Η ΧΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

ΕΙΣ ΤΑΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΜΕΤΡΙΚΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἡ διὰ τοῦ χρόνου ποσοτικὴ ἐκδήλωσις τῶν διαφόρων φαινομένων, ἰδίᾳ τῶν οἰκονομικῶν καὶ δημογραφικῶν, ὑποτυποῦται, ὡς γνωστόν, διὰ τῆς στατιστικῆς παρατηρήσεως, κατὰ τὰς ἀρχὰς τῆς στατιστικῆς μεθοδολογίας, καὶ παρέχεται ὑπὸ μορφὴν ἀριθμητικῶν σειρῶν.

Αἱ ὡς εἴρηται σειραὶ καλοῦνται δυναμικαί, ἅτε ὑποδηλοῦσαι τάσιν ἐμφανῆ πρὸ αὔξησιν ἢ μείωσιν ἢ καὶ ταὐτόχρονον ἐναλλαγὴν τῆς τάσεως πρὸς αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν, δυνάμεναι ἐνίοτε νὰ ὦσι καὶ προσεγγιζόντως περιοδικαί. Ἀκριβῶς δὲ διότι παρέχουσι, τρόπον τινά, ἐν ἀναγλύφῳ, τὴν εἰκόνα τῶν ἐκ δηλώσεων τοῦ ὑπ' ὄψιν φαινομένου διὰ τοῦ χρόνου, ὀνομάζονται εἰδικώτερον καὶ ἱστορικαὶ ἢ χρονολογικαὶ σειραὶ (ἱστορικὴ ἐξέλιξις τῶν φαινομένων, χρονολογική). Ἡ τοιαύτη ὅμως ὀνομασία τῶν ἐκ παρατηρήσεως σειρῶν δὲν εὑρίσκεται ἐν ἀπολύτῳ ἁρμονίᾳ πρὸς τὸ περιεχόμενον τοῦ ὅρου σειρά, καθότι αἱ μὲν μαθηματικαὶ σειραὶ εἶναι ἀπέραντοι ἀκολουθίαι ποσοτήτων, ἐν ᾧ αἱ στατιστικαὶ σειραὶ εἶναι πεπερασμέναι τοιαῦται. Ἐκτὸς τούτου ἕκαστος τῶν ὅρων τῆς μαθηματικῆς σειρᾶς ὑπείκει εἰς νόμον ἰσχύοντα ἀκάμπτως δι' ἅπαντας ἀνεξαιρέτως τοὺς ὅρους μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς σειρᾶς, γνωστὸν δὲ ἐκ τῶν προτέρων ἢ δυνάμενον νὰ ὁρισθῇ ἐπακριβέστατα. Ἀντιθέτως ὁ νόμος ὅστις ἰθύνει τὴν στατιστικὴν σειρὰν εἶναι ἐντελῶς ἄγνωστος. Ἐκτὸς δὲ τούτου, αἱ στατιστικαὶ σειραὶ εἶναι πάντοτε, διὰ τὸ πεπερασμένον ἑκάστοτε πλῆθος τῶν ὅρων αὐτῶν, συγκλίνουσαι, ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων ὅρων τούτων, ἐν ἑκάστῃ εἰδικῇ περιπτώσει, ἔχει ὅριον πεπερασμένον, ὅπερ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ.

Ἐνῷ δὲ εἰς τὰς μαθηματικὰς σειρὰς ἡ γνῶσις τοῦ διέποντος ταύτας νόμου ἐπιτρέπει τὴν ἐπέκτασιν τούτων πέρα τῶν δεδομένων ὅρων, εἰς τὰς στατιστικὰς σειρὰς τὸ τοιοῦτον, καὶ ἂν μὴ εἶναι ἀνέφικτον, ἐν τούτοις δὲν συνιστᾶται, ὅταν γνωσθῇ ὁ διέπων τὴν στατιστικὴν σειρὰν ἐμπειρικὸς νόμος, διότι, ἐπειδὴ αἱ ἐκδηλώσεις τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων ἐξαρτῶνται ἐκ μόνης τῆς ἀνθρωπίνης βουλήσεως, ἥτις τροποποιεῖται ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν κατὰ τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην ἔννοιαν, ἡ θεώρησις τῆς ἰσχύος τοῦ ἐμπειρικοῦ τούτου νόμου καὶ διὰ τὸ μέλλον εἶναι ἄκρως ἐπικίνδυνος, καθ' ὅσον δύναται νὰ ἀγάγῃ εἰς παραδοχὴν ἀπόψεων, αἵτινες οὐδεμίαν σχέσιν θὰ ἔχωσι πρὸς τὴν ἐκδηλωθησομένην πραγματικότητα. Οὐ μόνον δὲ ἡ γνῶσις τοῦ νόμου τῶν μαθηματικῶν σειρῶν ἐπιτρέπει τὴν ἐπέκτασιν τῶν ὅρων τούτων ἀπεριορίστως, ἀλλὰ παρέχει ἐπὶ πλέον τὴν εὐχέρειαν τῆς συμπληρώσεως αὐτῶν, διὰ τῆς εὑρέσεως ἑνὸς ἢ πλειόνων ἐλλειπόντων ὅρων.

'Ανεξαρτήτως ὅμως τῶν δύο τούτων θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων τῶν μαθηματικῶν σειρῶν, ὑφίσταται καὶ ἄλλη, ἧς αὗται ἀπολαύουσι καὶ ἣν ἰδιαιτέρως καὶ κατ' ἐξοχὴν ἐκφράζομεν διὰ τοῦ ὅρου **παρεμβολή.** Κατὰ ταῦτα παρεμβολὴ καλεῖται ἡ μέθοδος δι' ἧς μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων δεδομένης μαθηματικῆς σειρᾶς παρεμβάλλομεν (παρενθέτομεν) ἄλλας ποσότητας, οὕτως ὥστε αὗται, μετὰ τῶν δεδομένων δύο ὅρων, νὰ ἀπαρτίζωσι μερικὴν σειρὰν ἐν τῇ δοθείσῃ καὶ ἐπὶ τῇ συνθήκῃ ὅπως οἱ ὅροι τῆς μερικῆς ταύτης σειρᾶς διέπωνται ὑπὸ τῶν γενικῶν νόμων τῆς μορφώσεως τῶν ὅρων τῆς πρωταρχικῶς δοθείσης σειρᾶς. Κατ' ἐπέκτασιν παρεμβολὴν θὰ καλῶμεν καὶ τὴν εὕρεσιν ἐλλειπόντων ὅρων σειρᾶς, παρεκβολὴν δὲ τὸν καθορισμὸν ὅρων τῆς σειρᾶς πέραν τῶν δεδομένων ἢ τὴν πρᾶξιν τῆς ἐπεκτάσεως τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς πέραν τῶν γνωστῶν ἡμῖν.

Κατ' ἐπέκτασιν τῶν ἄνω ὁρισμῶν θὰ καλοῦμεν παρεμβολὴν στατιστικῆς σειρᾶς ἢ τὴν συμπλήρωσιν ταύτης διὰ καθορισμοῦ τῆς **πιθανῆς τιμῆς** ἐλλειπόντων ὅρων ταύτης ἢ τὴν παρένθεσιν (καθορισμὸν) μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ταύτης ὅρων ἄλλων μερικωτέρων ὅρων, ἀναφερομένων εἰς διαδοχικὰς στιγμὰς χρόνου ἴσας, μικροτέρας ὅμως τῶν διὰ τῆς παρατηρήσεως δεδομένων καὶ εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς στατιστικῆς ὑποτυπώσεως ἀναφερομένων.

Πρὶν ἢ προβῶμεν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ κυρίως θέματος κρίνομεν καλὸν νὰ παράσχωμεν ὁρισμούς τινας, ὡς καί τινα παραδείγματα ἵνα καταστήσωμεν σαφέστερα τὰ ἐκτιθέμενα. Τὰς στατιστικὰς σειρὰς τὰς ἀφορώσας ἢ ἀναφερομένας εἰς ἐκδηλώσεις οἰκονομικῶν φαινομένων ἐν τῷ χρόνῳ θὰ καλοῦμεν **οἰκονομικομετρικὰς σειράς,** ὡς παρεχούσας τὸ μέτρον τῆς διαδοχικῆς ἐν τῷ χρόνῳ ἐκδηλώσεως καὶ μεταβολῆς τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων. Τὰς χρονολογικὰς δὲ ταύτας οἰκονομικομεκὰς σειρὰς θὰ καλῶμεν καὶ **δυναμικὰς οἰκονομετρικὰς σειράς**, ὡς ἀναφερομένας εἰς τὴν ἐν τῷ χρόνῳ κίνησιν τῶν φαινομένων καὶ ὅσον ἀφορᾷ ταύτας θὰ ἐκθέσωμεν τὰς διαφόρους μεθόδους τῆς παρεμβολῆς τούτων.

Ἡ παρεμβολὴ τῶν οἰκονομικομετρικῶν σειρῶν, ὡς εἶναι αὐτονόητον, θὰ καθίστατο ἁπλουστάτη, ἐφ' ὅσον θὰ ἦτο γνωστὸς ἡμῖν ἢ θὰ ἠδύνατο νὰ προσδιορισθῇ ὁ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ τούτων. Ὡς προέφημεν ὅμως, οὗτος εἶναι ἄγνωστος, δι' ὃ καὶ χρησιμοποιοῦμεν μεθόδους προσδιορισμοῦ τοῦ προσεγγίζοντος νόμου αὐτῶν, ὅτε ὁ πρὸς τοῦτο χρησιμοποιούμενος μαθηματικὸς τύπος, ἁπλοῦς ἢ πολύπλοκος, ἀπαρτίζει τὴν μαθηματικὴν προσεγγίζουσαν ἔκφρασιν τοῦ ἐμπειρικοῦ νόμου τοῦ ὑπ' ὄψει φαινομένου. Ὁ νόμος οὗτος, διὰ μαθηματικοῦ τύπου ἐκφραζόμενος, εἶναι ἁπλοῦς ἐμπειρικὸς νόμος καὶ οὐχὶ ἐπιστημονικός, καθ' ὅσον ἡ ἰσχὺς τούτου εἶναι περιωρισμένη μεταξὺ τῶν ὑπ' ὄψει δεδομένων, ὧν καὶ ἀποτελεῖ τὴν βραχολογικὴν ἢ συμπεπυκνωμένην, οὕτως εἰπεῖν, ἔκφρασιν, συναρτήσει τοῦ χρόνου. Ἐὰν ἡ ἰσχὺς τούτου ἤθελε διαπιστωθῇ ἀνεξαρτήτως τόπου ἢ χρόνου, τότε, ὡς εἶναι φυσικόν, ὁ νόμος ἀπὸ **ἐμπειρικὸς** τοιοῦτος θὰ καθίστατο **ἐπιστημονικὸς** καὶ ἡ πρόβλεψις συναρτήσει τοῦ χρόνου, ἤτοι ὁ καθορισμὸς τῶν μελλοντικῶν ἐκδηλώσεων τῶν φαινομένων, θὰ ἀπέβαινεν εὔκολος. Μέχρι τοῦδε ὅμως οὐδεὶς ἐμπειρικὸς νόμος τῆς οἰκονομικομετρικῆς κατέστη ἐπιστημονικός, τοῦθ' ὅπερ ἄλλως τε θὰ μετέθετε τὰς οἰκονομικὰς ἐπιστήμας ἐκ τῆς κατηγορίας τῶν Ἠθικῶν Ἐπιστημῶν εἰς τὴν τάξιν τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν, καίτοι τὸ τελευταῖον τοῦτο δὲν ἀποκλείεται νὰ συμβῇ εἰς τὸ ἐγγὺς μέλλον, κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον.

Ἵνα ὅμως καθορισθῇ ὁ μαθηματικὸς τύπος τῆς οἰκονομικομετρικῆς σειρᾶς ἐπὶ βάσει τῶν δεδομένων ταύτης, διὰ πεπερασμένον διάστημα χρόνου, σειράν τινα π. χ. ἐτῶν, ἀπαραίτητος προϋπόθεσις τυγχάνει ἐκ τῶν ὧν οὐκ ἄνευ, ὅπως ἡ ὑπ' ὄψει μὴ ἐμφανίζῃ χάσματα, ἤτοι νὰ μὴ ἐλλείπωσιν εἷς ἢ πλείονες ὅροι ταύτης, καθ' ὅσον ἄλλως ἡ ἀντικατάστασις τῶν ἐκ παρατηρήσεως δεδομένων δι' ἀναλυτικῆς ἐκφράσεως, εἰκονιζούσης ταῦτα συναρτήσει τοῦ χρόνου, ἐφ' ὅσον τὸ δυνατὸν μᾶλλον προσεγγιζούσης, εἶναι ἀδύνατος κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον.

Ἐὰν ὅθεν ἡ οἰκονομικομετρικὴ σειρὰ ἐμφανίζῃ κενά, ὀφειλόμενα ἢ εἰς τὴν ἔλλειψιν τῆς στατιστικῆς ὑποτυπώσεως ἢ τοὐναντίον εἶναι μὲν πλήρης, ἀλλὰ ὅροι τινες ταύτης δὲν ἐμπνέουσιν ἀπόλυτον ἐμπιστοσύνην εἰς ἡμᾶς καὶ δὴ ὅταν τὰ χρονικὰ διαστήματα τῆς ὑποτυπώσεως εἶναι μικρὰ (π. χ. μήν, δεκαπενθήμερον) καθ' ὅσον δυνατὸν εἷς ὅρος νὰ ἐμφανίζῃ ἔξαρσιν ἢ πτῶσιν, μὴ δικαιολογουμένην ἐκ τῆς καθόλου διαδρομῆς ἐν τῷ χρόνῳ τοῦ φαινομένου. Ἐν τῇ τελευταίᾳ περιπτώσει, ἀνεξαρτήτως τῆς ποσοτικῆς διασκοπήσεως, ἐφ' ὅσον καὶ διὰ ποιοτικῆς τοιαύτης διαπιστωθῇ ὅτι οὐδὲν ἔκτακτον γεγονὸς ἔλαβεν χώραν, ὥστε νὰ δικαιολογῆται ἡ ἐμφανιζομένη ἀνωμαλία, τότε, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἡ παρεμβολή, ὡς κριτήριον πλέον ἐπὶ τοῦ ἀληθοῦς ἢ ἀκριβοῦς τῆς στατιστικῆς ὑποτυπώσεως, ἐπιβάλλεται νὰ ἐφαρμοσθῇ ὑπέρ ποτε καὶ ἄλλοτε.

Πρὸς συμπλήρωσιν τῶν ἐλλειπόντων ὅρων σειρᾶς τινος εἴθισται νὰ χρησιμοποιῶμεν δύο ἐκφάνσεις διακεκριμένας τῆς μεθόδου παρεμβολῆς, αἵτινες καὶ ἐφαρμόζονται εἰς πάσας τὰς ἐπιστήμας παρατηρήσεως, ἤτοι τὴν **γραφικὴν παρεμβολὴν** καὶ τὴν **λογιστικὴν παρεμβολήν.** Αἱ οἰκονομικομετρικαὶ σειραὶ εἶναι ἐμπειρικαὶ συναρτήσεις τοῦ χρόνου, εἰς ἃς ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ τυγχάνει ἡ διὰ τῆς παρατηρήσεως εἰσαχθεῖσα χρονικὴ μονὰς (ἔτος, μήν, ...), ἐξηρτημένη δὲ μεταβλητὴ αὐτὴ αὕτη ἡ ποσοτικὴ (ἀριθμητικὴ) ἐκδήλωσις τοῦ φαινομένου. Ἐπειδὴ δὲ τὰς ἐμπειρικὰς συναρτήσεις δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς καθ' ὃν ἀκριβῶς τρόπον καὶ τὰς ἀναλυτικὰς τοιαύτας, λαμβάνοντες ἐπὶ μὲν τῆς ὁριζοντίας κλίμακος (ἄξονος τῶν τετμημένων ἢ τῶν χ) ἰσομήκη διαδοχικὰ τμήματα παριστῶντα τὰς διαδοχικὰς χρονικὰς στιγμάς, ἐπὶ δὲ τοῦ πέρατος ἑκάστου τῶν τμημάτων τούτων, φέροντες εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὴν κατακόρυφον κλίμακα (ἄξονα τῶν τεταγμένων ἢ ἄξονα τῶν ψ) ὧν καὶ ἑνοῦμεν τὰ πέρατα, καὶ ἀναλόγως, κατὰ τὴν ληφθεῖσαν συμβατικὴν μονάδα, πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους ὅρους τῆς σειρᾶς (ποσοτικὰς ἐκδηλώσεις).

Ἐὰν νῦν μεταξὺ τῶν ὅρων μιᾶς σειρᾶς ἐλλείπει εἷς, εἶναι δὲ γνωσταὶ αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν τε προηγουμένων καὶ τῶν ἑπομένων αὐτῷ, δυνάμεθα νὰ ἑνώσωμεν τὰ δύο σημεῖα, ἤτοι τὰς τεταγμένας (ἄκρα αὐτῶν) τῶν προηγουμένων καὶ ἑπομένων ὅρων δι' εὐθείας γραμμῆς, καθ' ὅσον διὰ δύο δεδομένων σημείων διέρχεται εὐθεία γραμμή. Ἀκολούθως ἐκ τῆς ἐνδιαμέσου τετμημένης, τῆς μεταξὺ τῶν δύο γνωστῶν ὅρων, ὑψοῦμεν κατακόρυφον, ἥτις καὶ τέμνει τὴν ἑνοῦσαν τὰς ἄκρας τῶν τεταγμένων τῶν δύο γνωστῶν ὅρων. Τὸ μῆκος τῆς τεταγμένης, τὸ μεταξὺ τοῦ σημείου τῆς τομῆς καὶ τῆς ὁριζοντίου κλίμακος, ἔσται ὁ ζητούμενος ἐλλείπων ὅρος.

Ἡ γραφικὴ παρεμβολή, ἐὰν τὸ πλάτος τῆς μεταβλητῆς (τοῦ χρόνου τουτέστι) δηλ. ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν τιμῶν ταύτης εἶναι σχετικῶς μεγάλη (π.χ. πενταετία, ἔτος), συνεπάγεται σφάλματα, ἅτινα μειοῦνται ἐφ' ὅσον τὸ πλάτος τῆς μεταβλητῆς ἐλαττοῦται. Τὸ μειονέκτημα τοῦτο προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ εὐθεία γραμμὴ ἀποτελεῖ τὴν μαθηματικὴν ἔκφρασιν τῆς ἀριθμητικῆς προόδου καὶ συνεπῶς ἡ ἀπόλυτος αὔξησις ἑκάστου ὅρου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς σχετικῆς τούτου θέσεως ὡς πρὸς τὸν πρῶτον ὅρον καὶ τὸν λόγον τῆς προόδου· γραφικῶς δὲ ἑκάστη τεταγμένη ἐξαρτᾶται τὸ μὲν ἐκ τῆς θέσεως ταύτης ὡς πρὸς τὴν τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχήν, τὸ δὲ ἐκ τοῦ γωνιώδους συντελεστοῦ, τούτέστι τῆς μεγάλης ἢ μικρᾶς κλίσεως τῆς εὐθείας ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν κλίμακα.

Ἡ λογιστικὴ παρεμβολὴ μεταξὺ δύο δεδομένων ὅρων χρησιμοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας γραμμῆς ἥτις διέρχεται δι' αὐτῶν καὶ διὰ τῆς τεταγμένης τοῦ ἀγνώστου καὶ ζητουμένου σημείου.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας γραμμῆς ἥτις διέρχεται διὰ τῶν δύο σημείων (τῶν ἄκρων τῶν τεταγμένων τῶν δύο γνωστῶν ὅρων, μεταξὺ ὧν ὁ ἐλλείπων) εἶναι ἡ

$$\frac{\psi-\psi_1}{\psi_1-\psi_2} = \frac{\chi-\chi_1}{\chi_1-\chi_2} \quad \text{ἢ}$$

$$\psi=\psi_1+\frac{(\chi-\chi_1)}{\chi_1-\chi_2}(\psi_1-\psi_2) \qquad (1)$$

ὅπου χ_1 ἡ τετμημένη τοῦ προηγουμένου τοῦ ἐλλείποντος ὅρου
ψ_1 ἡ τεταγμένη τούτου (δηλ. ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ὅρου)
χ_2 ἡ τετμημένη τοῦ ἑπομένου τοῦ ἐλλείποντος ὅρου
ψ_2 ἡ τεταγμένη τούτου (δηλ. ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ὅρου)
χ ἡ τετμημένη, γνωστή, τοῦ ἐλλείποντος ὅρου
ψ ἡ ἄγνωστος καὶ ζητουμένη τεταγμένη τοῦ ἐλλείποντος ὅρου, ἤτοι αὐτὴ αὕτη ἡ ἐλλείπουσα ἀριθμητικὴ τιμὴ τούτου.

Διὰ νὰ καταστήσωμεν σαφεστέραν τὴν χρῆσιν τοῦ τύπου (1), ὅστις καλεῖται καὶ τύπος τῆς **ἀναλογικῆς ἢ ἀναλόγου παρεμβολῆς**, παραθέτομεν τὸ ἑπόμενον παράδειγμα:

Παράδειγμα: Τὰ ἐν κυκλοφορίᾳ τραπεζογραμμάτια κατὰ τὸ 1930 διὰ τοὺς μῆνας Ἀπρίλιον, Μάϊον καὶ Ἰούνιον εἶχον ὡς ἑξῆς *

Ἀπρίλιος	δρχ.	5.027.235.978
Μάϊος		4.919.613.802
Ἰούνιος		4.876.375.964

---

* Ἔκθεσις ἐπὶ τοῦ ἰσολογισμοῦ 31/12/1930 Τραπέζης τῆς Ἑλλάδος.

Ὑποθέσωμεν ὅτι δὲν γνωρίζομεν τὴν τιμὴν τοῦ μηνὸς Μαΐου. Θὰ θέσωμεν, ἀντὶ Ἀπρίλιος, $\chi_1=1$, ἀντὶ Μάϊος, $\chi=2$, ἀντὶ Ἰούνιος, $\chi_2=3$ καὶ $\psi_1=5027235978$, $\psi_2=4876375964$, καὶ θὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰ εἰς τὸν τύπον (1) γράμματα διὰ τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν αὐτῶν. Οὕτω θὰ ἔχωμεν

$$\psi = 5027235978 + \frac{2-1}{1-3}(5027235978-4876375964)$$

ἢ $$\psi = 5027235978 - \frac{150860014}{2}$$

ἢ $$\psi = 4.951.805.971$$

δηλ. ἐπὶ πλέον τοῦ πραγματικοῦ 32.192.169, ἤτοι **σχετικὸν σφάλμα** εἶναι 0.65 %.

Ἐκ πρώτης ὄψεως ἡ προσέγγισις μετρουμένη διὰ τοῦ σχετικοῦ σφάλματος φαίνεται μεγάλη, εἶναι δὲ καὶ πράγματι ἂν ἀποβλέψωμεν εἰς τὸν ὄγκον τῶν κυκλοφορούντων τραπεζογραμματίων. Ἡ θεώρησις ὅμως τοῦ ἀπολύτου σφάλματος, δηλ. τῶν 32 192.169 προκαλεῖ, ἀσφαλῶς, ἐνδοιασμοὺς ἐπὶ τῆς χρησιμότητος καὶ χρησιμοποιήσεως τῆς ἀναλογικῆς παρεμβολῆς. Πάντως ὡς πρώτη προσέγγισις ἡ καθορισθεῖσα τιμὴ εἶναι ἀρκούντως ἱκανοποιητική, καίτοι τὸ συνεπαγόμενον σφάλμα, ἀπότοκον τῆς υἱοθετηθείσης ὑποθέσεως, τῆς διελεύσεως δηλ. εὐθείας γραμμῆς διὰ τῶν δύο ἐμπειρικῶν σημείων (τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως), δὲν εἶναι ἀμελητέον, ἀπολύτως λαμβανόμενον.

* * *

Ἀντὶ ὅμως τῆς ἀναλογικῆς παρεμβολῆς, χρησιμοποιοῦμεν συνηθέστερον τὴν παρεμβολικὴν παρεμβολήν, δεχόμενοι ὅτι μεταξὺ τριῶν δεδομένων σημείων διέρχεται τόξον παραβολῆς, δευτέρου βαθμοῦ.

Πρὸς τοῦτο ὅμως ἐνεργοῦμεν ἀλλαγὴν τῆς μεταβλητῆς, θέτοντες

$$\chi = \bar{\chi} + \nu\theta \quad \text{ἢ} \quad \theta = \frac{\chi - \bar{\chi}}{\nu} \qquad (2)$$

ὅπου $\bar{\chi}$ τιμή τις τοῦ μεταβλητοῦ, λαμβανομένη αὐθαιρέτως ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, χ ἡ τυχοῦσα τιμὴ τῆς μεταβλητῆς, ν τὸ πλάτος τῆς τιμῆς τοῦ μεταβλητοῦ, δηλ. ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο τυχουσῶν διαδοχικῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, ἥτις καὶ ὑποτίθεται ὅτι βαίνει κατὰ πρόοδον ἀριθμητικὴν λόγου ν

$$\text{ἤτοι } \chi_{i+i} - \chi_i = \nu.$$

Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ ἀναλυτικῶς ἡ παραβολὴ παρίσταται ὑπὸ

$$\psi = \alpha + \beta\chi + \gamma\chi^2 \qquad (3)$$

ὅπου α, β, γ παράμετροι, ἤτοι ἀριθμητικοὶ συντελεσταὶ ἢ σταθεραί, ὁριζόμενοι ἑκάστοτε εἰς τὰς οἰκονομικομετρικὰς σειράς, συναρτήσει αὐτῶν τούτων τῶν δεδομένων, χ αἱ διάφοροι τοῦ μεταβλητοῦ τιμαὶ (χρόνος), αἵτινες ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τοὺς ὅρους ψ τῆς ὡς εἴρηται σειρᾶς.

Ἡ παραδοχὴ τῆς παρεμβολικῆς παρεμβολῆς συναπάγεται ὅτι ἡ ἐν τῷ χρόνῳ μεταβολὴ τῆς οἰκονομικομετρικῆς σειρᾶς βαίνει κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν καὶ δὴ ἐφ' ὅσον τοιαύτην ἐδέχθημεν ὡς ἀποτελοῦσαν τὴν ἀναλυτικὴν ἀπεικόνισιν τῆς ἐν τῷ χρόνῳ ἐξελίξεως τοῦ ὑπ' ὄψει φαινομένου.

Τούτου τεθέντος, διὰ τοῦ τύπου (2) καθορίζομεν τὰς τιμὰς τοῦ θ, ἃς ἀντεισάγομεν εἰς τὰς τοῦ τύπου (3) ἀντὶ τοῦ χ. Οὕτω δημιουργοῦμεν σύστημα ἐξισώσεων ἰσαρίθμων πρὸς τὰς παραμέτρους α, β, γ, ἃς καὶ καθορίζομεν δι' ἐπιλύσεως τούτου. Ἡ εὕρεσις μετὰ ταῦτα τοῦ ἀγνώστου ὅρου καθίστατσι εὐκολωτάτη, ὡς θὰ φανῇ ἐκ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος.

Παράδειγμα: Ὁ μέσος ὅρος τῶν κατὰ μῆνα κυκλοφορούντων γραμματίων κατὰ τὸ 1930 δίδεται ὑπὸ τοῦ ἑπομένου πίνακος

Μὴν			
Ἀπρίλιος	4	δρ.	5.027.235.978
Μάϊος	5	»	4.919.613.802
Ἰούνιος	6	»	4.876.375.964
Ἰούλιος	7	»	4.839.212.165

αἱ τετμημέναι (μεταβληταὶ) τῶν μηνῶν Ἀπριλίου, Μαΐου κλπ. εἶναι ἀντιστοίχως αἱ $\chi = 4, 5, 6, 7, 8$. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἀγνοοῦμεν τὸν ὄγκον τῶν κυκλοφορησάντων τραπεζογραμματίων κατὰ μῆνα Μάϊον. Κατὰ τὰ προλεχθέντα, ἐνεργοῦμεν διὰ τοῦ τύπου (2) ἀλλαγὴν τῆς μεταβλητῆς. Ἔχομεν ὅθεν

$$\nu = 5-4 = 6-5 = 7-6 = 1,$$

λαμβάνομεν δὲ νῦν ὡς ἀρχὴν τῶν τετμημένων, αὐθαιρέτως, τὸ 4, ἤτοι θέτομεν $\overline{\chi} = 4$

ὅθεν θὰ ἔχωμεν $\theta = 0$ διὰ $\chi = 4$
$\theta = 1$ » $\chi = 5$
$\theta = 2$ » $\chi = 6$
$\theta = 3$ » $\chi = 7$.

ἀλλὰ διὰ $\theta = 0$ ὁ τύπος $\psi = \alpha + \beta\theta + \gamma\theta^2$ γίνεται

$$\alpha = 5027235978,$$

δεδομένου ὅτι ψ παριστᾷ τὸν ἀντίστοιχον τῆς σειρᾶς ὅρον (ποσοτικὴν ἐκδήλωσιν τοῦ φαινομένου).

Ὁμοίως διὰ $\theta = 2$ ἔχομεν

$$\alpha + 2\beta + 4\gamma = 4876375964$$

ἀλλὰ $\alpha = 5027235978$,

ὅθεν $2\ (\beta + 2\gamma) = 4.876.375.964 - \alpha = -\ 150860014$

ἢ $\beta + 2\gamma = -\ 75.430.007$

Ὁμοίως διὰ $\theta = 3$, ἔχομεν

$\alpha + 3\ \beta + 9\gamma = 4839212165$ ἢ

$3\ (\beta + 3\gamma) = 4839212165 - \alpha$ ἢ

$\beta + 3\gamma = -\ 62674604.$

Ὁμοίως διὰ $\theta = 1$, ἤτοι διὰ τὸν Μάιον

$\psi = \alpha + \beta + \gamma =;$

Παρίσταται ὅθεν ἀνάγκη προσδιορισμοῦ τῶν παραμέτρων α, β, γ.

Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ συστήματος

$$\left.\begin{array}{l}\beta + 3\ \gamma = -\ 62674604 \text{ καὶ} \\ \beta + 2\ \gamma = -\ 75430007\end{array}\right\} \quad (4)$$

δι᾽ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$\gamma = 75430007 - 62674604$ ἢ

$\gamma = 12755403.$

Εἰσάγοντες νῦν τὴν τιμὴν τοῦ γ εἰς μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (4) ἔχομεν

$$\beta = -\ 75430007 - 25510806 = -\ 100940813$$

Οὕτως, ἐφ᾽ ὅσον καθωρίσθησαν αἱ τιμαὶ τῶν α, β, γ, θέτοντες, ἀντὶ $\theta = 1$, θὰ ἔχωμεν

$\psi = 5027235978 - 100940813 + 12755403$

ἢ $\psi = 4939050568$

Δηλ. διὰ τῆς παρεμβολῆς βου βαθμοῦ ἐπετεύχθη μείζων προσέγγισις, ἥτις θὰ αὐξηθῇ κατὰ πολὺ ἂν χρησιμοποιηθῇ 3ου, 4ου κ.λπ. βαθμοῦ.

Οὐχ ἧττον ἡ τοιαύτη λογιστικὴ παρεμβολὴ καὶ σχοινοτενὴς εἶναι καὶ κοπιώδης, ἐξ ἄλλου ὀλίγον οἰκεία καὶ εὐμεταχείριστος διὰ ἄτομα μὴ ἔχοντα τὴν εὐχέρειαν τῆς χρήσεως τοῦ στοιχειώδους ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ.

* * *

Ἀντὶ τῶν ὡς ἄνω λογιστικῶν μεθόδων προτιμότερον εἶναι νὰ χρησιμοποιῶμεν τὸν ἐκ τῆς θεωρίας τῶν διαφορῶν προκύπτοντα τύπον παρεμβολῆς τοῦ Νεύτωνος—Γρέγκορυ, καθόσον ἡ χρησιμοποίησις τούτου δὲν ἀπαιτεῖ πολυπλόκους ἀλγεβρικὰς πράξεις ἅμα συνειθίσῃ τις εἰς τὴν χρῆσιν τῶν τύπων.

Ἡ μέθοδος τῶν διαφορῶν, ἐκτὸς ἄλλων, παρέχει τὸ κριτήριον, ἐφ᾽ ὅσον προτιθέμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν ὡς προσεγγίζουσαν ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν φαινομένου τινος ἐν τῷ χρόνῳ πολυώνυμόν τι ῥητὸν νιοστοῦ βαθμοῦ, πόσους ὅρους τούτου πρέπει νὰ λάβωμεν ἵνα ἐπιτύχωμεν μείζονα προσέγγισιν, ἐφ' ὅσον τὸ δυνατὸν

Ἐάν, ὡς εἴθισται εἰς τὴν Στατιστικήν, παραστήσωμεν διὰ

$$\chi,\ \chi+\kappa,\quad \chi+2\kappa,\quad \chi+3\kappa,\quad \ldots\ldots\quad \chi+\nu\kappa$$

τὰς τετμημένας τῆς ἐμπειρικῆς καμπύλης, δηλ. τὰς διαδοχικὰς καὶ ἰσαπεχούσας τιμὰς τοῦ μεταβλητοῦ καὶ ἀντιστοίχως διὰ

$$\psi_0,\quad \psi_1,\quad \psi_2,\quad \psi_3,\quad \ldots\ldots\quad \psi_\nu$$

τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως, δηλ. τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς ἑκάστου τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς, δεχθῶμεν δὲ ἐξ ἄλλου ὅτι ἡ ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τῆς στατιστικῆς σειρᾶς εἶναι ἡ τῆς

$$\psi = \alpha + \beta\chi + \gamma\chi^2 + \quad \ldots\ldots \quad + \lambda\chi^\nu$$

θὰ ἔχωμεν, ἀντικαθιστῶντες διαδοχικῶς ἐν αὐτῇ τὰ χ διὰ τῶν $\chi,\ \chi+\kappa,\quad \ldots\ldots$

$$\psi_0 = \alpha + \beta\chi + \gamma\chi_2 + \ldots\ldots + \lambda\chi^\nu$$

$$\psi_1 = \alpha + \beta(\chi+\kappa) + \gamma(\chi+\kappa)^2 + \ldots + \lambda(\chi+\kappa)^\nu$$

καὶ ἀφαιροῦντες τὴν πρώτην τῆς δευτέρας κατὰ μέλη

$$\psi_1 - \psi_0 = \beta\kappa + \gamma(2\chi\kappa + \kappa^2) + \ldots\ldots + \lambda\left(\nu\chi^{\nu-1}\kappa + \ldots\right)$$

ἤτοι ἡ πρώτη διαφορὰ εἶναι πολυώνυμον $\nu - 1$ βαθμοῦ.

Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν

$$\psi_2 - \psi_1 = \beta\kappa + \gamma(2\chi\kappa + 3\kappa^2) + \ldots\ldots + \lambda\left(\nu\chi^{\nu-1}\kappa + \ldots\right)$$

Συνεχίζοντες ὁμοίως θὰ εὕρωμεν ὅτι ἡ δευτέρα διαφορὰ ἔσται πολυώνυμον $\nu-2$ βαθμοῦ καὶ ἐφεξῆς οὕτω καὶ τέλος ἡ νιοστὴ διαφορὰ ἔσται ἀριθμὸς σταθερός, αἱ δὲ ἐφεξῆς καὶ ἀνωτέρας τάξεως ταύτης πᾶσαι θὰ εἶναι μηδέν.

Οὕτως, ἂν $\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2, \ldots\ldots \psi_\nu$ εἶναι οἱ δεδομένοι ὅροι τῆς σειρᾶς, αἱ πρῶται διαφοραί, παριστώμεναι ὑπὸ

$$\Delta\psi_0,\ \Delta\psi_1,\ \Delta\psi_2 \ldots\ldots$$

θὰ δίδωνται ὑπὸ

$$\Delta\psi_0 = \psi_1 - \psi_0,\ \Delta\psi_1 = \psi_2 - \psi_1, \ldots\ldots \Delta\psi_\nu = \psi_\nu - \psi_{\nu-1}$$

αἱ δεύτεραι διαφοραί, παριστώμεναι ὑπὸ

$$\Delta^2\psi_0,\ \Delta^2\psi_1,\ \Delta^2\psi_0, \ldots\ldots$$

θὰ δίδωνται ὑπὸ

$$\Delta^2\psi_0 = \Delta\psi_1 - \Delta\psi_0 = \psi_2 - \psi_1 - \psi_1 + \psi_0 = \psi_2 - 2\psi_1 + \psi_0$$

$$\Delta^2\psi_1 = \Delta\psi_2 - \Delta\psi_1 = \psi_3 - \psi_2 - \psi_2 - \psi_1 = \psi_3 - 2\psi_2 + \psi_1$$

$$\Delta^2\psi_2 = \Delta\psi_3 - \Delta\psi_2 = \psi_4 - \psi_3 - \psi_3 - \psi_2 = \psi_4 - 2\psi_3 + \psi_2 \text{ κλπ.}$$

αἱ τρίται διαφοραί, παριστώμεναι ὑπὸ

$$\Delta^3\psi_0,\ \Delta^3\psi_1,\ \Delta^3\psi_2,\ \ldots\ldots$$

θὰ δίδωνται ὑπὸ

$$\Delta^3\psi_0=\Delta^2\psi_1-\Delta^2\psi_0=\psi_3-2\psi_2+\psi_1-\psi_2+2\psi_1-\psi_0=\psi_3-3\psi_2+3\psi_1-\psi_0$$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς

Καίτοι ὁ σχηματισμὸς τῶν διαφορῶν τῶν διαφόρων τάξεων εἶναι ἐμφανής, εἰσάγομεν τὰ δύο ἑπόμενα σύμβολα Ε καὶ Δ, θέτοντες $\psi = \sigma(\chi)$, ὅπερ, ὡς γνωστόν, εἶναι ἡ συμβολικὴ ἔκφρασις τῆς συναρτήσεως δύο ποσοτήτων, ἐξ ὧν χ ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ καὶ ψ αὐτὴ αὕτη ἡ συνάρτησις.

Οὕτω θὰ ἔχωμεν

$$E\,\sigma(\chi) = \sigma(\chi+\kappa)$$

$$E^2\sigma(x) = E\,[E\,\sigma(\chi)] = \sigma\,(\chi+2\kappa)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E^\nu\ \sigma(\chi) = \sigma(\chi+\kappa)$$

ἤτοι τὸ Ε ἐκφράζει τὴν πρᾶξιν τῆς αὐξήσεως τοῦ ὁρίσματος τῆς μεταβλητῆς.

Ὁμοίως $\Delta\,\sigma(\chi) = \sigma(\chi+\kappa)-\sigma(\chi)=E\,\sigma(\chi)-\sigma(\chi)=(E-1)\,\sigma(\chi)$ ἤτοι τὸ Δ ἐκφράζει τὴν διαφορὰν τῆς συναρτήσεως μεταξὺ δύο διαδοχικῶν αὐτῆς τιμῶν τῆς μεταβλητῆς.

Ἐκ τῆς σχέσεως $\Delta\ \sigma(\chi) = (E-1)\ \sigma(\chi)$ προκύπτει

$\Delta = E-1$ καὶ $E = 1+\Delta$ καὶ συνεπῶς

$$E^\nu\,\sigma(\chi) = (1+\Delta)^\nu\ \sigma(\chi)$$

Ἐὰν νῦν θέσωμεν $E^\nu\,\sigma(\chi) = \sigma(\chi+\nu\kappa) = \psi_\nu$ καὶ $\sigma(\chi) = \psi_0$, ὁ ἄνω τύπος γράφεται

$$\psi_\nu=(1+\Delta)^\nu\ \psi_0=\psi_0+\nu\Delta\psi_0+\frac{\nu(\nu-1)}{2\,!}\Delta^2\psi_0+\nu\frac{(\nu-1)\,(\nu-2)}{3\,!}\ \Delta^3\psi_0+\ldots$$

Οὗτος δίδει τὸν νιοστὸν τῆς σειρᾶς ὅρον συναρτήσει τοῦ πρώτου ὅρου καὶ τῶν διαδοχικῶν τούτου διαφορῶν καὶ εἶναι ὁ τὰ μάλιστα χρησιμοποιούμενος διὰ παρεμβολὰς ἐν τῇ Στατιστικῇ, καλεῖται δὲ ὁ τοῦ Νεύτωνος—Γρέγκορυ.

Ἐκ τῆς συμβολικῆς σχέσεως $\Delta = E-1$ πορίζόμεθα ἐπίσης

$$\Delta^\nu\,\sigma\,(x) = \sigma\,(x)\ [E-1]^\nu$$

καὶ θέτοντες $\sigma\,(x) = \psi_0$, τότε ὁ ὡς ἄνω τύπους γράφεται

$$\Delta^\nu\ \psi_0 = (E-1)^\nu\ \psi_0 = E^\nu\ \psi_0-\nu\ E^{\nu\text{-}1}\psi_0 + \frac{\nu(\nu\text{-}1)}{2}\ E^{\nu\text{-}2}\,\psi_0-\ldots$$

ἀλλὰ $E^\nu\ \psi_0=\psi_\nu$, $E^{\nu\text{-}1}\,\psi_0 = \psi_{\nu\text{-}1}$, ... ὅθεν

$$\Delta^\nu\ \psi_0=\psi_\nu-\nu\psi_{\nu\text{-}1}+\frac{\nu(\nu-1)}{2}\ \psi_{\nu\text{-}2}-\ldots\ldots=(\psi-1)^\nu$$

τοῦ ν ἐν τῇ ἀναπτύξει τοῦ β' μέλους κατὰ τὸν τύπον τοῦ διωνύμου τιθεμένου κάτω ὡς δείκτου καὶ οὐχὶ ἄνω ὡς ἐκθέτου.

Οἱ δύο τύποι $\psi_\nu = (1+\Delta)^\nu \psi_0$ (5)

καὶ $\Delta_\nu \psi_0 = (\psi-1)^\nu$ (6)

δίδουσιν, ὡς προέφημεν, ὁ μὲν πρῶτος τὸν νιοστὸν ὅρον συναρτήσει τοῦ πρώτου (τοῦ λαμβανομένου δηλ. ὡς τοιούτου) καὶ τῶν διαδοχικῶν του διαφορῶν, ὁ δὲ δεύτερος τὴν νιοστὴν διαφορὰν τοῦ πρώτου ὅρου συναρτήσει τοῦ νιοστοῦ ὅρου καὶ τῶν προηγουμένων τούτου.

Οἱ δύο ὡς ἄνω τύποι ἰσχύουσιν ἐφ' ὅσον ν εἶναι ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμός. Ἐὰν νῦν πρόκειται νὰ ὁρίσωμεν τιμήν τινα τῆς στατιστικῆς συναρτήσεως διὰ τιμὴν τῆς μεταβλητῆς κλασματικήν, τότε, θεωροῦντες τὴν ν ὡς μεταβλητήν, διενεργοῦμεν ἀλλαγὴν ταύτης. Πράγματι, ἂν αἱ τιμαὶ τοῦ χ βαίνωσι κατὰ πρόοδον ἀριθμητικὴν λόγου $\kappa < 1$, τότε θὰ ἔχωμεν $\chi = \bar{\chi} + \kappa\nu$, ὅπου $\bar{\chi}$ τυχοῦσα τιμὴ τῆς μεταβλητῆς, λαμβανομένη αὐθαιρέτως ὡς ἀφετηρία. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης ἔχομεν

$$\frac{\chi - \bar{\chi}}{\kappa} = \nu \qquad (7)$$

δι' οὗ ἀντικαθιστῶμεν τὸ ν εἰς τὰ ἀναπτύγματα (5) καὶ (6).

Διὰ νὰ καταστήσωμεν σαφῆ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ὡς ἄνω δύο τύπων (5) καὶ (6) παραθέτομεν σχετικὰ παραδείγματα.

Παράδειγμα:

Ὁ τιμάριθμος ἀκριβείας ζωῆς διὰ τὰ ἔτη 1923—1929 παρέχεται ὑπὸ τοῦ κάτωθι πίνακος:

ἔτη		τιμάριθμος			
		ψ	$\Delta\psi$	$\Delta^2\psi$	$\Delta^3\psi$
1923	$\psi_0 =$	1181	54	125	—85
1924	$\psi_1 =$	1235	179	40	
1925	$\psi_2 =$	1414	219		
1926	$\psi_3 =$	1633			
1927	$\psi_4 =$	(1790)			
1928	$\psi_5 =$	(1868)			
1929	$\psi_6 =$	1923			

ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι ἀγνοοῦμεν τοὺς τιμαρίθμους τῶν ἐτῶν 1927,1928.

Θὰ θέσωμεν $\psi_0 = 1181$, $\psi_1 = 1235$ κλπ., ψ_4 ἔσται ὁ ζητούμενος τιμάριθμος τοῦ ἔτους 1927.

Χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον (5), ἐν ᾧ $\nu = 4$ θὰ ἔχωμεν

$$\psi_4 = \psi_0 + 4\Delta\psi_0 + \frac{4.3}{2}\,\Delta^2\psi_0 + \frac{4.3.2}{2.3}\,\Delta^3\psi_0 + \frac{4.3.2.1.}{2.3.4}\,\Delta^4\psi_0$$

ἤ $$\psi_4 = \psi_0 + 4\,\Delta\psi_0 + 6\,\Delta^2\psi_0 + 4\,\Delta^3\psi_0 + \Delta^4\psi_0$$

'Εν τῷ ἄνω τύπῳ $\psi_0=1181$, $\Delta\psi_0=54$, $\Delta^2\psi_0=125$, $\Delta^3\psi_0=-85$.

῞Οθεν, κατὰ προσέγγισιν, ὡς ἐκ τῆς παραλείψεως τοῦ $\Delta^4\psi_0$, λαμβάνομεν

$$\boxed{\psi_4 = 1787,}$$

ἐνῷ ἡ ἀληθὴς τιμὴ εἶναι 1790, δηλ. τὸ ἀπόλυτον σφάλμα εἶναι 3 μονάδες καὶ τὸ σχετικὸν 0,16 %.

* * *

'Εκτὸς τῶν ἄνω ἐκτεθέντων τύπων παρεμβολῆς, ὑφίστανται οἱ τύποι τῶν τοῦ Gauss-Stirling, Bessel, Lagrange, Everett, διαιρουμένων διαφορῶν, ὧν ἡ ἀνάπτυξις παρέλκει, ὡς ἐκ τοῦ πολυπλόκου αὐτῶν, καίτοι ὑφίστανται εἰδικοὶ πίνακες, παρέχοντες τὰς τιμὰς τῶν συντελεστῶν τούτων διὰ τιμὰς τῆς μεταβλητῆς ἀπὸ 0 ἕως 1 καὶ μέχρι τῆς 5ης διαφορᾶς, εὐκολύνοντες οὕτω κατὰ πολὺ τὴν χρῆσιν αὐτῶν.

Αἱ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαι μέθοδοι ἀφορῶσι τὴν ἀνάπτυξιν ἐκείνων τῶν τεχνικῶν μεθόδων ἃς χρησιμοποιοῦμεν προκειμένου νὰ συμπληρώσωμεν οἰκονομικομετρικήν τινα σειρὰν διὰ τοῦ καθορισμοῦ τῆς πιθανῆς τιμῆς ἐλλείποντος τινος ὅρου ταύτης.

῾Η κυρίως στατιστικὴ παρεμβολή, δι' ἧς καθορίζομεν μεταξὺ διδομένων τιμῶν τῆς στατιστικῆς συναρτήσεως τὰς πιθανὰς τιμὰς ταύτης διὰ δεδομένην τοῦ μεταβλητοῦ τιμήν, δι' ἧς ἐν ἄλλαις λέξεσι παρακολουθοῦμεν τὴν διαδρομὴν ἐν τῷ χρόνῳ τοῦ φαινομένου, ἀπαιτεῖ, ὡς εἰκός, τὴν ὕπαρξιν μεγάλου ἀριθμοῦ δεδομένων, εἰ δυνατὸν ἐτησίων, καὶ τὸν ἀριθμὸν οὐχὶ μικρότερον τῶν 20—25 τοὐλάχιστον. Πρὸς εὕρεσιν ὅμως τοῦ ἐμπειρικοῦ νόμου τοῦ φαινομένου, οὐσιαστικῶς, διατυποῦμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

«Νόμος 'Εμπειρικὸς συνδέων δύο μεταβλητὰ χ καὶ ψ, ὁρίζεται κατὰ προσέγγισιν ὑπὸ σειρᾶς ἀντιστοίχων τιμῶν (χ_1, ψ_1), (χ_2, ψ_2) . . . . (χ_ν, ψ_ν), παρεχομένων ὑπὸ τῆς στατιστικῆς ὑποτυπώσεως (παρατηρήσεως). Νὰ προσδιορισθῇ τύπος μαθηματικὸς εἰς χ καὶ ψ, ἱκανὸς νὰ ἀπεικονίσῃ τὸν νόμον τοῦτον».

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην, πρωταρχικὸς σκοπὸς τοῦ Στατιστικοῦ ἔσται ἡ ἀντικατάστασις τῆς ἐκ παρατηρήσεως συναρτήσεις $\psi_i = \sigma(\chi_i)$ δι' ἀναλυτικῆς τοιαύτης $z = f(\chi)$, ἐπὶ τῇ συνθήκῃ ὅπως $z \simeq \psi$, ἤτοι ὅπως αἱ δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ μεταβλητοῦ προσδιοριζόμεναι διὰ τοῦ μαθηματικοῦ τύπου τιμαὶ ὦσιν ὅσον τὸ δυνατὸν πλησιέστεραι τῶν ἐκ παρατηρήσεως ἢ συγκλίνωσιν ἀπολύτως, ἐφ' ὅσον τὸ δυνατόν, πρὸς ταύτας. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν ἡ διαφορὰ $z—\psi$ δέον νὰ εἶναι, δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ μεταβλητοῦ, ἀριθμὸς ὅσον τὸ δυνατὸν μικρότερος κατ' ἀπόλυτον τιμήν.

Καὶ ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων εἶναι μικρός, μὴ ὑπερβαίνων τὰς πέντε, ὁ τύπος τοῦ Lagrange, συναρτήσει αὐτῶν τούτων τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως προσδιοριζόμενος, παρέχει τὴν ζητουμένην ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν καὶ ἐπὶ τῇ συνθηκῃ $z = \psi$. Ἐὰν ὅμως ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων εἶναι μέγας, ἡ χρῆσις τοῦ τύπου τούτου εἶναι, ἀνθρωπίνως, ἀδύνατος, διότι ἄγει εἰς πολυώνυμον βαθμὸν ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ὅρων.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ χρησιμοποιοῦμεν ἄλλας μεθόδους. Καὶ ἂν μὲν αἱ πρῶται, δεύτεραι, ... διαφοραὶ τῶν τιμῶν τῆς δοθείσης συναρτήσεως εἶναι σταθεραὶ ἢ περίπου τοιαῦται, θὰ χρησιμοποιήσωμεν πολυώνυμα αου, βου κλπ. βαθμοῦ, ὧν τὰς παραμέτρους θὰ ὁρίσωμεν εἴτε διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Gauchy εἴτε, προτιμότερον, διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

Ἐὰν διά τινα στατιστικὴν συνάρτησιν καταλήξωμεν, ἐπὶ βάσει τοῦ κριτηρίου, ὅτι προσήκει πολυώνυμον 3ου βαθμοῦ, φερ' εἰπεῖν, ἤτοι τριτοβάθμιος παραβολὴ τῆς μορφῆς

$$\psi = \alpha + \beta\chi + \gamma\chi^2 + \delta\chi^3$$

καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ μὲν ἀριστερὸν μέλος παριστᾷ τὰς ἐκ παρατηρήσεως τιμὰς τῆς συναρτήσεως, ἐνῷ τὸ δεξιὸν τὰς τοιαύτας συναρτήσει τοῦ ὡς εἴρηται τύπου, ἤτοι τὰς θεωρητικάς, ἡ διαφορὰ

$$\psi - (\alpha + \beta\chi + \gamma\chi^2 + \delta\chi^3) = \pm\varepsilon \qquad (8)$$

διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς θὰ παριστᾷ τὸ σφάλμα ὅπερ θὰ ὑφίσταται μεταξὺ παρατηρήσεως καὶ ὑπολογισμοῦ. Ἔργον τοῦ στατιστικοῦ εἶναι νὰ καταστήσῃ τὸ σύνολον τῶν σφαλμάτων τούτων ἐλάχιστον. Καὶ πράγματι, ἐπειδὴ τινὰ τῶν σφαλμάτων τούτων εἶναι θετικά, ἄλλα δὲ ἀρνητικά, καθιστῶμεν πάντα τὰ σφάλματα θετικά, τετραγωνίζοντες τὴν παράστασιν (8) καὶ εἶτα ἐπιδιώκομεν νὰ καταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν σφαλμάτων τούτων ἐλάχιστον, δηλ. τὸ $\Sigma\, \varepsilon^2$ ἢ καὶ κατὰ τὸν συμβολισμὸν τοῦ Gauss $[\varepsilon\, \varepsilon]$. Ἄγνωστος ἐν τῇ $[\varepsilon\, \varepsilon]$ εἶναι αἱ παράμετροι α, β, γ, δ, δι' ὃ τὸ ἐλάχιστον ταύτης καθορίζεται ἂν αἱ μερικαὶ παράγωγοι ταύτης ὡς πρὸς α, β, γ, δ, ἐξισωθῶσι πρὸς τὸ μηδέν, ἤτοι ἐφ' ὅσον θὰ ἔχωμεν

$$\frac{d\,\Sigma\varepsilon^2}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d\,\Sigma\varepsilon^2}{d\,\beta} = 0, \quad \frac{d\,\Sigma\varepsilon^2}{d\,\gamma} = 0, \quad \frac{d\,\Sigma\varepsilon^2}{d\,\delta} = 0$$

Ὄντως εὑρίσκομεν

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\psi &= \nu\alpha + \beta\,\Sigma\chi + \gamma\,\Sigma\chi^2 + \delta\,\Sigma\chi^3 \\
\Sigma\chi\psi &= \alpha\,\Sigma\chi + \beta\,\Sigma\chi^2 + \gamma\,\Sigma\chi^3 + \delta\,\Sigma\chi^4 \\
\Sigma\chi^2\psi &= \alpha\,\Sigma\chi^2 + \beta\,\Sigma\chi^3 + \gamma\,\Sigma\chi^4 + \delta\,\Sigma\chi^5 \\
\Sigma\chi^3\psi &= \alpha\,\Sigma\chi^3 + \beta\,\Sigma\chi^4 + \gamma\,\Sigma\chi^5 + \delta\,\Sigma\chi^6
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Τὸ ὡς ἄνω σύστημα ἀποτελεῖται ἐξ ἰσαρίθμων ἐξισώσεων πρὸς τοὺς ἀγνώστους α, β, γ, δ, οὗ ἡ ἐπίλυσις θὰ παράσχῃ τὰς τιμὰς αὐτῶν. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (9) καλοῦνται **κανονικαὶ ἐξισώσεις** καὶ γράφονται κατὰ Gauss

$$\begin{aligned}
[\psi] &= \nu\alpha + \beta\,[\chi] + \gamma\,[\chi\chi^2] + \delta\,[\chi\chi\chi] \\
[\chi\psi] &= \alpha\,[\chi] + \beta\,[\chi\chi] + \gamma\,[\chi\chi\chi] + \delta\,[\chi\chi\chi\chi]
\end{aligned}$$

κ.λ.π.

*
* *

Διὰ τὴν ἐκλογὴν τῶν χ οὐδεὶς κανὼν ὑφίσταται· οὐχ ἧττον εἰς τὰς οἰκονομικομετρικὰς σειράς, ἐπειδή, συνήθως, τὸ χ παριστᾷ ἔτη, πρὸς ἁπλούστευσιν τῶν ὑπολογισμῶν διενεργοῦμεν ἀλλαγὴν τῆς μεταβλητῆς, οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν περιττῶν δυνάμεων τοῦ χ νὰ μηδενισθῇ. Ἡ ἀλλαγὴ αὕτη διενεργεῖται διὰ τοῦ τύπου $\chi = \overline{\chi} + \nu\xi$, ὅπου $\overline{\chi}$ ἔτος τι, ληφθὲν αὐθαιρέτως ὡς ἀρχὴ τῶν τετμημένων, $\nu = 1$, καί, ἐφ' ὅσον αἱ παρατηρήσεις ἔχουσι ταχθῇ κατὰ ἔτη διαδοχικά, ξ= αἱ ἀποκλίσεις ἑκάστης τετμημένης ἀπὸ τῆς νέας ἀρχῆς. Πρὸς πλήρωσιν τῆς τεθείσης συνθήκης, ὡς $\overline{\chi}$ λαμβάνεται τὸ ἔτος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν κεντρικὸν ὅρον τῆς σειρᾶς, ἂν ἡ σειρὰ ἔχῃ περιττὸν πλῆθος ὅρων, ἄλλως ὡς $\overline{\chi}$ λαμβάνεται τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἐτῶν τῶν δύο κεντρικῶν ὅρων, ὅτε κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν αἱ ἀποκλίσεις βαίνουσιν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, κατ' ἀμφοτέρας τὰς ἐννοίας, ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3 . . . . ἄνω ἀρνητικοί, κάτω θετικοί, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ὁμοίως, ὡς οἱ ἀριθμοὶ 0,5. 1,5. 2,5 — . . . . Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἡμίσεις ἀκριβῶς ἀποκλίσεις εἶναι ἴσαι καὶ ἑτερόσημοι τῶν ἀντιστοίχων ἄλλων ἡμίσεων, πληροῦται ἡ τεθεῖσα συνθήκη ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν περιττῶν τοῦ χ δυνάμεων εἶναι μηδέν, ὅτε π.χ. τὸ σύστημα (9) ἁπλοποιεῖται καθ' ὅσον $\Sigma\chi = \Sigma\chi^3 = \Sigma\chi^5 = 0$, ἀπαρτιζόμενον ἐκ τῶν κάτωθι κανονικῶν ἐξισώσεων.

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\psi &= \nu\alpha + \gamma\,\Sigma\chi^2 \\ \Sigma\chi\psi &= \beta\,\Sigma\chi^2 + \delta\,\Sigma\chi^4 \\ \Sigma\chi^2\psi &= \alpha\,\Sigma\chi^2 + \gamma\,\Sigma\chi^4 \\ \Sigma\chi^3\psi &= \beta\,\Sigma\chi^4 + \delta\,\Sigma\chi^6 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίλυσις εἶναι πολὺ εὐκολωτέρα ἢ τῆς τοῦ (9)

Πρὸς μόρφωσιν τοῦ συστήματος (10) ἀφοῦ ἐνεργήσωμεν ἀλλαγὴν τῆς μεταβλητῆς καὶ θέσωμεν ὅπου χ τὸ ξ, προσδιοριζόμενον δι' ἑκάστην τοῦ χ τιμήν, θὰ προσδιορίσωμεν ἀκολούθως τὰ ἀθροίσματα $\Sigma\chi\psi$, $\Sigma\chi^2\psi$, $\Sigma\chi^3\psi$, $\Sigma\chi^2\psi$, $\Sigma\psi$, ἔτι δὲ τὰ τῶν ἀρτίων δυνάμεων τοῦ χ.

Ἐξυπακούεται ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων, αἱ οὑτωσὶ καθοριζόμεναι, δὲν εἶναι αἱ πράγματι ἀληθεῖς, **ἀλλὰ αἱ πιθανώραι ὅλων**, καθ' ὅσον καθιστῶσι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν σφαλμάτων ἐλάχιστον, ἐξ οὗ καὶ ἡ ὀνομασία τῆς μεθόδου ὡς «μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων», εἰδικοῦ τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων κλάδου. Παρὰ ταῦτα αἱ πιθαναὶ αὗται τῶν παραμέτρων τιμαὶ δυνατὸν νὰ συνεπάγωνται σφάλματα, δι' ὃ προτιμότερον εἶναι νὰ ὁρίζωμεν τὴν ζώνην ἐντὸς τῆς ὁποίας περιλαμβάνεται, ἡ τιμὴ ἑκάστης παραμέτρου.

Πρὸς τοῦτο, ἂν αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις εἶναι αἱ κάτωθι:

$$\begin{aligned} \Sigma\psi &= \nu\alpha + \beta\,\Sigma\chi + \gamma\,\Sigma\chi^2 + \delta\,\Sigma\chi^3 \\ \Sigma\chi\psi &= \alpha\,\Sigma\chi + \beta\,\Sigma\chi^2 + \gamma\,\Sigma\chi^3 + \delta\,\Sigma\chi^4 \\ \Sigma\chi^2\psi &= \alpha\,\Sigma\chi^2 + \beta\,\Sigma\chi^3 + \gamma\,\Sigma\chi^4 + \delta\,\Sigma\chi^5 \\ \Sigma\chi^3\psi &= \alpha\,\Sigma\chi^3 + \beta\,\Sigma\chi^4 + \gamma\,\Sigma\chi^5 + \delta\,\Sigma\chi^6 \end{aligned}$$

θὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ $\Sigma\psi$ διὰ τοῦ 0 καὶ τὰ $\Sigma\chi\psi$, $\Sigma\chi^2\psi$, $\Sigma\chi^3\psi$ διὰ τῆς 1 καὶ τοῦτο ὅταν πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου τοῦ α, ὅπερ ἔστω ὅτι εὑρέθη ὅτι εἶναι da, ὅτε ἡ πιθανωτέρα τιμὴ τοῦ α θὰ εἶναι ἡ $\alpha \pm da$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου τοῦ β, θέτοντες

$$\Sigma\psi = \Sigma\chi^2\psi = \Sigma\chi^2\psi = 1 \text{ καὶ } \Sigma\chi\psi = 0$$

καὶ ἐφεξῆς οὕτω, τοῦ μέσου σφάλματος τετραγώνου τοῦ συνόλου τῶν παρατηρήσεων διδομένου ὑπὸ

$$\varepsilon' = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\,\varepsilon^2_i}{\nu-\lambda}}$$

ἔνθα $\varepsilon_i = \alpha + \beta\chi_i + \gamma\chi^2_i + \delta\psi^3_i + \ldots - \psi_i$, ν ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων καὶ λ ὁ ἀριθμὸς τῶν προσδιορισθεισῶν παραμέτρων.

Ἐπὶ βάσει τῆς ἄνω μεθόδου ἔχουσι καθορισθῆ ὑπὸ τοῦ γράφοντος αἱ ἐξισώσεις τάσεως τῶν ἀριθμοδεικτῶν τῶν κινητῶν ἀξιῶν μεταβλητοῦ καὶ σταθεροῦ εἰσοδήματος ἐν τῷ ὑπ' ἀριθ. 6 δημοσιεύματι τοῦ Ἀνωτάτου Οἰκονομικοῦ Συμβουλίου «Δείκτης τῶν χρηματιστηριακῶν διακυμάνσεων τῶν ἑλληνικῶν ἀξιῶν, σταθεροῦ καὶ μεταβλητοῦ εἰσοδήματος, τῆς πενταετίας 1928—1933».

*
* *

Εἰς τὰς οἰκονομικομετρικὰς σειρὰς ἐμφανίζονται καὶ ἄλλαι μὴ δυνάμεναι νὰ ἀναπαρασταθῶσι διὰ γραμμικῶν ἐξισώσεων ἢ πολυωνύμων ἀνωτέρου βαθμοῦ καὶ δι' ἃς τὸ κριτήριον τῶν διαδοχικῶν διαφορῶν οὐδεμίαν ἐφαρμογὴν ἔχει. Τὰς τοιαύτας σειρὰς ἀναπαριστῶμεν ἀναλυτικῶς ἐπὶ βάσει ἄλλων κριτηρίων. Οὕτως ἂν ἔχῃ δοθῇ χρονολογική τις σειρά, ἧς αἱ μὲν τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς βαίνουσι κατὰ πρόοδον ἀριθμητικὴν λόγου κ, ὡς ἄλλως τε καὶ σύνηθες, αἱ δὲ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν λόγου ω, τότε πρὸς ἀναπαράστασιν τῆς ἐμπειρικῆς σειρᾶς χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν

$$\psi = \alpha\beta^{\chi}$$

Πράγματι, ἐὰν διὰ τὰς διαφόρους τοῦ χ τιμὰς ἔχωμεν

$$\psi_1 = \alpha\beta^{\chi_1},\ \psi_2 = \alpha\beta^{\chi_2},\ \psi_3 = \alpha\beta^{\chi_3},\ \psi_4 = \alpha\beta^{\chi_4},\ \ldots\ldots$$

θὰ ἔχωμεν, διαιροῦντες τὴν δευτέραν διὰ τῆς πρώτης,

$$\frac{\psi_2}{\psi_1} = \beta^{\chi_2-\chi_1}$$

Ὁμοίως τὴν τρίτην διὰ τῆς δευτέρας καὶ ἐφεξῆς οὕτω·

$$\frac{\psi_3}{\psi_2} = \beta^{\chi_3-\chi_2},\quad \frac{\psi_4}{\psi_3} = \beta^{\chi_4-\chi_3}$$

Ἐὰν νῦν ἔχωμεν ἐξ ὑποθέσεως

$$\chi_2-\chi_1 = \chi_3-\chi_2 = \chi_4-\chi_3 = \ldots\ldots = \kappa$$

καὶ $$\frac{\psi_2}{\psi_1}=\frac{\psi_3}{\psi_2}=\frac{\psi_4}{\psi_3}=\ldots\ldots \qquad =\omega$$

τότε, ἐπειδὴ $$\beta^{\kappa}=\frac{\psi_2}{\psi_1}=\frac{\psi_3}{\psi_2}=\ldots.=\omega,$$

$$\beta^{\kappa}=\omega \quad \text{καὶ} \quad \beta=\omega^{\frac{1}{\kappa}},$$

ὅτε, καθοριζομένου τοῦ β, εὑρίσκεται εὐκόλως ἡ τιμὴ τοῦ α, καθόσον θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\psi_1}{\beta^{\chi_1}}=\alpha, \quad \frac{\psi_2}{\beta^{\chi_2}}=\alpha, \qquad \text{κ. λ. π.},$$

ὅτε ὡς τιμὴ τοῦ α ληφθήσεται ἡ διάμεσος αὐτῶν.

Ἐὰν ἡ καθορισθεῖσα ἔκφρασις $\psi=\alpha\beta^{\chi}$ παρέχῃ μεταξὺ παρατηρήσεως καὶ ὑπολογισμοῦ σφάλματα κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον μεγάλα, τροποποιοῦμεν τὴν ἔκφρασιν ταύτην, εἰσάγοντες συνορθωτικὸν ὅρον καὶ γράφοντες $\psi=\alpha\beta^{\chi}+\gamma$, ὅτε, ἂν πάλιν $\chi_2-\chi_1=\chi_3-\chi_2=\ldots.=\kappa$ καὶ ὁ λόγος δύο διαδοχικῶν διαφορῶν.

$\frac{\Delta\psi_{i+1}}{\Delta\psi_i}=\omega$ ἀπαρτίζῃ πρόοδον γεωμετρικὴν λόγου ω, θὰ θέσωμεν γενικῶς

$$\psi_i = \alpha\beta^{\chi_i} + \gamma$$

$$\psi_{i+1} = \alpha\beta^{\chi_{i+1}} + \gamma$$

ὅτε $$\psi_{i+1}-\psi_i = \alpha(\beta^{\chi_{i+1}-\chi_i}-1)\,\beta^{\chi_i}$$

ἢ $$\Delta\psi_i = \alpha\beta^{\chi_i}(\beta^{\kappa}-1),$$

θὰ λάβωμεν δὲ $$\beta=\omega^{\frac{1}{\kappa}}$$

Ἀλλὰ $$\frac{\Delta\psi_i}{\beta^{\chi_i}}=\alpha(\beta^{\kappa}-1) \quad \text{ἢ} \quad \alpha'=\alpha(\beta^{\kappa}-1),$$

τοῦ α′ λαμβανομένου ἴσου πρὸς τὸν μέσον τῶν $\frac{\Delta\psi_i}{\beta^{\chi_i}}$,

ὅτε ἐκ τῆς σχέσεως $\alpha'=\alpha(\beta^{\kappa}-1)$ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ

$$\alpha=\frac{\alpha'}{\beta^{\kappa}-1}$$

καὶ διὰ γ λαμβάνομεν τὴν μέσην τῶν διαφορῶν $\psi_i - \alpha\beta^{\chi_i}$, αἵτινες πρέπει νὰ εἶναι σταθεραὶ προσεγγιζόντως.

Ἐξυπακούεται ὅτι αἱ σταθεραὶ τῆς $\psi=\alpha\beta^{\chi}$ δύναται νὰ ὁρισθῶσι καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, καθ' ὅσον αὕτη γράφεται

$$\lambda o\gamma\psi=\lambda o\gamma\alpha+\chi\lambda o\gamma\beta$$

καὶ συνεπῶς αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις εἶναι

$$\Sigma\lambda o\gamma\psi = \nu.\,\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta\Sigma\chi$$
$$\Sigma\chi\lambda o\gamma\psi = \lambda o\gamma\alpha\,\Sigma\chi + \lambda o\gamma\,\beta\,\Sigma\chi^2$$

ὧν ἡ ἐπίλυσις εἶναι ἁπλουστάτη.

*
* *

Συνήθως εἰς τὰς ἱστορικὰς σειρὰς χρησιμοποιοῦμεν καὶ καμπύλας τῆς μορφῆς

$$\lambda o\gamma\psi = \alpha + \beta\chi + \gamma\chi^2 + \dots$$

καὶ τοῦτο διότι αὗται ἐμφανίζουσιν ἐναργέστερον τὴν ἀληθῆ εἰκόνα τῶν σχετικῶν σφαλμάτων, μεταξὺ δηλ. τῶν ἐκ παρατηρήσεως καὶ ὑπολογισμοῦ τιμῶν. Αὐτονόητον εἶναι ὅτι καὶ τούτων αἱ σταθεραὶ καθορίζονται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων καὶ προσιδιάζουσι διὰ τὴν χάραξιν τῶν δεδομένων ἐπὶ ἡμιλογαριθμικοῦ χάρτου.

Ἐκτὸς ὅμως τῆς μεθόδου τῶν διαδοχικῶν μέσων τοῦ Gauchy καὶ τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, πρὸς καθορισμὸν τῶν παραμέτρων τῆς παρεμβολικῆς ἀναλυτικῆς ἐκφράσεως χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὰς μεθόδους τῶν **μέσων σημείων, μέσων ἐξισώσεων** καὶ **ῥοπῶν**. Αἱ δύο πρῶται ἰδιαίτατα χρησιμοποιοῦνται πρὸς καθορισμὸν παραμέτρων γραμμικῆς ἐξισώσεως (ἐξισώσεις περὶ τοῦ βαθμοῦ) ἢ παραβολῆς ὡς ἑξῆς:

Ἂν (χ_1, ψ_1) εἶναι αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου τοῦ πρώτου, (χ_2, ψ_2) τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, διαιροῦμεν εἰς δύο ἴσα τὸ πλῆθος μέρη ταῦτα καὶ θέτομεν

$$\chi' = \frac{\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \dots + \chi_\mu}{\mu}$$

$$\chi'' = \frac{\chi_\nu + \chi_\lambda + \dots + \chi_\omega}{\mu}$$

$$\psi' = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_\mu}{\mu}$$

$$\psi'' = \frac{\psi_\nu + \dots + \psi_\omega}{\mu}$$

ὅτε διὰ τῶν δύο μόνον σημείων Α (χ', ψ'), Β (χ'', ψ'') διέρχεται εὐθεία, ἧς ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$$\frac{\psi-\psi'}{\psi'-\psi''}=\frac{\chi-\chi'}{\chi'-\chi''} \text{ ἢ } \psi=\psi'+\frac{(\chi-\chi')(\psi'-\psi'')}{\chi'-\chi''}$$

Παράδειγμα : Ἡ κατὰ κάτοικον εἰσαγωγὴ (ἀξία εἰδικοῦ ἐμπορίου) δίδεται ὑπὸ τοῦ ἑπομένου πίνακος :

Ἔτος		εἰσαγωγὴ εἰς δρχ.	
	χ	ψ	χ
1901	—5	554	1
1902	—4	468	2
1903	—3	499	3
1904	—2	522	4
1905	—1	479	5
1906	0	702	6
1907	1	664	7
1908	2	621	8
1909	3	567	9
1910	4	800	10

Ἐνεργοῦμεν ἀλλαγὴν τῆς μεταβλητῆς κατὰ τὰ προλεχθέντα, λαμβάνοντες ὡς νέαν ἀρχὴν τὸ ἔτος 1906, καί, διαιροῦντες εἰς δύο ὁμάδας τὰ δεδομένα, τὴν ἀπὸ 1901—1905 καὶ 1906—1910, ἔχομεν

$$\chi'=\frac{-5-4-3-2-1}{5}=\frac{-15}{5}=-3$$

$$\chi''=\frac{0+1+2+3+4}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$$\psi'=\frac{554+468+499+522+479}{5}=\frac{2522}{5}=504{,}4$$

$$\psi''=\frac{702+664+621+567+800}{5}=\frac{3354}{5}=670{,}8$$

Ἐὰν νῦν ἐν τῇ ἐξισώσει

$$\frac{\psi-\psi'}{\psi'-\psi''}=\frac{\chi-\chi'}{\chi'-\chi''},$$

ἀντικαταστήσωμεν τὰ χ', χ'', ψ', ψ'' διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν τούτων, λαμβάνομεν

$$\frac{\psi-504{,}4}{504{,}4-670{,}8}=\frac{\chi-(-3)}{-3-2} \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{\psi-504{,}4}{-166{,}4}=\frac{\chi+3}{-5} \quad \text{ἢ}$$

$$\psi=33{,}28\chi+604{,}24$$

Διὰ $\chi=0$, δηλ. τὸ ἔτος 1906, $\psi=604{,}24$, ἐνῷ ἡ ἀληθὴς τιμὴ εἶναι 702. Ἡ ἀσυμφωνία προέρχεται καθ' ὅσον ἡ ἐξέλιξις τοῦ φαινομένου δὲν εἶναι γραμμική (κριτήριον διαδοχικῶν διαφορῶν), ἐτέθη δὲ μόνον καὶ μόνον πρὸς κατανόησιν τῆς σχετικῆς μεθόδου.

Ἐὰν πρόκειται περὶ παραβολῆς 2ου βαθμοῦ, ἐπειδὴ αἱ ἐν αὐτῇ παράμετροι εἶναι τρεῖς, αἱ α, β, γ, διαιροῦμεν τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων εἰς τρεῖς ἰσαρίθμους, ἐφ' ὅσον τὸ δυνατόν, ὁμάδας καὶ θέτομεν

$$\chi' = \frac{\Sigma\chi_i}{\nu},\ \psi' = \frac{\Sigma\psi_i}{\nu},\ \chi'' = \frac{\Sigma\chi_\kappa}{\lambda}\ \psi'' = \frac{\Sigma\psi_\kappa}{\lambda},\ \chi''' = \frac{\Sigma\chi_\mu}{\mu},\ \psi''' = \frac{\Sigma\psi_\mu}{\mu}.$$

Διὰ τῶν τριῶν σημείων Α (χ', ψ'), Β (χ'', ψ''), Γ (χ''', ψ''') διέρχεται τόξον παραβολῆς, ἑπομένως αἱ συντεταγμέναι ἁπάντων τῶν σημείων τούτων ἰδιαιτέρως, θὰ ἐπαληθεύωσι τὸν

$$\psi = \alpha + \beta\chi + \gamma\chi^2$$

ἐξ οὗ ἔχομεν

$$\psi_1 = \alpha + \beta\chi' + \gamma\chi'^2$$
$$\psi_2 = \alpha + \beta\chi'' + \gamma\chi''^2$$
$$\psi_3 = \alpha + \beta\chi''' + \gamma\chi'''^2$$

ἤτοι μορφοῦμεν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων α' βαθμοῦ μετὰ τριῶν ἀγνώστων, τῶν, α, β, γ, εὐκόλως λυόμενον.

Ἡ μέθοδος τῶν μέσων ἐξισώσεων ἢ ὁμάδος ἐξισώσεων, παρεμφερὴς πρὸς τὴν τῶν μέσων σημείων, ἐφαρμόζεται ὡς ἑξῆς: Ἄν, φερ' εἰπεῖν, ἔχῃ ληφθῇ ὡς ἐξίσωσις παρεμβολῆς ἡ εὐθεία $\psi = \alpha + \beta\chi$, αὕτη πρέπει νὰ ἐπαληθεύηται δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ χ καὶ ἀντιστοίχου αὐτῷ τοῦ ψ. Οὕτω σχηματίζομεν τόσας ἐξισώσεις ὅσαι καὶ αἱ παρατηρήσεις. Τὸ σύνολον τῶν ἐξισώσεων, ἐπειδὴ αἱ προσδιοριστέαι παράμετροι εἶναι δύο, χωρίζομεν εἰς δύο ὁμάδας καὶ ἀθροίζομεν ταύτας κατὰ μέλη ἰδιαιτέρως, καταλήγοντες εἰς τὴν εὕρεσιν δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων κλπ.

Παράδειγμα: Ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον τῶν μέσων ἐξισώσεων εἰς τὰ δεδομένα τοῦ παραδείγματος: Θὰ ἔχωμεν ὡς ἐξίσωσιν παρεμβολῆς $\psi = \alpha + \beta\chi$ καὶ συνεπῶς, λαμβάνοντες ὡς ἀρχὴν τὸ ἔτος 1900, ὅτε αἱ τιμαὶ τοῦ χ βαίνουσιν ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4.

Α'. Ὁμὰς	Β'. Ὁμὰς
$\alpha + 1\beta = 554$	$\alpha + 6\beta = 702$
$\alpha + 2\beta = 468$	$\alpha + 7\beta = 664$
$\alpha + 3\beta = 499$	$\alpha + 8\beta = 621$
$\alpha + 4\beta = 522$	$\alpha + 9\beta = 567$
$\alpha + 5\beta = 479$	$\alpha + 10\beta = 800$
$5\alpha + 15\beta = 2522$	$5\alpha + 40\beta = 3354$

ἤτοι ἐσχηματίσθη τὸ σύστημα

$$5\alpha + 15\beta = 2522$$
$$5\alpha + 40\beta = 3354$$

ἐξ οὗ λαμβάνομεν, ἀφαιροῦντες τὸ πρῶτον τοῦ β' κατὰ μέλη,

$$25\beta = 832 \quad \text{ἢ} \quad \beta = 33,28$$

καὶ συνεπῶς ἐκ μιᾶς τῶν ἐξισώσεων, τῆς βας π.χ.

$$5\alpha + 1331,20 = 3354 \quad \text{ἢ} \quad \alpha = 404,56$$

Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις παρεμβολῆς εἶναι

$$\psi = 404,56 + 33,28\chi^*$$

Οὕτω διὰ τὸ ἔτος 1906, ἐν ᾧ $\chi = 6$, ἔχομεν

$$\psi = 404,56 + 33,28.6 = 604,24$$

ἤτοι ἡ τιμὴ ἥτις εὑρέθη διὰ τῆς μεθόδου τῶν μέσων σημείων.

* * *

Ἡ μέθοδος τῶν ῥοπῶν, ἡ νεωτέρα πασῶν, ἥτις καὶ τείνει νὰ ἐκτοπίσῃ τὴν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων καὶ δὴ ὡς αὕτη ἔχει ἁπλουστευθῇ ὑπὸ τοῦ Pareto διὰ τὰς δυναμικὰς σειρὰς στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑξῆς ὑποθέσεως: **Ἐὰν ληφθῇ ἀναλυτική τις ἔκφρασις, ἡ $z = f(\chi)$, ταύτης τὸ ἐμβαδὸν καὶ αἱ πρώτη, δευτέρα, τρίτη, κλπ. ῥοπαί, ἐξισούμεναι πρὸς τὸ ἐμβαδὸν καὶ τὰς ῥοπὰς τῆς στατιστικῆς συναρτήσεως, καὶ τὸ τοιοῦτον ἐφ' ὅσον γίνῃ ἀποδεκτὸν ὅτι ἡ ληφθεῖσα ἀναλυτικὴ συνάρτησις ἀπεικονίζει κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον τὰ ἐμπειρικὰ δεδομένα, θὰ παράσχωσι σύστημα ἰσαρίθμων ἐξισώσεων πρὸς τὰς παραμέτρους.** Ἡ μέθοδος αὕτη συμπίπτει πρὸς τὴν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐφ' ὅσον ἡ χρησιμοποιουμένη πρὸς παρεμβολὴν ἀναλυτικὴ ἔκφρασις εἶναι γραμμικὴ ἐξίσωσις ἢ ἀκέραιον πολυώνυμον νιοστοῦ βαθμοῦ.

Συμβολικῶς παριστῶμεν τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῶν ῥοπῶν καλοῦντες πρώτην ῥοπὴν τὴν $\nu_1 = \dfrac{\Sigma\chi\psi}{\Sigma\psi}$,

δευτέραν ῥοπὴν τὴν $\nu_2 = \dfrac{\Sigma\chi^2\psi}{\Sigma\psi}$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς, τῆς μηδὲν ῥοπῆς $\nu_0 = \dfrac{\Sigma\psi}{\Sigma\psi} = 1$

---

* Ἡ ἐξίσωσις αὕτη διαφέρει τῆς εὑρεθείσης διὰ τῆς μεθόδου τῶν μέσων σημείων, διότι εἰς ταύτην ὡς ἀρχὴ ἐλήφθη τὸ ἔτος 1906, ἐνῷ εἰς τὴν προκειμένην τὸ ἔτος 1900.

καὶ σ (χ) τὴν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν, ὅτε μεταξὺ τῶν θεωρητικῶν ῥοπῶν καὶ τῶν ἐμπειρικῶν τοιούτων θὰ ὑφίστανται αἱ ἰσότητες

$$\nu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\chi)\, d\chi = 1 \qquad \text{ταὐτότης}$$

$$\nu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\chi)\, d\chi = \overline{\nu_1}$$

$$\nu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^2 \sigma(\chi)\, d\chi = \overline{\nu_2} \qquad \text{κ.λ.π.}$$

Οὕτω καθορίζεται σύστημα ἐξισώσεων ἰσαρίθμων πρὸς τὰς παραμέτρους, οὗ ἡ ἐπίλυσις εἶναι εὔκολος, ἐξαρτωμένης ἰδίᾳ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς ὡς ἄνω μεθόδου ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς μορφῆς τῆς σ (χ), δηλ. τοῦ ὁλοκληρωσίμου ἢ μὴ ταύτης.

* * *

Διελθόντες ἐν βραχυλογίᾳ τὰς διαφόρους κυριωτέρας μεθόδους παρεμβολῆς, θεωροῦμεν ἀναγκαῖον νὰ ἐπιμένωμεν ἐπὶ τῆς σημασίας ταύτης ὡς ὀργάνου πολυτίμου :

1ον) **Συμπληρώσεως οἱασδήποτε ἐμπειρικῆς συναρτήσεως ἐκ τυχὸν ἐλλειπόντων ὅρων ταύτης, διὰ καθορισμοῦ τῶν πιθανωτέρων τούτων τιμῶν, συναρτήσει τῶν πρὸ καὶ τῶν μετὰ ταῦτα.** Ἡ παρεμβολή, οὕτω ὁριζομένη, θεωρεῖ τὴν μεταβολὴν τῶν φαινομένων συνεχῆ, ὡς ἄλλως τε καὶ εἶναι, δι᾽ ὃ καὶ τὰς ἀντιστοίχους ἐμπειρικὰς συναρτήσεις τούτων ὡς τοιαύτας μεταχειρίζεται. Εἰς τὴν πραγματικότητα ἄλλως τε ἅλματα καὶ σημεῖα ἀσυνεχείας δὲν ὑφίστανται.

2ον) **Κριτικῆς ἐνίων δεδομένων, μὴ δικαιολογουμένης τῆς ἀνωμάλου τούτων τιμῆς ἐκ ποιοτικῶν αἰτίων καὶ ἀφορμῶν, αἵτινες ἄλλως τε ἀντιβαίνουσι πρὸς τὴν ἔννοιαν τοῦ συνεχοῦς τῆς μεταβολῆς ὁμαλῶς, ὡς ἐκ τῆς τοιαύτης ἐμφανίσεως τῶν δεδομένων εἰς τὰς ἄλλας περιοχὰς τῆς μεταβολῆς τοῦ μεταβλητοῦ.**

3ον) **Προσδιορισμοῦ τοῦ ἐμπειρικοῦ νόμου τῆς ποσοτικῆς ἐκδηλώσεως τοῦ φαινομένου ἐν τῷ θεωρηθέντι διαστήματι τῶν διακυμάνσεων τῆς μεταβλητῆς.**

Ἐπὶ βάσει τῶν τελευταίων εἶναι δυνατὸς ὁ καθορισμὸς τοῦ θεωρητικοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου τῆς παρεμβολικῆς συναρτήσεως πρὸς καλυτέραν σπουδὴν τοῦ ὅλου φαινομένου, ἐφ' ὅσον τὰ σφάλματα ἅτινα ὑφίστανται μεταξὺ θεωρητικῶν καὶ ἐμπειρικῶν τιμῶν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποδοθῶσιν εἰς διαταρακτικοὺς παράγοντας, ὧν διὰ τῆς παρεμβολῆς, ἤτοι τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως διὰ τῶν προκυπτόντων ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς ἐκφράσεως, ἐπιδιώκεται ἡ ἀπαλλαγὴ ἐκ τούτων καὶ συνεπῶς ἐπιζητεῖται νὰ καταφανῇ μᾶλλον σαφῶς καὶ ἀναγλύφως ὁ νόμος ὅστις διέπει, διὰ τὸ θεωρηθὲν εὖρος τῶν μεταβολῶν τῆς μεταβλητῆς, τὸ ὑπ' ὄψει φαινόμενον.

Ἡ χρῆσις τῶν διαφόρων τύπων δὲν εἶναι δύσκολος· ἄσκησιν μόνον ἀπαιτεῖ πρὸς ἀπόκτησιν εὐχερείας τινος καὶ ἐπὶ πλέον ἄρνησιν τῆς συμφυοῦς πρὸς τὸν ἑλληνικὸν χαρακτῆρα ἐπιμονῆς νὰ γνωρίζωμεν κατὰ βάθος τὴν καταγωγὴν τῶν τύπων οὓς χρησιμοποιοῦμεν. Οἱ Ἀγγλοσάξωνες π.χ. χρησιμοποιοῦσι τύπους πολυπλόκους εἰς τὰς θετικὰς ἐπιστήμας χωρὶς νὰ ἐνδιαφέρωνται ποτὲ νὰ μάθωσι πόθεν καὶ πῶς προέκυψαν. Ἄλλως τε ἡ γνῶσις αὕτη δὲν εἶναι βέβαιον ἐὰν συμβάλῃ ἢ ὄχι εἰς τὴν καλυνέραν χρησιμοποίησιν τῶν δεδομένων· ἀρκεῖ μόνον ἡ χρῆσις τῶν τύπων νὰ εἶναι ἡ πρέπουσα ἑκάστοτε.

Ἀθῆναι, Ἰούλιος 1934.

Κ. Ἀντ. Ἀθανασιάδης
Ὑποπλ. Οἰκ. Π. Ναυτικοῦ (Γ.Ε.Ν.)
Καθηγητὴς Ν. Σχολῆς Δοκίμων

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑΙ

I. ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ ΤΡΑΠΕΖΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ

(εἰς ἑκατομμύρια)

		Γερμανία		Βουλγαρία	Ἡνωμέναι Πολιτεῖαι	Γαλλία	Ἰταλία	Ρουμανία	Μεγάλη Βρεττανία	Γιουγκοσλαυΐα
		Μάρκα		Λέβα	Δολλάρ	Φράγ.	Λιρέτ.	Λέϊ	Λίραι	Δηνάρ.
1933	II	3.356	413	2.452	6.545	83.986	13.048	20.883	356.2	4.532
	III	3.520	413	2.595	6.320	86.096	13.117	21.453	367.1	4.564
	IV	3.538	399	2.730	6.003	84.992	13.070	21.322	371.9	4.502
	V	3.469	396	2.673	5.812	83.267	12.991	21.470	374.1	4.453
	VI	3 482	396	2.648	5.721	84.708	13 028	21.355	375.1	4.403
	VII	3.492	394	2.531	5.630	82.853	13.329	21.229	377.2	4.306
	VIII	3.521	396	2.674	5.612	81.143	13.256	21.159	374.0	4.314
	IX	3.625	392	2.738	5.650	82.994	13.303	21.194	370.8	4.372
	X	3.571	392	2.845	5.635	81 097	13.170	20.885	369.3	4.343
	XI	3.542	381	2.854	5.742	80.368	13.112	20.671	370.2	4.257
	XII	3.645	392	2.984	5.806	82.613	13.243	21.219	392.0	4.327
1934	I	3.458	372	2.571	5.289	79.474	13.068	20.834	366.7	4.212
	II	3.494	358	2.400	5.354	81.024	12.708	20.815	367.4	4.233
	III	3.675	356	2.603	5.395	82.833	12.963	21.479	378.8	4.232
	IV	3.640	356	2.534	5.368	81.502	12.987	21.258	373.7	4.169
	V	3.635	355	2.574	5.357	79.992	12.889	21.021	378.1	4.119
	VI	3.777	345	—	5.374	82.058	12.887	—	381.7	4.142

II. ΚΑΛΥΜΜΑ ΕΙΣ ΧΡΥΣΟΝ ΚΑΙ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑ

(εἰς ἑκατομμύρια)

	Γερμαν.		Βουλγ.		Ἡν. πολ.	Γαλλία			Ἰταλία			Ρουμανία			Μεγ Βρ.	Γιουγ. κοσλ.	
	Χρυσός	Ἀπαιτ. ἐξ.	Χρυσός	Ἀπαιτ. ἐξ.	Χρυσός	Χρυσός		Ἀπαιτήσεις ἐξωτερικοῦ	Χρυσός		Ἀπαιτήσεις ἐξωτερικοῦ	Χρυσός		Ἀπαιτήσεις ἐξωτερικοῦ	Χρυσός	Χρυσός	Ἀπαιτ. ἐξ.
	Μάρκα		Λέβα		Δολ.	Φράγκα			Λιρέτται			Λέϊ			Λίρ.	Δηνάρ.	
1933																	
II	769	152	1.520	61	4.380	81.017	2.601	1.800	6.174	1.773	962	6.357	3.222	615	143.0	1.761	182
III	739	97	1.520	58	4.282	80.409	2.406	1.971	6.291	1.773	802	6.399	3.222	685	172.7	1.761	169
IV	411	99	1.520	12	4.312	80.866	2.440	1.406	6.517	1.773	584	6.428	3.222	731	186.9	1.762	162
V	372	77	1.521	19	4.315	80.951	2.468	1.419	6.688	1.773	369	6.459	3.222	721	187.4	1.796	111
VI	189	85	1.521	47	4.318	81.243	2.585	1.405	6.767	1.773	321	6.489	3.222	654	190.6	1.797	103
VII	245	78	1.521	58	4.320	81.976	2.572	1.403	6.994	1.773	343	6.525	3.222	560	191.4	1.797	98
VIII	307	74	1.521	18	4.329	82.227	1.291	1.361	7.033	1.773	318	6.544	3.222	636	191.7	1.797	72
IX	367	40	1.522	74	4.324	82.095	1.287	1.346	7.004	1.773	304	6.563	3.222	524	191.8	1.796	107
X	396	18	1.522	132	4.323	81.032	1.285	1.302	7.057	1.773	306	6.583	3.222	365	191.8	1.795	115
XI	405	3	1.522	—	4.323	77.822	38	1.213	7.082	1.773	310	6 625	3.222	504	191.8	1.795	107
XII	386	9	1.545	—	4.323	77.098	16	1.143	7.092	1.773	305	6.673	3.222	251	191.7	1.795	111
1934																	
I	376	7	1.546	—	—	77.055	16	1.114	7.099	1.773	274	6.718	3.222	160	191.8	1.795	80
II	334	7	1.547	—	—	73.971	15	1.056	7.105	1.773	83	6.751	3.222	146	192.0	1.765	81
II	237	8	1.547	—	—	74.613	12	1.056	6.874	1.773	44	8.358	1.642	144	192.2	1.765	74
III	205	7	1.547	—	—	75.756	14	1.052	6.840	1.773	40	8.392	1.642	210	192.1	1.762	100
IV	130	6	1.547	—	—	77.466	14	1.080	6.667	1.773	35	8.415	1.642	143	192.1	1.766	102
V	70	7	—	—	—	79.548	15	1.142	6.468	1.773	34	—	—	—	192.1	1.781	82

ΕΞΕΛΙΞΙΣ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΝΕΡ

ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΗΣ

κατὰ τὴν τριμηνίαν

ΕΝΕΡ

			31 Δ/βρίου 1933	
1.	Χρυσὸς καὶ ἐξωτ. συνάλλαγμα		4.018.471.735.80	
2.	Δάνεια Δημοσίου εἰς χρυσὸν		640.507.241.60	
3.	Ἕτερον ἐξωτερ. συνάλλαγμα		2.007.649.29	
4.	Κερματικὰ ἑλλην. νομίσματα		195.367.007.45	
5.	Συνάλ. καὶ γραμμάτια ἐσωτ.		186.965.607.85	
6.	Πιστώσεις		3.131.694.141.68	
7.	Χρέος τοῦ Δημοσίου		2.714.111.162.45	
8.	Ἐπενδύσεις		371.199.383.55	
9.	Κτίρια Τραπέζης καὶ ἐγκατασ.		141.453.608.34	
10.	Ἕτερα στοιχεῖα ἐνεργητικοῦ		676.282.716.13	

ΠΑΘΗ

11.	Κεφάλαιον καταβεβλημένον		400.000.000.—	
12.	Ἀποθεματικὰ		66.724.549.80	
13.	Τμῆμα τακτικοῦ ἀποθεματικοῦ εἰς ἀντίκρυσμα ἀποσβεννυμένου μέρους τῆς ἐκ λιρ. Ἀγγλ. ζημίας (Ν. 5305)		30.000.000.—	
14.	Τραπ. γραμμ. ἐν κυκλοφορίᾳ		5.448.848.600.—	
15.	Ἕτεραι ὑποχρ. ὄψεως εἰς δρ.		5.423.756.865.19	
16.	Καταθ. εἰς δρ. ὑπὸ προθεσμίαν		—	
17.	Ὑποχρ. εἰς ἐξωτ. συνάλλαγμα		66.275.895.69	
18.	Ἕτεραι ὑποχρεώσεις		642.454.343.46	

ΓΗΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΠΑΘΗΤΙΚΟΥ
ΓΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
Ϊαΐου—'Ιουλίου 1934

ΓΗΤΙΚΟΝ

31 Μαΐου 1934	30 'Ιουνίου 1934	31 'Ιουλίου 1934		Διαφορὰ μεταξὺ Δ/βρίου 1933 καὶ 'Ιουλ. 1934+ἢ—
4.128.624.090.9	4.209.054.032.04	3.511.914.026.30		-- 506.557.709.50
640.507.241.60	640.507.241.60	640.507.241.60		—
2.266.455.54	2.758.878.50	2.527.704.69		+ 520.055.40
205.581.520.75	208.649.215.15	205.116.790.60		+ 9.749.783.15
210.756.164.05	217.788.569.25	230.116.706.05		+ 43.151.098.20
).651.392.794.51	3.936.747.158.91	1.548.505.646.36		— 1.583.188.495.32
?.714.111.162.45	2.714.111.162.45	2.714.111.162.45		—
353.867.066.75	347.795.630.—	328.715.652.50		— 42.483.731.05
142.682.196.09	143.909.295.59	144.557.122.89		+ 3.103.514.55
.074.050.679.68	1.127.075.607.07	1.056.688.562.88		+ 380.405.846.75

ΤΙΚΟΝ

400.000.000.—	400.000.000.—	400.000.000.—		—
66.724.549.80	66.724.549.80	66.724.549.80		—
30.000.000.—	30.000.000.—	30.000.000.—		—
.116.828.450.—	5.130.882.700.—	5.143.388.800.—		— 305.459.800.—
.779.491.275.75	7.110.345.544.14	3.639.758.698.40		— 1.783.998.166.79
—	—	—		—
46.038.400.58	55.993.685.39	107.752.497.89		+ 41.476.602.20
684.756.695.58	754.450.311.23	995.136.070.23		+ 352.681.726.77

ΤΙΜΑΡΙΘΜΟΣ ΧΟΝΔΡΙΚΗΣ ΠΩΛΗΣΕΩΣ

	Ἡνωμέν. Πολιτεῖαι	Γαλλία	Ἰταλία	Μεγάλη Βρεττανία	Γερμανία	Γιουγκοσλαυΐα [1]	Βουλγαρία [2]	Ἑλλάς
1913	100.0	100	100	100.0	100.0	— —	— —	100
1928	138.5	645	462	140.3	140.0	106.2	3.237	—
1929	136.5	627	446	136.5	137.2	100.6	3.447	1.811
1930	123.8	554	383	119.5	124.6	86.6	2.788	1.646
1931	104.6	502	328	104.2	110.9	72.9	2.332	1.471
1932	92.8	427	304	101.6	96.5	65.2	2.071	1.766
1933	94.5	398	280	100.9	93.3	64.4	1.821	1.997
1933 I	87.4	411	292	100.3	91.0	67.6	1.873	2.020
II	85.7	404	286	98.9	91.2	68.4	1.838	2.032
III	86.2	390	281	97.6	91.1	67.0	1.797	2.017
IV	86.5	387	279	77.2	90.7	66.3	1.813	2.033
V	89.8	383	279	99.2	91.9	64.9	1.828	1.987
VI	93.1	403	281	101.7	92.9	66.1	1.807	1.988
VII	88.7	401	279	102.3	93.9	63.7	1.845	2.007
VIII	99.6	397	278	102.5	94.2	60.7	1.795	2.008
IX	101.4	397	276	103.0	94.9	60.7	1.839	1.985
X	102.0	397	274	102.6	95.7	61.5	1.798	1.963
XI	101.9	403	273	102.8	96.3	63.1	1.830	1.957
XII	101.4	407	275	102.8	96.2	62.3	1.793	1.963
1934 I	103.4	405	276	104.6	96.3	62.9	1.742	1.975
II	105.4	400	275	105.3	96.2	63.6	1.844	1.970
III	105.6	394	275	103.8	95.9	63.3	1.818	1.945
IV	105.0	387	273	102.8	95.8	63.0	1.816	1.936
V	105.6	381	273	102.4	96.2	64.1	1.858	1.928
VI	—	379	—	103.6	97.2	65.6	—	1.936

1. Βάσις 100 τὸ 1926.
2. Βάσις 100 τὸ 1914.

ΕΠΙΣΗΜΟΣ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΤΙΚΟΣ ΤΟΚΟΣ

	Γερμανία	Βουλγαρία	Ἡν.Πολιτεῖαι	Γαλλία	Ἰταλία	Ρουμανία	Μεγάλη Βρετταν.	Γιουγκοσλαυΐα	Ἑλλάς
1933 III	4	8	3.5	2.5	4	7	2	7.5	9
IV	4	8	3	2.5	4	6	2	7.5	9
V	4	8	2.5	2.5	4	6	2	7.5	9
VI	4	8	2.5	2.5	4	6	2	7.5	7.5
VII	4	8	2.5	2.5	4	6	2	7.5	7.5
VIII	4	8	2.5	2.5	4.5	6	2	7.5	7.5
IX	4	8	2.5	2.5	3.5	6	2	7.5	7.5
X	4	8	2	2.5	3.5	6	2	7.5	7
XI	4	8	2	2.5	3.5	6	2	7.5	7
XII	4	8	2	2.5	3	6	2	7.5	7
1934 I	4	7	2	2.5	3	6	2	7.5	7
II	4	7	1.5	3	3	6	2	7	7
III	4	7	1.5	3	3	6	2	7	7
IV	4	7	1.5	3	3	6	2	7	7
V	4	7	1.5	2.5	3	6	2	7	7
VI	4	7	1.5	2.5	3	6	2	7	7