρόσθετων συνθηκών.

Όταν $\ddot{u}_i > 0$, *τότε ισχύει* $\rho_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$

ή, πράγμα που είναι το ίδιο:

Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ *από τους άγνωστους* ρ_i *και* $\ddot{u}_i$ είναι *τουλάχιστον ένας* $= 0$.

Για αυτό το τροποποιημένο σύστημα των m + 2n εξισώσεων με m πρόσθετες συνθήκες σε 2m + 2n αγνώστους $\ddot{u}_i$, ϱ_i, s_j, σ_j $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ ο κύριος Wald απέδειξε μετά από προτροπή μου και εν πρώτοις υπό την απλοποιημένη παραδοχή, ότι οι n τελευταίες εξισώσεις είναι $\sigma_j = f_j(s_j)$, ότι αυτό το σύστημα έχει πράγματι πάντοτε μη αρνητικές λύσεις και μάλιστα μια *μοναδική* λύση για τους άγνωστους $\ddot{u}_i$, s_j, σ_j $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$[3].

Abraham Wald: Για τη Μονοσήμαντη Θετική Δυνατότητα Επίλυσης των νέων Εξισώσεων Παραγωγής

Θεώρημα: *Το σύστημα εξισώσεων (Sch):*

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}s_j + \ddot{u}_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\rho_i, \quad \sigma_j = f_j(s_j), \quad (j = 1, \ldots, n)$$

στο οποίο είναι τα r_i *και* α_{ij} *δεδομένοι αριθμοί, οι* f_j *γνωστές συναρτήσεις, τα* $\ddot{u}_i$, ϱ_i, s_j, σ_j *άγνωστοι αριθμοί, έχει, εάν έχουν γίνει οι επόμενες τέσσερις παραδοχές:*

3. *Προσθήκη κατά τη διόρθωση των τυπογραφικών των δοκιμίων*: Μετά την παρουσίαση αυτής της διάλεξης μού επέστησαν την προσοχή στο ότι ήδη στην εργασία του F. Zeuthen: “Das Prinzip der Knappheit, technische Kombination und ökonomische Qualität», στον τόμο IV της Zeitschrift für Nationalökonomie, 1933 επισημαίνεται: «Επειδή δε γνωρίζει κανείς εκ των προτέρων, ποιες παραγωγικές υπηρεσίες είναι ελεύθερα αγαθά, θα έπρεπε κανείς σε αυτές τις εξισώσεις ως τελευταίο μέλος να εισαγάγει ένα πιθανό μη χρησιμοποιούμενο υπόλοιπο και συγχρόνως να καθορίσει ως συνθήκη ότι είτε αυτό το υπόλοιπο είτε η τιμή της παραγωγικής υπηρεσίας ισούται με 0». Ο Zeüthen δε συνέδεσε αυτή την τροποποίηση με το ζήτημα της γενικής θετικής και μονοσήμαντης επιλυσιμότητας του συστήματος εξισώσεων.

1. $r_i > 0$ $(i = 1, ..., m)$.
2. $\alpha_{ij} \geqq 0$ $(i = 1, ..., m, j = 1, ..., n)$.
3. *Για κάθε* j $(j = 1, ..., n)$ *υπάρχει τουλάχιστον ένα* i $(i = 1, ..., m)$, *έτσι ώστε* $\alpha_{ij} \neq 0$.
4. *Για καθένα από τους αριθμούς* $j = 1, ..., n$ *η συνάρτηση* $f_j(s_j)$ *είναι για κάθε θετική τιμή του* s_j *ορισμένη μη αρνητική, συνεχής και με τη στενή έννοια μονότονα φθίνουσα, δηλαδή από* $s_j' < s_j$ *έπεται πάντοτε* $f_j(s_j') > f_j(s_j)$, *περαιτέρω ισχύει* $\lim_{s_j=0} f_j(s_j) = \infty$.

ένα στους αγνώστους $ü_i$, s_j, σ_j "σύστημα επίλυσης", το οποίο πληροί *τις επόμενες πρόσθετες συνθήκες*:

a) $s_j \geqq 0$ $(j = 1, ..., n)$,

b) $\sigma_j \geqq 0$ $(j = 1, ..., n)$,

c) $\rho_i \geqq 0$ $(i = 1, ..., m)$,

d) $ü_i \geqq 0$ $(i = 1, ..., m)$,

e) όταν $ü_i > 0$, τότε είναι $\rho_i = 0$ $(i = 1, ..., m)$.

Αποδεικνύουμε, εννοώντας πάντα με "σύστημα λύσης" ένα σύστημα λύσης των εξισώσεων *(Sch)* το οποίο πληροί τις πρόσθετες συνθήκες *a) – e)*, κατ' αρχάς τρεις βοηθητικές προτάσεις.

1. Εάν είναι $ü_i, ..., ü_m, \rho_1, ..., \rho_m, s_1, ..., s_n, \sigma_1, ..., \sigma_n$ ένα σύστημα επίλυσης και $ü_i + \Delta ü_i, ..., ü_m + \Delta ü_m, \rho_1 + \Delta\rho_1, ..., \rho_m + \Delta\rho_m, s_1 + \Delta s_1, ..., s_n + \Delta s_n, \sigma_1 + \Delta\sigma_1, ..., \sigma_n + \Delta\sigma_n$ ένα σύστημα επίλυσης των εξισώσεων, οι οποίες προκύπτουν από το *(Sch)*, όταν κανείς αντικαταστήσει τα $r_1, ..., r_m$ με $r_1 + \Delta r_1, ..., r_m + \Delta r_m$, τότε ισχύει:

$$\Delta r_1 \Delta\rho_1 + \ldots + \Delta r_m \Delta\rho_m \leqq 0.$$

Απόδειξη: Αρχικά είναι σαφές, ότι ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$\Delta r_i - \Delta ü_i = \alpha_{ij}\Delta s_1 + \alpha_{i2}\Delta s_2 + \ldots + \alpha_{in}\Delta s_n \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\Delta\sigma_j = \alpha_{1j}\Delta\rho_1 + \alpha_{2j}\Delta\rho_2 + \ldots + \alpha_{mj}\Delta\rho_m \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Πολλαπλασιάζοντας κανείς την πρώτη σχέση για $i = 1, .., m$ με $\Delta\rho_i$ και προσθέτοντας αυτές τις m σχέσεις, παίρνει κανείς:

$$(\Delta r_1 - \Delta \ddot{u}_1)\Delta\rho_1 + \ldots + (\Delta r_m - \Delta\ddot{u}_m)\Delta\rho_m =$$
$$= (\alpha_{11}\Delta s_1 + \ldots + \alpha_{1n}\Delta s_n)\Delta\rho_1 + \ldots + (\alpha_{m1}\Delta s_1 + \ldots + \alpha_{mn}\Delta s_n)\Delta\rho_m =$$
$$= (\alpha_{11}\Delta\rho_1 + \ldots + \alpha_{n1}\Delta\rho_m)\Delta s_1 + \ldots + (\alpha_{1n}\Delta\rho_1 + \ldots + \alpha_{mn}\Delta\rho_m)\Delta s_n =$$
$$= \Delta\sigma_1\Delta s_1 + \ldots + \Delta\sigma_n\Delta s_n$$

Από την παραδοχή 4 για την $f_j(s_j)$ έπεται άμεσα

$$\Delta\sigma_1\Delta s_1 + \ldots + \Delta\sigma_n\Delta s_n \leqq 0,$$

δηλαδή ισχύει

$$(\Delta r_1 - \Delta\ddot{u}_1)\Delta\rho_1 + \ldots + (\Delta r_m - \Delta\ddot{u}_m)\Delta\rho_m \leqq 0$$

και ως εκ τούτου

$$\Delta r_1\Delta\rho_1 + \ldots + \Delta r_m\Delta\rho_m \leqq \Delta\ddot{u}_1\Delta\rho_1 + \ldots + \Delta\ddot{u}_m\Delta\rho_m.$$

Για την απόδειξη της πρότασης 1 αρκεί λοιπόν να δείξουμε:

$$\Delta\ddot{u}_1\Delta\rho_1 + \ldots + \Delta\ddot{u}_m\Delta\rho_m \leqq 0.$$

Αποδεικνύουμε μάλιστα, ότι κάθε προσθετέος $\Delta\ddot{u}_i\Delta\rho_i \leqq 0$.

Συγκεκριμένα αν είναι πρώτον $\Delta\ddot{u}_i > 0$, έπεται από την συνθήκη *d*), ότι $\ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_i > 0$ και ως εκ τούτου από την *e*), ότι $\rho_i + \Delta\rho_i = 0\cdot$ επειδή $\rho_i \geqq 0$ σύμφωνα με την προϋπόθεση *c*), πρέπει να ισχύει επίσης $\Delta\rho_i \leqq 0$ και άρα $\Delta\ddot{u}_i\Delta\rho_i \leqq 0$. Εάν είναι δεύτερον $\Delta\ddot{u}_i = 0$, τότε είναι $\Delta\ddot{u}_i\,\Delta\rho_i = 0$. Εάν είναι τρίτον $\Delta\ddot{u}_i < 0$, τότε προκύπτει από την *d*), ότι $\ddot{u}_i > 0$ και ως εκ τούτου από την *e*), ότι $\rho_i = 0\cdot$ λόγω της c) πρέπει κατόπιν να είναι $\Delta\rho_i \geqq 0$, συνεπώς ισχύει και σε αυτήν και ως εκ τούτου σε κάθε περίπτωση $\Delta\ddot{u}_i\Delta\rho_i \leqq 0$, ο.δ.ε.

2. Είναι $\{r_1^{(k)}, \ldots, r_m^{(k)}\}$ (k = 1, 2, ..., ad infinitum) μια συγκλίνουσα ακολουθία από m-άδες θετικών αριθμών, οι οποίες συγκλίνουν στην m-άδα $r_1, \ldots, r_m,$ και εάν είναι $\ddot{u}_1^{(k)}, \ldots, \ddot{u}_m^{(k)}$, $\rho_1^{(k)}, \ldots, \rho_m^{(k)}$, $s_1^{(k)}, \ldots, s_n^{(k)}$, $\sigma_1^{(k)}, \ldots, \sigma_n^{(k)}$ ένα σύστημα λύσης των εξισώσεων ($Sch^{(k)}$), οι οποίες προκύπτουν, όταν στις εξισώσεις (*Sch*) τα $r_1, \ldots, r_m$ αντικατασταθούν με $r_1^{(k)}, \ldots, r_m^{(k)}$, τότε είναι φραγμένες οι αριθμητικές ακολουθίες $\{\ddot{u}_1^{(k)}\}, \ldots, \{\ddot{u}_m^{(k)}\}$, $\{s_1^{(k)}\}, \ldots, \{s_n^{(k)}\}$ (k = 1, 2, ..., ad infinitum) και είναι επίσης φραγμένη η αριθμητική ακολουθία $\{\rho_i^{(k)}\}$ (k = 1, 2, ..., ad infinitum) για κάθε i, για το οποίο $r_i \neq 0$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με την παραδοχή 3 υπάρχει για κάθε j ένα τουλάχιστον i, έτσι ώστε $\alpha_{ij} \neq 0$. Επειδή $\ddot{u}_i^{(k)} \geqq 0$, προκύπτει από την εξίσωση $r_i^{(k)} = \alpha_{i1} s_1^{(k)} + \ldots + \alpha_{in} s_n^{(k)} + \ddot{u}_i^{(k)}$, ότι $r_i^{(k)} \geqq \alpha_{i1} s_1^{(k)} + \ldots + \alpha_{in} s_n^{(k)} \geqq \alpha_{ij} s_j^{(k)} \geqq 0$.

Επειδή η ακολουθία $\{r_i^{(k)}\}$ τείνει στο r_i, πρέπει λοιπόν προπαντός η ακολουθία $\{s_j^{(k)}\}$ να είναι φραγμένη, όπως ισχυρισθήκαμε. Από το φραγμένον των ακολουθιών $\{s_1^{(k)}\}, \ldots, \{s_n^{(k)}\}$ προκύπτει βάσει των m πρώτων εξισώσεων του *(Sch)* το ισχυρισθέν φράγμα των ακολουθιών $\{\ddot{u}_1^{(k)}\}, \ldots, \{\ddot{u}_m^{(k)}\}$. Για να αποδείξουμε επίσης την ύπαρξη φράγματος της $\{\rho_i^{(k)}\}$ με $r_i \neq 0$, προϋποθέτουμε ότι π.χ. είναι $r_1 > 0$ και συμπεραίνουμε από την παραδοχή, ότι η ακολουθία $\{\rho_i^{(k)}\}$ είναι μη φραγμένη, μια αντίφαση. Από τις εξισώσεις (*Sch*) προκύπτει τότε, ότι για κάθε j, για το οποίο $\alpha_{1j} \neq 0$, η ακολουθία $\{\sigma_j^{(k)}\}$ είναι μη φραγμένη. Υπάρχει λοιπόν μια υπακολουθία $\{g_k\}$ των φυσικών αριθμών, τέτοια ώστε $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_1^{(g_k)} = \infty$ και $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_j^{(g_k)} = 0$ για κάθε j, για το οποίο $\alpha_{1j} \neq 0$. Από την παραδοχή 4 έπεται τότε $\lim\limits_{k\to 0} s_j^{(g_k)} = 0$ για κάθε j, για το ποίο $\alpha_{1j} \neq 0$, συνεπώς $\lim\limits_{k\to\infty} (\alpha_{11} s_1 + \ldots + \alpha_{1n} s_n) = 0$. Πρέπει λοιπόν να ισχύει $\lim\limits_{k\to\infty} \ddot{u}_i^{(g_k)} = r_1 > 0$, από όπου λόγω της συνθήκης e) έπεται, ότι ισχύει $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_1^{(g_k)} = 0$, πράγμα από, το οποίο προκύπτει η ισχυρισθείσα αντίφαση και με το οποίο αποδεικνύονται όλοι οι ισχυρισμοί της πρότασης 2.

Από το γεγονός, ότι οι συνθήκες *a) – e)* τηρούνται κατά την οριακή μετάβαση $k \to \infty$, προκύπτει:

3. Εάν μια ακολουθία συστημάτων λύσης των εξισώσεων ($Sch^{(k)}$) με $M \to \infty$ τείνει σε ένα σύστημα αριθμών $\ddot{u}_1, \ldots, \ddot{u}_m, \varrho_1, \ldots, \varrho_m, s_1, \ldots, s_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, τότε αυτό το τελευταίο είναι ένα σύστημα λύσης των εξισώσεων (*Sch*).

Αποδεικνύουμε τώρα το θεώρημα για n = 1, όπου στην περίπτωση αυτή το σύστημα εξισώσεων είναι:

$$(Sch_1)\text{:}\ r_1 = \alpha_{11}s_1 + ü_1, \ldots, r_m = \alpha_{m1}s_1 + ü_{m1}\sigma_1 = \alpha_{11}\rho_1 + \ldots + \alpha_{m1}\rho_m,$$
$$\sigma_1 = f_1(s_1).$$

Σύμφωνα με την παραδοχή 3 υπάρχει ένα τουλάχιστον i, έτσι ώστε $\alpha_{i1} \neq 0$. Για όλα αυτά τα i σχηματίζουμε $\frac{r_i}{\alpha_{i1}}$ και ονομάζουμε α τον μικρότερο αυτών των αριθμών. Έστω π.χ. $\frac{r_1}{\alpha_{11}} = \alpha$. Κατόπιν τούτου δεν μπορεί να είναι ούτε $s_1 > \alpha$ μια λύση του (*Sch*), διότι διαφορετικά θα ήταν $ü_1 < 0$, που είναι αδύνατον, ούτε $s_1 < \alpha$, διότι διαφορετικά όλα τα $ü_1 > 0$ και συνεπώς θα έπρεπε να ισχύει $\rho_1 = \ldots = \rho_m = 0$, που αντιφάσκει στην προτελευταία εξίσωση (Sch_1), διότι από την παραδοχή 4 προκύπτει ότι $\sigma_1 > 0$. Θέτουμε λοιπόν $s_1 = a$ και μπορούμε τότε να προσδιορίσουμε από τις m πρώτες εξισώσεις (Sch_1) μονοσήμαντα τα $ü_1, \ldots, ü_m$, όπου, επειδή $\frac{r_1}{\alpha_{11}} = \alpha$ είναι ο μικρότερος των αριθμών $\frac{r_i}{\alpha_{i1}}$, ισχύει $ü_1 = 0$ και $ü_1 \geqq 0$ $(i = 2, \ldots, m)$. Για όλα τα i, για τα οποία ισχύει $ü_1 > 0$, θέτουμε $\rho_i = 0$ στην τελευταία εξίσωση (Sch_1). Επειδή $ü_1 = 0$, εξακολουθεί να υπάρχει τουλάχιστον το ρ_1 και επειδή ισχύει $\alpha_{11} \neq 0$, αυτή η τελευταία εξίσωση είναι δυνατό να λυθεί (γενικά με πολυάριθμους τρόπους) σύμφωνα με τις συνθήκες *a) – e)* στα ρ_i $(i = 1, \ldots, m)$, οπότε το θεώρημα αποδείχθηκε για $n = 1$.

Σύμφωνα με την αρχή της πλήρους επαγωγής, αρκεί τώρα να αποδείξουμε το θεώρημα για την περίπτωση n, υπό την επαγωγική παραδοχή ότι αυτό ισχύει για n–1.

Ονομάζουμε $\mu(s_n)$ το μικρότερο από τους αριθμούς $r_1 - \alpha_{1n}s_n, r_2 - \alpha_{2n}s_n, \ldots, r_m - \alpha_{mn}s_n$. Συνεπεία της παραδοχής 3 υπάρχει ένας αριθμός $\bar{\lambda}$, έτσι ώστε $\mu(\bar{\lambda}) = 0$. Σχηματίζουμε τώρα για κάθε αριθμό λ, για τον οποίο ισχύει $0 \leqq \lambda < \bar{\lambda}$, το σύστημα εξισώσεων:

$$(Sch^{\lambda}_{n-1})\text{:}\ r'_i = r_i - \alpha_{in}\lambda = \alpha_{i1}s_1 + \ldots + \alpha_{in-1}s_{n-1} \quad i = (1, \ldots, m)$$
$$\sigma_j = \alpha_1\rho_1 + \ldots + \alpha_{mj}\rho_m,\ \sigma_j = f_j(s_j) \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Επειδή $0 \leqq \lambda < \bar{\lambda}$, ισχύει $r'_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Προφανώς τα μεγέθη του συστήματος (Sch_{n-1}) πληρούν τις παραδοχές 1-4. Σύμφωνα λοιπόν με την επαγωγική παραδοχή αυτό το σύστημα εξισώσεων είναι επιλύσιμο.

Έστω τώρα λ ένας οποιοσδήποτε ορισμένος αριθμός του διαστήματος

$[0, \bar{\lambda})$. Σχηματίζουμε για κάθε σύστημα λύσης $\rho_1, \ldots, \rho_m$ του (Sch^{λ}_{n-1}) τον αριθμό $\alpha_{1n}\rho_1 + \ldots + \alpha_{mn}\rho_m$ και ονομάζουμε το κατ' αυτόν τον τρόπο πλήθος αριθμών $\Pi(\lambda)$. Εάν λ_1 και λ_2 είναι δύο αριθμοί, τέτοιοι ώστε να ισχύει $0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \bar{\lambda}$, εάν είναι $\rho_1, \ldots, \rho_m$ ένα οποιοδήποτε σύστημα λύσεων του (Sch^{λ}_{n-1}) και εάν είναι $\varrho_1 + \Delta\varrho_1, \ldots, \varrho_m + \Delta\varrho_m$ ένα οποιοδήποτε σύστημα λύσης του (Sch^{λ}_{n-1}), τότε σύμφωνα με τη βοηθητική πρόταση 1 ισχύει:

$$-\alpha_{1n}(\lambda_2 - \lambda_1)\Delta\rho_1 - \ldots - \alpha_{mn}(\lambda_2 - \lambda_1)\Delta\rho_m \leqq 0,$$

$$\text{δηλαδή } \alpha_{1n}\Delta\rho_1 + \ldots + \alpha_{mn}\Delta\rho_m \geqq 0.$$

Βλέπουμε λοιπόν:

(+) Εάν είναι $0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \bar{\lambda}$, *τότε δεν είναι κανένας αριθμός του* $\Pi(\lambda_2)$ *μικρότερος από κάποιον του* $\Pi(\lambda_1)$.

Επειδή σύμφωνα με την επαγωγική παραδοχή για $0 \leqq \lambda < \bar{\lambda}$ το πλήθος $\Pi(\lambda)$ δεν είναι κενό, προκύπτει από (+), ότι για $0 \leqq \lambda < \bar{\lambda}$ το πλήθος $\Pi(\lambda)$ είναι φραγμένο. Σύμφωνα με τη βοηθητική πρόταση 3 το $\Pi(\lambda)$ είναι κλειστό. Εάν $\rho'_1, \ldots, \rho'_m$ και $\rho''_1, \ldots, \rho''_m$ είναι δύο συστήματα λύσης του (Sch^{λ}_{n-1}), τότε είναι επίσης και το $\rho^{(t)}_1 = \dfrac{\rho'_1 + t\rho''_1}{1+t}, \ldots \rho^{(t)}_m = \dfrac{\rho'_m + t\rho''_m}{1+t}$ για κάθε θετικό t ένα σύστημα λύσης του (Sch^{λ}_{n-1}). Εάν λοιπόν είναι $\alpha_{1n}\rho'_1 + \ldots + \alpha_{mn}\rho'_m = \alpha'$ και $\alpha_{1n}\rho''_1 + \ldots + \alpha_{mn}\rho''_m = \alpha''$, τότε η έκφραση $\alpha_{1n}\rho^{(t)}_1 + \ldots + \alpha_{mn}\rho^{(t)}_m$ μπορεί για κατάλληλο t προφανώς να πάρει κάθε δεδομένη τιμή μεταξύ α′ και α″, δηλαδή στο πλήθος $\Pi(\lambda)$ ανήκουν ταυτόχρονα με δύο κάθε φορά αριθμούς α′ και α″ και όλοι επίσης οι αριθμοί μεταξύ α′ και α″, με άλλα λόγια το πλήθος $\Pi(\lambda)$ είναι *κυρτό*. Ως μη κενό, φραγμένο, κλειστό πλήθος το $\Pi(\lambda)$ είναι ένα *κλειστό διάστημα*, του οποίου το αριστερό ή, αντιστοίχως, δεξιό τελικό σημείο θα μπορούσε να ονομαστεί $\underline{\pi}(\lambda)$ ή, αντιστοίχως, $\bar{\pi}(\lambda)$, το οποίο όμως μπορεί επίσης να συρρικνούται σε ένα σημείο $\underline{\pi}(\lambda) = \bar{\pi}(\lambda)$.

Από αυτό προκύπτει βάσει του (+):

(++) *Εάν είναι* $\lambda_1 < \lambda_2$, *τότε τα σύνολα* $\Pi(\lambda_1)$ και $\Pi(\lambda_2)$ *είναι ή ξένα ή* *έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο, συγκεκριμένα* $\bar{\pi}(\lambda_1)=\underline{\pi}(\lambda_2)$, όπου στην τελευταία αυτή περίπτωση για κάθε λ μεταξύ των λ_1 και λ_2 το σύνολο Π(λ) αποτελείται από αυτό το σημείο.

Έστω τώρα $\{\lambda_k)$ (k = 1,2,..., ad infinitum) κάποια αριθμητική ακολουθία για την οποία $\lambda<\lambda_k<\bar{\lambda}$ για κάθε k και $\lim_{k=\infty}\lambda_k=\lambda$. Προφανώς τότε η αριθμητική ακολουθία $\{\underline{\pi}(\lambda_k)\}$ (k = 1, 2, ..., ad infinitum) είναι φραγμένη. Εάν α είναι ένα οποιοδήποτε σημείο συσσώρευσης αυτής της ακολουθίας, τότε είναι $\alpha\geqq\bar{\pi}(\lambda)$ συνεπεία του (+). Σύμφωνα με τη βοηθητική πρόταση 2 η ακολουθία των συστημάτων λύσης των εξισώσεων $(Sch^{\lambda_k}_{n-1})$ (k = 1, 2, ..., ad infinitum) είναι φραγμένη. Από τη βοηθητική πρόταση 3 συμπεραίνει κανείς εύκολα, ότι το α κείται στο πλήθος Π(λ), δηλαδή λόγω της $\lambda_k>\lambda$ ότι πρέπει να είναι ταυτό με το $\bar{\pi}(\lambda)$. Με αυτά απεδείχθη: $\begin{pmatrix}++\\+\end{pmatrix}$ Από $\lambda<\lambda_k<\bar{\lambda}$ και $\lim_{k=\infty}\lambda_k=\lambda$ προκύπτει $\lim_{k=\infty}\underline{\pi}(\lambda_k)=\bar{\pi}(\lambda)$ · και ανάλογα αποδεικνύει κανείς: από $0\leqq\lambda_k<\lambda$ και $\lim_{k=\infty}\lambda_k=\lambda$ προκύπτει $\lim_{k=\infty}\bar{\pi}(\lambda_k)=\underline{\pi}(\lambda)$.

Περαιτέρω είναι προφανές, ότι με $\lambda\to\bar{\lambda}$ η ακολουθία $\{\underline{\pi}(\lambda)\}$ συγκλίνει (πιθανόν προς το $+\infty$), δηλαδή ότι υπάρχει $\lim_{\lambda=\bar{\lambda}}\underline{\pi}(\lambda)=\pi^*$.

Θέτουμε τώρα $\underline{\tau}(\lambda)=\underline{\pi}(\lambda)-f_n(\lambda)$, $\bar{\tau}(\lambda)=\pi(\lambda)-f_n(\lambda)$ για κάθε λ [0, λ] και ονομάζουμε Τ(λ) το κλειστό διάστημα με τελικά σημεία $\underline{\tau}(\lambda)$ και $\bar{\tau}(\lambda)$. Εάν είναι $0\leqq\lambda_1<\lambda_2<\bar{\lambda}$, τότε προκύπτει από την παραδοχή 4, ότι είναι $f_n(\lambda_1)>f_n(\lambda_2)$· συνεπεία του (++) ισχύει λοιπόν $\bar{\tau}(\lambda_1)<\underline{\tau}(\lambda_2)$, δηλαδή ότι τα διαστήματα $T(\lambda_1)$ και $T(\lambda_2)$ δεν έχουν ούτε ένα κοινό σημείο, τουτέστιν

(*) *από* $\lambda_1\neq\lambda_2$ *προκύπτει ότι τα* $T(\lambda_1)$ *και* $T(\lambda_2)$ *είναι ξένα.*

Σύμφωνα με την παραδοχή 4 η f_n είναι συνεχής. Βάσει του $\begin{pmatrix}++\\+\end{pmatrix}$ αποδεικνύει κανείς ως εκ τούτου εύκολα:

(**) *Εάν τ είναι ένας αριθμός, για τον οποίο υπάρχουν δύο αριθμοί* λ_1 *και* λ_2, *για τους οποίους ισχύει* $0\leqq\lambda_1<\lambda_2<\bar{\lambda}$ *και* $\bar{\tau}(\lambda_1)<\tau<\underline{\tau}(\lambda_2)$, *τότε υπάρχει ένα λ μεταξύ των* λ_1 *και* λ_2, *έτσι ώστε το τ να κείται στο* Τ(λ).

Προς απόδειξιν της επιλυσιμότητας του συστήματος (*Sch*) διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

1. Ισχύει $\pi^* = \lim \underline{\pi}(\lambda) > f_n(\bar{\lambda})$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει $\lim\limits_{\lambda=\bar{\lambda}} \underline{\tau}(\lambda) > 0$. Επειδή το $\lim\limits_{\lambda=0} \bar{\pi}(\lambda)$ είναι πεπερασμένο και σύμφωνα με την προϋπόθεση 4 ισχύει $\lim\limits_{\lambda=0} f_n(\lambda) = \infty$, είναι $\lim\limits_{\lambda=0} \bar{\tau}(\lambda) = -\infty$. Σύμφωνα με (**) υπάρχει για τον αριθμό $\tau = 0$ ανάμεσα στα $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ ένα λ_0, τέτοιο ώστε το 0 να κείται στο $T(\lambda_0)$, και σύμφωνα με (*) υπάρχει ένα μόνο τέτοιο λ_0. Τότε το $s_n = \lambda_0$ αποτελεί μαζί με κάθε σύστημα επίλυσης του $(Sch^{\lambda_0}_{n-1})$ ένα σύστημα επίλυσης των εξισώσεων (*Sch*) και αυτό το ίδιο είναι μονοσήμαντο στα $\ddot{u}_1, \ldots, \ddot{u}_m, s_1, \ldots, s_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, επειδή το s_n μόνο $= \lambda_0$ μπορεί να είναι και το $(Sch^{\lambda_0}_{n-1})$ έχει σύμφωνα με την επαγωγική παραδοχή μόνο μια λύση στους αναφερθέντες αγνώστους.

2. Ισχύει $\pi^* = \lim\limits_{\lambda=\bar{\lambda}} \underline{\pi}(\lambda) \leqq f_n(\bar{\lambda})$. Έστω τότε $\rho_1^{(k)}, \ldots, \rho_m^{(k)}$ ένα σύστημα λύσης του $(Sch^{\lambda_k}_{n-1})$, (k = 1, 2, ..., ad infinitum), όπου $\lim\limits_{k=\infty} \lambda_k = \bar{\lambda}$. Οι ακολουθίες $\{\rho_i^{(k)}\}$ (k = 1, 2, ..., ad infinitum) είναι φραγμένες, διότι εάν π.χ. η $\{\rho_1^{(k)}\}$ δεν ήταν φραγμένη, τότε θα έπρεπε λόγω της $\lim\limits_{k=\infty} \pi(\lambda_k) \leqq f_n(\bar{\lambda})$ να ισχύει προφανώς $\alpha_{1n} = 0$, οπότε όμως θα μπορούσε να εφαρμοστεί η βοηθητική πρόταση 2 στο (Sch^{λ}_{n-1}) και θα προέκυπτε ότι η $\{\rho_1^{(k)}\}$ είναι φραγμένη.

Έστω τώρα π.χ. $i = 1, 2, \ldots, m_0$ εκείνοι εκ των αριθμών $1, 2, \ldots, m$, για τους οποίους ισχύει $r_i - \alpha_{in}\lambda$. Λόγω του ορισμού του $\bar{\lambda}$ υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός i, για τον οποίο ισχύει $r_i - \alpha_{in}\bar{\lambda} = 0$, συνεπώς είναι $1 \leqq m_0 \leqq m$. Εάν τώρα ίσχυε $\alpha_{ij} \neq 0$, όπου $i = 1, \ldots, m_0$, και $j = 1, \ldots, n-1$, τότε, εάν το $s_j^{(k)}$ συμβόλιζε την λύση για το s_j στο $(Sch^{\lambda_k}_{n-1})$, θα ίσχυε $\lim\limits_{k=\infty} s_j^{(k)} = 0$ και $\lim\limits_{k=\infty} \sigma_j^{(k)} = \infty$, δηλαδή θα ίσχυε για ένα τουλάχιστον h και $\lim\limits_{k=\infty} \rho_h^{(k)} = \infty$, πράγμα που είναι αδύνατον. Άρα ισχύει $\alpha_{ij} = 0$ για $i = 1, \ldots, m_0$, $j = 1, \ldots, n-1$· σύμφωνα με την παραδοχή 3 είναι τότε $m_0 < m$ και το (*Sch*) έχει την ακόλουθη μορφή (*Sch**):

$$r_i = \frac{r_i}{\overline{\lambda}} s_n + \ddot{u}_i \quad (i = 1,2,\ldots,m_0)$$

$$r_i = \alpha_{i1} s_1 + \ldots + \alpha_{in} s_n + \ddot{u}_i \quad (i = m_0 + 1,\ldots,m)$$

$$\sigma_j = \alpha_{m_0+1j} \rho_{m_0+1} + \ldots + \alpha_{m_j} \rho_m \quad (j = 1,\ldots,n-1)$$

$$\sigma_n = \alpha_{1n} \rho_1 + \ldots + \alpha_{mn} \rho_m$$

$$\sigma_j = f_j(s_j) \quad (j = 1,\ldots,n)$$

Εάν ονομάσουμε (*Sch***) το σύστημα εξισώσεων, το οποίο προκύπτει από το (*Sch**), όταν απαλείψει κανείς τις m_0 πρώτες και σ_n εμπεριεχόμενες εξισώσεις και θέσει $\sigma_n = \overline{\lambda}$, δηλαδή το σύστημα

$$r_i - \alpha_{in} \overline{\lambda} = \alpha_{i1} s_1 + \ldots + \alpha_{in-1} s_{n-1} + \ddot{u}_1 \quad (i = m_0 + 1,\ldots,m)$$

$$\sigma_j = \alpha_{m_0+1j} \rho_{m_0+1} + \ldots + \alpha_{m_j} \rho_m, \ \sigma_j = f_j(s_j) \quad (j = 1,\ldots,n-1)$$

τότε το (*Sch***) έχει σύμφωνα με την επαγωγική παραδοχή λύσεις, οι οποίες είναι μονοσήμαντες στα $s_1, \ldots, s_{n-1}$ · έστω ότι μια από αυτές είναι η

$$\ddot{u}^0_{m_0+1},\ldots,\ddot{u}^0_m,\rho^0_{m_0+1},\ldots,\rho^0_m,s^0_1,\ldots,s^0_{n-1},\sigma^0_1,\ldots,\sigma^0_{n-1}$$

Εάν κανείς θέσει στο (*Sch**):

$$\ddot{u}_i = 0 \quad (i = 1,\ldots,m_0)$$

$$\ddot{u}_i = u^0_i \quad (i = m_0+1,\ldots,m)$$

$$\rho_i = \rho^0_i \quad (i = m_0+1,\ldots,m)$$

$$s_j = s^0_j, \ \sigma_j = \sigma^0_j \quad (j = 1,\ldots,n-1)$$

$$s_n = \lambda,$$

τότε όλες οι εξισώσεις πληρούνται, εκτός από αυτές οι οποίες περιέχουν σ_n:

$$\sigma_n = \alpha_{1n} \rho_1 + \ldots + \alpha_{mn} \rho_m, \ \sigma_n = f_n(\overline{\lambda})$$

Επειδή μας επιτρέπεται να επιλέξουμε τα $\rho_1, \ldots, \rho_{m_0}$ αυθαιρέτως, δύνανται να πληρούνται και αυτές οι εξισώσεις υπό τον όρο ότι ισχύει:

$$f_n(\bar{\lambda}) \geqq \alpha_{m_0+1n}\rho^0_{m_0+1} + \ldots + \alpha_{mn}\rho^0_m.$$

Επειδή στην υπό θεώρησιν περίπτωση ισχύει $f_n(\bar{\lambda}) \geqq \pi^*$, αρκεί να δειχτεί, ότι υπάρχει μια λύση $\rho^0_{m_0+1}, \ldots \rho^0_m$ του (*Sch***), τέτοια ώστε

$$\alpha_{m_0+1n}\rho^0_{m_0+1} + \ldots + \alpha_{mn}\rho^0_m \leqq \pi^*$$

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων ($Sch^*_{\lambda_k}$) το οποίο προκύπτει από το (*Sch**), όταν απαλείψει κανείς σε αυτό τις εξισώσεις του εκείνες οι οποίες περιέχουν το σ_n και θέσει σε αυτό $\sigma_n = \lambda_k$, όπου $\{\lambda_k\}$ (k = 1, 2, ..., ad infinitum) μια αριθμητική ακολουθία με $\lim\limits_{k=\infty}\lambda_k = \bar{\lambda}$. Λόγω της επαγωγικής παραδοχής υπάρχει ένα σύστημα εξισώσεων $\rho_i^{(k)}$ (i = 1, ..., m) για κάθε k. Προφανώς είναι $\rho_1^{(k)} = \ldots = \rho_{m_0}^{(k)}$. Σύμφωνα με τη βοηθητική πρόταση 2 οι ακολουθίες $\{\rho_i^{(k)}\}$ $(i = m_0 + 1, \ldots, m)$ είναι φραγμένες. Εάν το $\rho^0_{m_0+1}, \ldots, \rho^0_m$ είναι μια αποτελούσα σημείο συσσώρευσης $(m-m_0)$–άδα της ακολουθίας των $(m-m_0)$–άδων $\{\rho^{(k)}_{m_0-1}, \ldots, \rho^{(k)}_m\}$, τότε προκύπτει από $\lim\limits_{\lambda=\bar{\lambda}}\bar{\pi}(\lambda) = \pi^*$, ότι:

ισχύει $\alpha_{m_0+1n}\rho^0_{m_0+n} + \ldots + \alpha_{mn}\rho^0_m \leqq \pi$ και επειδή σύμφωνα με τη βοηθητική πρόταση 3 το $\rho^0_{m_0+1}, \ldots, \rho^0_m$ είναι προφανώς μια λύση του (*Sch***), επιτύχαμε το σκοπό μας.

Κλείνοντας θα δείξουμε, *ότι η παραδοχή 4 για τις n συναρτήσεις $f_j(s_j)$, είναι απαραίτητη για την ύπαρξη μιας μοναδικής θετικής λύσης του συστήματος εξισώσεων (Sch).*

α) Για να δείξουμε την αναγκαιότητα της με τη στενή έννοια μονοτονίας της $f_j(s_j)$, θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων:

$$r_1 = \alpha_{11}s_1 + \alpha_{12}s_2 + \ddot{u}_1$$

$$\sigma_1 = \alpha_{11}\rho_1, \quad \sigma_2 = \alpha_{12}\rho_1$$

$$\sigma_1 = f_1(s_1), \quad \sigma_2 = f_2(s_2),$$

όπου έστω ότι ισχύουν $r_1 > 0$ και $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha > 0$ και οι f_1 και f_2 επί της ημιευθείας > 0 ας είναι συνεχείς, θετικές συναρτήσεις, για τις οποίες έστω ότι ισχύει $\lim\limits_{s_j=0} f_j(s_j) = \infty$, οι οποίες όμως δεν είναι μονότονα γνησίως φθίνουσες με τη στενή έννοια [μονότονα γνησίως φθίνουσες – Σ.τ.Μ] αλλά για τις οποίες ας είναι $f_1(x) = f_2(x) = c$ για κάθε x του διαστήματος $\left[\frac{r_1}{4\alpha}, \frac{3r_1}{4\alpha}\right]$. (Η ύπαρξη τέτοιων συναρτήσεων είναι προφανής): Εάν τότε λ είναι ένας οποιοσδήποτε αριθμός του διαστήματος $\left[\frac{r_1}{4\alpha}, \frac{r_1}{2\alpha}\right]$, τότε βλέπει κανείς άμεσα, ότι το:

$$s_1 = \lambda, \ s_2 = \frac{r_1}{\alpha} - \lambda$$

είναι μία λύση του συστήματος εξισώσεων. Υπάρχουν λοιπόν σε αυτή την περίπτωση άπειρες λύσεις στα s_1, s_2.

b) Για να αποδείξουμε την αναγκαιότητα της παραδοχής $\lim_{s_j=0} f(s_j) = \infty$, θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων:

$$r_1 = \alpha_{11}s_1 + \alpha_{12}s_2 + \ddot{u}_1$$

$$r_2 = \alpha_{21}s_1 + \alpha_{12}s_2 + \ddot{u}_2$$

$$\sigma_1 = \alpha_{12}\rho_1 + \alpha_{22}\rho_2$$

$$\sigma_2 = \alpha_{12}\rho_1 + \alpha_{22}\rho_2$$

$$\sigma_1 = f_1(s_1)$$

$$\sigma_2 = f_2(s_2)$$

όπου είναι $r_1 = r_2 = r > 0$ και $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = \alpha > 0$ και $f_1(s_1)$ είναι για $s_1 > 0$ μια συνεχής, θετική μονότονα φθίνουσα με τη στενή έννοια [μονότονα γνησίως φθίνουσα – Σ.τ.Μ] συνάρτηση, για την οποία είναι $\lim f_1(s_1) = \alpha$, όπου α είναι πεπερασμένο και ισχύει $f_1\left(\frac{r}{\alpha}\right) > \frac{\alpha}{2}$. Έστω περαιτέρω $f_2(x) = \frac{1}{2}f_1(x)$ για κάθε x. (Η ύπαρξη τέτοιων συναρτήσεων f_1 και f_2 είναι εμφανής). Θα δείξουμε τώρα, ότι το σύστημα εξισώσεων δεν έχει καμία θετική λύση. Διότι από τις εξισώσεις έπεται άμεσα $\sigma_1 = \sigma_2$, δηλαδή $f_1(s_1) = f_2(s_2) = \frac{1}{2}f_1(s_2)$.

Από την εξίσωση $r = \alpha(s_1 + s_2) + \ddot{u}_1$, έπεται λόγω της μη αρνητικότητας των s_1, s_2, $\ddot{u}_1$, ότι $s_1 \leq \frac{r}{\alpha}$. Συνεπεία της μονοτονίας της f_1 είναι επίσης

$f_1\left(\frac{r}{\alpha}\right) \leqq f_1(s_1)$. Λόγω της $f_1(s_1) = \frac{1}{2} f_1(s_2)$ έπεται από αυτό $f_1\left(\frac{r}{\alpha}\right) \leqq \frac{1}{2} f_1(s_2)$, πράγμα που εξαιτίας της $\frac{\alpha}{2} < f_1\left(\frac{r}{\alpha}\right)$ είναι αδύνατον, διότι θα προέκυπτε $\alpha < f_1(s_2)$, ενώ είναι $\alpha = \lim_{\alpha=0} f_1(x)$ και η f_1 φθίνει μονότονα, έτσι ώστε ισχύει $\alpha \geqq f_1(x)$ για κάθε x.

Ewald Schams: Παρατηρήσεις στους Schlesinger και Wald

Διά της παραδοχής, ότι οι συναρτήσεις $f_i(s_i)$ φθίνουν μονότονα, δηλαδή ότι για μεγαλύτερη ποσότητα των παραγόμενων αγαθών οι τιμές μιας μονάδας των παραγομένων αγαθών είναι μικρότερες, εισάγονται στης προϋποθέσεις, έρευνας του ζητήματος αφορούσες την θεωρία της αξίας ενώ το σύστημα εξισώσεων του Cassel είναι ανεξάρτητο από τη θεωρία της αξίας και αυτή η θεωρία αμφισβητείται από τον Cassel.

Karl Menger: Παρατηρήσεις στους Schlesinger και Wald

Αυτό που απεδείχθη από τον Wald είναι η πρόταση: Τροποποιώντας κανείς τις εξισώσεις των Walras και Cassel, οι οποίες στη γενική περίπτωση δεν έχουν θετικές λύσεις, σύμφωνα με την νέα πρόταση, έχουν τώρα,, εάν γίνουν οι από τον Wald επακριβώς ορισθείσες παραδοχές για τις συναρτήσεις $f_j(s_j)$, μονοσήμαντες θετικές λύσεις. Συγχρόνως οι παραδοχές του Wald είναι απαραίτητες συνθήκες για τη δυνατότητα μονοσήμαντης λύσης των νέων εξισώσεων παραγωγής, δηλαδή αν δεν κάνει κανείς αυτές τις παραδοχές, τότε αυτές οι εξισώσεις δεν έχουν κατ' ανάγκην μονοσήμαντες λύσεις[1]. Πάντως οι

1. Θα ήθελα εξάλλου να παρατηρήσω ότι η συνθήκη $\lim_{s_j=0} f_j(s_j) = \infty$, η οποία δεν μπορεί μεν γενικώς να παραλειφθεί, μπορεί ωστόσο να εισαχθεί υπό ασθενέστερη μορφή. Διότι μια ανάλυση της απόδειξης του Wald δείχνει ότι υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός A, ο οποίος εξαρτάται μόνον από τους mn συντελεστές a_{ij} και μπορεί να υπολογισθεί εύκολα βάσει αυτών των συντελεστών και ο οποίος τέτοιος ώστε η προϋπόθεση $\lim_{s_j=0} f_j(s_j) > A$ μαζί με το υπόλοιπο τμήμα της παραδοχής 4, να επαρκεί για την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης.

παραδοχές αυτές για την f_j στην πραγματικότητα δεν εκπληρώνονται με ακρίβεια, ιδίως δεν είναι σωστό, ότι κάθε αύξηση του αποθέματος των αγαθών αντιστοιχεί σε μια μείωση των τιμών της σχετικής μονάδας των αγαθών. Όμως οι παραδοχές του Wald είναι μια καλή προσέγγιση της πραγματικότητας, και περισσότερο από μια προσεγγιστική περιγραφή της πραγματικότητας δεν προσφέρει ως γνωστόν ούτε και η θεωρητική φυσική.

Παραδείγματος χάριν οι συναρτήσεις $f_i(s_i)$ δεν είναι στην πραγματικότητα πάντα με τη στενή έννοια μονότονα φθίνουσες [μονότονα γνήσίως φθίνουσες – Σ.τ.Μ] αλλά γενικά φθίνουν μονότονα, δηλαδή στην πραγματικότητα δεν έπεται από $s_j < s_j'$ πάντοτε $f_j(s_j) > f_j(s_j')$, αλλά γενικά $f_j(s_j) \geqq f_j(s_j')$. Αυτό σημαίνει απλώς, ότι στη γειτονιά των τιμών του s_j, για τις οποίες η συνάρτηση δεν είναι αυστηρά [γνησίως – Σ.τ.Μ] φθίνουσα, μπορούν να υπάρχουν πολυάριθμες λύσεις των νέων εξισώσεων παραγωγής, πράγμα, το οποίο όμως δεν μειώνει ούτε κατ' ελάχιστον την σημασία και την ωραιότητα του προηγουμένως εκτεθέντος αποτελέσματος, το οποίο υπολογίζω στα πιο σημαντικά της μαθηματικής οικονομίας. Αν όμως ο Cassel ήθελε να απορρίψει τις επακριβώς ορισμένες παραδοχές του Wald *για λόγους αρχής*, τότε βάσει της πρότασης του Wald θα υποστήριζε συγχρόνως, ότι οι από αυτόν τον ίδιο διατυπωμένες εξισώσεις, ακόμη και μετά την οξύνοη τροποποίηση τους από τον Schlesinger[2], δεν έχουν μονοσήμαντες θετικές λύσεις. Αλλά ποιος ερευνητής, για να αποδείξει για ένα απ' αυτόν τον ίδιο διατυπωμένο σύστημα εξισώσεων ότι *δεν* είναι επιλύσιμο, θα αμφισβητούσε προϋποθέσεις, οι οποίες αποτελούν μια καλή προσέγγιση της πραγματικότητας;

Το ορθό είναι μάλλον (και θα ήθελα να το τονίσω εξαιτίας της ιδιαίτερης σημασίας του) ότι με την εργασία του Wald δύο από τις βασικές σκέψεις της υποκειμενικής θεωρίας της αξίας, συγκεκριμένα αφενός ο νόμος του κορεσμού των αναγκών , ή, αντιστοίχως, η πρόταση ότι για μεγαλύτερο απόθεμα η τιμή της μονάδας μειώνεται και αφετέρου η πρόταση, ότι η αξία των μέσων παραγωγής προσδιορίζεται από την προβλεπόμενη αξία των προϊόντων ή αντιστοίχως, οι αποφάνσεις που για την σύνδεση των τιμών των μέσων παραγωγής και των τιμών των προϊόντων συνδέονται μεταξύ τους, η σύνδεση συνίσταται και μάλιστα, ότι η πρόταση περί οριακού οφέλους παρουσιάζεται από ορισμένη άποψη ως αναγκαία και (μαζί με τις άλλες προϋποθέσεις) ως ικανή

2. Προσθήκη κατά τη διόρθωση των τυπογραφικών των δοκιμίων: Von Zeuthen και Schlesinger βλέπε υποσημείωση στη σελίδα 11.

συνθήκη της επιλυσιμότητας του προβλήματος του καταλογισμού [των τιμών ων μέσων παραγωγής στα παραχθέντα προϊόντα – Σ.τ.Μ].

Ένα πολύ σημαντικό καθήκον θα ήταν τώρα η διατύπωση των ικανών και αναγκαίων συνθηκών για την ύπαρξη και το μονοσήμαντον των νέων εξισώσεων της παραγωγής υπό την προϋπόθεση, ότι η τιμή της μονάδας κάθε προϊόντος δεν εξαρτάται μόνο από την παραγόμενη ποσότητα αυτού του ενός προϊόντος, αλλά και από τις ποσότητες των υπολοίπων προϊόντων. Επειδή σύμφωνα με την απλουστευτική παραδοχή, ότι η τιμή κάθε προϊόντος εξαρτάται μόνο από την ποσότητα αυτού του ενός προϊόντος, ως συνθήκες για την δυνατότητα λύσης των νέων εξισώσεων παραγωγής προκύπτουν παραδοχές, οι οποίες αποτελούν μια καλή προσέγγιση της πραγματικότητας, μπορεί να αναμένει κανείς με μεγάλο ενδιαφέρον τις συνθήκες οι οποίες είναι στη γενική περίπτωση χαρακτηριστικές για την δυνατότητα επίλυσης των εξισώσεων. Επειδή για αυτά τα το λεγόμενα φαινόμενα αλληλεξάρτησης έχουν διατυπωθεί ως τώρα μόνο λίγοι γενικοί κανόνες η έρευνα των γενικών νέων εξισώσεων παραγωγής αποκτά επίσης και ευρετική σημασία για θεμελιώδη ζητήματα της θεωρίας της αξίας.

Πάντως κλείνοντας, θα ήθελα να παρατηρήσω, ότι με την εργασία του Wald κλείνει η περίοδος, στην οποία οι οικονομολόγοι απλώς διατύπωναν εξισώσεις, χωρίς να ενδιαφέρονται για την ύπαρξη και το μονοσήμαντον των λύσεών τους, και στην καλύτερη περίπτωση φρόντιζαν να είναι ο αριθμός των αγνώστων ίσος με τον αριθμό των εξισώσεων (πράγμα που δεν είναι φυσικά ούτε αναγκαίο ούτε ικανό για την ύπαρξη και την μοναδικότητα της λύσης). Στο μέλλον οι οικονομολόγοι, επειδή σε μια, καίτοι από καθαρά μαθηματική άποψη υποδεέστερη, περίπτωση επετεύχθη η απόδειξη της ύπαρξης και της μοναδικότητας της λύσης, θα πρέπει, όταν διατυπώσουν εξισώσεις να προσπαθούν επίσης (όπως έκαναν ανέκαθεν οι φυσικοί) να βρουν και τις λύσεις των.