

NO: 15582

NO: 15451

1



**ΠΑΝΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΚΟΙΝΩΝΙΟΛΟΓΙΑΣ**

ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΣ Ν. ΤΣΙΓΩΝΗ

Μαθηματικού

**ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΑ
ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ ΤΟΥ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΔΙΑΦΩΤΙΣΜΟΥ.**

Η θέση και ο ρόλος τους στην παιδεία και στην τεχνική εφαρμογή.

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΘΗΝΑ 2005

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω θερμά όλους όσους με βοήθησαν να πραγματοποιήσω αυτή την εργασία. Συγκεκριμένα:

- Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Νεοκλή Σαρρή, καθηγητή του Πάντειου Πανεπιστημίου για την πολύτιμη βοήθεια και την επιστημονική καθοδήγηση την οποία μου παρείχε. Με την άρτια επιστημονική του κατάρτιση με βοήθησε να οργανώσω την έρευνα και να την παρουσιάσω με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.
- Ευχαριστώ, επίσης, θερμά τον επίτιμο καθηγητή του Π.Τ.Δ.Ε. του πανεπιστημίου Αθηνών, κ. Θεόδωρο Εξαρχάκο, για την επιστημονική και παιδαγωγική του καθοδήγηση καθώς και για την αμέριστη ηθική στήριξη και αγάπη με την οποία με περιέβαλλε κατά την διάρκεια της διεκπεραίωσης της παρούσας εργασίας. Τις θερμές ευχαριστίες μου εκφράζω και προς τον καθηγητή του Π.Τ.Δ.Ε, κ. Γεώργιο Λεοντσίνη, μέλους της συμβουλευτικής επιτροπής.
- Θέλω επίσης να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στην κ. Χριστίνα Φύλη, αναπληρώτρια καθηγήτρια του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου όχι μόνο για τις χρήσιμες παρατηρήσεις και υποδείξεις της, αλλά και για την συμπαράστασή της σε δύσκολες καμπές της έρευνας. Τις ευχαριστίες μου εκφράζω και προς τον κ. Δημήτριο Κοντογιάννη, σύμβουλο του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, για την συμβολή του στην ολοκλήρωση της μελέτης μου.
- Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τα μέλη της οικογένειάς μου, γιατί χωρίς την δική τους κατανόηση και την ηθική στήριξη, δεν θα έφτανα στην ολοκλήρωση της προσπάθειάς μου.

Αθήνα, Μάρτιος 2005
Αναστασία Ν. Τσιγώνη

Στην Χριστίνα και τον Γιώργο

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	11-41
1. Τα Μαθηματικά στην ελληνική κοινωνία	12
1.1 Εμπορική αστική τάξη και Μαθηματικά	13
1.2 Μαθηματικά και εκσυγχρονισμός της ελληνικής κοινωνίας	19
2. Τα Μαθηματικά στην οθωμανική αυτοκρατορία	22
2.1 Μαθηματικά – Σχολές	26
2.2 Εκσυγχρονισμός της οθωμανικής κοινωνίας – τα αίτια της αποτυχίας	30
3. Στόχοι της έρευνας – Μεθοδολογία	33
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ	43
1.1. Η κατάσταση της παιδείας στα πρώτα 150 χρόνια μετά την άλωση της Κωνσταντινούπολης.....	43
1.1.1 Η περίοδος 1453 έως 1480	43
1.1.2 Η περίοδος 1480 έως 1530	45
1.1.3 Η περίοδος 1530 έως 1600	48
1.1.3.1 Ανώτερα σχολεία	48
1.1.3.2 Κοινά σχολεία	50
1.1.4 Τα διδασκόμενα μαθήματα (1453-1600)	51
1.1.5 Ο ρόλος της Εκκλησίας (1453- 1600)	53
1.2. Η κατάσταση της παιδείας από τις αρχές του 17 ^{ου} μέχρι τα μέσα του 18 ^{ου} αιώνα	56
1.2.1 Η στοιχειώδης εκπαίδευση	56
1.2.2 Εγκύκλιος – ανώτερη παιδεία	51
1.2.3 Η «κυριαρχική μέριμνα» της Εκκλησίας για την ίδρυση των Σχολών	63
1.2.4 Ο σχολάρχης	56
1.2.5 Ο θεσμός των υποτροφιών	68
1.2.6 Ανώτερα σχολεία (1600-1750)	69
1.3 Η κατάσταση της παιδείας από τα μέσα του 18 ^{ου} αιώνα μέχρι την Ελληνική Επανάσταση	71
1.3.1 Γενικά	71
1.3.2 Διδακτικά προγράμματα Σχολών	73
1.3.3 Σχολεία	77
1.3.4 Εκκλησία και παιδεία (18 ^{ος} αιώνας μέχρι την Επανάσταση)	79
1.3.5 Η «θέση» των «παραδοσιακών» Σχολών στα τέλη του 18 ^{ου} αιώνα	83
1.4 Η εισαγωγή και η εξέλιξη της διδασκαλίας των Μαθηματικών από τις αρχές του 17 ^{ου} μέχρι τα μέσα του 18 ^{ου} αιώνα	88
1.4.1 Γενικά	88

1.4.2 Η περίοδος 1600- 1750	89
1.4.3 Η περίοδος 1750- 1821	92

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο: ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΡΓΑ

2.1 Τα Μαθηματικά στον ευρωπαϊκό χώρο	110
2.1.1 Σύνοψη αναφορά στην πορεία της έρευνας στην περιοχή των θετικών επιστημών στην ευρωπαϊκή Δύση κατά τον 16 ^ο , 17 ^ο και 18 ^ο αιώνα	110
2.2 Πηγές των έργων «Λογαριαστική», «Οδός Μαθηματικής» και «Στοιχεία Μαθηματικών»	113
2.3 Το έργο «Πρακτική Αριθμητική» ή «Λογαριαστική»	120
2.3.1 Εμμανουήλ Γλυζώνιος	120
2.3.2 Η «Αριθμητική»: Σχόλια στο περιεχόμενο του έργου	121
2.3.3 Η ανάλυση της «Αριθμητικής»	124

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο: ΤΟ ΕΡΓΟ «ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ»

3.1 Μεθόδους Ανθρακίτης	153
3.2 Το περιεχόμενο του έργου «Οδός Μαθηματικής»	160
3.2.1 Τα προίμια της «Οδού Μαθηματικής» - Σχόλια	161
3.3 Τόμος 1^{ος}	171
3.3.1 Έκθεσις ακριβεστέρα των του Ευκλείδους «Στοιχείων»	171
3.3.2 Τα περί «Σφαιρικών» κατά Θεοδόσιον τον Τριπολίτην	202
3.4 Τόμος 2^{ος}	207
3.4.1 Περί του «Στοιχειώδους της Γεωμετρίας»	208
3.4.2 Περί Τριγωνομετρίας	221
3.5 Τόμος 3^{ος}	227
3.6 Γενικά συμπεράσματα για το περιεχόμενο του έργου	227

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΤΟ ΕΡΓΟ «ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

4.1 Νικηφόρος Θεοτόκης	231
4.2 Τόμος 1^{ος}	232
4.2.1 Τα βιβλία Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, ΙV, V, VI, XI και XII των «Στοιχείων» του Ευκλείδη	235
4.2.2 Η «Αριθμητική» του έργου	252
4.3 Τόμος 2^{ος}	259
4.3.1 Τα «Αρχιμήδεια θεωρήματα»	259
4.3.2 «Επίπεδος Τριγωνομετρία»	260
4.3.3 «Κωνικών τομών συμπτώματα τα κυριώτερα»	263
4.4 Τόμος 3^{ος}	269
4.4.1 «Τα περί την Άλγεβραν»	269
4.5 Σχόλια που αφορούν στο έργο «Στοιχεία Μαθηματικών»	285
4.6 Συγκριτική παρουσίαση των έργων «Οδός Μαθηματικής» και «Στοιχεία Μαθηματικών»	286
4.7 Οι επιδράσεις των έργων «Οδός Μαθηματικής» και «Στοιχεία Μαθηματικών» στην μαθηματική σκέψη της προεπαναστατικής περιόδου	288

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

293

5.1 Τα συμπεράσματα τα οποία προκύπτουν από την μελέτη των έργων «Λογαριαστική», «Οδός Μαθηματικής» και «Στοιχεία Μαθηματικών»	294
5.1.1. Η «Λογαριαστική»	294
5.1.2 Η «Οδός Μαθηματικής»	295
5.1.3 Τα «Στοιχεία Μαθηματικών»	296
5.2 Ο χρόνος εισαγωγής των Μαθηματικών στις Σχολές του ελληνισμού των τουρκοκρατούμενων ελληνικών χωρών	299
5.3 Η συμβολή της μαθηματικής επιστήμης στην βελτίωση των συνθηκών της ζωής	305
5.3.1 Μαθηματικά – καθημερινή ζωή	305
5.3.2 Μαθηματικά- τεχνικές εφαρμογές	306
5.3.3 Μαθηματικά- σφαιρική τέχνη	308
5.3.4 Μαθηματικά- ακουστική- οπτική	308
ΑΡΘΟΓΡΑΦΙΑ – ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	309

**ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΑ
ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ ΤΟΥ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΔΙΑΦΩΤΙΣΜΟΥ.
Η θέση και ο ρόλος τους στην παιδεία και στην τεχνική εφαρμογή.**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατά την ιστορική διαδρομή ενός λαού, η ιστορία της εκπαίδευσης, δίνει αναμφίβολα το «στίγμα» της πολιτιστικής του ανάπτυξης και της πνευματικής του εξέλιξης. Στην περίπτωση του ελληνικού λαού, η πνευματική του πορεία στη διάρκεια των αιώνων παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ένας από τους λόγους είναι, ότι μετά από περιόδους μεγάλης ανάπτυξης των επιστημών που κατέστησαν το ελληνικό έθνος πηγή παγκόσμιας ακτινοβολίας, ακολούθησαν αιώνες δραματικής πτώσης του πνευματικού του επιπέδου, αιώνες «σκότους», τόσο για τα γράμματα όσο και τις τέχνες.

Σημαντικό ενδιαφέρον για τη μελέτη της παιδείας του ελληνικού έθνους, παρουσιάζει το διάστημα της οθωμανικής κυριαρχίας που αρχίζει με την άλωση της Κωνσταντινούπολης και φτάνει μέχρι την ελληνική Επανάσταση. Τον ίδιο δύσβατο δρόμο και τις δοκιμασίες τις οποίες πέρασε ο ελληνισμός για να επιβιώσει ως εθνότητα, ακολούθησε και η παιδεία του Γένους.

Οι κινητήριες δυνάμεις της εκπαίδευσης και της παιδείας του ελληνισμού την περίοδο της οθωμανικής κυριαρχίας, είναι σχεδόν διαμετρικά αντίθετες από αυτές στην οθωμανική αυτοκρατορία. «Η έκρηξη στο χώρο της εκπαίδευσης στην ελληνική περίπτωση ήταν αποτέλεσμα των πρωτοβουλιών των κοινοτήτων, ορισμένων διανοουμένων και λαϊκών φορέων, ενώ στην οθωμανική αυτοκρατορία η εκπαιδευτική σταυροφορία προωθήθηκε από το κράτος».¹

Είναι γνωστό ότι ο εκπαιδευτικός μηχανισμός είναι ο κατ' εξοχήν μηχανισμός μέσα από τον οποίο μπορεί με τον αποτελεσματικότερο τρόπο να προωθηθεί «μία μαζική και ριζοσπαστική ποιοτική ιδεολογική μεταλλαγή»². Γι' αυτό, η δομή του εκπαιδευτικού μηχανισμού και οι κατευθυντήριες γραμμές στην εκπαιδευτική πολιτική μιας κοινωνίας υπαγορεύτηκαν αρχικά και εξυπνέτησαν στην συνέχεια συγκεκριμένες ανάγκες της κοινωνίας αυτής.

Η εκπαίδευση στις ανώτερες σχολές του ελληνισμού και στις στρατιωτικές σχολές των Οθωμανών εξυπηρετούσε τις διαφορετικές στοχοθετήσεις της ελληνικής κοινότητας και της οθωμανικής αυτοκρατορίας που καθορίστηκαν από τις ιδιαίτερες ανάγκες των δύο κοινωνιών: της κατεχόμενης ελληνικής και της εξουσιάζουσας μουσουλμανικής.

Στην πρώτη περίπτωση ήταν η επιδίωξη της πνευματικής και πολιτιστικής ανέλιξης μέσω της οικονομικής ανάπτυξης³ του ελληνικού έθνους και στην δεύτερη, η ανάγκη της διατήρησης της κυριαρχίας των Οθωμανών στις κατακτημένες χώρες και της συνεχούς

¹ Ηρακλής Μήλλας, «Εικόνες Ελλήνων και Τούρκων», εκδόσεις Αλεξάνδρεια, 2001, σελ. 50

² Κωνσταντίνος Τσουκαλάς, «Εξάρτηση και αναπαραγωγή. Ο κοινωνικός ρόλος των εκπαιδευτικών μηχανισμών στην Ελλάδα (1830-1922)», εκδόσεις Θεμέλιο, 1977, σελ. 383

³ Για το ρόλο της εκπαίδευσης στο ανθρώπινο κεφάλαιο, βλέπε. Δημήτριος Γεώργιος, «Τα οικονομικά της εκπαίδευσης», Αθήνα 2004, κεφάλαιο 2^ο.

επεκτατικής πολιτικής τους, η οποία θα εξασφάλιζε την συντήρηση του οθωμανικού παρασιτικού οργανισμού.

Τα Μαθηματικά, μέσα από την εκπαιδευτική διαδικασία υπηρέτησαν και τις δύο αυτές στοχοθεσίες.

1. Τα Μαθηματικά στην ελληνική κοινωνία

Η ελληνική κοινωνία στα χρόνια της οθωμανικής κυριαρχίας αναπτύχθηκε οικονομικά και κατ' επέκταση εκσυγχρονίστηκε με την σημαντική συμβολή μιας αστικής τάξης, της τάξης των εμπόρων, η οποία ασχημάτιστη ακόμα εμφανίστηκε στα τέλη του 17^{ου} αιώνα όμως γρήγορα και δυναμικά εξελίχθηκε και διαμορφώθηκε, με ορατά τα ευεργετικά αποτελέσματα της εξέλιξής της για τον ελληνισμό, από τα μέσα του 18^{ου} αιώνα.

Οι συνθήκες που συμπορεύτηκαν με την εμφάνιση και την εξέλιξη της νέας αστικής τάξης δεν έπαψαν μέχρι την ελληνική Επανάσταση να καθορίζουν μέχρι την ελληνική επανάσταση την ιδιαίτερη ανάπτυξη του ελληνικού έθνους. Η σημαντική οικονομική άνθιση του ελληνισμού δεν μπορούσε παρά να έχει την απήχηση και αντανάκλασή της στην ανάπτυξη της ελληνικής εθνικής συνείδησης και στην επαναστατική της σχηματοποίηση.

Η ανερχόμενη αστική τάξη ήταν η νέα δύναμη η οποία αφύπνισε την ναρκωμένη εθνική συνείδηση του ελληνισμού και αποτέλεσε τον κύριο φορέα του ρεύματος του πολιτιστικού εκσυγχρονισμού. Η τάξη των εμπόρων άνοιξε τον δρόμο για να δεχτεί ο υπόδουλος ελληνικός χώρος τις επιδράσεις της δυτικής Ευρώπης. «Η προοδευτική διείσδυση του νέου ιδεώδους στην Ελλάδα ακολουθεί από κοντά τη στερέωση αυτής της νέας εθνικής δύναμης και αντανάκλα το πνεύμα των ομάδων που τη συνθέτουν στους διαδοχικούς σταθμούς του σχηματισμού της και της προσπάθειάς της να κατευθύνει την εθνική ζωή»⁴

Η παιδεία του ελληνισμού ήταν το μέσον για την εισροή αυτών των νέων ευρωπαϊκών επιδράσεων. γι' αυτό απασχόλησε τον εμπορικό κόσμο και αποτέλεσε αντικείμενο εντατικής προσπάθειας για να «ανεβεί» εκεί που απαιτούσαν οι ανάγκες του εμπορίου και να προσεγγίσει –όσο ήταν δυνατόν- τον κοινωνικό πολιτισμό της Δύσης. Το υλικό κέρδος συμπορεύεται με την έφεση προς την παιδεία: «Οι καραβοκυραίοι και οι πραγματευτάδες δεν φέρνουν μονάχα πλούτη από τις δυτικές χώρες όπου ταξιδεύουν. Μαζί με τα πλούτη φέρνουν τον πόθο μιας καλύτερης ζωής, την πεποίθηση ότι την καλύτερη αυτήν ζωή την δίνει η παιδεία στον άνθρωπο, η παιδεία που είναι μητέρα της ελευθερίας»⁵

Η πολυπλευρη καθυστέρηση η οποία δυσβάσταχτα βάρανε την κοινωνική ζωή του τόπου και τα εμπόδια που σωρεύονταν και ανέκοπταν κάθε πνευματική εξέλιξη του μαρτυρικού λαού στους πρώτους αιώνες της δουλείας, με τα ευεργετικά αποτελέσματα του εμπορίου στην ανύψωση του βιοτικού επιπέδου και στην άνθιση της πνευματικής

⁴ Νίκος Σβορώνος «Επισκόπηση της νεοελληνικής ιστορίας», εκδόσεις Θεμέλιο, Αθήνα, 1994, σελ 56.

⁵ Κ. Θ. Δημαράς, «Νεοελληνικός Διαφωτισμός», Νεοελληνικά μελετήματα, 2, Ερμής, Αθήνα 1993, σελ 311

ζωής του υπόδουλου ελληνισμού, αμβλύθηκαν, στο βαθμό βέβαια που επέτρεπαν οι ιδιαίτερες διαμορφούμενες συνθήκες στο καθεστώς της δουλείας.⁶

Η νεοσύστατη αλλά δυναμικά εξελισσόμενη αστική εμπορική τάξη η οποία είχε σαφή επίγνωση του ρόλου τον οποίο θα μπορούσε να διαδραματίσει επιδίωκε την ενσωμάτωση νέων στρωμάτων για την διεύρυνσή της, μέσω μιας διαδικασίας η οποία υπήρξε καθοριστική για την διαμόρφωση του νέου ελληνισμού. το όραμα της νέας τάξης, ήταν η εδραίωση μιας ισχυρής αστικής κοινωνίας στον ελλαδικό χώρο -και η συνακόλουθη μετατόπιση της πολιτικής ηγεσίας από την εκκλησιαστική ιεραρχία στα χέρια της- που θα αποτελούσε εγγύηση για οικονομική ανάπτυξη και θα οδηγούσε στην απελευθέρωση από τον οθωμανικό ζυγό⁷.

Οι έμποροι, προκειμένου να εδραιώσουν και να διευρύνουν την εμπορική τάξη, καλλιεργήσαν τις συνθήκες για την αναπαραγωγή στελεχών του κλάδου τους, δηλαδή την κατάρτιση εκπαιδευμένου προσωπικού για την κάλυψη των αναγκών του εμπορίου. οι ανάγκες αυτές καθορίζονταν αφ' ενός μεν από τις απαιτήσεις της εμπορικής ναυτιλίας σε ειδικευμένους τεχνικούς και αφ' ετέρου από τις γνώσεις που απαιτούσε η άσκηση της εμπορικής τέχνης.

1.1. Εμπορική αστική τάξη και Μαθηματικά.

«Αναντίρρητα η παιδεία αντιπροσωπεύει συγκεκριμένη οικονομική αξία. Δε νομίζουμε όμως ότι η άμεση στοχοθεσία των πλουσίων εμπόρων που χρηματοδοτούσαν τα σχολεία και προωθούσαν τη μεγάλη υπόθεση της παιδείας είχε συνηδευτοποιημένο ένα παρόμοιο κίνητρο. Αντίθετα το κίνητρο ήταν σαφώς πολιτικό, δηλαδή παρεπόμενο του οικονομικού. Και αυτό συνονίζεται με τον ασίγαστο πόθο της βελτίωσης του χαμηλού καθεστώτος (status) στο οποίο ήταν καταδικασμένη να υπάρχει η εθνική συλλογικότητα στα πλαίσια της οσμανικής πραγματικότητας»⁸

Είναι γεγονός, ότι εκτός από το γενικότερο ενδιαφέρον της νέας εμπορικής αστικής τάξης για την προαγωγή και τον εκσυγχρονισμό της παιδείας με βάσει τα δυτικά εκπαιδευτικά πρότυπα, υπάρχει και ειδικότερο ενδιαφέρον το οποίο πηγάζει από τις ανάγκες του κλάδου τους: «Αναγκαία λοιπόν, και πολύ αναγκαία, είναι η εμπορική σπουδή, και χωρίς αυτής δεν μπορεί να ευδοκιμήσει το εμπόριον»⁹.

⁶ Από την εισαγωγή της εμπορικής εγκυκλοπαίδειας του Ν. Παπαδόπουλου που εκδόθηκε στη Βενετία το 1815: «Τι άρα είναι εκείνο, ώ φίλτατόν μοι Πανελλήνιον, το θεόσδοτον αίτιον, το οποίον κατά τους εσχάτους τούτους χρόνους, με θαυμασίαν δραστηριότητα ανεψύχωσε τους απανταχού Έλληνας, και ανεξωπύρωσε τον φύσει εναποκείμενον εις τας Ελληνικάς τώνοντι καρδίας σπινθήρα, και διήγειρε την προς τα καλά, και ένδοξα των ομογενών ορμήν; Ποιον είναι το μέσον, το οποίον η θεία Πρόνοια μετεχειρίσθη δια να ανεγείρη το Γένος, προσκαλούσα τας Μούσας εις τον πάτριον αυτών Ελικώνα, και αποδεικνύουσα την Ελλάδα αξίαν δια να αναλάβη, κύν οπωσούν, την αρχαίαν δόξαν μεταξύ των επαγγελλομένων την Φιλοσοφίαν και τας ελευθέρας Τέχνας Εθνών, ενώ ελεεινώς αυτή κατάκειται δεδουλωμένη, απροστάτευτος από άρχοντας, και ηγεμόνας, και χηρεύουσα από pronόμια, και εισοδήματα Στοών, Ακαδημιών, Λυκείων, Περιπατών, και όσα τοιαύτα κοινωφελή Διδακτήρια εφώτιζον, και εδίδασκον πάλην ποτέ την φιλάτην μας ταύτην Πατρίδα; Αυτά τα πράγματα μας πληροφορούσιν, ότι είναι το ΕΠΟΡΙΟΝ»

⁷ Κωνσταντίνος Τσουκαλάς, «Εξάρτηση και αναπαραγωγή. Ο κοινωνικός ρόλος των εκπαιδευτικών μηχανισμών στην Ελλάδα (1830-1922)», εκδόσεις Θεμέλιο, 1977, Σελ 44

⁸ Νικόκλης Σαρρής «Οσμανική πραγματικότητα», τόμος II, εκδόσεις Ι.Δ. Αρσενίδης, Αθήνα σελ 388

⁹ Νικόλαος Παπαδόπουλος, «Ερμής ο Κερδῶας, ήτοι Εμπορική Εγκυκλοπαίδεια, τόμος Α΄, Βενετία 1815», σελ. 33.

Στον κατεχόμενο ελληνικό χώρο, οι ανάγκες αυτές του εμπορίου καλύπτονταν από την παρεχόμενη παιδεία των ανώτερων σχολών¹⁰ και μόνο πολύ αργότερα στις αρχές του 19^{ου} αιώνα όταν είχε γίνει συνείδηση ότι η εμπορική πράξη πρέπει να διδαχθεί μέσα από τους μηχανισμούς μιας ειδικής εκπαίδευσης, οι έμποροι, ίδρυσαν το 1831 την πρώτη ελληνική εμπορική Σχολή: την Σχολή της Χάλκης.¹¹

Η εμπορική Σχολή –στην οποία διδάσκονταν Μαθηματικά, Γεωγραφία, Εμπορικά και Φυσική¹²– ιδρύθηκε «χάριν των εμπόρων, οι οποίοι πρακτικοί όντες και μόνον εφόδιον τον Ε. Γλυζούνιον¹³ και τα άλλα δημόδη βιβλία έχοντες δεν ηδύναντο να συναγωνισθώσι τους επιστημονικώς μορφωμένους Φράγκους τοιούτους, οίτινες θεωρητικώς μορφούμενοι εν ειδικoίς σχολείοις, υπερεπλούτουν»¹⁴. Το 1817, εκδίδεται στο Ιάσιο και το πρώτο διδακτικό εμπορικό εγχειρίδιο¹⁵, μεταφραστικό εράνισμα, με προσθήκες και προσαρμογές, από τα γερμανικά.¹⁶

Τα Μαθηματικά υπηρέτησαν την άσκηση της εμπορικής τέχνης, ο λόγιος Νικόλαος Παπαδόπουλος, ο συγγραφέας της *Εμπορικής Εγκυκλοπαιδείας* που εκδόθηκε στην Βενετία το 1815, έμπορος και ο ίδιος, θεωρεί αναγκαioτάτη την μάθηση της Αριθμητικής σε όσους προτίθενται να ασχοληθούν με το εμπόριο: «Η Αριθμητική, η οποία είναι αναγκαioτάτη δια τους καθημερινούς λογαριασμούς του, και την κατάσταση των καταστάχων του, και χωρίς αυτής είναι αδύνατον να συσταθεί εμπόριον. δεν εννοώ όμως με τούτο την αφηρημένην υπολογιστικήν, και τα απειροστά, ούτε την λεγομένην Άλγεβραν, αλλά την πρακτικήν Αριθμητικήν, με ακρίβειαν, και δείξεις, δια να είναι βέβαιος εις τους λογαριασμούς του, ότι ούτως έχουσι».¹⁷

Ο Νικόλαος Κεφαλάς, στο έργο του «*Ο εμπορικός κώδης της Ταλλιαρ*» (sic) που εκδόθηκε στη Βιέννη το 1817 εκφράζει την άποψη ότι «οι επιχειρούντες κατά το παρόν το Εμπόριόν μας έχουν χρείαν από την Αριθμητικήν, Γεωγραφίαν και νομοδιδασκαλίαν».¹⁸

Τα εξευρωπαϊσμένα στρώματα των εμπόρων γνώριζαν την σημαντική συμβολή των Μαθηματικών στην κατάκτηση και συνεπώς στην επιτυχή άσκηση της τέχνης του εμπορίου. Είχαν βιώσει ακόμα, μέσα από τη σχέση τους με την κοινωνική ζωή της «φωτισμένης» Ευρώπης, τις θετικές επιπτώσεις της μαθηματικής-επιστημονικής σκέψης στην ζωή και την εξέλιξη των κοινωνιών. γι' αυτό στήριζαν με κάθε τρόπο τη διδασκαλία και τη διάδοσή της μαθηματικής επιστήμης.

¹⁰ Τα έργα των Μαθηματικών που αποτελούσαν διδακτικά εγχειρίδια των Σχολών του ελληνισμού περιείχαν τις μεθόδους της Αριθμητικής που ήταν απαραίτητες για την άσκηση του εμπορίου.

¹¹ Ακύλας Μήλλας, «Η Χάλκη των Πριγκιπωνήσων», Αθήνα 1984, σελ. 361

¹² ο α. σελ. 372.

¹³ Χίος λόγιος, ο οποίος τύπωσε στην Βενετία το 1568 πρακτική αριθμητική για την διευκόλυνση των εμπόρων στους λογαριασμούς των.

¹⁴ Τρύφωνος Ε. Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος Ι^{ος}, σελ. 51

¹⁵ «Διδασκαλία εντελής συστηματική απάσης της εμπορικής επιστήμης προς χρήσιν των εμπόρων εξαιρέτως δε των εμπορικών σχολείων»

¹⁶ Τριαντάφυλλος Ε. Σκλαβενίτης, «Τα εμπορικά εγχειρίδια της βενετοκρατίας και τουρκοκρατίας και η εμπορική εγκυκλοπαιδεία του Νικολάου Παπαδόπουλου» Εταιρία Μελέτης Νέου Ελληνισμού, Αθήνα 1991, σελ. 46.

¹⁷ Νικόλαος Παπαδόπουλος, «Ερμής ο Κερδώς, ήτοι Εμπορική Εγκυκλοπαιδεία, τόμος Α', Βενετία 1815», σελ. 143

¹⁸ Βλέπε, Γιάννης Καρράς, «Οι φυσικές θετικές επιστήμες στον ελληνικό 18^ο αιώνα», εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα, σελ. 45.

«Η ανερχόμενη κατά τον 18^ο αιώνα τάξη ... δεν έβαζε ποτέ, στην εποχή της ανόδου της, σε αμφισβήτηση την αξία της επιστημονικής μεθόδου, παρά δούλεψε μ' αυτήν, συντέλεσε στην ανάπτυξη της, αγωνίστηκε επ' ονόματί της, πολεμήθηκε από το σκοταδισμό,¹⁹ πολέμησε μ' αυτόν και νίκησε, καθοδηγούμενη από την επιστημονική μέθοδο».

Η εισαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην παιδεία του έθνους έγινε σε ανώτερες σχολές του ελληνισμού οι οποίες ιδρύθηκαν από εμπόρους.

Παρ' όλο που το περιεχόμενο σπουδών στα σχολεία του ελληνισμού –κυρίως στους πρώτους αιώνες της δουλείας– περιορίζεται μέσα στα σαφή συντηρητικά και θεοκρατικού χαρακτήρα πλαίσια τα οποία χαράσσει η Εκκλησία, στα ιδρυτικά έγγραφα των Σχολών τις οποίες συσταίνουν οι έμποροι και στις διαθήκες τους που αφορούν κληροδοτήσεις ποσών για την ίδρυση σχολείων, δίνονται ρητές εντολές για την διδασκαλία των Μαθηματικών.

Μεγαλέμποροι, όχι μόνον ίδρυσαν και εκσυγχρόνισαν²⁰ Σχολές στον τουρκοκρατούμενο ελληνικό χώρο, αλλά και χρηματοδότησαν εκδόσεις Μαθηματικών έργων και εμπορικών εγχειριδίων τα οποία σε ορισμένες περιπτώσεις διανεμόταν δωρεάν στους μαθητές των ελληνικών Σχολών.

Η έκδοση το 1799 στην Μόσχα του τρίτομου μαθηματικού έργου του Νικηφόρου Θεοτόκη «Στοιχεία Μαθηματικών», έγινε με δαπάνη «των τιμηωτάτων και φιλογενών αυταδέλφων Ζωσιμά, όπως δωρεάν διανέμονται τως εν τοις Ελληνιμουσειοις φοιτώσιν»²¹. Η Αριθμητική του Θεοτόκη η οποία περιλαμβάνεται στον πρώτο τόμο του έργου του, πραγματεύεται διαφόρους μεθόδους «ου μόνον ταις επιστήμαις, αλλά και τοις την εμπορίαν μετιούσι πάνν χρησίμων».²²

Ακόμα οι Ζωσιμαίοι²³ χρηματοδότησαν την έκδοση της Αριθμητικής του Μπαλάνου Βασιλόπουλου που έγινε στη Βιέννη το 1798 και το έργο «Στοιχεία Γεωμετρίας» του Ευγένιου Βούλγαρη που τυπώθηκε στην Βιέννη το 1805: «οι φιλογενείς και φιλοπάτριδες αδελφοί Ζωσιμάδαι εξ' Ιωαννίνων τυπόνοντες τα συγγράμματα του Ευγένιου και του Θεοτοκίου και διανέμοντες αυτά δωρεάν εις διδασκάλους και μαθητάς, και εκ' τούτου επαινούμενοι δικαίως δημοσία υπό των

¹⁹ Ηλία Φ. Ηλιού, «Ανταίος», τόμος Ι, αριθμός τεύχους Ι, σελ. 9

²⁰ Στην έκκλησή τους σε επιστολή τους το 1803 οι επίτροποι της Σχολής της Χίου προς τους επιτρόπους της ορθόδοξης εκκλησίας του Λιβόρνου για αποστολή οικονομικής βοήθειας προκειμένου να ανασυσταθεί η Σχολή, επικαλούνται δεσμούς και εξ' αιτίας του εμπορίου. «Και εις ποίους έπρεπε να κατευθύνομεν το ζήτημά μας με περισσότερον θάρρος και ελπίδα, παρά προς εσάς τους ευεργέτας του Γένους, τους φιλοπάτριδας, τους φιλογενείς, τους γινώσκοντας τα προερχόμενα κακά από την αμάθειαν, τους αγαπητούς ημών Αδερφούς, τους φυλάτους, των οποίων έχομεν την γνωριμίαν και δια της φήμης και των γραφών και του εμπορίου. με τους οποίους ήμεθα συνδεδεμένοι όχι μόνον με τους δεσμούς της πραγματείας, αλλά και με αυτούς τους ιερούς και αλύτους δεσμούς μιας ειλικρινεστάτης αγάπης.» «Χιακά χρονικά, Κωνσταντίνος Άμαντος, εν Αθήναις 191, τεύχος Α', σελ. 114

²¹ Σημείωση στην προμετωπίδα του έργου.

²² «Στοιχείων Μαθηματικών εκ παλαιών και νεωτέρων συνερανισθέντων υπό του Πανερωιάτου Αρχιεπισκόπου πρώην Ασπραναίου κυρίου Νικηφόρου.....» τόμος 1^{ος} εν Μόσχα, 1798, σελ. 259

²³ Πλούσιοι μεγαλέμποροι Έλληνες του εξωτερικού. Στο Λιβόρνο, τη Νίζνα και τη Μόσχα είχαν τις έδρες των εμπορικών τους επιχειρήσεων. Η τεράστια περιουσία που δημιούργησαν διατέθηκε εξ' ολοκλήρου προς «όφελος του Γένους». Χρηματοδότησαν τουλάχιστον εβδομήντα εκδόσεις ελληνικών έργων, από το 1796 μέχρι και το 1854.

λογίων, ηρέθισαν οπωσούν την άμυλλαν του άλλως αναισθήτου πλούτου εις μίμησιν των έργων των»²⁴

Το 1815 εκδίδεται στην Βενετία η εμπορική εγκυκλοπαίδεια του Νικολάου Παπαδόπουλου, «δια προτροπής και δαπάνης του εν Κωνσταντινουπόλει τιμίου και φιλογορευού εμπορικού συστήματος, των *Ελλήνων μεγαλεμπόρων* προς χρήσιν και ωφέλειαν αυτών και των απανταχού ομογενών».²⁵

Σε κάποιες περιπτώσεις έμποροι έγιναν και συγγραφείς βιβλίων Αριθμητικής αποβλέποντας στην διευκόλυνση των εμπόρων ομογενών τους για την άσκηση του επαγγέλματός τους.

Ο λόγιος-έμπορος της Βενετίας Εμμανουήλ Γλυζώνιος, -για να καλύψει ανάγκες του εμπορίου της εποχής «εκείνων των άπερ αναγκαίων εστί και επί ταις ημών εμπορίαις χρώμεθα», έγραψε και τύπωσε το 1568 πολύτιμο -για την εποχή του- *σύγγραμμα πρακτικής Αριθμητικής*, «πάσι δώρον τε κοινόν και επωφελές εντυπώσας χαρίσασθαι, την θρυλουμένην δηλαδή παρ'απάντων πρακτικήν αριθμητικήν ή μάλλον ειπειν λογαριαστικήν επιστήμην»²⁶.

Ο λόγιος-έμπορος Νικόλαος Παπαδόπουλος συγγράφει *εμπορική εγκυκλοπαίδεια*, «απεφάσισα να δοκιμάσω αν ημπορώ να συγγράψω τοιούτο βιβλίον, εις ωφέλειαν των ομογενών μου συνεμπόρων» αφού, «το Εμπόριον αυτό, το αίτιον δηλαδή των τσοούτων και τοιούτων μας καλών να υστερήται μεθοδικού βιβλίου προς οδηγίαν των εμπόρων, και να προστρέχη εις τα αλλόγλωσσα, δια να διευθετησή τας επιχειρήσεις, και λογαριασμούς του»²⁷. Το έργο του περιέχει «Λεξικόν των εμπορικών τρόπων και κανόνων. όπου θέλει διδαχθή τα περί λογαριασμών, καταστάχων, συμφωνητικών ομολογιών, αβαριών, παραιτήσεων, ασφαλειών, συναλλαγμάτων, κ.τ.λ. και τους νόμους συνθηθείας και κανόνας, οι οποίοι έχουσι κύρος και ισχύν εις την διεύθυνσιν και απόφασιν εις αυτά»²⁸

Η εμπορική εγκυκλοπαίδεια του Παπαδόπουλου είναι ο υψηλότερος αναβαθμός για τη σύνταξη ολοκληρωμένου εμπορικού εγχειριδίου κατά τη διάρκεια της Ενετοκρατίας και Τουρκοκρατίας. «Η συγγραφή και η έκδοσή της εκφράζουν με τον καλύτερο τρόπο την ακμή της ελληνικής εμπορικής τάξης και την συνειδητοποίηση του ρόλου της στην κοινωνία της αναγεννώμενης εθνότητας»²⁹

Οι έμποροι, σε πολλές περιπτώσεις έδωσαν υποτροφίες και έστειλαν μαθητές στο εξωτερικό και για την σπουδή του εμπορίου, οι οποίοι στη συνέχεια μετέφεραν βασικά στοιχεία του πολιτισμού της «φωτισμένης» Ευρώπης σε επίπεδο προσωπικό αλλά και κοινωνικό, προετοιμάζοντας το έδαφος για τη διαμόρφωση του νέου θεσμικού κοινωνικού πλαισίου στον ελληνικό χώρο. Τελικά λειτούργησαν ως αγωγοί εισροής γνώσεων και ιδεών από τη «φωτισμένη» Ευρώπη και διεύρυναν τα κοινωνικά στρώματα

²⁴ Κωνσταντίνου Κούμα. *Ιστορία των Ανθρωπίνων Πράξεων*, τόμος ΙΒ', εν Βιέννη 1832, σελ. 577.

²⁵ Σημείωση στην προμετωπίδα του έργου.

²⁶ Μανουήλ Γλυζώνιος «Βιβλίον πρόχειρον τοις πάσι, περιέχον την τε πρακτικήν Αριθμητικήν, ή μάλλον ειπειν την λογαριαστικήν», Βενετία 1568, σελ.ε'

²⁷ Νικόλαος Παπαδόπουλος, «Ερμής ο Κερδώς, ήτοι Εμπορική Εγκυκλοπαίδεια, τόμος Α', Βενετία 1815», σελ. στ'

²⁸ ό.α. σελ. θ'.

²⁹ Τριαντάφυλλος Ε. Σκαβενίτης, «Τα εμπορικά εγχειρίδια της βενετοκρατίας και τουρκοκρατίας και η εμπορική εγκυκλοπαίδεια του Νικολάου Παπαδόπουλου» Εταιρία μελέτης νέου ελληνισμού, Αθήνα 1991, σελ. 9.

τα οποία τους στήριξαν στον επερχόμενο κοινωνικό εκσυγχρονισμό που είχε αποτέλεσμα την μετατόπιση της πολιτικής ηγεσίας από την ανώτατη εκκλησιαστική ιεραρχία στην νεοαναπτυσσόμενη δυναμική εμπορική τάξη.

Τα εμπορικά εγχειρίδια που κυκλοφόρησαν έκαναν γνωστές στα πλατιά λαϊκά στρώματα τις μεθόδους της Αριθμητικής και δημιούργησαν τη βασική υποδομή για μια στοιχειώδη μαθηματική παιδεία σε αντίθεση με τα υψηλού επιπέδου μαθηματικά έργα τα οποία απευθύνονταν στα λόγια στρώματα και αποτελούσαν διδακτικά εγχειρίδια των ανώτερων σχολών του ελληνισμού.

Η σχέση εμπόριο – κοινωνικός εκσυγχρονισμός - Μαθηματικά διαμορφώθηκε αρχικά στην πρώιμα εμπορικά αναπτυγμένη ³⁰ τουρκοκρατούμενη ελληνική περιοχή, τα Ιωάννινα. Η σχέση αυτή επαναλαμβάνεται με χρονική υστέρηση που κυμαίνεται ανάμεσα σε μερικές δεκαετίες και φτάνει μέχρι και δύο αιώνες, στις παραμονές του Αγώνα, σε όλα τα διαδοχικά -ή και ταυτόχρονα- αναπτυσσόμενα εμπορικά κέντρα του ελληνισμού την εποχή της τουρκοκρατίας.

Το ιδιαίτερο «κοινωνικό κλίμα» το οποίο διαμορφώθηκε κάτω από τις ευνοϊκές συνθήκες δημιουργούμενες λόγω της οικονομικής άνθισης της πόλης των Ιωαννίνων, συναντάμε στην Μοσχόπολη, τη Χίο, τις Κυδωνίες, τη Σμύρνη - κάποιες από τις χαρακτηριστικότερες περιπτώσεις ακμαζουσών λόγω του εμπορίου ελληνικών πόλεων- αλλά και σε άλλα εμπορικά κέντρα του ελληνισμού.

Στις αρχές του 17^{ου} αιώνα τα Ιωάννινα είχαν εξελιχθεί³¹ σε ένα πληθυσμιακά αναπτυσσόμενο εμπορικό και βιοτεχνικό κέντρο, ένα κέντρο διαμετακομιστικού εμπορίου με τις μεταφορές των πρώτων υλών της αγροτικής οθωμανικής υπαίθρου αλλά και των προϊόντων της παραγωγής των εργαστηρίων της πόλεως, στις αγορές της Δύσης.

Το πυκνό δίκτυο του εμπορίου -χερσαίο και κυρίως θαλάσσιο- το οποίο είχε αρχίσει να αναπτύσσεται, «άνοιξε» την επικοινωνία της καταδικασμένης στο μαρασμό της κλειστής αγροτικής κυρίως οικονομίας της οθωμανικής υπαίθρου με τον έξω κόσμο και κυρίως με τις χώρες της Δύσης, με αποτέλεσμα η αύξηση της παραγωγής - για να εφοδιάζονται με τα ελληνικά αγροτικά ή βιοτεχνικά προϊόντα οι άλλες χώρες- να αρχίσει να γίνεται πηγή εφημερίας για τον υπόδουλο πληθυσμό.

Εξ' αιτίας της μεγάλης εμπορικής ανάπτυξης των Ιωαννίνων συγκροτήθηκε ο πρώτος αστικός πληθυσμός της πόλης ενώ η συσσωρευση πληθυσμού από την ύπαιθρο ανανέωσε και κοινωνικά την φυσιογνωμία της.

Η άνθιση του εμπορίου έφερε και την άνθιση των γραμμάτων στην πόλη των Ιωαννίνων: «αφ' ου δηλαδή το εμπόριον έγινεν έργον των ομογενών μας, όλον το Γένος ανατρέχει με γιγαντιαία βήματα εις την προκοπήν και πολυμάθειαν, και γίνεται άξιον να συναριθμηθή με τα λοιπά εξευγενισμένα έθνη»³²

Τα Ιωάννινα του 18^{ου} αιώνα διαμόρφωσαν την πνευματική τους φυσιογνωμία με την θεμελίωση των πρώτων εκπαιδευτικών ιδρυμάτων, την ανασυγκρότηση των σχολών

³⁰ «Δεν θέλω να γνωμοδοτήσω, ότι το Εμπόριον ακολουθεί τας Επιστήμας, και την φιλολογικὴν επίδοσιν του ανθρωπίνου πνεύματος, ή αὐται ἐκείνην γράφει ο Νικόλαος Παπαδόπουλος στο έργο του , «Ερμής ο Κερδῶος ήτοι Εμπορικὴ Εγκυκλοπαίδεια», εν Βενετία 1817, σελ. 312

³¹ Βλέπε, Βασιλική Ρόκου, «Γιάννινα 17^{ος} αι.-19^{ος} αι. Η βιοτεχνία της πόλης και η συγκυριακή της ανάπτυξη», «Ηπειρωτικά γράμματα», σελ. 57-75.

³² Νικόλαος Παπαδόπουλος, «Ερμής ο Κερδῶος, ήτοι Εμπορικὴ Εγκυκλοπαίδεια, τόμος Α΄, Βενετία 1815», σελ. ε΄

με την αξιοποίηση πλουσίων διαθηκών και κέρδισαν την πρωτοπορία στην πνευματική αναγέννηση του ελληνικού έθνους.

Πλούσιοι Ιωαννίτες έμποροι της Βενετίας, από τα μέσα του 17^{ου} αιώνα³³ ίδρυσαν τις πρώτες ανώτερες Σχολές του ελληνισμού κατά τα πρότυπα των Ευρωπαϊκών κολλεγίων. Με όρο των ιδρυτών τους, ανάμεσα στα διδασκόμενα μαθήματα των Σχολών αυτών, περιλαμβάνονταν και τα Μαθηματικά. Μια σημαντική για την εποχή και για την πορεία της εκπαίδευσης καινοτομία, η οποία σηματοδότησε την απαρχή του εκσυγχρονισμού της παιδείας του ελληνισμού στα χρόνια της δουλείας, της παιδείας που την εποχή εκείνη στον ελλαδικό χώρο περιοριζόνταν στα κοινά σχολεία, στα «θεία και ιερά γράμματα».

Με δεδομένο ότι η διδασκαλία των επιστημών προσδίδει εκσυγχρονιστικό χαρακτήρα στην παρεχόμενη ελληνική παιδεία την εποχή της τουρκοκρατίας, η χρονική απόσταση ανάμεσα στην εισαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών στις σχολές των Ιωαννίνων και σε εκείνες των άλλων ελληνικών περιοχών, φανερώνει και την χρονική απόσταση ανάμεσα στον εκσυγχρονισμό της κοινωνίας των Ιωαννίνων και του υπόλοιπου ελλαδικού χώρου, με χρονική υστέρηση ενός αιώνα –από τα μέσα του 18^{ου} αιώνα- άρχισε σταδιακά η εισαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών και σε άλλες Σχολές του ελληνισμού.

Την ανασύσταση και τον εκσυγχρονισμό των Σχολών της πόλης από τα μέσα του 18^{ου} αιώνα ανέλαβαν και πάλι πλούσιοι Ιωαννίτες φιλογενείς έμποροι: ο Σίμων Μαρούτσης και ο Ζώης Καπλάνης.

Από τις αρχές του 18^{ου} αιώνα μέχρι τις παραμονές του Αγώνα τα Μαθηματικά διδάχτηκαν ανελλιπώς στην πόλη των Ιωαννίνων. Λαμπροί εκπρόσωποι του νεοελληνικού διαφωτισμού διετέλεσαν δάσκαλοι στις Σχολές των Ιωαννίνων και μετέδωσαν τα νέα φιλοσοφικά ρεύματα και τα επιστημονικά επιτεύγματα της Δύσης

Αν η πόλη επρόκειτο να μείνει γνωστή στην ιστορία δεν θα ήταν για την οικονομική της ισχύ, αλλά για τον πνευματικό της χαρακτήρα, διατείνονται οι πρόξενοι της πόλης τον 19^ο αιώνα³⁴ ενώ μια αξιοσημείωτη μορφή του νεοελληνικού διαφωτισμού, ο Κωνσταντίνος Κούμας³⁵, διακηρύσσει ότι «εις την πόλιν των Ιωαννίνων χρεωστέι η Ελλάς την αναγέννησιν της παιδείας, όχι μόνον δια την σύστασιν και συντήρησιν των σχολείων των, αλλά και δια την πολυμάθειαν των διδασκάλων και το περισσότερον δια τον ζήλον, με τον οποίον περιέθαλπαν οι Ιωαννίται τους μαθητάς»³⁶

Ο εκσυγχρονισμός της παιδείας ο οποίος έλαβε χώρα με την εισαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών από πολύ πρώιμους καιρούς στα Ιωάννινα, οφείλεται στις ιδιαίτερα ευνοϊκές κοινωνικές συνθήκες –δηλαδή στην οικονομική κοινωνική και πολιτισμική ανάπτυξη της πόλης- που διαμορφώθηκαν από την άνθηση του εμπορίου καθώς και στις φιλοπρόδοες και φιλελεύθερες τάσεις των φιλογενών εμπόρων³⁷ της πόλης.

³³ Οι πλούσιοι έμποροι της Βενετίας Επιφάνιος και Γκιόνμας ίδρυσαν τις ομώνυμες σχολές το 1647 και το 1676 αντίστοιχα. Η Σχολή του Επιφανίου άρχισε την λειτουργία της δέκα χρόνια αργότερα επειδή δεν είχε βρεθεί ο κατάλληλος δάσκαλος σύμφωνα με την θέληση του διαθέτη.

³⁴ ο.α.σελ 73

³⁵ Γ. Ν. Λεοντίνης, «Ζητήματα Νεότερης Ελληνικής Ιστορίας», Αθήνα 2003, σελ. 173-213.

³⁶ Κ. Κούμα, «Ιστορία των ανθρώπινων πράξεων, ΙΒ'». Βιέννη 1832, σελ 557.

³⁷ «αλλά καλή τύχη είμαι και Έλληνα, και εμπορικώς αναθεωραμένος, ήτοι και φύσει, και επιτηδεύματι μεγαλοκαρδός, και επιχειρηματίας, και ελπίζω να δυνθώ να υπερπηδήσω όλες τας δυσκολίας»: με την περιγραφή αυτή ο έμπορος –λόγιος Νικόλαος Παπαδόπουλος, δίνει το στίγμα του Έλληνα εμπόρου την

Ο λόγιος και έμπορος Νικόλαος Παπαδόπουλος στο έργο του «Κερδώς Ερμής» σκιαγραφεί λακωνικά με τον καλύτερο τρόπο την αλληλεξάρτηση εμπορίου και επιστήμης των χρόνων της δουλείας: «Δεν θέλω να γνωμοδοτήσω, ότι το Εμπόριον ακολουθεί τας Επιστήμας, και την φιλολογικήν επίδοσιν του ανθρωπίνου πνεύματος, ή αὐται εκείνον»³⁸

1.2 Μαθηματικά- εκσυγχρονισμός της ελληνικής κοινωνίας.

Ο κοινωνικός εκσυγχρονισμός «προκειμένου για την οσμανική πραγματικότητα διατυπώνεται με το αίτημα του εκδυτικισμού ή εξευρωπαϊσμού.»³⁹

Η ανοδικά εξελικτική πορεία της ελληνικής κοινωνίας στα χρόνια της οθωμανικής κυριαρχίας, εκφράστηκε μέσα από τον ρυθμό εκσυγχρονισμού της παιδείας ο οποίος υλοποιήθηκε με την στροφή προς τις εθνικές γλώσσες για την διδασκαλία, την ανάπτυξη της διδασκαλίας των επιστημών και την αναζήτηση του αρχαίου κόσμου.

Η παιδεία άνοιξε όπου υπήρχε συμπαγής ελληνικός πληθυσμός και ο φορέας της άνθισης της είναι η αναδυόμενη αστική εμπορική τάξη. «Η γνώση των ξένων γλωσσών, οι αδιάρρηκτες σχέσεις με τη Δύση, που συμβάδizαν με τις εμπορικές τους δραστηριότητες, και, γενικότερα, η διείσδυση των νέων ευρωπαϊκών ιδεών, έδωσαν την ευκαιρία στα αστικά στρώματα των μειονοτήτων να οικοδομήσουν τους αναγκαίους μηχανισμούς για τη διάδοση όχι μονάχα των επιστημονικών και τεχνολογικών γνώσεων αλλά και για την καθολικότερη διείσδυση της ευρωπαϊκής αστικής ιδεολογίας»⁴⁰

Στο τέλος του 18^{ου} αιώνα, η παιδεία, εξελίσσεται με την ροπή στα Μαθηματικά και γενικότερα στις φυσικές επιστήμες, θεμελιωμένες σύμφωνα με το πνεύμα των δυτικών ερευνών: «Στην Ευρώπη οι επιστήμες έχουν ήδη σημειώσει σημαντική ανάπτυξη. Οι επιστημονικές επαναστάσεις έχουν ολοκληρωθεί και, το κυριότερο, η ανάπτυξη της παραγωγικής διαδικασίας, που σ' ένα σχήμα κι εδώ αμφίδρομο οδήγησε, επέβαλε τις επιστημονικές αυτές επαναστάσεις, αλλά και δημιουργήθηκε από αυτές, έχει συνδεθεί στενά με την επιστήμη, με μια επιστήμη η οποία έχει χάσει τώρα πλέον τον παλιό αφηρημένο χαρακτήρα της κι αποτελεί συγκεκριμένη παραγωγική, συγκεκριμένη κοινωνική δύναμη»⁴¹

Η ανάπτυξη της εμπορικής αστικής τάξης οριοθετεί τα μέσα του 18^{ου} αιώνα ως απαρχή μιας νέας εποχής για τον ελληνισμό η οποία λήγει με την ελληνική επανάσταση. Η πολιτιστική ταυτότητα του ελληνισμού από τα μέσα, περίπου, του αιώνα γίνεται «κοσμική» και οι φορείς της συμπίπτουν με την ανερχόμενη αστική τάξη η οποία έβλεπε τον εαυτό της ως τη νέα δύναμη που θα αφύπνιζε την αποτελματωμένη βαλκανική κοινωνία. «Η εμπορική τάξη είναι ο κύριος φορέας αυτού του ρεύματος του πολιτιστικού

εποχή της δουλείας» Νικόλαος Παπαδόπουλος, «Ερμής ο Κερδώς ήτοι Εμπορική Εγκυκλοπαιδεία», εν Βενετία 1817, σελ. ζ'.

³⁸ ο α, σελ. 312

³⁹ Νεοκλής Σαρής «Οσμανική πραγματικότητα», τόμος II, εκδόσεις Ι.Δ. Αρσενίδης, Αθήνα σελ 384

⁴⁰ Κωνσταντίνος Τσουκαλάς, «Εξάρτηση και αναπαραγωγή. Ο κοινωνικός ρόλος των εκπαιδευτικών μηχανισμών στην Ελλάδα (1830-1922)», εκδόσεις Θεμέλιο, 1977, σελ 277.

⁴¹ Γιάννης Καρράς, «Η σημασία των Μαθηματικών στην ανάπτυξη της επιστημονικής και κοινωνικής σκέψης κατά την περίοδο της νεοελληνικής αναγέννησης», Ευκλείδης Γ', Ε.Μ.Ε. τεύχος 40-41, 1994, σελ.

εκσυγχρονισμού. Εκείνη άνοιξε το δρόμο για να δεχτεί ο βαλκανικός χώρος τις επιδράσεις της Δυτικής Ευρώπης.»⁴²

Το γεγονός περιγράφει με τον καλύτερο τρόπο ο λόγιος – έμπορος Νικόλαος Παπαδόπουλος στο έργο του «Κερδώς Ερμής»: «Τούτο το τίμιον, και ελεύθερον επάγγελμα επιχειρισθέντες απλώς δια να κερδήσωμεν, να απαντήσωμεν τας χρείας μας, και πλουτήσαντες να καλοζήσωμεν, μας ηνάγκασε να λάβωμεν κοινωνίαν με τα δια των Προγόνων μας φωτισθέντα Ευρωπαϊκά Έθνη, να μάθωμεν τας γλώσσας, και διαλέκτους αυτών, να πλησιάσωμεν, και κατά το δυνατόν να εμφιλοχωρήσωμεν εις τας ιδίας των Ακαδημίας, και Σχολεία, ή ημείς, ή υπότροφοι νέοι ομογενείς, να τους μιμηθώμεν, και να ενθυμηθώμεν, ότι ως αληθείς Έλληνες, και γνήσιοι απόγονοι των ευκλεών εκείνων Προπατόρων μας, είναι απρεπέστατον να μείνωμεν αμαθείς εις τα καλά και ανάγωγοι».⁴³

Την προοδευτική πορεία της οικονομικής ανέλιξης η οποία δημιουργήσε τις συνθήκες για τον εκσυγχρονισμό της παιδείας, ακολούθησε και η κοινωνική ανέλιξη του λαού. Οι έμποροι, στην προσπάθειά τους για τον εκσυγχρονισμό της ελληνικής κοινωνίας, βρήκαν αρωγό την επίδραση που είχε η διδασκαλία των επιστημών στην διαμορφωση μιας φιλελεύθερης νεοελληνικής σκέψης.

«Η μελέτη των μαθηματικών, της φυσικής, της χημείας κλπ. βρίσκονται στη βάση του νέου πνευματικού προσανατολισμού. αλλ' η εξάπλωση των εφαρμοσμένων επιστημών δεν έχει πια σαν μοναδικό σκοπό τον εμπλουτισμό των πρακτικών γνώσεων, αλλά και συνεισφέρει στην ανανέωση της θεωρητικής σκέψης και στη δημιουργία μιας νέας αντίληψης για τη ζωή, φέρνοντας τους Έλληνες διανοούμενους σ' επαφή με την ορθολογιστική σκέψη της εποχής»⁴⁴.

Τα Μαθηματικά αποτελούσαν το θεμέλιο για την μελέτη και καλλιέργεια των φυσικών επιστημών οι οποίες απάλλαξαν τον υπόδουλο λαό από τις προλήψεις και τις δεισιδαιμονίες που είχαν αποτέλεσμα την μοιρολατρική αποδοχή της δουλείας. «...μηδέν είναι, των εκ της περί την Φύσιν μάλιστα Πραγματείας, ό μη προς την Μαθηματικήν ακρίβειαν, οιονεί προς στάθμην τινα και γνώμονα αναφέρεται»⁴⁵ γράφει ο Κ. Κούμας υπογραμμίζοντας την στενή σχέση των Μαθηματικών με τις Φυσικές επιστήμες και ο Ιώσηπος Μοισιόδακας θεωρεί ότι τα μαθηματικά «που εγκολπούνται πάσας τας επιστήμας» είναι «η πρώτη από των λοιπών επιστημών». Οι αιτίες που προκαλούσαν τα φαινόμενα της φύσης δεν αποδίδονταν πλέον σε υπερφυσικές δυνάμεις αλλά ερμηνεύτηκαν με βάσει την επιστημονική γνώση.

Η σκέψη του λαού απεγκλωβίστηκε από τον φόβο που προκαλούσαν τα φυσικά φαινόμενα τον οποίο καλλιέργησαν σκόπιμα εκείνες οι συντηρητικές δυνάμεις του ελληνισμού που είχαν κάθε συμφέρον να διαιωνίζεται το καθεστώς της σκλαβιάς: «ο φυσικός κόσμος, δεν υπάρχει τώρα πλέον για να εκφοβίζει, να επωάζει δαίμονες, ν' αντιστρατεύεται το πνεύμα, να αισθητοποιεί τις συνέπειες του προπατορικού αμαρτήματος, να συμβολίζει τη μηδαμινότητα του ανθρώπου ή να ενσαρκώνει τη

⁴² Κωνσταντίνος Τσουκαλάς, «Εξάρτηση και αναπαραγωγή. Ο κοινωνικός ρόλος των εκπαιδευτικών μηχανισμών στην Ελλάδα (1830-1922)», εκδόσεις Θεμέλιο, 1977 σελ. 43

⁴³ Νικόλαος Παπαδόπουλος, «Ερμής ο Κερδώς ήτοι Εμπορική Εγκυκλοπαιδεία», εν Βενετία 1817. σελ. 8'

⁴⁴ Νίκος Σβορώνος «Επισκόπηση της νεοελληνικής ιστορίας», εκδόσεις Θεμέλιο, Αθήνα. 1994, σελ 56.

⁴⁵ Κωνσταντίνος Κούμας, «Σειρά στοιχειώδους των Μαθηματικών και Φυσικών πραγματειών...» Εν Βιέννης της Αυστρίας 1807.

διαβολική διάσταση της Δημιουργίας, αλλά αντίθετα αποτελεί το χώρο καταξίωσης, επαλήθευσης του ανθρώπινου λογικού...»⁴⁶.

Οι δάσκαλοι των Μαθηματικών καλλιέργησαν την εθνική συνείδηση και ανέπτυξαν το αίσθημα της εθνικής αυτογνωσίας του λαού. Με την διδασκαλία τους και τα συγγράμματά τους βοήθησαν τους Έλληνες να τονώσουν την αυτοσυνείδηση για την εθνική τους υπόσταση.

Μέσα από τα προοίμια των έργων τους -με την ιστορική αναδρομή στο πνευματικά και πολιτιστικά πλούσιο παρελθόν του λαού- επιχείρησαν να ανοίξουν πνευματικούς διαύλους μέσω των οποίων η νεοελληνική σκέψη συναντούσε την ένδοξη ιστορία των προγόνων και τα θαυμαστά επιτεύγματά τους στον τομέα των επιστημών.

Τα προοίμια των μαθηματικών έργων, σε πολλές περιπτώσεις, θυμίζουν επαναστατικές προκηρύξεις με φλογερά κηρύγματα και τα μηνύματα που δίνουν στο δούλο έθνος είναι ξεκάθαρα: «Μάχου υπέρ πατρίδος ευγενέστατοι απόγονοι ευγενεστάτων προγόνων, έφη τις των πάλαι φιλοσόφων το προς αυτόν εκάστον απαραίτητον χρέος δείξει βουλόμενος»⁴⁷.

«... ώστε και προαιρείσθαι πολλούς τον εν τη πατρίδι θάνατον καν τις αυτοίς εν αλλοδαπεί και αθανασίαν που προεπηγγέιλато»⁴⁸

Ο Δωρόθεος Πρώιος, δάσκαλος των Μαθηματικών της Πατριαρχικής Ακαδημίας, σε επιστολή του το Νοέμβριο του 1804 δίνει πολύτιμες πληροφορίες για τις νεωτεριστικές ενέργειές του που αφορούν την αυτοδιοίκηση των μαθητών του. Ο σπουδαίος εκσυγχρονιστής δάσκαλος γράφει: «περί τα τέλη εκάστου μηνός η ημετέρα Σχολή μεταβάλλεται εις Γυμνάσιον. οι μαθηταί διαιρούνται εις δύο κόμματα, εκλέγει εκάτερον ένα πρόεδρον ή ταξίαρχον και ποιούσι έριν δια δύο ημέρας περί των διδασθέντων θεωρημάτων και προβλημάτων, προτείνοντες και διαλύοντες αμειβιαίως εν τάξει εκάτεροι. Οι δύο πρόεδροι προσέχουσιν εις την διατήρησιν των γυμναστικών νόμων και εισί διαιτηταί των αναφυομένων αμφιβολιών και φιλονικιών, έχουσι δε δικαίωμα οι φιλονικούντες να κάμουν έκκλητον την αμφισβήτησιν προς άλλους πρώην προέδρους και τελευταίον προς εμέ. Εις ταύτα τα γυμνάσια τα ερεθίζοντα εις άκρον των νεανίσκων το φιλότιμον συρρέουσι πολλοί, έφοροι τε και επίτροποι, ενίοτε δε και ετερογενείς και πάντες θαυμάζουσι την ενούσαν αγχίνοιαν του κλίματος και χαίρουσι και υπερεκθειάζουσιν αυτούς στέφοντες εγκωμιαστικούς στεφάνους»⁴⁹.

Πολύ πιο μπροστά από την εποχή του ο Δωρόθεος αγνοώντας τους κινδύνους που τον απειλούσαν εκ μέρους του δυνάστη, κάτω από το καθεστώς της επαχθούς δουλείας, οργάνωσε ένα είδος κοινοτικής αυτοδιοίκησης μέσα στην Σχολή και επεδίωξε να «εθίσει τον τροφίμους εις το άρχειν τε και άρχεσθαι». Η απόπειρα του τολμηρού πρωτοπόρου δασκάλου έδωσε μια εικόνα για την οργάνωση των πολιτικών θεσμών και τη δυνατότητα ανάπτυξης των κάτω από ελεύθερο καθεστώς που «επεκτεινόμενα θα ηδύναντο και να

⁴⁶ Γιάννης Καρράς, «Η σημασία των Μαθηματικών στην ανάπτυξη της επιστημονικής και κοινωνικής σκέψης κατά την περίοδο της νεοελληνικής αναγέννησης», Ευκλείδης Γ', Ε.Μ.Ε., τεύχος 40-41, 1994, σελ. 4.

⁴⁷ «Οδός Μαθηματικής, ήτοι σειρά βαθμηδόν προϊούσα, περιεκτική των κατ' είδος κυριωτέρων της μαθήσεως πραγματειών», τόμος Ι^{ος}. Βενετία 1749. σελ V

⁴⁸ ο. α.σελ V

⁴⁹ Το παράθεμα από το έργο του Τ. Γριτσόπουλου, «Πατριαρχική Μεγάλη του Γένους Σχολή», τόμος ΙΙ, Αθήνα 1971, σελ. 86.

γίνουν εφαρμογαί πολιτικής κοινότητας και να υποκαύσουν συνεχιζόμενα τον έρωτα προς την ελευθερίαν»⁵⁰

Δάσκαλοι των Επιστημών⁵¹ όχι μόνο με την διδασκαλία τους αλλά και με την ενεργό συμμετοχή τους αφιερώθηκαν στον μεγάλο σκοπό. την απελευθέρωση του Γένους. Ο Ανθίμος Γαζής, δάσκαλος των Μαθηματικών της Σχολής Μηλεών του Πηλίου και ηγετικό στέλεχος της Φιλικής Εταιρίας συνδύαζε το διδακτικό έργο με την επαναστατική δράση. Ο Γρηγόριος Κωνσταντάς (1758-1844) δάσκαλος των επιστημών στην Ηγεμονική Ακαδημία Βουκουρεστίου (1784-1844), της Σχολής στα Αμπελάκια (1796-1802), μέλος της Φιλικής Εταιρίας, εγκατέλειψε όπως και ο Γαζής την διδασκαλία του στη Σχολή των Μηλεών το Μαΐο του 1821 και έσπευσε να προσφέρει τις υπηρεσίες του στο αγωνιζόμενο έθνος.

Ο Βενιαμίν ο Λέσβιος λαμπρός δάσκαλος των επιστημών, μέλος της Φιλικής Εταιρίας, εγκατέλειψε την σχολαρχία της Ευαγγελικής Σχολής της Σμύρνης, το Μάρτιο του 1821 για να προσφέρει τις υπηρεσίες του στο επαναστατημένο έθνος.

«Όσο για την διδασκαλία των φυσικών επιστημών αυτή μας ήρθε πάνοπλη και ακέραια από τη Δύση»⁵², γι' αυτό και ο ρυθμός της εισαγωγής τους στα διδακτικά προγράμματα των σχολών του ελληνισμού ταυτίστηκε με τον ρυθμό εκσυγχρονισμού της ελληνικής παιδείας και κατ' επέκταση της ελληνικής κοινωνίας. «Ο πνευματικός ελληνισμός βαδίζει πάνω στα χνάρια των δυτικών επιτεύξεων, όταν δεν συμπορεύεται με τη δυτική παιδεία»⁵³.

Ο ρόλος των Μαθηματικών την περίοδο της δουλείας, δεν περιορίστηκε σε αυτόν της θεωρητικής επιστήμης, αλλά κυρίως, μιας επιστήμης, η οποία «εξυπνέτησε σ' όλη την περίοδο της τουρκοκρατίας και ιδίως κατά τα προεπαναστατικά χρόνια, τις ανάγκες της τεχνικής, της οικονομίας, γενικότερα της κοινωνίας συμβάλλοντας παράλληλα στην ανάπτυξη του επιστημονικού πνεύματος στον ελληνικό χώρο»⁵⁴

Τα Μαθηματικά και ο κοινωνικός εκσυγχρονισμός συμπορεύτηκαν μέσα από μια αμφίδρομη σχέση. Μια σχέση αλληλεπίδρασης η οποία διαμορφώθηκε με τέτοιο τρόπο με την πάροδο των χρόνων, ώστε να μην είναι δυνατόν ο διαχωρισμός τους σε αίτιο και αποτέλεσμα: η διδασκαλία και η καλλιέργεια της μαθηματικής επιστήμης συντέλεσε στον εκσυγχρονισμό της ελληνικής κοινωνίας των χρόνων της δουλείας ή ο εκσυγχρονισμός της κοινωνίας έφερε στο προσκήνιο της ελληνικής παιδείας τα Μαθηματικά και τις επιστήμες;

Η εξάπλωση της μαθηματικής επιστήμης «ανέβαζε» τον δείκτη του κοινωνικού εκσυγχρονισμού και οι πνευματικές ανάγκες της σταδιακά και συνεχώς εκσυγχρονιζόμενης ελληνικής κοινωνίας απαιτούσαν την συνεχή καλλιέργεια της μαθηματικής επιστήμης.

⁵⁰ ο.α σελ 87

⁵¹ Ο όρος «επιστήμες», την χρονική περίοδο που αναφερόμαστε, παρεκκλίνει από τη σημερινή έννοια του όρου, και αφορά μόνο στις θετικές επιστήμες (Μαθηματικά, Φυσική, Χημεία, Ιατρική, Αστρονομία, Γεωγραφία).

⁵²Κ. Θ. Δημαράς, «Νεοελληνικός Διαφωτισμός», Νεοελληνικά μελετήματα, 2, Ερμής. Αθήνα 1993 σελ. 310

⁵³ ο.α. σελ. 308

⁵⁴Γιάννης Καρράς, «Η σημασία των Μαθηματικών στην ανάπτυξη της επιστημονικής και κοινωνικής σκέψης κατά την περίοδο της νεοελληνικής αναγέννησης», Ευκλείδης Γ', ΕΜΕ...τεύχος 40-41, 1994, σελ. 7

Με αφετηρία τα Μαθηματικά, ο ρυθμός εισαγωγής της διδασκαλίας τους στις Σχολές του ελληνισμού -που εκφράζει και τον ρυθμό της αποδοχής τους από την ελληνική κοινωνία- καθώς και το επίπεδο των μαθηματικών έργων τα οποία κυκλοφορούσαν διαδοχικά στον υπόδουλο ελληνικό χώρο, προσδιορίζουν την στάση του κοινωνικού εκσυγχρονισμού του ελληνισμού των χρόνων της οθωμανικής κυριαρχίας.

2. Τα Μαθηματικά στην Οθωμανική αυτοκρατορία.

Το Οσμανικό κράτος προϋπέθετε μια «στρατιωτική κοινωνία»⁵⁵. Ολόκληρο το οικοδόμημα της οθωμανικής αυτοκρατορίας θεμελιωνόταν στην άρτια οργάνωση και λειτουργία του στρατιωτικού μηχανισμού των Οθωμανών αφού «τα οθωμανικά συστήματα στρατιωτικής οργάνωσης, πολιτικής διοίκησης, φορολόγησης και παραχώρησης γαιών ήταν διαμορφωμένα σύμφωνα με τις ανάγκες μιας κοινωνίας που επεκτεινόταν με κατακτήσεις και αποικισμούς στις χώρες των άπιστων».⁵⁶

Η επεκτατική πολιτική του οθωμανικού κράτους μέσω της οποίας εξασφαλιζόνταν οι απαραίτητοι οικονομικοί πόροι για την συντήρηση του κρατικού μηχανισμού, απαιτούσε την διαρκή μέριμνα όχι μόνο για την άριστη οργάνωση αλλά και για τον συνεχή εκσυγχρονισμό του στρατού.

«Το πρόβλημα γίνεται κατανοητό μόνο αν αντιληφθεί κανείς τη φύση της οσμανικής πολιτείας, η οποία ήταν πελώριων διαστάσεων στρατιωτική επιχείρηση αυτοχρηματοδοτούμενη και αναχρηματοδοτούμενη διαμέσου της συνεχούς επέκτασής της σε βάρος γειτονικών λαών»⁵⁷.

Η επιβολή της παρουσίας των Οθωμανών στις κατακτημένες χώρες και η καταδυνάστευση των υπόδουλων λαών γίνονταν με μία και μόνη ισχύ: την ισχύ των όπλων.

«Η Αυτοκρατορία, πραγματικό μωσαϊκό εθνοτήτων, γλωσσών θρησκειών και πολιτισμών. στήριζε την εσωτερική της συνοχή αποκλειστικά και μόνο στη στρατιωτική δύναμη της άρχουσας οθωμανικής κάστας»⁵⁸.

Ολόκληρη η δομή της τούρκικης κοινωνίας είχε επηρεαστεί και εν μέρει είχε διαμορφωθεί από την διαρκή εμπόλεμη κατάσταση των Οθωμανών με την Χριστιανική Δύση η οποία διεκπεραιώθηκε σε δύο φάσεις: η πρώτη με την επιτυχή κατάκτηση και την επιβολή της οθωμανικής κυριαρχίας σε μεγάλο μέρος της Ευρώπης και η δεύτερη με την προσπάθεια διατήρησης της κυριαρχίας αυτής η οποία έθεσε τους Οθωμανούς σε αμυντική θέση εξ' αιτίας της αντεπίθεσης των λαών της Δύσης.

Επομένως στην στρατιωτική υπεροχή των Οθωμανών έναντι των υποδούλων λαών στηρίζονταν η κατοχική και επεκτατική πολιτική τους και κατά συνέπεια, η παιδεία τους

⁵⁵ Βλέπε, Feroz Ahmad, "The making of modern Turkey", by Routledge, London 1993, σελ. 4

⁵⁶ Bernard Lewis, «Η ανάδυση της σύγχρονης Τουρκίας», τόμος Ι, εκδόσεις Παπαζήση, σελ. 82

⁵⁷ Νεοκλής Σαρρής, «Προεπαναστατική Ελλάδα και Οσμανικό κράτος», εκδόσεις Ηρόδοτος, Αθήνα 1993, σελ 29

⁵⁸ Κωνσταντίνος Τσουκαλάς, «Εξάρτηση και αναπαραγωγή. Ο κοινωνικός ρόλος των εκπαιδευτικών μηχανισμών στην Ελλάδα (1830-1922)», εκδόσεις Θεμέλιο, 1977, σελ 32.

–η οποία προωθήθηκε από το ίδιο το κράτος– ήταν προσανατολισμένη να εξυπηρετήσει ακριβώς τον σκοπό αυτό: την διατήρηση αυτής της υπεροχής.

Οι κινητήριες δυνάμεις της παιδείας του οθωμανικού λαού ήταν διαμετρικά αντίθετες από αυτές της παιδείας του ελληνικού έθνους. Στην πρώτη περίπτωση η παιδεία προωθήθηκε από το κράτος και το εγχείρημα του εκσυγχρονισμού της επιβλήθηκε από την κρατική εξουσία, ενώ στην δεύτερη, οι φορείς του εκσυγχρονισμού της παιδείας ήταν διανοούμενοι και λαϊκοί οι οποίοι σε πολλές περιπτώσεις ήρθαν σε σύγκρουση με την ελληνική ιεραρχία της εποχής: την Μεγάλη Εκκλησία.

«Στην ελληνική περίπτωση η παιδεία και η αφύπνιση μιας εθνικής συνείδησης συμπορεύονται, ενώ στην Τουρκία η παιδεία είναι ένας μοχλός για την επιβίωση του κράτους και της κοινωνίας και, μεταγενέστερα, ένα μέσον για την επίτευξη μιας εθνικής ταυτότητας».⁵⁹

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στα οθωμανικά σχολεία υπαγορεύτηκε κυρίως από τις ανάγκες της οθωμανικής αυτοκρατορίας για τη δημιουργία στελεχών ικανών να εφαρμόσουν τις τεχνικές εξελίξεις και τις προόδους της πολεμικής τέχνης που σημειώθηκαν στην Δύση στον πολεμικό μηχανισμό της αυτοκρατορίας.

Ήδη από τον 15^ο αιώνα καταγράφεται η χρήση τουρκικού πυροβολικού σε πολιορκίες, στα μέσα του αιώνα και συγκεκριμένα στην δεύτερη μάχη του Κοσσυφοπεδίου (1448) η χρήση κανονιών, ενώ κατά την διάρκεια του 17^{ου} αιώνα η ναυπήγηση μεγάλων ιστιοφόρων σύμφωνα με τις ευρωπαϊκές μεθόδους ναυπηγικής.⁶⁰

Η γνώση των Μαθηματικών ήταν απαραίτητη για την αφομοίωση της δυτικής τεχνολογίας από τους Οθωμανούς υπηκόους της αυτοκρατορίας, με στόχο τον εκσυγχρονισμό του στρατού και κατ' επέκταση τον εκσυγχρονισμό της οθωμανικής κοινωνίας με τις επιρροές που δέχτηκε από την εισροή της δυτικής γνώσης. «Ο βαθμιαίος εκσυγχρονισμός του κρατικού μηχανισμού –κυρίως στον τομέα των στρατιωτικών μεταρρυθμίσεων– και η συνακόλουθη κρατική γραφειοκρατία που δομήθηκε σιγά -σιγά κατά τα ευρωπαϊκά πρότυπα, προκάλεσαν ιδεολογικές αλλοιώσεις. Πράγματι αυτή η γραφειοκρατική αστική τάξη των ανώτερων υπαλλήλων και των στρατιωτικών αποτέλεσε τους βασικούς διαύλους μεταβίβασης των ευρωπαϊκών ιδεών στην τουρκική κοινωνία»⁶¹

Το μουσουλμανικό κράτος τήρησε ανεκτική στάση απέναντι στις θρησκείες της Βίβλου⁶² και στις πολιτιστικές και θρησκευτικές παραδόσεις των διαφόρων υποτελών κοινοτήτων (Χριστιανών, Εβραίων, Αρμενίων) και ενώ διαχωρίζε κοινωνικά τα αλλόθρησκα στοιχεία, αποδέχονταν και αφομοίωνε τους προσηλυτισμένους. Ο κοινωνικός διαχωρισμός των Οθωμανών επιτυγχάνονταν με την απομόνωση των μη εξισλαμισμένων υπηκόων της Αυτοκρατορίας, οι οποίοι, όπως και τα επαγγέλματα που ασκούσαν, αντιμετωπιζόνταν με περιφρόνηση.

Με ανάλογη περιφρονητική στάση αντιμετωπιζόνταν οι επιστημονικές εφευρέσεις και οι τεχνικές πρόοδοι των Χριστιανών της Δύσης, για τις οποίες οι Οθωμανοί έδειξαν απροθυμία για την εκμάθηση και την εφαρμογή τους.

⁵⁹ Ηρακλής Μήλλας, «Εικόνες Ελλήνων και Τούρκων», εκδόσεις Αλεξάνδρεια, 200, σελ 52

⁶⁰ Βλέπε, Bernard Lewis, «Η ανάδυση της σύγχρονης Τουρκίας», τόμος Ι, εκδόσεις Παπαζήση, σελ 121

⁶¹ Κωνσταντίνος Τσουκαλάς, «Εξάρτηση και αναπαραγωγή. Ο κοινωνικός ρόλος των εκπαιδευτικών μηχανισμών στην Ελλάδα (1830-1922). εκδόσεις Θεμέλιο. 1977, σελ. 351

⁶² «Σύμφωνα με το κοράνιο, όλες οι εθνικές και θρησκευτικές μειονότητες διατηρούσαν την ταυτότητά τους και την αυτονομία τους, βασισμένες σε ένα *συμβόλαιο* (Dimma) ανάμεσα στο σουλτάνο και τους υπόδουλους λαούς, που ήταν ταξινομημένοι με βάση τη θρησκευτική τους πίστη» ο.α σελ. 32

Η κυριότερη αιτία της στάσης τους ήταν αφ' ενός μεν η καχυποψία με την οποία αντιμετώπιζαν τα επιτεύγματα των «άπιστων» λαών της Ευρώπης και αφ' ετέρου η υπερωνμία τους εξ αιτίας της στρατιωτικής υπεροχής τους η οποία ενισχυθήκε από τις εντυπωσιακές νίκες των Οθωμανών εναντίον των Ευρωπαίων αντιπάλων τους κατά τον 15^ο αιώνα.

«Πρωτόγονες τεχνικές μέθοδοι παραγωγής, πρωτόγονα μεταφορικά μέσα, χρόνια ανασφάλεια και κοινωνικός αποκλεισμός συνδυάστηκαν για να αποκλείσουν κάθε είδος μακροπρόθεσμων ή μεγάλης κλίμακας προγραμμάτων και να διατηρήσουν την οθωμανική οικονομία στο κατώτερο δυνατό επίπεδο παραγωγικότητας, πρωτοβουλίας και δεοντολογίας».⁶³

Παρ' όλ' αυτά σε κάποιες περιπτώσεις, οι Τούρκοι, «φάνηκαν πρόθυμοι να προσλάβουν και να αφομοιώσουν την σοφία και την πείρα των προηγμένων λαών που κατέκτησαν»⁶⁴, ενώ δανείστηκαν και χρησιμοποίησαν τις εφευρέσεις των Δυτικών που είχαν σχέση με την πολεμική τέχνη, όπως τα πυροβόλα όπλα, τα κανόνια και τη ναυπηγική. «Από τον 15^ο αιώνα οι Οθωμανοί αντέγραφαν συστηματικά την στρατιωτική τεχνολογία των Ευρωπαίων.»⁶⁵

Για την αναδιοργάνωση των μεταλλείων στα Σιδηροκάυσια ή Σεντέρ Καπισί στην Χαλκιδική, ο σουλτάνος Σουλεϊμάν Α΄ προσκαλεί Γερμανούς τεχνικούς⁶⁶, οι οποίοι με την πείρα που είχαν αποκτήσει από τα μεταλλεία της πατρίδας τους, διηύθυναν τις εργασίες και μετέφεραν στους ποικίλης εθνικότητας μεταλλευτές⁶⁷ τις γνώσεις τους για την εξόρυξη των μεταλλευμάτων.

Ειδικευμένοι τεχνίτες χρησιμοποιήθηκαν ακόμα στις οικοδομικές κατασκευές αλλά κυρίως στις κατασκευές καραβιών για τον στόλο στον περίφημο ταρσανά του Κασίμ Πασά⁶⁸ και στο χυτήριο κανονιών (το Τοπ Χανέ)⁶⁹ στην Κωνσταντινούπολη.

Οι σουλτάνοι, χρησιμοποίησαν αρκετές φορές ακόμα και Έλληνες αρχιτέκτονες για τα τζαμιά τους καθώς και Έλληνες ναυπηγούς για τους στόλους τους.⁷⁰

Η σημαντικότερη όμως συμβολή των δυτικών τεχνικών γνώσεων αφορούσε στον εκσυγχρονισμό του οθωμανικού στρατού τον 15^ο αιώνα με την χρήση των πυροβόλων όπλων καθώς και την αξιοποίηση ευρωπαϊών πυροβολητών και οπλουργών.⁷¹

Ήταν η εποχή που ο πανίσχυρος οθωμανικός στρατός παρείχε στην αυτοκρατορία την βεβαιότητα της αναμφισβήτητης στρατιωτικής υπεροχής απέναντι στους λαούς της Ευρώπης και την ψευδαίσθηση για μια συνεχιζόμενη επιτυχή επεκτατική πολιτική. Η αυτοκρατορία, «είχε παραμείνει -ή είχε επιστρέψει- σε μια μεσαιωνική κατάσταση, με μεσαιωνική νοοτροπία και μεσαιωνική οικονομία -αλλά με το πρόσθετο βάρος μιας γραφειοκρατίας και ενός στρατού που κανένα μεσαιωνικό κράτος δεν είχε αναγκαστεί να

⁶³ ο. α. σελ 99

⁶⁴ Βακαλόπουλος Απόστολος, «Η οργάνωση του Γένους υπό τους Τούρκους και η επιβίωσή του», Ι.Ε.Ε., «Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία, 1453-1669, εκδοτική Αθηνών, σελ. 156

⁶⁵ Χαλίλ Ιναλτζίκ, «Η Οθωμανική Αυτοκρατορία. Η κλασική εποχή, 1300-1600», Μεταφρ. Μιχάλης Κοκολάκης, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, Αθήνα 1995, σελ. 306

⁶⁶ Βακαλόπουλος Απόστολος, «Η οργάνωση του Γένους υπό τους Τούρκους και η επιβίωσή του», Ι.Ε.Ε., «Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία, 1453-1669, εκδοτική Αθηνών, σελ. 161

⁶⁷ την εποχή της ακμής των μεταλλείων, επί Σουλεϊμάν Α΄, δούλευαν 6000 εργάτες Έλληνες, Βούλγαροι, Σέρβοι, Βλάχοι, Τούρκοι, Άλβανοί, Εβραίοι και Γερμανοί. (ό.α. σελ. 161)

⁶⁸ ο. α. σελ. 162

⁶⁹ ο.α. σελ. 164

⁷⁰ Bernard Lewis, «Η ανάδυση της σύγχρονης Τουρκίας», τόμος Ι, εκδόσεις Παπαζήση, σελ. 118

⁷¹ ο. α. σελ. 41

υποστεί. Σε έναν κόσμο κρατών που εκσυγχρονίζονταν με ραγδαίους ρυθμούς, είχε ελάχιστες πιθανότητες επιβίωσης».⁷²

Τον 16^ο αιώνα η επέκταση της αυτοκρατορίας -που είχε φτάσει στο ανώτατο όριο της- ανακόπηκε προς κάθε κατεύθυνση. Η ανακοπή της οθωμανικής προέλασης στην Ευρώπη το 1529 και ενάμιση αιώνα αργότερα το 1683, καθώς και μια σειρά από ταπεινωτικές στρατιωτικές ήττες⁷³ του 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα αποκάλυψαν την οικτρή απόδοση του τουρκικού στρατού και προοιόνισαν την παρακμή της αυτοκρατορίας.

Οι ήττες αυτές δεν «αποκάλυψαν» μόνο τον ξεπεσμό των οθωμανικών ενόπλων δυνάμεων αλλά και την διαφορά του επιπέδου εκπαίδευσης ανάμεσα στα οθωμανικά και στα ευρωπαϊκά στρατεύματα, ενώ οι διεθνείς συνθήκες⁷⁴ που οι Οθωμανοί αναγκάστηκαν μετά από τις ήττες αυτές να αποδεχθούν και να τις υπογράψουν αντικατοπτρίζουν με τον καλύτερο τρόπο τον ισχυρό κλονισμό και την ολοένα και περισσότερο αυξανόμενη παρακμή της αυτοκρατορίας. Δηλαδή, η απαρχή του κλονισμού της οθωμανικής ισχύος εκφράστηκε κυρίως μέσα από την επιταχυνόμενη παρακμή των ενόπλων δυνάμεων την οποία επιχείρησαν να ανακόψουν τον 18^ο αιώνα με μεταρρυθμίσεις και καινοτομίες οι σουλτάνοι Σελήμ ο Γ' (1761-1802) και Μαχμούτ ο Β' (1784-1839) και κυρίως με την ίδρυση στρατιωτικών σχολών.⁷⁵

Συγκεκριμένα, το πρόγραμμα εκσυγχρονισμού του οθωμανικού στρατού το οποίο κατάρτισε ο Σελίμ, ξεκίνησε με την ίδρυση νέων στρατιωτικών και ναυτικών σχολών για την παροχή θεωρητικών γνώσεων και τις προσκλήσεις ξένων εκπαιδευτών και τεχνικών το 1793 προκειμένου να εκπαιδεύσουν νέα σώματα μηχανικού, πυροβολικού και ναυτικού στον ισλαμικό στρατό και το πολεμικό ναυτικό⁷⁶.

Ακόμα και εξισλαμισμένοι Χριστιανοί έλαβαν μέρος στο μεγάλο εγχείρημα της μεταρρύθμισης. Ο Ουγγρικής καταγωγής εξισλαμισμένος Χριστιανός Ιμπραήμ Μουτεφερίκας, Οθωμανός διπλωμάτης και ένας από τους υπέρμαχους της εισαγωγής της τυπογραφίας στην αυτοκρατορία, το 1732, παρουσίασε στον σουλτάνο Μαχμούτ Α' (1730-1754) μνημόνιο σαράντα εννέα σελίδων με προτάσεις εκσυγχρονισμού του οθωμανικού στρατού με βάση τους στρατούς της Ευρώπης ενώ συγχρόνως το τυπογραφείο του εξέδιδε βιβλία γλώσσας, ιστορίας, γεωγραφίας και φυσικών επιστημών.⁷⁷

⁷² ο. α σελ. 102

⁷³ Βλέπε, Νεοκλής Σαρρής, «Προεπαναστατική Ελλάδα και Οσμανικό κράτος», εκδόσεις Ηρόδοτος, Αθήνα 1993, σελ 91-96.

⁷⁴ 1). Η συνθήκη του Κάρλοβιτς (26 Ιανουαρίου 1699), «πρακτικά σήμαινε για την Οσμανική Αυτοκρατορία απώλεια εδάφους έκτασης 346000 τ.μ.Η βαθύτερη σημασία της συνθήκης του Κάρλοβιτς είναι ότι μ' αυτήν η Οσμανική Αυτοκρατορία έπαψε να αποτελεί μεγάλη δύναμη που δέσποζε αποφασιστικά στην πολιτική και πολεμική σκηνή της Ευρώπης», Νεοκλής Σαρρής, «Προεπαναστατική Ελλάδα και Οσμανικό κράτος», εκδόσεις Ηρόδοτος, Αθήνα 1993, σελ 92

2). Η συνθήκη του Πασάροβιτς (21 Ιουλίου 1718), έδωσε τέλος στον αυστροτουρκικό και βενετοτουρκικό πόλεμο του 1726-18. Σημαντικά εδάφη των Βαλκανίων προσαρτήθηκαν στην Αυστρία η οποία με συμφωνία που υπογράφηκε εξασφάλισε εμπορικά προνόμια στην Οθωμανική Αυτοκρατορία.

3). Στην συνθήκη του Κιουτσούκ Καϊναρτζή (1774) αναγνωρίστηκε από τους Οθωμανούς η ανεξαρτησία της Κριμαίας και το δικαίωμα ελεύθερης ναυσιπλοΐας του ρωσικού εμπορικού στόλου στην Μαύρη Θάλασσα και την Μεσόγειο.

⁷⁵ Ηρακλής Μήλλας, «Εικόνες Ελλήνων και Τούρκων», εκδόσεις Αλεξάνδρεια, 2001. σελ. 26.

⁷⁶ Bernard Lewis, «Η ανάδυση της σύγχρονης Τουρκίας», τόμος Ι, εκδόσεις Παπαζήση σελ 111

⁷⁷ ο.α. σελ. 129

Στον προσηλυτισμένο Γάλλο ευγενή, κόμη de Bonneval, γνωστό -αφού ασπάστηκε τον ισλαμισμό- με το όνομα Αχμέτ, ανατέθηκε το 1731 το έργο της εξυγιάνσης του σώματος των βομβαρδιστών με βάση τις ευρωπαϊκές προδιαγραφές.⁷⁸

2.1 Μαθηματικά -Σχολές

Τα Μαθηματικά άνθισαν τον 15^ο αιώνα στην Οθωμανική επικράτεια.

Συγκεκριμένα, τον 15^ο αιώνα, ο σουλτάνος Μεχμέτ Β΄ ευνόησε την μελέτη και την διδασκαλία των Μαθηματικών⁷⁹ τα οποία περιέλαβαν στα προγράμματα σπουδών των οθωμανικών μεντρεσέδων⁸⁰.

Αξιόλογοι μαθηματικοί της περιόδου αυτής, όπως ο Μουσά Πασάς του οποίου τα συγγράμματα με τα σχόλια του στον Ευκλείδη⁸¹ διδάσκονταν πολλούς αιώνες στα προγράμματα των μεντρεσέδων, ο Αλή Κουιστού ο οποίος έγραψε συγγράμματα αριθμητικής και αστρονομίας εκπαιδεύοντας συγχρόνως αξιόλογους μαθηματικούς του 15^{ου} και 16^{ου} αιώνα, «έφεραν» τους Οθωμανούς στην πρωτοπορία του ισλαμικού κόσμου σε θέματα Μαθηματικών και Αστρονομίας τον 15^ο αιώνα.⁸²

Από τα μέσα του 16^{ου} αιώνα το ενδιαφέρον για τα επιστημονικά μαθήματα και ιδιαίτερα για τα Μαθηματικά ατόνησε⁸³ κάτω από τις δυνάμεις του θρησκευτικού φανατισμού οι οποίες από τις αρχές του 16^{ου} αιώνα αύξαιναν ολοένα και περισσότερο την αντίδρασή τους κατά των επιστημών και εναντίον κάθε μορφής καινοτομίας.

Σταδιακά το επίπεδο της επιστημονικής καλλιέργειας έπεσε δραματικά. Ο ισλαμικός κόσμος χωρίς το κατάλληλο επιστημονικό υπόβαθρο, δεν ήταν σε θέση να παρακολουθήσει και να αξιοποιήσει τις τεχνολογικές εξελίξεις της Δύσης ακόμα και στον τομέα των πρακτικών εφαρμογών, αλλά, αποκομμένος από την ραγδαία πρόοδο των ευρωπαϊκών κρατών περιορίστηκε στις παραδοσιακές γνώσεις και καταδικάζονταν ολοένα και περισσότερο στην κοινωνική απομόνωση και την στασιμότητα.

Τα Μαθηματικά –απαραίτητα για την αφομοίωση της δυτικής τεχνογνωσίας- έφερε στο προσκήνιο της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης ο 18^{ος} αιώνας.

Οι σουλτάνοι Σελήμ ο Γ΄ (1761-1802) και Μαχμούτ ο Β΄ (1784-1839) κατά την διάρκεια των στρατιωτικών μεταρρυθμίσεων που επιχείρησαν για τον εκσυγχρονισμό του στρατού «έθεσαν» τα Μαθηματικά στην υπηρεσία της πολεμικής τέχνης. Η πρώτη προσπάθεια κατάρτισης μηχανικών στρατού έγινε το 1727 επί Αχμέτ του Γ΄, ο οποίος εφάρμοσε την πρόταση του Ουγγρικής καταγωγής εξισλαμισμένου χριστιανού Ιμπραήμ Μουτεφερίκα, (Ibrahim Mutefericca), ιδρύοντας Σχολή, στην οποία μετεκπαιδεύονταν 300 σπουδαστές του τάγματος των μουσταντζήδων, δηλαδή της αυτοκρατορικής φρουράς. Κατά την εξέγερση των γενιτσάρων το 1730, οι οποίοι δεν ήταν σύμφωνοι με την σύσταση της Σχολής και αντιδρούσαν σε κάθε είδος καινοτομία

⁷⁸ ο.α.σελ. 129

⁷⁹ Χαλίλ Ιναλτζίκ, «Η Οθωμανική Αυτοκρατορία, Η κλασική εποχή, 1300-1600», Μεταφρ. Μιχάλης Κκολάκης, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, Αθήνα 1995, σελ. 299

⁸⁰ Μεντρεσέδες (medrese), ανώτερες σχολές της οθωμανικής αυτοκρατορίας. Οι απόφοιτοι αυτών των σχολών υπηρετούσαν το κράτος ως ιερείς-διανοούμενοι ή ως στρατιωτικοί.

⁸¹ Για τη ζωή και το έργο του Ευκλείδη, βλέπε, Εξαρχάκος Θεόδωρος, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ, Αθήνα 2001, σελ 7-81.

⁸² Χαλίλ Ιναλτζίκ, «Η Οθωμανική Αυτοκρατορία, Η κλασική εποχή, 1300-1600», Μεταφρ. Μιχάλης Κκολάκης, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, Αθήνα 1995, σελ. 300

⁸³ ο.α. σελ 305

και νεωτερισμό, οι περισσότεροι σπουδαστές δολοφονήθηκαν και η Σχολή έπαψε να λειτουργεί.⁸⁴

Η δεύτερη προσπάθεια κατάρτισης μηχανικών στρατού, έγινε το 1734 επί του Μαχμούτ Α΄. Συγκεκριμένα, στο Τοπ- Τασί του Ουσκιουντάρ (Σκούταρι) κοντά στην Κωνσταντινούπολη, ιδρύθηκε η Σχολή Hendesehane ντε Kumbarahane⁸⁵ (Σχολή Μαθηματικών και βομβαρδιστών) που -όπως και το «σώμα των μαθηματικών»⁸⁶- διέκοψε σύντομα την λειτουργία της, εξ' αιτίας νέας εξέγερσης των γενιτσαρών.

Στην Σχολή Hendesehane δίδαξε ο Οθωμανός μαθηματικός Pirizante Mehmet Sait Efendi ο οποίος εφεύρε ένα *τοπογραφικό όργανο υψομέτρησης δύο τόξων* για να χρησιμοποιηθεί από τους άνδρες του πυροβολικού και έγραψε μία διατριβή εικονογραφημένη με γεωμετρικά διαγράμματα, ενώ την ίδια περίοδο κυκλοφόρησε και μία διατριβή για την τριγωνομετρία βασισμένη εν μέρει σε δυτικές πηγές.⁸⁷ Επί Μουσταφά Γ', το 1759, ο η σχολή επαναλειτούργησε κρυφά σε ιδιωτικό σπίτι στο Sutluce (Σουτλουτζέ).⁸⁸

Το 1773 μετά την τρομερή ήττα του οθωμανικού ναυτικού από το ρωσικό ναυτικό στην περιοχή Τσεσμέ της Σμύρνης, λειτούργησε νέα Σχολή Μαθηματικών για το πολεμικό ναυτικό⁸⁹ με την πρωτοβουλία του Χασάν πασά του Αλγερινού και την βοήθεια του βαρόνου de Tott⁹⁰.

Η Σχολή αρχικά λειτούργησε ως Hendesehane, δηλαδή Σχολή Μαθηματικών, και το 1789 μετονομάστηκε και λειτούργησε ως Muhendshane- i- Bahri – i- Humayum, δηλαδή, Σχολή μηχανικών του αυτοκρατορικού ναυτικού. Στην Σχολή, στην οποία οι δάσκαλοι στην πλειοψηφία τους ήταν Γάλλοι, διδάσκονταν Γεωμετρία, Γεωγραφία και Χαρτογραφία. Αργότερα, στην Σχολή του οθωμανικού ναυτικού, λειτούργησε και ένα τμήμα μέσης εκπαίδευσης με εξαετή φοίτηση η οποία ολοκληρώνονταν με δύο χρόνια επιπλέον πρακτικής άσκησης στη θάλασσα, με πολεμικό πλοίο που είχε παραχωρηθεί από το κράτος για το σκοπό αυτό.

Ο πρώτος αρχιδιδάσκαλος της Σχολής των Μαθηματικών του ναυτικού, ήταν ο Σεγίτ Χασάν εφέντης ο οποίος γνώριζε Αραβικά, Περσικά, Γαλλικά, Ιταλικά και Αγγλικά.

Ο βαρόνος de Tott,⁹¹ ο οποίος συνέβαλλε στην σύσταση και εκπαίδευση νέων σωμάτων μηχανικού και πυροβολικού, εκσυγχρόνισε το χυτήριο όπλων και δίδαξε

⁸⁴ M. Emin Jolalici, "XIX yuryilve sonrasl osmanli Deuletinde Egitim ve Ogretim Kurumlari" (Τα Εκπαιδευτικά ιδρύματα και διδακτήρια στο Οσμανικό κράτος κατά τον 19^ο αιώνα και μετέπειτα) σε Osmanli, том. 5, εκδόσεις Yeni Turkiye, Ankara 1999, σελ. 282.

⁸⁵ ο α σελ 283

⁸⁶ Το «σώμα των μαθηματικών» δημιουργήθηκε από τον θετό γιο του Γάλλου κόμη de Bonneval, ο οποίος το 1729 ασπάστηκε τον ισλαμισμό και με το νέο όνομα Αχμέτ κατατάχτηκε στον οθωμανικό στρατό και ανέλαβε το 1731 το έργο της εξυγίανσης του σώματος των βομβαρδιστών με βάση τις ευρωπαϊκές προδιαγραφές.

⁸⁷ Bernard Lewis, «Η ανάδυση της σύγχρονης Τουρκίας», τόμος Ι, εκδόσεις Παπαζήση σελ. 132

⁸⁸ ο. α σελ 131

⁸⁹ Για την σχολή, βλέπε, Eknilleddin Insanoglu, "Taurimat oucesiuve ve Taurimat Douemi Osmanli Bilim ve Taurimat Douemi Osmanli Bilim ve Egitim Anlayis" (Η Οσμανική αντίληψη για την επιστήμη και την παιδεία προ του τανζιμάτ και μετά), Ankara 1992, σελ. 348.

⁹⁰ Ο βαρόνος de Tott, ήταν ουγγρικής καταγωγής Γάλλος υπήκοος, αξιωματικός του πυροβολικού.

⁹¹ Ο Tott, επέβλεπε την σημαντική -για την εποχή- κατασκευή μηχανή ανύψωσης των ιστών των μεγάλων πλοίων (ύψους 37 μέτρων), στο ναυπηγείο της Κωνσταντινούπολης. Αικ. Μπεκιάρογλου- Εξαδάκτυλου,

τριγωνομετρία στην σχολή των Μαθηματικών μέχρι την αποχώρησή του το 1775, που τον αντικατέστησε ο Άγγλος εξωμότης Campbell.⁹²

Η Σχολή λειτούργησε κοντά στον αυτοκρατορικό ναύσταθμο (Tersane- i Amire) μέχρι το 1846 που εγκαταστάθηκε οριστικά στη νήσο Χάλκη όπου λειτουργούσαν και δύο ακόμα ελληνικές Σχολές: η θεολογική και η εμπορική. Η ναυτική σχολή Μαθηματικών επεκτάθηκε και εξελίχθηκε και αποτέλεσε πρότυπο για τις σχολές μηχανικών στρατού.

Με καθυστέρηση σχεδόν ενός αιώνα σε σχέση με τις ναυτικές χώρες της Ευρώπης ιδρύθηκαν στην περιοχή του ναυπηγείου της Κωνσταντινούπολης οι πρώτες θεωρητικές σχολές για την εκπαίδευση ναυτικών και τεχνικών ναυπήγησης.⁹³

Τον Οκτώβριο του 1784 ξεκίνησε νέο εκπαιδευτικό πρόγραμμα με την ώθηση και την βασική καθοδήγηση της γαλλικής κυβέρνησης. Στην μεγάλη κλίμακα μεταρρύθμιση των οθωμανικών ενόπλων δυνάμεων που επιχείρησε ο σουλτάνος Σελίμ Γ΄ με στόχο να αναβαθμιστούν σε εκπαίδευση και τεχνικό εξοπλισμό, Γάλλοι αξιωματικοί του μηχανικού με την βοήθεια Αρμενίων διερμηνέων, ανέλαβαν να εκπαιδεύσουν τα οθωμανικά στρατεύματα.⁹⁴

Το 1792 και το 1793 ο σουλτάνος ανακοίνωσε νέες ρυθμίσεις για την δημιουργία νέου -εξοπλισμένου και εκπαιδευμένου βάσει ευρωπαϊκών μεθόδων- κλάδου τακτικού πεζικού. Για να υλοποιηθεί τις νέες ρυθμίσεις, ο Σελίμ, επικέντρωσε το ενδιαφέρον του στις στρατιωτικές και ναυτικές σχολές.

Η επιτυχής απόπειρα λειτουργίας της Σχολής των μηχανικών του ναυτικού για την κατάρτιση αξιωματικών, οδήγησε τον Σελίμ Γ΄, το 1796, στην ίδρυση της Σχολής μηχανικών του στρατού ξηράς, που ονομάστηκε Muhendishane (αυτοκρατορική Σχολή ξηράς) και στην οποία φοιτούσαν αξιωματικοί ξηράς, πυροβολικού και επιμελητείας. Για πρώτη φορά στην Οθωμανική αυτοκρατορία συστάθηκε Σχολή σύμφωνα με τα ευρωπαϊκά πρότυπα. Γάλλοι αξιωματικοί και μηχανικοί παρείχαν εκπαίδευση στα όπλα, στην οχυρωματική τέχνη και άλλες συναφείς επιστήμες.⁹⁵ Στη Σχολή, η οποία από το τρίτο έτος διαχωρίζονταν σε πυροβολικό και αρχιτεκτονική, η φοίτηση ήταν τετραετής, η Γαλλική γλώσσα έγινε υποχρεωτική για όλους τους σπουδαστές και η βιβλιοθήκη που οργανώθηκε περιείχε 400 τόμους ευρωπαϊκών έργων και ανάμεσά τους μία σειρά της Γαλλικής εγκυκλοπαίδειας (Grande Encyclopedie).⁹⁶

Η Γαλλία συνέβαλε σημαντικά στα στρατιωτικά μεταρρυθμιστικά προγράμματα της αυτοκρατορίας.

Οθωμανοί τεχνίτες, οι οποίοι ήταν στην πλειοψηφία τους απόφοιτοι των ναυτικών σχολών που ιδρύθηκαν στην Κωνσταντινούπολη μετά το 1770, αναφέρονται ανάμεσα

«Οθωμανικά ναυπηγεία στον παραδοσιακό ελληνικό χώρο», πολιτιστικό τεχνολογικό ίδρυμα ΕΤΒΑ, σελ.61

⁹² Robert Mautra, "Les debus dela Question d' Orient (1774-1839). Histoire de l' Empire Otomman" ekd. Fayard, 1989, σελ. 423-424

⁹³ Αικ. Μπεκιάρογλου- Εξαδάκτυλου, «Οθωμανικά ναυπηγεία στον παραδοσιακό ελληνικό χώρο», πολιτιστικό τεχνολογικό ίδρυμα ΕΤΒΑ, σελ. 65

⁹⁴ Bernard Lewis, «Η ανάδυση της σύγχρονης Τουρκίας», τόμος Ι, εκδόσεις Παπαζήση, σελ. 134

⁹⁵ Βλέπε, Μ. Emin Jolalici, "XIX yuryilve sonrasl osmanli Deuletinde Egitim ve Ogretim Kurumlari" (Τα Εκπαιδευτικά ιδρύματα και διδαστήρια στο Οσμανικό κράτος κατά τον 19^ο αιώνα και μετέπειτα) σε Osmanli, τομ. 5, εκδόσεις Yeni Turkiye, Ankara 1999, σελ 282-283

⁹⁶ Bernard Lewis, «Η ανάδυση της σύγχρονης Τουρκίας», τόμος Ι, εκδόσεις Παπαζήση σελ. 152

στους άλλους οι οποίοι εργάστηκαν κάτω από την επίβλεψη του Γάλλου ναυπηγού Brun επί εποχής του Σουλτάνου Σελήμ Γ'.⁹⁷

Γάλλοι αξιωματικοί διδασκαν στους σπουδαστές τα Μαθηματικά και την βαλλιστική και τους εκπαιδευαν στις πολεμικές τεχνικές. Η γαλλική γλώσσα ήταν απαραίτητη και έγινε υποχρεωτική για όλους τους φοιτητές των στρατιωτικών σχολών.⁹⁸

Η γαλλική συνεργασία - παρ' όλο που διακόπτονταν κατά διαστήματα εξ αιτίας πολεμικών επιχειρήσεων- έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην στρατιωτική μεταρρύθμιση των Οθωμανών. Το 1796, έφτασε στην Κωνσταντινούπολη μεγάλη ομάδα ειδικών Γάλλων αξιωματικών και τεχνικών για την εκπαίδευση Οθωμανών στρατιωτών, ενώ με την αποστολή του Γάλλου στρατιωτικού αξιωματούχου, στρατηγού Sebastiani στην Τουρκία το 1806-1807, η γαλλο-τουρκική συνεργασία για τον εκσυγχρονισμό του οθωμανικού στρατού έφτασε στο αποκορύφωμά της.⁹⁹

Οι περαιτέρω προσπάθειες για εκσυγχρονισμό βρήκαν σθεναρές αντιδράσεις από τα φανατισμένα σώματα των γενιτσάρων και μόνων μετά την υποταγή τους το 1826 ο σουλτάνος Μαχμούτ Β' που συχνά αναφέρεται ως «ο μεγάλος Πέτρος της Οθωμανικής Αυτοκρατορίας»¹⁰⁰, προχώρησε σε ουσιαστικές στρατιωτικές, εκπαιδευτικές και διοικητικές μεταρρυθμίσεις.

2.2 Εκσυγχρονισμός της οθωμανικής κοινωνίας- τα αίτια της αποτυχίας

«... όλες ανεξάίρετα οι απόπειρες εκσυγχρονισμού που έλαβαν χώρα μέχρι και τον 20^ο αιώνα στο οσμανικό κράτος έχουν ως αφετηρία τους τον εκσυγχρονισμό των ένοπλων δυνάμεων και των οπλικών συστημάτων»¹⁰¹

«... οι μεταρρυθμίσεις ήταν η βίαιη επιβολή, σε μία μουσουλμανική χώρα, πρακτικών και διαδικασιών με ευρωπαϊκή προέλευση, με την ενθάρρυνση -αν όχι την επιμονή- των ευρωπαϊκών δυνάμεων και με τη βοήθεια ευρωπαίων ειδικών και συμβούλων»¹⁰²

Οι πρώτες απόπειρες εξευρωπαϊσμού οι οποίες έλαβαν χώρα στην διάρκεια της βασιλείας του Αχμέτ Γ' (1703-1730), συνίστανται στην εισαγωγή και υιοθέτηση επιλεγμένων στοιχείων από τα ευρωπαϊκά επιστημονικά επιτεύγματα και τον δυτικό ευρωπαϊκό πολιτισμό.

Αν και οι Οθωμανοί πρεσβευτές απεσταλμένοι στην Βιέννη και στο Παρίσι στις αρχές του 18^{ου} αιώνα είχαν τις εντολές «να πραγματοποιήσουν διεξοδική μελέτη των μέσων πολιτισμού και εκπαίδευσης και να αναφέρουν εκείνα που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν στην Τουρκία»¹⁰³, τελικά, οι πρώτες αυτές απόπειρες δανεισμού στοιχείων

⁹⁷ Αικ. Μπεκιάρογλου- Εξαδάκτυλου, «Οθωμανικά ναυπηγεία στον παραδοσιακό ελληνικό χώρο», πολιτιστικό τεχνολογικό ίδρυμα ΕΤΒΑ, σελ. 140.

⁹⁸ Bernard Lewis, «Η ανάδυση της σύγχρονης Τουρκίας», τόμος Ι, εκδόσεις Παπαζήση σελ. 152

⁹⁹ ο.α. σελ.153

¹⁰⁰ ο.α. σελ.185

¹⁰¹ Νεοκλής Σαρρής, «Προειπαναστατική Ελλάδα και Οσμανικό κράτος», εκδόσεις Ηρόδοτος, Αθήνα 1993, σελ. 31.

¹⁰² Bernard Lewis, «Η ανάδυση της σύγχρονης Τουρκίας», τόμος Ι, εκδόσεις Παπαζήση, σελ. 277

¹⁰³ ο. α. σελ. 126

από τον ευρωπαϊκό πολιτισμό περιορίστηκαν σε εκείνα που θα συντελούσαν στον εκσυγχρονισμό των ενόπλων δυνάμεων.

Παρ' όλο που οι πρώιμες αυτές συναλλαγές με την Ευρώπη αντανακλώνται στους κύκλους των ανακτόρων με ασημαντές αλλαγές στην πολιτιστική και κοινωνική ζωή, αλλαγές οι οποίες εκφράστηκαν με την μίμηση φεράγκικων τρόπων συμπεριφοράς και εισαγωγή γαλλικών πολιτιστικών στοιχείων που περιορίστηκαν στην διακόσμηση, τη φιλοτέχνηση πορτρέτων αξιωματούχων από ευρωπαίους ζωγράφους, τον δανεισμό αρχιτεκτονικών στοιχείων για διακοσμητικές κατασκευές, εν τούτοις η αποδοκιμασία και η δυσφορία της Οθωμανικής κοινωνίας των αρχών του 18^{ου} αιώνα για τις αλλαγές αυτές ήταν έντονη.

Η δυσφορία αυτή εκδηλώθηκε με λαϊκή εξέγερση στην Κωνσταντινούπολη -με αφορμή μία οθωμανική ήττα το 1730 από τα περσικά στρατεύματα- και είχε ως αποτέλεσμα την παραίτηση του σουλτάνου και τον θάνατο πολλών Οθωμανών αξιωματούχων.¹⁰⁴

Η πολλών αιώνων ηθελμένη έλλειψη διαύλων πνευματικής επικοινωνίας με τους πολιτισμένους λαούς της Δύσης, περιόριζε χαρακτηριστικά την δεκτικότητα του οθωμανικού λαού μόνο στα δυτικά επιτεύγματα σχετικά με την πολεμική τέχνη, δηλαδή, τις εφευρέσεις που «εξιλεώνονταν» από τον ιερό σκοπό της εξόντωσης των «απίστων» ευρωπαϊκών λαών. Τα πυροβόλα όπλα έγιναν αποδεκτά γιατί θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στον ιερό πόλεμο του Ισλάμ εναντίον των «βαρβάρων» και «απίστων» λαών.

Το νέο εγχείρημα -που ακολούθησε μια σειρά από ταπεινωτικές ήττες- για τον εκσυγχρονισμό των οθωμανικών ενόπλων δυνάμεων το 18^ο αιώνα, ήταν η πρώτη συνειδητή προσπάθεια για την «προσέγγιση» του πολιτισμού της δυτικής Ευρώπης και την υιοθέτηση των επιστημονικών επιτευγμάτων της Δύσης.

Από την σοβαρή αυτή προσπάθεια, εκτός από τον πολεμικό εξοπλισμό, η μοναδική τεχνολογική καινοτομία ευρωπαϊκής προέλευσης ήταν η εισαγωγή της τυπογραφίας¹⁰⁵ (1728).

Τον αιώνα αυτό, ελάχιστα είναι τα ίχνη της δυτικής επιρροής που αφορούν στον πνευματικό τομέα. Η φιλοσοφία, η επιστήμη, η λογοτεχνία των ευρωπαϊκών λαών όχι μόνο δεν είχαν τίποτα να δώσουν στον Ισλαμικό κόσμο, αλλά απορρίπτονταν ως πνευματικά επιτεύγματα του «καθυστερημένου» και «βάρβαρου» χριστιανικού κόσμου. Ελάχιστα δυτικές γνώσεις και ιδέες, κατάφεραν να «αγγίξουν» τους κύκλους των μουσουλμάνων λόγιων. Το φράγμα του ισλαμισμού «έκλεινε» κάθε αγωγό εισροής ιδεών και πολιτιστικών στοιχείων από τη Δύση. «Τα μεγάλα δυτικά κινήματα ιδεών που διέτρεξαν τις χώρες του Ισλάμ δεν είχαν την παραμικρή απήχηση».¹⁰⁶

Ακόμα και η μεγάλη διακίνηση των ιδεών της γαλλικής επανάστασης στην οθωμανική επικράτεια που οι οποίες επιδοκιμάστηκαν από τους μουσουλμάνους ηγέτες και τους στοχαστές, είχαν περιορισμένη επιρροή στους Οθωμανούς υπηκόους.

¹⁰⁴ ο.α. σελ. 128

¹⁰⁵ Ο ισλαμικός κόσμος αντιδρούσε σε ότι έθιγε τα παραδοσιακά συστήματα προφορικής επικοινωνίας. Το πρώτο τουρκικό τυπογραφείο που κατασκευάστηκε το 1728, συνάντησε την άγρια επίθεση των Ουλεμάδων και έμεινε τελικά αχρησιμοποίητο. Μόνο στα τέλη του αιώνα πραγματοποιείται μια νέα προσπάθεια. Αλλά ως το 1828 τα τυπωμένα βιβλία ήταν συνολικά λιγότερα από 80 και στο διάστημα 1830-1842 τυπώθηκαν μόνο 108 βιβλία, δηλαδή λιγότερα από δέκα βιβλία το χρόνο. Παρ. Κων/νος Τσουκαλάς, ό α, σελ 275

¹⁰⁶ ο.α. σελ 142

Η στρατιωτική εκπαίδευση των οθωμανικών ενόπλων δυνάμεων αποτελούσε τον κύριο φορέα μετάδοσης ιδεών και γνώσεων. Με τις μεταρρυθμίσεις του Σελήμ Γ' (1792-1807) πυρήνες ασκούμενων αξιωματικών διδάσκονταν από Γάλλους εκπαιδευτές στην γαλλική γλώσσα. Οι αξιωματικοί αυτοί, οι οποίοι μιλούσαν τουλάχιστον μία δυτική γλώσσα, δημιούργησαν ένα νέο κοινωνικό πυρήνα ο οποίος μέσα από την σπουδή της δυτικής επιστήμης στις πολεμικές τέχνες, όχι μόνο είχε συμβιβαστεί με την ιδέα της συνεργασίας με αλλόθρησκους εκπαιδευτές, αλλά και είχε -κατά κάποιο τρόπο- εξοικειωθεί με τον δυτικό πολιτισμό.

Ο Σελήμ, στα τέλη του αιώνα (1792,) «άνοιξε» άλλο παράθυρο προς την Δύση. Καθιέρωσε μόνιμες οθωμανικές πρεσβείες στις μεγάλες ευρωπαϊκές πρωτεύουσες και απέστειλε Οθωμανούς πρεσβευτές και διπλωμάτες που συνοδεύονταν από νεαρούς γραμματείς στους οποίους είχαν δοθεί οδηγίες να μελετήσουν τις ευρωπαϊκές γλώσσες και τις συνήθειες της δυτικής κοινωνίας.¹⁰⁷

Από τους νέους αυτούς ανθρώπους οι οποίοι με την παραμονή τους σε μία ευρωπαϊκή πρωτεύουσα ήρθαν σε επαφή με νέους λαούς και ιδέες, δημιουργήθηκε ένας νέος κοινωνικός πυρήνας. Μετά την επιστροφή τους κάποιοι από αυτούς «έγιναν αξιωματούχοι της Υψηλής Πύλης και σχημάτισαν μία φιλοδυτική μειονότητα μεταξύ της γραφειοκρατικής ιεραρχίας ανάλογη με εκείνη που σχηματίστηκε μεταξύ των αξιωματικών μετά τις στρατιωτικές και ναυτικές μεταρρυθμίσεις».¹⁰⁸

Τελικά ο εκσυγχρονισμός ο οποίος επιχειρήθηκε μέσω της στρατιωτικής μεταρρύθμισης, περιορίστηκε σε μειονότητες στρατιωτικών κύκλων και αξιωματούχων του κράτους, μέχρι τα τέλη του 19^{ου} αιώνα.

Εκσυγχρονίστηκε τελικά η οθωμανική κοινωνία του 18^{ου} και 19^{ου} αιώνα; Οι απόψεις των σύγχρονων ιστορικών και των ειδικών συγκλίνουν: «ο εκσυγχρονισμός παρέμεινε ένα άπιαστο όνειρο»¹⁰⁹

Τα νέα ιδεολογικά ρεύματα τα οποία διείσδυσαν στην αυτοκρατορία άφησαν σχεδόν ανέπαφη την οθωμανική κοινωνία και περιορίστηκαν στην αστική τάξη των ανώτερων κρατικών λειτουργών και των στρατιωτικών που αποτέλεσε τους βασικούς διαύλους μεταβίβασης των ευρωπαϊκών ιδεών στην τουρκική κοινωνία. Τα στρώματα όμως αυτά ήταν ολιγάριθμα και δεν ήταν δυνατόν να μεταβάλλουν το γενικότερο κοινωνικό και πολιτιστικό κλίμα της οθωμανικής αυτοκρατορίας.

Η υιοθέτηση πολιτιστικών στοιχείων από τους λαούς της Δύσης δε έθιξε τις θεμελιώδεις αρχές του Ισλάμ.

Το ευκαιριακό ενδιαφέρον για κάποια από τα τεχνολογικά επιτεύγματα των ευρωπαϊκών χωρών και τα «δάνεια» από τις ευρωπαϊκή επιστημονική σκέψη δεν συνοδεύονταν και από την αφομοίωση της, αλλά λειτούργησαν ως προσθήκες στις παραδοσιακές γνώσεις.¹¹⁰

Καθοριστικό αίτιο για την αποτυχία του εκσυγχρονισμού υπήρξε το αναχρονιστικό κοινωνικοπολιτικό οικοδόμημα το οποίο διαίωνιζε την κυριαρχία της άρχουσας τάξης. Ο τρόπος διακυβέρνησης της αυτοκρατορίας απέκλειε την συγκρότηση μιας ισχυρής

¹⁰⁷ ο.α. σελ 156

¹⁰⁸ ο.α. σελ 157

¹⁰⁹ Νεοκλής Σαρρής «Οσμανική πραγματικότητα», τόμος II, εκδόσεις Ι.Δ. Αρσενίδης, Αθήνα σελ 385

¹¹⁰ Χαλίλ Ιναλτζίκ, «Η Οθωμανική Αυτοκρατορία. Η κλασική εποχή, 1300-1600», Μεταφρ. Μιχάλης Κοκολάκης, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, Αθήνα 1995, σελ 308

αστικής τάξης η οποία θα αμφισβητούσε τελικά την παντοδύναμη κυριαρχία των κρατούντων και θα οδηγούσε -πιθανότατα μέσω άλλων οδών- στον κοινωνικό εκσυγχρονισμό. Μέχρι το τέλος του 19^{ου} αιώνα συστηματικά παρεμποδίζονταν κάθε θεσμική μεταρρύθμιση που θα μπορούσε να ευνοήσει την συγκρότηση μιας ευρείας αστικής τάξης.¹¹¹

Τα αίτια μπορούμε να τα αναζητήσουμε και στην ιδιαίτερη κοινωνική και πολιτισμική φυσιογνωμία της Οθωμανικής κοινωνίας η οποία ενώ ήταν η πιο ανοικτή σε εξωτερικές πολιτισμικές επιρροές από όλες τις ισλαμικές κοινωνίες, εν τούτοις, οι δυνάμεις του θρησκευτικού φανατισμού -που από το τέλος του 16^{ου} αιώνα αυξάνουν ολοένα την επιρροή τους- πήραν την μορφή μιας ολοένα αυξανόμενης αντίδρασης κατά των διανοητικών επιστημών και κάθε μορφής καινοτομίας.¹¹²

Ένα άλλο αίτιο υπήρξε η οπισθοδρομική πολιτική των Οθωμανών στον χώρο της παιδείας η οποία «σε σχέση τουλάχιστον προς την ελληνική παιδεία τόλμησε τα πρώτα βήματα με αρκετή καθυστέρηση, δηλαδή από το τέλος του 19^{ου} αιώνα» και απέβλεπε κυρίως στην ενίσχυση της στρατιωτικής ισχύος και στον εκσυγχρονισμό του οθωμανικού πολεμικού μηχανισμού: «Τούτο όμως δεν είναι το μοναδικό αίτιο που οι προσπάθειες απέβησαν άκαρπες και ο εκσυγχρονισμός παρέμεινε ένα άπιαστο όνειρο. Το κυριότερο αίτιο οφείλεται στο ότι η κλίμακα αξιών της δυτικής παιδείας βρισκόταν στον αντίποδα εκείνης στην οποία διαλεγόταν η οσμανική πραγματικότητα».¹¹³

Το εγχείρημα της κοινωνικής μεταρρύθμισης της οθωμανικής κοινωνίας απέτυχε αφού όλες οι αλλαγές που επιχειρήθηκαν έγιναν σε περιόδους κρατικών κρίσεων και οι προσπάθειες εκσυγχρονισμού δεν είχαν την βάση τους στις κοινωνικές και οικονομικές ανάγκες του οθωμανικού λαού αλλά δρομολογήθηκαν από τους κρατικούς φορείς κυρίως¹¹⁴ για την αναβάθμιση του στρατιωτικού και του κρατικού μηχανισμού της Οθωμανικής Αυτοκρατορίας.

3. Στόχοι της έρευνας - Μεθοδολογία

Στην ελληνική εθνική κοινότητα, η παιδεία, με βραδείς ρυθμούς, μέσα από πολύχρονη και κοπιαστική πορεία αναπτύχθηκε και καθιερώθηκε. Στις τελευταίες δεκαετίες πριν από τον αγώνα με τις νέες κοινωνικές και οικονομικές ζυμώσεις που έλαβαν χώρα στους κόλπους του ελληνισμού και με την συμβολή αξιόλογων λογίων «ανδρώθηκε» και εξελίχθηκε έχοντας ως πρότυπο την ευρωπαϊκή παιδεία.

Η παιδεία αργά και κοπιαστικά ανοίγει πνευματικούς ορίζοντες, με αποτέλεσμα, – με τον ίδιο βέβαια αργό ρυθμό-, να καλλιεργεί την εθνική συνείδηση του κατεχόμενου λαού, παράγοντα αποφασιστικής σημασίας για την επιβίωσή του ως έθνους και κατά συνέπεια και για την απελευθέρωσή του.

Μέσα στην γενικότερη εξέλιξη της παιδείας, οι «επιστήμες», (Μαθηματικά, Φυσική, Χημεία, Αστρονομία, Γεωγραφία, Βιολογία), ακολούθησαν ιδιαίτερη εξελικτική πορεία, μια πορεία που παρεκκλίνει από εκείνη των υπόλοιπων μαθημάτων και ως προς

¹¹¹ Κωνσταντίνος Τσουκαλάς, «Εξάρτηση και αναπαραγωγή. Ο κοινωνικός ρόλος των εκπαιδευτικών μηχανισμών στην Ελλάδα (1830-1922)», εκδόσεις Θεμέλιο, 1977, σελ 352

¹¹² Χαλίλ Ινάλτζικ, «Η Οθωμανική Αυτοκρατορία, Η κλασική εποχή. 1300-1600», Μεταφρ. Μιχάλης Κεκολάκης, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, Αθήνα 1995, σελ. 310

¹¹³ Νεοκλής Σαρρής «Οσμανική πραγματικότητα», τόμος II, εκδόσεις Ι.Δ. Αρσενίδης, Αθήνα σελ 385

¹¹⁴ Ηρακλής Μήλλας, «Εικόνες Ελλήνων και Τούρκων», εκδόσεις Αλεξάνδρεια, 200, σελ 27

το χρόνο εισαγωγής τους στα εκπαιδευτικά ιδρύματα της εποχής και ως προς τον τρόπο της αποδοχής τους από το εκπαιδευτικό κατεστημένο έτσι όπως είχε διαμορφωθεί από τους φορείς της παιδείας τους πρώτους αιώνες της δουλείας.

Μέχρι σήμερα, οι δημοσιευμένες μελέτες αφορούν κυρίως την εξέλιξη των «επιστημών» γενικότερα, μέσα από μία αναφορά ή και σύντομο σχολιασμό κάποιων επιστημονικών έργων που διδάχτηκαν κατά την περίοδο της τουρκοκρατίας. Οι μελέτες αυτές είναι:

- «Αι φυσικαί επιστήμαι εν Ελλάδι προ της επανάστασεως», Μ. Κ. Στεφανίδη, Αθήνα 1926.
- «Οι Φυσικές-Θετικές επιστήμες στον ελληνικό 18^ο αιώνα». Αθήνα 1977. Γ. Καρράς.

Στο αξιόλογο έργο του, «Οι θετικές επιστήμες στον ελληνικό χώρο», ο ιστορικός των επιστημών Ι. Καρράς, αναφέρεται πολύ συνοπτικά στο περιεχόμενο των μαθηματικών βιβλίων, χειρόγραφων ή έντυπων, έτσι ώστε ο αναγνώστης να αποκτήσει μια γενική εικόνα για το επίπεδο της μαθηματικής-επιστημονικής σκέψης κατά την περίοδο του οθωμανικού ζυγού, εικόνα, που, μέσα από την ίδια διαδικασία, μας δίνει και για τις υπόλοιπες επιστήμες (Φυσική, Χημεία, Βιολογία, Ιατρική), καθώς και για την εξέλιξη τους μέσα στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

Από όσα τουλάχιστον γνωρίζω, δεν υπάρχει εργασία η οποία να μελετά τη διαχρονική εξέλιξη των Μαθηματικών ειδικότερα, μέσα από την περιγραφή και την ανάλυση των μαθηματικών κειμένων, τα οποία, είτε ως αντιγραφές παλαιότερων κειμένων αρχαίων Ελλήνων συγγραφέων, είτε ως μεταφράσεις επιστημονικών έργων γραμμένων στη Δύση την αντίστοιχη χρονική περίοδο, είτε ως συμπληρώματα, (δεν υπήρχαν πρωτότυπες συγγραφές ελληνικών μαθηματικών έργων), κυκλοφόρησαν διαδοχικά ή και ταυτόχρονα στον εκπαιδευτικό ορίζοντα του κατεχόμενου ελλαδικού χώρου.

Μετά από τη διαπίστωση αυτή, με την παρούσα μελέτη, θα επιχειρήσω να δώσω μια πλήρη εικόνα για την πορεία των μαθηματικών στα χρόνια της τουρκοκρατίας, κυρίως μέσω της εκπαίδευσης, όσο βέβαια αυτό είναι δυνατόν, δεδομένου ότι η διαδρομή τους δεν εξελίχτηκε ομαλά αφού δεν υπήρχε ενιαίο πρόγραμμα σπουδών και η διδασκόμενη ύλη δεν ήταν συγκεκριμένη, αλλά, διαφορετικοί κάθε φορά και σε κάθε Σχολή παράγοντες επέβαλαν τον τρόπο διδασκαλίας τους και καθόριζαν τη διδασκόμενη ύλη.

Θα ακολουθήσουμε κατά χρονολογική σειρά την πορεία μαθηματικών κειμένων, όχι μόνον όσων μπορούν να χαρακτηριστούν ως επιστημονικά έργα και προορίζονταν για διδακτικούς σκοπούς, αλλά και εκείνων τα οποία χαρακτηρίζονται ως «πρακτικά εκλαϊκευτικά βιβλία» μαθηματικών¹¹⁵ και απευθύνονταν σε πλατιά λαϊκά στρώματα, για να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης, το ρυθμό ανάπτυξης ενός επιστημονικού πνεύματος και τα θετικά επακόλουθα που επέφερε στον τρόπο σκέψης και στην ζωή των υποδούλων.

¹¹⁵ Ε. Νικολαΐδης «η υποδοχή των δυτικών θετικών και φυσικών επιστημών στην Ελλάδα την περίοδο του διαφωτισμού: μια προσέγγιση μέσω του έντυπου βιβλίου.», συνέδριο «οι φυσικές επιστήμες στην Ελλάδα και ιδιαίτερα στη Θεσσαλία πριν την επανάσταση»

Συγκριμένα

Η έρευνα την οποία θα επιχειρήσουμε έχει ως αντικείμενο τη μελέτη και την παρουσίαση του μαθηματικού έργου μερικών από τους κυριότερους εκπροσώπους του νεοελληνικού Διαφωτισμού, οι οποίοι συστηματικά ασχολήθηκαν με την «επιστήμη» και ειδικότερα με τα Μαθηματικά, επιχειρώντας να καλλιεργήσουν και να διαδώσουν το νέο αυτό γνωστικό αντικείμενο στο χώρο της παιδείας και να συμβάλλουν στην εξέλιξη της επιστημονικής – φιλοσοφικής σκέψης μέσα στο χρονικό και γεωγραφικό πλαίσιο που περιχάραξε η υποδομή τους στο Τούρκο κατακτητή.

Ο όρος «επιστήμες», την χρονική περίοδο που αναφερόμαστε, παρεκκλίνει από τη σημερινή έννοια του όρου, και αφορά μόνο στις θετικές επιστήμες (Μαθηματικά, Φυσική, Χημεία, Ιατρική, Αστρονομία, Γεωγραφία).

Αν και έχουμε πλήρη συνείδηση ότι δεν υπάρχουν σαφείς διαχωριστικές γραμμές στον τομέα της πνευματικής ζωής ενός τόπου, ούτε σαφή διαχωριστικά χρονικά όρια στην εξάπλωση των γνώσεων και των ιδεών, θα περιορίσουμε τη μελέτη του θέματός μας κυρίως στην περίοδο του νεοελληνικού Διαφωτισμού (v.Δ.), που με αφετηρία τα μέσα του 18^{ου} αιώνα φτάνει μέχρι τις παραμονές του Αγώνα, αφού με την επανάσταση τελειώνει και ο ιστορικός κύκλος του v.Δ.

Με τον όρο Διαφωτισμό εννοούμε ένα ιδεολογικό και πολιτιστικό κίνημα το οποίο άρχισε να εξαπλώνεται κατά τις πρώτες δεκαετίες του 18^{ου} αιώνα, και, με κέντρο ακτινοβολίας κυρίως τη Γαλλία, αρχικά επεκτάθηκε σε όλους σχεδόν τους κύκλους των πνευματικών ανθρώπων της Ευρώπης και έφτασε μέχρι τον οσμανοκρατούμενο κόσμο.

Ελευθερία πολιτική και «ελεύθερη» έρευνα συνιστούν κοινό πρόταγμα στον λόγο των διανοητών της εποχής: «Όποιος ελεύθερα συλλογάται, συλλογάται καλά» είναι η φράση με την οποία διανθίζει το «Απάνθισμα Φυσικής»¹¹⁶ του ο Ρήγας.¹¹⁷

Ο νεοελληνικός Διαφωτισμός καθώς διαδόθηκε και εξαπλώθηκε κάτω από ιδιαίτερες συνθήκες – όλες εκείνες τις συνθήκες που δημιουργεί η υποδούλωση μιας χώρας σε έναν ξένο δυνάστη - χαρακτηρίζεται από τις δικές του ιδιαιτερότητες, και, αν και παρακλάδι του Ευρωπαϊκού διαφωτισμού, παρεκκλίνει και ως προς το χρόνο διάδοσης – ακολούθησε με καθυστέρηση τον ευρωπαϊκό-, αλλά, όπως είναι φυσικό, και ως προς τις επιδράσεις του στον ελληνικό κόσμο, αφού δεν είχε προηγηθεί ένα διάστημα προπαρασκευής της εξάπλωσής του, όπως στον ευρωπαϊκό κόσμο με την αναγέννηση.

Ο Κ. Θ. Δημαράς, ορίζει τον νεοελληνικό Διαφωτισμό, -προσδίδοντάς του τον ιδιαίτερο χαρακτήρα που αναφέραμε- «ως το σύνολο των πνευματικών εκείνων και συνειδησιακών φαινομένων της νέας ελληνικής ιστορίας, όσα συμβαδίζουν με τη γενική προαγωγή του Ελληνισμού, και πριν από τη συνθήκη του Κιουτσούκ Καϊναρτζή, (1774), αλλά και , ιδίως, μετά, και των οποίων φυσική απόληξη πρέπει να θεωρήσουμε την Ελληνική Επανάσταση.»¹¹⁸

Η ταυτότητα των εκπροσώπων των θετικών επιστημών, οι συνθήκες κάτω από τις οποίες παράγεται το έργο τους καθώς επίσης και οι προοπτικές που διανοίγονται στον πνευματικό τομέα και στον τομέα της υλικοτεχνικής υποδομής με την παρουσία τους

¹¹⁶ «Φυσικής Απάνθισμα, διά τους Αγγίνους και φιλομαθείς Έλληνες, εκ της Γερμανικής και Γαλλικής διαλέκτου ερρανισθέν, παρά του Ρήγα Βελεστινλή Θετταλού», Βιέννη 1790.

¹¹⁷ Γεώργιος Ν. Λεονταίνης, «Ζητήματα Νεότερης Ελληνικής Ιστορίας», Αθήνα 2003, σελ. 129.

¹¹⁸ Κ. Θ. Δημαράς, «Νεοελληνικός Διαφωτισμός», Νεοελληνικά Μελετήματα 2, Ερμής, Αθήνα 1993, σελ.23.

στον χώρο της παιδείας, προσδιορίζονται αφ' ενός από αρχές και αντιλήψεις που τους συνδέουν με το διανοητικό και ιδεολογικό περιβάλλον του ευρωπαϊκού Διαφωτισμού και αφ' ετέρου, από αιτήματα, ανάγκες και επιταγές τις οποίες υπαγορεύουν οι νέες κοινωνικοοικονομικές ανακατατάξεις και συνθήκες στο χώρο της Οθωμανικής Αυτοκρατορίας κατά την διάρκεια του 18^{ου} αιώνα. Την περίοδο αυτή η –με κάθε τρόπο και προς πάσα κατεύθυνση- διείσδυση του Δυτικού κόσμου στην Αυτοκρατορία είναι κάτι περισσότερο από εμφανής.

Η προσανατολισμένη προς το εμπόριο, τη ναυτιλία, και τις μεταφορές οικονομική ανάπτυξη, και η κοινωνική διαφοροποίηση που τη συντρέπει, συγχρονίζονται/ συμβαδίζουν με τη διαμορφούμενη ηγεμονία μιας ελληνικού τύπου παιδείας, εμπνευσμένης, μεταξύ άλλων, από το Ευρωπαϊκό πνεύμα του Διαφωτισμού, την πίστη δηλαδή ότι η επιστημονική έρευνα στην υπηρεσία των ανθρώπων, συμβάλλει στην πρόοδο και στην εξελιξιμότητά τους, στην ανάπτυξη και στην καλυτέρευση των συνθηκών ζωής.

Η εισαγωγή λοιπόν της Επιστήμης (Μαθηματικά, Φυσική, Χημεία, Ιατρική, Αστρονομία, Γεωγραφία) στον κατεχόμενο ελληνικό χώρο και το εγχείρημα της σχετικής χειραφέτησης της παιδείας από το αυστηρά νοούμενο θεολογικό πλαίσιο, ως αποτέλεσμα της επίδρασης του Ευρωπαϊκού νεωτερικού πνεύματος, συνιστούν διαδικασία συνεχών όσο και ριζικών ρήξεων και ανατροπών, όπως επίσης και αντιστάσεων και αναπροσαρμογών, που όλες τους όμως, με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο, τείνουν, στη μακρά διάρκεια βέβαια και σε άνισους χρόνους και ρυθμούς, να μεταμορφώσουν την ίδια τη φυσιγνωμία της Οθωμανικής Αυτοκρατορίας.

Στο πλαίσιο αυτό της διαδικασίας εκκοσμίκευσης και ανοίγματος προς τη Δύση, γεννώνται και αναπτύσσονται τα εθνικά κινήματα των λαών της Βαλκανικής και προκαλούνται σημαντικές αλλαγές στο εσωτερικό περιβάλλον της Αυτοκρατορίας, τόσο στο επίπεδο διάχυσης νέων ιδεολογιών, όσο και στο επίπεδο της πολιτικής οργάνωσης και της οικονομίας.

Σε ολόκληρο το διάστημα της πολυαίωνης υποδούλωσης, με χρονικά άκρα το 1453 και 1821, εποχές της άλωσης και του αγώνα αντίστοιχα, η διάδοση των σκέψεων και των εννοιών και η κατάσταση στα θέματα της παιδείας στην διαδοχή των αιώνων, πέρασε από τέτοιες και τόσες αλλαγές και από πνευματικά στάδια τόσο διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε να αποτελεί αναγκαιότητα η μελέτη των πραγμάτων της παιδείας στα επιμέρους χρονικά διαστήματα των οποίων τα όρια –συμβατά πάντα- η ίδια η παιδεία έθεσε με τη χροιά της.

•Τα 150 χρόνια περίπου που ακολούθησαν την άλωση τα οποία χαρακτηρίζονται από απελπιστική ακινησία στα θέματα της παιδείας, θα μπορούσαν να αποτελέσουν το πρώτο και πιο μελανό διάστημα, τον «Μεσαίωνα των ελληνικών γραμμάτων», μια περίοδο πνευματικής οπισθοδρόμησης, μια που μέσα σε αυτήν – με την άλωση- έλαβε χώρα το ναυάγιο των επιστημών και της προόδου.

•Η αργή, βασανιστική, αλλά οπωσδήποτε ανοδικά εξελικτική πορεία στα θέματα της παιδείας, η οποία την οδήγησε από την εμβρυώδη μορφή που είχε στα τέλη του 16^{ου} μέχρι την αισθητά βελτιωμένη εικόνα της στις πρώτες δεκαετίες του 18^{ου} αιώνα, οριοθετεί το επόμενο διάστημα το οποίο φτάνει μέχρι τα πρώτα

φεγγοβολήματα του νεοελληνικού Διαφωτισμού.

•Η περίοδος η οποία ακολουθεί φτάνει μέχρι τις παραμονές του Αγώνα. Πρόκειται για περίοδο ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, αφού «αγκαλιάζει» τη διάδοση και καρποφορία του νεοελληνικού Διαφωτισμού, και τις θεαματικές αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν στον ελληνικό πνευματικό χώρο με την εισαγωγή της διδασκαλίας των επιστημών. Είναι το τρίτο και τελευταίο χρονικό διάστημα, το οποίο χαρακτηρίζεται από την ιδιαίτερη χροιά της παιδείας που της προσδίδει η εξάπλωση των νέων ιδεών.

Σε στοιχειώδη μορφή, η παιδεία άρχισε να εμφανίζεται μέσα στα ελάχιστα κατώτερα σχολεία τα οποία λειτουργούσαν διάσπαρτα στον ελλαδικό χώρο και εξελίχθηκε -με απελπιστικά αργούς ρυθμούς αρχικά και σταδιακά ολοένα επιταχυνόμενους-, τόσο, ώστε στις αρχές του 18^{ου} αιώνα να είναι δυνατόν να μιλάμε για μια αισθητή παρουσία της στον ελληνικό χώρο, παρουσία, η οποία εκδηλώθηκε και με την σημαντική αύξηση του αριθμού των κατώτερων σχολείων αλλά και με την ίδρυση κάποιων ανώτερων σχολών.

Το χρονικό διάστημα το οποίο ακολουθεί, από τα μέσα του 18^{ου} αιώνα περίπου μέχρι την Επανάσταση, η περίοδος του ν.Δ., αποτελεί αδιαμφισβήτητα ένα χρονικό πλαίσιο, με ιδιαίτερες αναλαμπές και ριζικές αλλαγές στην πνευματική ζωή του τόπου, με την δική του, χαρακτηριστική σφραγίδα στα θέματα της παιδείας.

Με τους αιώνες που προηγήθηκαν, δεν είχε ακόμα δημιουργηθεί το κατάλληλο υπόστρωμα, το απαιτούμενο υπόβαθρο για μια αξιόλογη πνευματική αναπαραγωγή, γι' αυτό, η εισαγωγή και η διδασκαλία των επιστημών από τους σπουδασμένους λόγιους στη Δύση, προκάλεσε έκρηξη στα θέματα της παιδείας αποκλείοντας μια ομαλή εξέλιξη της από τον προηγούμενο αιώνα. Η έκρηξη αυτή προκάλεσε δραματικές αλλαγές στον πνευματικό χώρο οι οποίες αναδεικνύουν την ιδιαιτερότητα της περιόδου αυτής.

Ο έμπυχος φορέας των νέων επιστημών, είναι κυρίως οι λόγιοι οι σπουδασμένοι στη Δύση αλλά και σε άλλες παροικίες του Ελληνισμού της διασποράς, που, αν και είχαν τη θέληση να αναλάβουν το έργο της διάδοσης των νέων ιδεών, στις περισσότερες περιπτώσεις, δεν είχαν τις υλικές δυνατότητες να την στηρίξουν. Όμως οι ιστορικές συγκυρίες ήταν ευνοϊκές για το έργο τους. Η περίοδος μετακένωσης των γνώσεων από τη φωτισμένη Ευρώπη χρονικά «συμβαδίζει» με τη συνθήκη του «Κιουτσούκ Καϊναρτζή»¹¹⁹ και όλα τα ευνοϊκά επακόλουθα της για τον ελληνισμό.

Οι νέες δημιουργούμενες οικονομικοκοινωνικές συνθήκες από την ανάπτυξη της αστικής τάξης, μιας τάξης εμπόρων, είχαν καθοριστική σημασία για τις θεαματικές αλλαγές στο χώρο της παιδείας.

Από τις συχνές επαφές τους με τη Δύση, οι έμποροι, συνειδητοποίησαν την τεράστια πνευματική απόσταση η οποία χώριζε την γενέθλια γη τους από τη φωτισμένη Ευρώπη, αντιλήφθηκαν τη σημασία προαγωγής και διάδοσης των γραμμάτων στα ευρύτερα στρώματα, και στη συνέχεια – μια που είχαν και τις υλικές δυνατότητες – αποφάσισαν να στηρίζουν τη διάδοση αυτή.

¹¹⁹ Με τη συνθήκη του Κιουτσούκ Καϊναρτζή. (1774), η Ρωσία εξασφαλίζει από την Πύλη την προστασία των ορθόδοξων υπηκόων της Οθωμανικής αυτοκρατορίας και την άδεια να ταξιδεύουν οι Έλληνες με ρωσική σημαία.

Η μελέτη την οποία θα επιχειρήσουμε περιορίζεται κυρίως στο τρίτο από τα παραπάνω αναφερόμενα διαστήματα, αφού η διδασκαλία και κατ' επέκταση η διάδοση των επιστημών την περίοδο η οποία προηγήθηκε του ν.Δ., ουσιαστικά είναι ανύπαρκτη.

Συγκεκριμένα, το μετά την άλωση διάστημα και μέχρι περίπου τα μέσα του 18^{ου} αιώνα, το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης έφθανε μέχρι να καλύπτει τις ανάγκες της καθημερινής ζωής.

Τα μαθηματικά κείμενα, χειρόγραφα ή έντυπα, εξυπηρετούσαν πρωτοβάθμιες ανάγκες της παιδείας και περιείχαν γενικά τις τέσσερις πρώτες πράξεις της αριθμητικής με ακεραίους και κλασματικούς, την απλή και σύνθετη μέθοδο των τριών και τη μέθοδο των τόκων στην Αριθμητική. Ακόμα και το 1814 ο Νεόφυτος Δούκας¹²⁰ θα διατυπώσει την άποψη ότι οι δάσκαλοι «πρέπει να διδάσκωσι τα τέσσερα απλά είδη της αριθμητικής».

Στις ανώτερες σχολές οι οποίες λειτουργούσαν την αντίστοιχη περίοδο το πρόγραμμα σπουδών χαρακτηρίζεται από παντελή έλλειψη διδασκαλίας των μαθηματικών. Στην Πατριαρχική σχολή της Κωνσταντινούπολης, στις σχολές του Επιφανείου και του Γκιούμα στα Ιωάννινα, στην Ηγεμονική Σχολή της Μολδαβίας, στη σχολή της Πάτμου (η οποία είχε μεταβληθεί σε γραμματικό προπύργιο από τον Μακάριο τον Πάτμιο¹²¹), είναι μεγάλη η έκταση που έχει πάρει η διδασκαλία της γραμματικής καθώς και η μελέτη και ερμηνεία πολλών κλασικών και Χριστιανών συγγραφέων. Το διδακτικό περιεχόμενο του ανώτερου κύκλου σπουδών την περίοδο αυτή, χαρακτήριζε και καθόριζε η προσήλωση στον Αριστοτελισμό και η διδασκαλία των αριστοτελικών κειμένων.

Μεθοδολογικά η παρούσα εργασία διαρθρώνεται σε πέντε κεφάλαια. Συγκεκριμένα:

1) Στο πρώτο κεφάλαιο:

Περιγράφουμε το ιστορικοκοινωνικό πλαίσιο – το περιβάλλον ανάπτυξης των επιστημών, δηλαδή σκιαγραφούμε το πνευματικό κλίμα στον τουρκοκρατούμενο ελλαδικό χώρο κατά την περίοδο που προηγήθηκε ή και εξαπλώθηκε ο ν.Δ., και παράλληλα, παρουσιάζουμε πολύ σύντομα τα γεγονότα σχετικά με τις επιστήμες στη Δύση την αντίστοιχη χρονική περίοδο. Η ευρωπαϊκή επιστημονική σκέψη επέδρασε σημαντικά στην διαμόρφωση της σκέψης των Ελλήνων διαφωτιστών και καθόρισε την «στάση» τους στην πνευματική εκείνη κίνηση που προηγήθηκε ένα περίπου αιώνα και προετοίμασε τον μεγάλο αγώνα.

Τις επιδράσεις τις οποίες δέχτηκαν οι λόγιοι του έθνους από το επιστημονικό κλίμα της «φωτισμένης Ευρώπης» και τις γνώσεις που απέκτησαν με τη φοίτησή τους

¹²⁰ Ο Νεόφυτος Δούκας (1760-1845) ήταν λόγιος της συντηρητικής διδασκαλικής παράδοσης, δάσκαλος των «γραμματικών» με μόρφωση λίγη και στενά παραδοσιακή. Υπήρξε ο σοβαρότερος αντιπαλος του Κοραή στο γλωσσικό ζήτημα μια που ο ίδιος ήταν ένθερμος υποστηρικτής της αρχαϊζουσας. Μέλος της Φιλικής Εταιρείας, ανέλαβε την ζωή του, τόσο στην διδασκαλία φιλολογικών μαθημάτων όσο και στην έκδοση έργων πολλών αρχαίων συγγραφέων.

¹²¹ Ο Μακάριος, δίδασκει στην Σχολή της Πάτμου για εικοσιτέσσερα χρόνια -από την ίδρυσή της το 1713 μέχρι το θάνατό του το 1737-, γραμματικά, φιλοσοφικά, ρητορικά, εκκλησιαστική μουσική, λατινικά και ερμήνευε Έλληνες συγγραφείς και ποιητές καθώς και τους πατέρες της Εκκλησίας.

στα εκεί ανώτατα πνευματικά ιδρύματα, μεταλαμπάδευσαν –μετά την επιστροφή τους– με την διδασκαλία τους και στην υποδουλωμένη πατρίδα τους.

Θεωρείται αναγκαίο να δώσουμε το περίγραμμα της παιδείας και τη σκιαγράφηση του πνευματικού κλίματος στον Ελλαδικό χώρο την περίοδο που προηγείται του ν.Δ. ώστε να μπορέσουμε να αναδείξουμε το μέγεθος της προσπάθειας των δασκάλων του Γένους για να καλλιεργήσουν ένα καθαρά επιστημονικό πνεύμα και τον αγώνα τους για τη μόρφωση του λαού.

Ακόμα θα είναι δυνατόν να εκτιμήσουμε καλύτερα το μέγεθος της προσφοράς των δασκάλων οι οποίοι διδάζαν τις επιστήμες, προσφορά ανεκτίμητη, γιατί η διδασκαλία τους για την πνευματική αφύπνιση του Γένους, έγινε επίμονος και επίμοχθος αγώνας και αιτία δεν ήταν μόνο τα εμπόδια –όπως πενία, έλλειψη βιβλίων και σχολικών χώρων – συνέπειες του Οθωμανικού ζυγού – αλλά και οι μεγάλες αντιδράσεις που συνάντησαν από εκείνους που ρυθμίζαν τα πράγματα της παιδείας την περίοδο αυτή.

Η παιδεία στον οσμανοκρατούμενο κόσμο αναπτύσσεται κυρίως μέσα στους κόλπους της Εκκλησίας και περιορίζεται στην διδασκαλία της γραφής, της ανάγνωσης, της γραμματικής, της ερμηνείας των θεολογικών κειμένων, στην ενασχόληση γενικότερα με ιστορικά εκκλησιαστικά κείμενα.

Η απόφαση της Ιεράς Συνόδου που είχε συνέλθει στην Κωνσταντινούπολη το 1593 σύμφωνα με την οποία ο οικουμενικός Πατριάρχης Ιερεμίας παροτρύνει τους μητροπολίτες να ιδρύσουν σχολεία στις επαρχίες τους στα οποία να διδάσκονται με δαπάνη της εκκλησίας «τα θεία και ιερά γράμματα», καθορίζει και επίσημα τη χροιά της παιδείας.

Κατά την προηγούμενη περίοδο του ν.Δ. η παιδεία, περιορίζεται κυρίως στην Φυλλάδα, το Οχτώχι, το Ψαλτήρι και τον Απόστολο και οι βαρύτατες ποινές που επιβάλλονταν στους μαθητές (ραβδισμοί, μαστιγώσεις, φάλαγγες) ανάγκαζαν αρκετούς από αυτούς να εγκαταλείπουν και αυτές ακόμα τις στοιχειώδεις σπουδές τους.

Η περιγραφή του Ελληνικού πνευματικού χώρου, κρίθηκε για έναν ακόμα λόγο αναγκαία. γιατί παρακολουθήσαμε τις αλλαγές που επέφεραν διαδοχικά στο πνευματικό κλίμα της εποχής η καλλιέργεια (η διδασκαλία) των επιστημών και διερευνήσαμε τις επιπτώσεις και τις προοπτικές που διανοίχθηκαν στους τομείς της κοινωνικοοικονομικής ζωής.

Ακόμα μελετήσαμε την συμβολή των νεωτερικών γνώσεων και θεωριών στην εξέλιξη του παιδευτικού έργου, στην διαμόρφωση της σκέψης γενικότερα, στον ίδιο πάντα χώρο και χρόνο.

Στο πλαίσιο αυτό επιχειρήσαμε να εντοπίσουμε τους τομείς της τεχνικής στους οποίους χρησιμοποιούνται τα πορίσματα των επιστημών και τις επιφερόμενες αλλαγές τόσο στην οργάνωση και στην λειτουργία της παραγωγής, των μεταφορών και του εμπορίου όσο και γενικότερα στη ζωή των ανθρώπων και των κοινωνιών.

Μέσα από τη μελέτη μας, διαπιστώσαμε, ότι οι εκφραστές των νέων ιδεών καλλιέργησαν στο λαό την συνείδηση ότι είναι κληρονόμοι μέγιστου πολιτισμού, ώστε να ξαναγεννηθεί γι αυτούς το χαμένο αίσθημα της ιστορικής τους συνέχειας, αίσθημα καθοριστικής σημασίας και για την εθνική τους επιβίωση και για την πίστη τους ότι οφείλουν να δημιουργήσουν έργα τα οποία να εναρμονίζονται με την ιστορική τους παράδοση, κάτι που θα ήταν εφικτό μόνο μέσα σε μια πατρίδα ελεύθερη, πίστη, που τους οδήγησε τελικά στον μεγάλο ξεσηκωμό.

2) Στο δεύτερο, τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο:

Μελετήσαμε, επεξεργαστήκαμε και αναλύσαμε σε βάθος τρία από τα έντυπα μαθηματικά έργα τα οποία έχουν διασωθεί μέχρι σήμερα, με αφιετηρία την «*Λογαριαστική*» του Εμμανουήλ Γλυζώνιου, στην συνέχεια την «*Οδό Μαθηματική*» του Μεθόδιου Ανθρακίτη –πρόδρομου της διδασκαλίας των μαθηματικών- , καταλήγοντας στο έργο του Νικηφόρου Θεοτόκη, «*Στοιχεία Μαθηματικών, εκ παλαιών και νεωτέρων συνειραγισθέντων*».

Η επιλογή των κειμένων τα οποία αναλύσαμε δεν έγινε αυθαίρετα. Επίσης, δεν έγινε επειδή θεωρούμε τους εν λόγω διανοητές ως τους σημαντικότερους στην επιστήμη σε σχέση με πολλούς άλλους της εποχής τους.

Η επιλογή την οποία προτείναμε επέχει θέση «παραδείγματος». Οι προαναφερθέντες στοχαστές συνιστούν αντιπροσωπευτικό δείγμα του τρόπου με τον οποίο εμπεδώνεται το νέο σύστημα γνώσης στον οσμνοκρατούμενο κόσμο. Στη ζωή και το έργο τους μπορεί κανείς να διακρίνει τις κοινωνικοπολιτικές και ιδεολογικές διαφοροποιήσεις, τις διαφορετικές κληρονομίες και κληροδοτήσεις τους, τις διαφορετικές αναφορές και στοχοθετήσεις, που αναδεικνύονται στην παρακολούθηση της πορείας του καθενός χωριστά.

Τα κείμενα αυτά τα μελετήσαμε και τα παρουσιάσαμε κατά χρονολογική σειρά για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε το επίπεδο των έργων τα οποία εμφανίστηκαν αρχικά με εκείνο των έργων που διαδοχικά ακολούθησαν.

Με τον τρόπο αυτό καταγράψαμε ποιες έννοιες και μαθηματικές προτάσεις προηγήθηκαν και πόσες ακολούθησαν ή συμπληρώθηκαν στα μαθηματικά κείμενα τα οποία αργότερα εμφανίστηκαν, και, όπου ήταν δυνατόν σχολίασαμε την αλληλουχία των εννοιών και των προτάσεων αυτών, πάντα σε σχέση με την ιδιαιτερότητα της εποχής και του πνευματικού ελληνικού περιγυρου που οι εξαιρετικά δύσκολες συνθήκες επέβαλλαν.

Εκείνο το οποίο θεωρείται απαραίτητο να τονίσουμε, είναι ότι δεν αξιολογήσαμε το τι πρόσφερε ο καθένας από τους παραπάνω στοχαστές σε σχέση με τον προηγούμενό του ή τον σύγχρονό του, γιατί κρίναμε, ότι μία τέτοια αξιολόγηση, υποβαθμίζει το μέγεθος της προσφοράς τους και κατατάσσει τους λόγιους σε σημαντικούς και λιγότερο σημαντικούς, διάκριση, η οποία θα είχε ως αποτέλεσμα, να παραγνωρίζεται η τεράστια συμβολή τους στο παιδευτικό έργο και να μας απομακρύνει από το στόχο μας: την μελέτη και αξιολόγηση της συλλογικής τους προσφοράς.

Ακόμα δεν συγκρίναμε τα έργα τους με στόχο να τα αξιολογήσουμε μεταξύ τους . Μία τέτοια σύγκριση είναι αδύνατη. Το έργο του καθενός γράφτηκε και διδάχτηκε κάτω από ιδιαίτερες συνθήκες και η μόνο η διαχείριση, η αντιμετώπιση του έργου τους ως ενιαίου σώματος (corpus), μπορεί να αναδείξει τη θέση και το ρόλο των νεωτερικών συστημάτων γνώσης - της επιστήμης και ειδικότερα των μαθηματικών – στο χώρο της παιδείας κατά την περίοδο του νεοελληνικού Διαφωτισμού.

Δηλαδή μελετήσαμε την εξελικτική πορεία της διδασκαλίας των Μαθηματικών από την περίοδο της εισαγωγής τους στα σχολεία εκείνης της εποχής, μέχρι και τις παραμονές του Αγώνα και βγάλαμε τα συμπεράσματά μας για την επιστημονική τους βαρύτητα αφού φυσικά τα εντάξαμε στο πλαίσιο της χρονικής περιόδου που αναφερόμαστε.

Ειδικότερα, προσπαθήσαμε να εντοπίσουμε και στη συνέχεια να συγκεντρώσουμε από τη γενικότερη εικόνα του πνευματικού κλίματος, εκείνα τα στοιχεία των παιδευτικών πραγμάτων που σχετίζονται με το θέμα μας, και να αξιολογήσουμε την

συμβολή τους, -θετική ή αρνητική- στην διάδοση των επιστημών.

Τέλος καταγράψαμε το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης στον ελλαδικό χώρο τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο, το αξιολογήσαμε, -πάντα σε σχέση με την εποχή του και με τις ιδιαίτερες συνθήκες που αναπτύχθηκε- και θα αναφερθήκαμε, -όσο αυτό είναι δυνατόν-, στις πηγές του και στις επιρροές τις οποίες δέχτηκε από τη Δυτική επιστημονική σκέψη.

Μέσα από τη μελέτη μας, αναδεικνύεται το μέγεθος συνεισφοράς των δασκάλων των επιστημών στην καλλιέργεια του επιστημονικού πνεύματος και κατά συνέπεια στην καταπολέμηση της δεισιδαιμονίας και στην καλύτερηση των συνθηκών ζωής των υποδούλων.

Η επιστημονική προσφορά των φορέων του Διαφωτισμού που εντρύφησαν με τις επιστήμες, με οποιαδήποτε μορφή και αν εκφράζεται, αποκτά ιδιαίτερη σημασία αν λάβει κανείς υπ' όψιν του το επίπεδο των γνώσεων του ελληνισμού και των σχολείων της εποχής εκείνης.

Οι άνθρωποι οι οποίοι δίδαξαν την επιστήμη, ανεξάρτητα από τη συνείδηση την οποία οι ίδιοι είχαν για τις τεράστιες αλλαγές και καινοτομίες που εισάγονται στη ζωή των ανθρώπων, συνέβαλαν στον εκσυγχρονισμό της παιδείας αλλά και στον κοινωνικό εκσυγχρονισμό, καθώς η έρευνα, η παρατήρηση και το πείραμα κατέλαβαν σημαντική θέση στην τεχνική και παραγωγική δραστηριότητα.

Οι νέες προσφερόμενες από την επιστήμη γνώσεις εφαρμόστηκαν σε πολλούς τομείς (όπως ναυσιπλοΐα, μετεωρολογία) και συνετέλεσαν στην ανάπτυξη της οικονομίας και στην απαλλαγή των ανθρώπων από τις φοβίες που τους προκαλούσαν τα φυσικά φαινόμενα.

Οι τεχνικές γνώσεις και κατασκευές έγιναν απαραίτητα εργαλεία στους τομείς της παραγωγικής δραστηριότητας. Η εργασία έγινε λιγότερο δύσκολη και επώδυνη, τα ταξίδια διευκολύνθηκαν, η παραγωγή αυξήθηκε.

Βέβαια θα πρέπει να έχουμε αντίληψη του ιστορικού χρόνου για να καταλάβουμε ότι οι αλλαγές που επέφεραν οι νέες γνώσεις συντελέστηκαν σε αργούς ρυθμούς και συνοδεύτηκαν με αδράνειες και αντιστάσεις συχνά μεγαλύτερης διάρκειας από τη διάρκεια των νέων ιδεών.

Αυτό σημαίνει ότι οι αλλαγές στο επίπεδο της τεχνικής, οι αλλαγές στο χώρο της επιστήμης δεν παρεμβαίνουν άμεσα και με ευθύγραμμο τρόπο στην κοινωνική ζωή, στον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται και αντιλαμβάνονται τη ζωή τους και τον κόσμο οι άνθρωποι. Για το λόγο αυτό στις υποθέσεις μας και στα συμπεράσματά μας θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψη μας ότι άλλος είναι ο χρόνος εισαγωγής μιας επιστημονικής γνώσης και άλλος ο χρόνος της πρόσληψής της και της εξοικείωσής της από το ανθρώπινο υλικό.

3) Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάσαμε τα συμπεράσματα της έρευνας, σε όσα, η ιδιαιτερότητα της εποχής και οι διασωθείσες μαρτυρίες μας επέτρεψαν να καταλήξουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

(Η περιγραφή του ιστορικοκοινωνικού πλαισίου και η σκιαγράφηση του πνευματικού κλίματος στον υπόδουλο ελληνικό χώρο από την άλωση και μέχρι την ελληνική επανάσταση)

1) Η κατάσταση της παιδείας στα πρώτα 150 χρόνια μετά την άλωση της Κωνσταντινούπολης.

1.1.1) Η περίοδος 1453 έως 1530 περίπου.

Με την άλωση της Κωνσταντινούπολης, το 1453, ολοκληρώθηκε η τουρκική κατάκτηση της Ηπειρωτικής Ελλάδας. Όμως ο έλεγχος οι κατακτήσεις πολλών ελληνικών περιοχών από άτακτα τουρκικά στίφη και στη συνέχεια ο εποίκισμός τους από τους Τούρκους επιδρομείς, είχαν ήδη αρχίσει αρκετά χρόνια πριν την άλωση.

Πρώτη εποίκιστηκε η χερσόνησος της Καλλιπόλης στη Θράκη, αμέσως μετά την απόβαση των Τούρκων το 1354, και ακολούθησαν η Μακεδονία στο δεύτερο ήμισυ του 14^{ου} αιώνα, η Θεσσαλία μετά την εισβολή των Τούρκων το 1386, καθώς και ορισμένες περιοχές της νοτιοδυτικής Μακεδονίας στα τέλη του 14^{ου} αιώνα.¹²²

Οι συνεχείς επιδρομές των άτακτων τουρκικών στιφών και οι αγριότητες που τις συνόδευαν, (σφαγές, λεηλασίες, αιχμαλωσίες), είχαν ως άμεση συνέπεια, ένα μεγάλο μέρος του ελληνικού πληθυσμού να αναζητήσει μια ασφαλέστερη ζωή, είτε καταφεύγοντας σε περιοχές που από τη γεωγραφική τους θέση, τους παρείχαν άσυλο, όπως οι ορεινές και δυσπρόσιτες περιοχές, είτε μετοικώντας σε ελληνικές περιοχές που δεν είχαν ακόμα κατακτηθεί από τους Τούρκους, είτε ζητώντας άσυλο έξω από τα σύνορα της Οθωμανικής Αυτοκρατορίας.

Η φυγή πολλών Ελλήνων, από τις ανεξάρτητες ακόμα ελληνικές περιοχές πριν από τη τουρκική κατάκτηση, προς τις Βενετοκρατούμενες ελληνικές χώρες, τις χώρες της Ευρώπης και κυρίως τη Δύση, είχε αρχίσει από τα μέσα του 14^{ου} αιώνα όταν ο κίνδυνος για την πτώση της Κωνσταντινούπολης ήταν ορατός. Έτσι πολύ πριν αλλά κυρίως μετά την άλωση της Κωνσταντινούπολης οι περισσότεροι λόγιοι κατέφυγαν στη Δύση. «Αλλά η φυγή τοσούτων λογίων και ικανών ανδρών έβλαψε και την εκκλησίαν και αυτό το Γένος το δουλωθέν...»¹²³

Ανάμεσα στους φυγάδες εξέχοντες λόγιοι, όπως, οι Μανουήλ και Ιωάννης Χρυσολοράς, ο Βησσαρίων, ο Ιωάννης Αργυρόπουλος, ο Δημήτριος Χαλκοκονδύλης, ο Ανδρόνικος Κάλλιστος, ο Γεώργιος Τραπεζούντιος, ο Θεόδωρος Γαζής καλλιέργησαν τα ελληνικά γράμματα και συνετέλεσαν στην αναγέννηση της Δυτικής Ευρώπης. «Εκ των λογίων του έθνους οι μεν τας περιστάσεις φεύγοντες κατέφευγον εις μέρη απόκεντρα το λοιπόν του βίου μονάσοντας, οι δε εις Ιταλίαν, ής αι πύλαι των πόλεων φιλοξένως ηνοιγόντο τοις αθλίοις τούτοις φυγάσι τους θησαυρούς της αρχαίας σοφίας κομίζουσιν.»¹²⁴

Έτσι ο τουρκοκρατούμενος Ελληνισμός στερημένος από τον έμπυχο φορέα της παιδείας, καθώς οι λόγιοι που απομείναν στην Ανατολή και εκείνοι που επέστρεψαν από τη Δύση λίγο μετά την άλωση ήταν ελάχιστοι, αγωνίζεται ως αφετηρία την

¹²² Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, «Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία», (περίοδος 1453-1669), σελ. 68-69.

¹²³ Τρύφωνος Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}, Εν Αθήναις 1936, σελ. ΧΛΙ

¹²⁴ Ματθαίου Παρανίκα, «Σχεδιάσµα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ. 5.

προσπάθεια των δασκάλων αυτών- για την εκπαιδευτική του αφύπνιση και μόνο μετά από δύο αιώνες θα αρχίσει να διακρίνεται αμυδρά το αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειάς τους.¹²⁵

Οι ελάχιστες μεμονωμένες προσπάθειες κάποιου ταπεινού δασκάλου στους πρώιμους αυτούς χρόνους να διδάξει με αυτοσχέδιες παραδόσεις και μεθόδους σε κάποιο φτωχικό χώρο τους λιγοστούς μαθητές, σε όσους επέτρεπε ο σκληρός αγώνας για την βιολογική επιβίωση, και οι λιγοστοί Βυζαντινοί λόγιοι και περιοδεύοντες δάσκαλοι, οι οποίοι, κατά τη φράση του Κωνσταντίνου Κούμα «επαρωμοίαζαν αμυδρά και διψαλέα λυχνάρια, αραιότατα κείμενα μεταξύ παχυτάτου σκότους» αν και δεν ήταν ικανοί να ζωηρέψουν τον πνευματικό μαρασμό του ελληνισμού της κρίσιμης αυτής περιόδου, στάθηκαν ωστόσο «ικανοί να διατηρήσουν έστω και σε υποτυπώδη μορφή την παιδεία έτσι, ώστε ήρεμα και λίγο – λίγο να σχηματισθεί, με την πάροδο του χρόνου, μια αλυσίδα από λόγιους, η οποία οδήγησε το ελληνικό έθνος στην αναγέννηση των γραμμάτων των 17^{ου} και 18^{ου} αιώνων και μ' αυτήν στην εθνική αφύπνιση και ελευθερία.»¹²⁶

Συγκεκριμένα, μετά την άλωση, η παρουσία κάποιας πνευματικής ζωής υπήρχε μέχρι εκεί όπου έζησαν και οι τελευταίοι Βυζαντινοί λόγιοι που απέμειναν στην τουρκοκρατούμενη Ανατολή, δηλαδή, περίπου μέχρι το 1480.¹²⁷ Μερικοί από αυτούς είχαν αναπτύξει κάποια διδακτική δράση, επομένως στο πρώτο αυτό διάστημα σημειώθηκε μία υποτυπώδης πνευματική κίνηση η οποία οφείλονταν στις δραστηριότητες αυτών των λογίων.

Μαρτυρίες που έχουν διασωθεί για κατ' οίκον διδασκαλία ή για διδασκαλία σε μικρές ομάδες μαθητών από κάποιους λόγιους, υπογραμμίζουν τη συμβολή τους στην ζοφερότερη περίοδο της ιστορίας του ελληνισμού. Άλλες μαρτυρίες για την λειτουργία δύο- τριών σχολείων στις πρώτες δεκαετίες μετά την άλωση δείχνουν ότι παρατηρείται στον τουρκοκρατούμενο ελληνικό χώρο κάποια εκπαιδευτική κίνηση, λόγω της πνευματικής αδράνειας «μετά το ναυάγιον εν ακαρεί πάντων των αγαθών...»¹²⁸.

Πρόκειται για πνευματική κίνηση της οποίας η εμβέλεια φθίνει συνεχώς με αποτέλεσμα, η περίοδος που ακολουθεί, (1480-1530), να χαρακτηρίζεται από τους ιστορικούς ως η κρίσιμότερη περίοδος για την πνευματική συνοχή του ελληνισμού.

1.1.2) Η περίοδος 1480 έως 1530

Συγκεκριμένα ότι αφορά στην παιδεία, το διάστημα 1480-1530, χαρακτηρίζεται από απελπιστική ακινησία. Μετά την τελευταία γενιά των λογίων του Βυζαντίου, όσων απέμειναν στον ελλαδικό χώρο μετά την άλωση, έχουν εκλείψει όλοι εκείνοι οι οποίοι θα μπορούσαν να έχουν κάποια διδακτική δραστηριότητα. φωτεινή εξαίρεση αποτελεί ο λαμπρός λόγιος Μανουήλ ο Κορίνθιος στον οποίο σποραδικά μαθήτευσε ένας μικρός

¹²⁵ Βλέπε, Χ. Μπαμπούνης, «Η εκπαίδευση κατά την καποδιστριακή περίοδο. Διοικητική οργάνωση και εκπαιδευτική λειτουργία», εκδ. «Σ.ΩΒ.», Αθήνα 1999, σ. 220-223, 316-319.

¹²⁶ Νίκου Γ. Ζαχαρόπουλου, «Η παιδεία στην τουρκοκρατία», Εκδόσεις Πουρνάρα, Θεσσαλονίκη, 1944.

¹²⁷ Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, «Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία», (περίοδος 1453-1669),σελ. 368

¹²⁸ Ματθαίου Παπανίκα, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ.14.

αριθμός μαθητών.

Ακόμα, η τραγική οικονομική κατάσταση η οποία έχει οδηγήσει το ελληνικό έθνος σε συνθήκες εξαθλιωτικής διαβίωσης, δεν επέτρεπε στους ραγιάδες να ασχοληθούν με τίποτα άλλο πέρα από τον αγώνα τους για την επιβίωση, ενώ απαγόρευε κάθε σκέψη, η οποία θα μπορούσε να οδηγήσει αρχικά στη συνειδητοποίηση σχετικά με την έλλειψη κάθε κίνησης στο χώρο της παιδείας και στη συνέχεια σε οποιαδήποτε συντονισμένη προσπάθεια η οποία θα μπορούσε να βελτιώσει την υπάρχουσα κατάσταση.

Η περίοδος αυτή, στην οποία από τη υποδούλωση του Ελληνισμού στον Ασιάτη κατακτητή έχει αδρανήσει κάθε πνευματική δύναμη του έθνους, επιφέρει τον λήθαργο στην εθνική συνείδηση των ραγιάδων. «απέξω μαυροφόρ' απελπισιά πικρής σκλαβιάς χειροπιαστό σκοτάδι», είναι η περιγραφή που δίνει με τους στίχους του ο Ι. Πολέμης στο ποίημά του σχετικό για το θρύλο του «κρυφού σχολείου»,¹²⁹ θρύλος ο οποίος γεννήθηκε και πλανάται πάνω από αυτά τα πιο δύσκολα για τον ελληνισμό χρόνια.

Σχολεία

Η ζοφερή κατάσταση της περιόδου αυτής επιβεβαιώνεται και από τις πληροφορίες τις οποίες έχουμε για τα ελάχιστα και υποτυπωδώς οργανωμένα σχολεία που λειτουργούσαν στις τουρκοκρατούμενες ελληνικές περιοχές την περίοδο αυτή. «Μετά το νανάγιον... και τα γράμματα έπαθον τραύμα δεινόν. διο κατά τη πρώτην μετά την άλωσιν εκατονταετηρίδα (1453- 1553) μόλις ίχνη Σχολών και λογίων τινών ανδρών τη δε κακεισία των επαρχιών απαντώνμεν.... αλλά και τα εκσταχού παιδευτήρια ήσαν μικρά και ταπεινά, εν μεν ταις μεγαλοπόλεσι παρά ταις Επισκοπαίς, εν δε ταις μικραίς παρά τοις ναοίς, εσθ' ότε και παρά ταις παρακειμέναις Μοναίς, και ταύτα υπό ιερέων ή μοναχών διευθυνόμενα, χρωμένων ως επί το πολύ ταις εκκλησιαστικαίς βίβλοις.»¹³⁰

Τα μόνα αξιόλογα για την εποχή τους ελληνικά σχολεία την πρώτη εκατονταετηρίδα μετά την άλωση, λειτουργούσαν στην Ηπειρωτική Ελλάδα. Συγκεκριμένα, στα Ιωάννινα, η *Σχολή των Φιλανθρωπινών*, η οποία ονομαζόνταν «Φοιτητήριον» ή «Φροντιστήριον», ανώτερο ελληνικό σχολείο, το οποίο ιδρύθηκε πριν από την οθωμανική κατάκτηση της πόλης (το 1282) από τον Μιχαήλ Φιλανθρωπινό στην μονή του Αγίου Νικολάου του επονομαζόμενου Σπανού στο νησάκι της λίμνης των Ιωαννίνων, λειτούργησε από το 1292¹³¹ χωρίς διακοπή τουλάχιστον μέχρι το 1642¹³². Το κλείσιμο της Σχολής οφείλεται πιθανότατα στην ακμή και άλλων αξιόλογων ελληνικών σχολείων στην πόλη των Ιωαννίνων την περίοδο αυτή.

Από το «Φροντιστήριον», το οποίο διηύθυναν ικανοί δάσκαλοι κυρίως από την γενεά των Φιλανθρωπινών, «εξήλθον ικανοί άνδρες άξιοι λόγου»¹³³, με σημαντική δράση στην πόλη των Ιωαννίνων κατά το 16^ο αιώνα. Οι ελάχιστοι μαθητές οι οποίοι φοιτούσαν στη σχολή, -το πολύ μέχρι δέκα-¹³⁴, ανήκαν όλοι στον ιερατικό κλάδο και διδάσκονταν κυρίως αρχαίους Έλληνες συγγραφείς, έργα των Πατέρων της Εκκλησίας και μαθήματα

¹²⁹ Βλέπε, Άλκης Αγγέλου, «Το κρυφό σχολείο», Χρονικό ενός μύθου, εκδόσεις Εστία, Αθήνα 1997.

¹³⁰ Ματθαίου Παρανίκα, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ. 14.

¹³¹ Τρύφωνος Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}, Εν Αθήναις 1936, σελ. 152

¹³² Σ. Π. Λάμπρου, Νέος Ελληνισμός, τόμος 13^{ος}, σελ. 280.

¹³³ Ματθαίου Παρανίκα, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ. 62

¹³⁴ Κων/νος Χατζόπουλος, «Ελληνικά σχολεία στην περίοδο της Οθωμανικής κυριαρχίας», (1453-1821), σελ. 46

θεολογίας: «οι φοιτώντες εις την μοναστικήν εκείνην σχολήν είπερ τινές εδιδάσκοντο να συνδιάζωσι τον νέον ελληνισμόν προς τον αρχαίον»¹³⁵

Στα Ιωάννινα, παράλληλα με την Σχολή των Φιλανθρωπινών, λειτουργούσε από τα μέσα του 15^{ου} αιώνα και δεύτερη Σχολή¹³⁶ εις την Μονή του Στρατηγόπουλου, η Σχολή του Στρατηγόπουλου, η οποία άκμασε κυρίως κατά τον 16^ο αιώνα¹³⁷ και έφτασε να λειτουργεί πιθανότατα μέχρι το 1612 δηλαδή μέχρι την επανάσταση του Σκυλοσόφου.¹³⁸ Στην Σχολή φοιτούσαν ελάχιστοι μαθητές, στη πλειοψηφία τους μοναχοί, οι οποίοι πιθανότατα διδάσκονταν μαθήματα ανάλογα με εκείνα της σχολής των Φιλανθρωπινών.¹³⁹

Σύμφωνα με κάποιες μαρτυρίες, στο φρούριο των Ιωαννίνων λειτουργούσε πριν από την οθωμανική κατάκτηση της πόλης, η «Σχολή των Δεσποτών» της Ηπείρου, η οποία συνέχισε την λειτουργία της κατά τον Σπυρίδωνα Λάμπρο μέχρι την κατάπνιξη της επανάστασης του Σκυλοσόφου το 1612, ενώ κατά τον Ματθαίο Παρανίκα και μετά από αυτήν, το οποίο είναι και πιθανότερο, διαφορετικά δεν εξηγείται η παρουσία πολλών λογίων στα Ιωάννινα κατά τον 17^ο αιώνα.¹⁴⁰

Μέχρι το 1540 δεν υπάρχουν άλλες πληροφορίες για λειτουργία κάποιου σχολείου παρ' όλο που κάποιοι μελετητές πιστεύουν – σύμφωνα με την παράδοση- ότι η Πατριαρχική Σχολή ιδρύθηκε στα 1455 από τον πρώτο μετά την άλωση Πατριάρχη Γεννάδιο Σχολάριο, και λειτούργησε με σχολάρχη τον Ματθαίο Καμαριώτη.

Ο Μ. Παρανίκας¹⁴¹, αναφέρει. «Μετά το ναύαγιον εν ακαρεί πάντων ως ειπεν των αγαθών μόλις εν Κωνσταντινουπόλει μικρόν τι ζώπυρον παιδείας εν τη Πατριαρχική καλουμένη Σχολή περιεσώθηΤης γεραράς ταύτης Σχολής,έχομεν σειράν των Σχολαρχών απ' αυτής έτι της αλώσεως μέχρις εσχάτων...Επί της αλώσεως Σχολάρχης αναφέρεται Ματθαίος ο Καμαριώτης, Θεσσαλονικεύς, υπό Γενναδίου του Σχολαρίου εγκαταστάς ευθύς μετά την άλωσιν, ...Τούτον δε ληγούσης της ιε' εκατονταετηρίδοςδιεδέξατο ο ευδοκίμοτερος αυτού μαθητής Μανουήλ Κορίνθιος...».

Ο Τρύφωνας Ευαγγελίδης γράφει. «Η επί των Βυζαντινών *οικουμενική σχολή*, μετά τας πρώτας της αλώσεως επελθούσας συμφοράς, ανασυνέστη ως *πνευματικόν φροντιστήριον* του Γένους υπό τον διδάσκαλον Ματθαίον Καμαριώτην, όστις προσλαβών και άλλους διδασκάλους εξηκολούθησε την διδασκαλίαν των μαθημάτων εν τη κατόπιν μετονομασθείση *Μεγάλη Σχολή του Γένους*.Ωστε η Μεγάλη αυτή του Γένους Σχολή είναι η πρώτη μετά την άλωσιν.....»¹⁴²

Όμως καμία σαφής μαρτυρία δεν υπάρχει για τη συστηματική λειτουργία σχολείου στην Κωνσταντινούπολη κατά τον πρώτο μετά την άλωση αιώνα.¹⁴³ «Σιγίλια μεν αυτής (της Σχολής) ουκ εσώθησαν, ειμή το μετά την κατάργησιν της Σχολής και αύθις κατά το

¹³⁵ Σ. Π. Λάμπρου, Νέος Ελληνομνήμων, τόμος 13^{ος}, σελ 280

¹³⁶ Ηπειρωτικά Χρονικά, δ. Σ. Μπαλάνου, «Οι Μπαλάνοι διδάσκαλοι του Γένους», σελ. 16.

¹³⁷ Παναγιώτου Κ. Χρήστου, Ανθρακίτης Μεθόδιος, Έκδοσις Ηπειρωτικής Εστίας, Ιωάννινα-1953, σελ 15

¹³⁸ Ηπειρωτικά Χρονικά, δ. Σ. Μπαλάνου, «Οι Μπαλάνοι διδάσκαλοι του Γένους», σελ. 16

¹³⁹ Ματθαίου Παρανίκα, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ 47.

¹⁴⁰ Παναγιώτου Κ. Χρήστου, Ανθρακίτης Μεθόδιος, Έκδοσις Ηπειρωτικής Εστίας, Ιωάννινα-1953, σελ 15

¹⁴¹ Ματθαίου Παρανίκα, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ.14.

¹⁴² Τρύφωνος Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}, Εν Αθήναις 1936, σελ. 2

¹⁴³ Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, «Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία», (περίοδος 1453-1669),σελ. 372

1691 έτος»¹⁴⁴

Είναι πιθανόν να λειτουργήσει μέσα στο Πατριαρχείο κάποιο σχολείο κατά διαστήματα αμέσως μετά την άλωση, από το 1454, με ελάχιστους μαθητές και με υποτυπώδη οργάνωση, το οποίο ίσως κάποιοι μελετητές να το θεωρούν ως τον πρόδρομο της Μεγάλης του Γένους Σχολής. Είναι ακόμα γνωστό ότι στην Κωνσταντινούπολη κατά καιρούς δίδαξαν σε μικρό κύκλο μαθητών, οι λαμπροί λόγιοι, Ματθαίος Καμαριώτης, Μανουήλ Κορίνθιος, Αντώνιος Καραμαλίκης, Θεοφάνης Ελεαβούκος κ. ά.

Η Πατριαρχική Σχολή, ιδρύθηκε στα 1556, από τον οικουμενικό Πατριάρχη Ιωάσαφ τον Μεγαλοπρεπή ο οποίος προσκαλεί από το Ναύπλιο τον Ι. Ζυγομαλά, «Μαθημάτων ένεκα ίνα μεταδώ ταύτα. ουδείς γαρ ήν σχεδόν τότε ο διδάσκων γράμματα...», όπως γράφει σε επιστολή του το 1581 ο γιος του Θεοδόσιος.¹⁴⁵ Η Σχολή λειτουργήσει με πρώτο σχολάρχη τον επιφανή αυτό λόγιο, ο οποίος δίδασκε για πολλά χρόνια «την ελληνική φωνή και τέχνη εις τους μαθητάς», και τον οποίο στη συνέχεια διαδέχτηκε στη σχολαρχία ο γιος του Θεοδόσιος.

Μερικές δεκαετίες αργότερα, ο Πατριάρχης Ιερεμίας ο Β, (1572-1595), με συστηματικές προσπάθειες κατάφερε να ανασυστήσει τη Σχολή που έμελλε να εξελιχθεί σε ένα από τα λαμπρότερα εκπαιδευτικά ιδρύματα του ελληνισμού την περίοδο της οθωμανικής κυριαρχίας.

Μέχρι το 1540 όταν αρχίζει να παρατηρείται κάποια κινητικότητα στον πνευματικό ορίζοντα του ελληνισμού, οι λιγοστοί νέοι οι οποίοι είχαν την δυνατότητα να αποκτήσουν κάποια μόρφωση, μαθήτευαν κοντά σε δασκάλους ή φοιτούσαν σε σχολεία των Ενετοκρατούμενων ελληνικών χωρών.¹⁴⁶

Η Μονεμβασία, (Βενετοκρατούμενη μέχρι το 1540), η Ναύπακτος, (μέχρι το 1499), η Μεθώνη και η Κορώνη, (μέχρι το 1500), το Ναύπλιο, (μέχρι το 1540), η Κέρκυρα, η Ζάκυνθος, η Κρήτη (μέχρι το 1669), έδωσαν στην τότε ελληνική κοινωνία πολλούς και αξιόλογους λόγιους, με πολύ σημαντική προσφορά στην πνευματική ανόρθωση του Γένους.

Συγκεκριμένα, την περίοδο αυτή, εκτός από κάποιο σχολείο που λειτουργούσε στο Ναύπλιο(1522-1524)¹⁴⁷, δεν υπάρχουν πληροφορίες για λειτουργία κάποιου αξιόλογου ελληνικού σχολείου στις υπόλοιπες Βενετοκρατούμενες περιοχές, κάτι που φανερώνει ότι η συστηματική λειτουργία οργανωμένων σχολείων απουσιάζει, αλλά η διδασκαλία γινόταν από λόγιους, οι οποίοι, μεμονωμένα, συγκέντρωναν γύρω τους ένα μικρό αριθμό μαθητών και τους παρέδιδαν μαθήματα φιλοσοφικού κυρίως χαρακτήρα.

Στο Ναύπλιο, στο σχολείο που ήδη αναφέραμε, δίδασκε ο Αντώνιος Καραμαλίκης και ο Σταυράκιος Μαλαζός, ενώ γύρω στα 1500,στη Ναύπακτο, ο γνωστός κωδικογράφος Ανδρέας Αρνής.

Στην Βενετοκρατούμενη Κρήτη από τα μέσα του 15^{ου} έως τα τέλη του 16^{ου} αιώνα,

¹⁴⁴ Το παράθεμα από το έργο του Ματθαίου Παρανίκια, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ.15.

¹⁴⁵ Τρύφωνος Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}. Εν Αθήναις 1936, σελ. 6

¹⁴⁶ Το παράθεμα από το έργο του Ματθαίου Παρανίκια, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ 371.

¹⁴⁷ Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, «Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία», (περίοδος 1453-1669), σελ 371

ο Μιχαήλ Αποστόλης ανέπτυξε σημαντική εκπαιδευτική δράση και το έργο του συνέχισε ο γιος του, ο λόγιος Αρσένιος Αποστόλης, στη Μονεμβασία, ο οποίος με τη διδασκαλία του ανέδειξε αξιόλογους μαθητές. Οι επιφανείς λόγιοι Μάρκος Μουσούρος, Ιωάννης Ζυγομαλάς, Νικόλαος Μαλαξός, Γεώργιος Κορίνθιος, Φραγκίσκος Πόρτος, Ιωάννης Γρηγορόπουλος, κ. ά., ήταν μαθητές του Αρσένιου.

1.1.3) Η περίοδος 1530- 1600

Ανώτερα σχολεία

Λίγο μετά τα μέσα του 16^{ου} αιώνα, (από το 1530), μαρτυρίες για τη λειτουργία κάποιων ελληνικών σχολείων στις τουρκοκρατούμενες περιοχές, δείχνουν την απαρχή κάποιας πνευματικής κίνησης.

Στην Κωνσταντινούπολη, όπως ήδη αναφέραμε, το έτος 1556, ο Πατριάρχης Ιωάσαφ ο Μεγαλοπρεπής, ιδρύει το πατριαρχικό σχολείο, με σχολάρχη τον Ιωάννη Ζυγομαλά. Στην αρχή της λειτουργίας της η Σχολή στεγάστηκε μέσα στο Πατριαρχείο και οι μαθητές που φοιτούσαν σε αυτήν δεν ξεπερνούσαν τους δεκαπέντε.

Οι συστηματικές προσπάθειες, όχι μόνον του Ιωάσαφ αλλά και των διαδόχων του στον πατριαρχικό θρόνο, για την άρτια οργάνωση και λειτουργία της Σχολής, σε συνδυασμό με την σχολαρχία και τη διδασκαλία επιφανών λογίων, κατέστησαν το πατριαρχικό σχολείο, το οποίο μετονομάστηκε «Μεγάλη του Γένους Σχολή», σε ένα από τα σημαντικότερα εκπαιδευτικά ιδρύματα του ελληνισμού.

Από την ίδρυση της Σχολής μέχρι τα τέλη του 16^{ου} αιώνα, τον πρώτο σχολάρχη, τον αξιόλογο λόγιο Ιωάννη Ζυγομαλά ο οποίος διδασκε μέχρι το θάνατό του το 1580, ακολούθησε στη σχολαρχία ο γιος του και μαθητής του στη Σχολή, Θεοδόσιος, ενώ παράλληλα μέσα στις δύο τελευταίες δεκαετίες του 16^{ου} αιώνα διδασκαν κατά διαστήματα στη Σχολή δύο ακόμα σημαντικοί λόγιοι, οι Συμεών Καβάσιλας και Γεώργιος Αιτωλός.¹⁴⁸

Αξιόλογες προσπάθειες για την αναβάθμιση του πατριαρχικού σχολείου έγιναν και από τον λαμπρό και φιλόμουσο Πατριάρχη Ιερεμία το Β΄. Στο διάστημα της εξορίας του στην Ρόδο, (1584- 1587), πιθανότατα τα έτη 1585 και 1586, τη σχολαρχία του πατριαρχικού σχολείου, ανέλαβε ο επιφανής λόγιος Συμεών Καβάσιλας.¹⁴⁹

Στα τέλη του 16^{ου} αιώνα η Σχολή βρίσκεται σε βαθιά κρίση. Μόνο το 1604 έχουμε πληροφορίες για την επαναλειτουργία της. Συγκεκριμένα, ο Πατριάρχης Ραφαήλ ο Β΄, ανέθεσε στον φιλοκαθολικό Ναζιώτη λόγιο Φραγκίσκο Κόκκο, απόφοιτο του Ελληνικού Κολεγίου της Ρώμης, την διεύθυνση της σχολής,¹⁵⁰ την οποία πιθανότατα διατήρησε μέχρι το θάνατό του, περίπου το 1608.¹⁵¹

Το Πατριαρχικό Σχολείο επαναλειτούργησε το έτος 1626,¹⁵² με σχολάρχη τον

¹⁴⁸ Γ. Γριτσόπουλος, «Πατριαρχική Μεγάλη του Γένους Σχολή», τόμος Β΄, Εν Αθήναις 1966, σελ. 19.

¹⁴⁹ Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, «Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία», (περίοδος 1453-1669), σελ. 373

¹⁵⁰ Ματθαίου Παρανίκα, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ. 19.

¹⁵¹ Κων/νος Χατζόπουλος, «Ελληνικά σχολεία στην περίοδο της Οθωμανικής κυριαρχίας», (1453-1821), σελ. 64

¹⁵² Ματθαίου Παρανίκα, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ. 19.

σημαντικότερο Έλληνα λόγιο του 17^{ου} αιώνα, τον Θεόφιλο Κορυδαλλέα, τον οποίο προσκάλεσε από την Αθήνα ο φωτισμένος Πατριάρχης Κύριλλος Λούκαρης και του ανέθεσε την διεύθυνση της Σχολής.

Στη *Μυτιλήνη*, ο αξιόλογος λόγιος μοναχός Παχώμιος Ρουσάνος (1509-1553), δίδαξε γύρω στο 1545, για μια διετία περίπου σε σχολείο στη μονή Λειμώνος και σύμφωνα με τον ίδιο, «...καθ' ημέραν και ώραν και, ίν ούτως είπω αδιαλείπτως ήμην παραδιδούς αυτοίς τα εις ωφέλειαν ψυχικήν μάλλον συντείνοντα λόγια»

Στην *Μυτιλήνη* την ίδια χρονική περίοδο, λειτουργούσε σχολείο, στο οποίο φοιτούσαν οι καλόγριες της μονής Μυρσινιώτισσας.¹⁵³

Στην *Ανδριανούπολη*, το 1555, λειτουργεί σχολείο του οποίου την διεύθυνση ανέλαβε ο εξαιρετος λόγιος Ιωάννης Ζυγομαλάς, μετά από πρόσκληση του τότε Μητροπολίτη Ανδριανούπολης και μετέπειτα Πατριάρχη Ιωάσαφ.

Στη *Χίο*, ο γιατρός Μιχαήλ Ερμόδωρος Λήσταρχος ο οποίος μετά την θερμή υποδοχή του από τους κατοίκους το 1533, έμεινε και δίδαξε κατά διαστήματα¹⁵⁴ έως το 1564 καθώς και οι σημαντικοί λόγιοι Παχώμιος Ρουσάνος και Θεοφάνης Ελεαβούκος γύρω στα 1535, «έδωσαν» με τη διδασκαλία τους στο νησί άνδρες σοφούς και αξιόλογους λόγιους.

Λίγο μετά την τουρκική κατάκτηση της Χίου το 1556, εγκαθίστανται στο νησί οι Ιησουίτες (1590) και από την Αγία Έδρα ιδρύεται ένα ελληνικό καθολικό σχολείο με στόχο όχι μόνο την μόρφωση των ελληνοπαίδων αλλά και τον προσηλυτισμό τους στον καθολικισμό.¹⁵⁵

Το ελληνικό καθολικό σχολείο, από τη φήμη που απέκτησε, μέσα σε λίγα χρόνια, δηλαδή μέχρι τα τέλη του 16^{ου} αιώνα περίπου, συγκέντρωσε 250 μαθητές, από τους οποίους ένα σημαντικός αριθμός ήταν Έλληνες.

Η συστηματική προπαγάνδα των καθολικών, και οι διευκολύνσεις τις οποίες παρείχαν στους Έλληνες μαθητές με την χορήγηση υποτροφιών για ανώτερες σπουδές στο ελληνικό κολλέγιο της Ρώμης, οδήγησαν πολλούς από αυτούς να ασπαστούν τον καθολικισμό.

Η βαθιά ανησυχία του Πατριαρχείου και των κατοίκων της Χίου για την λειτουργία του σχολείου αυτού, τους οδήγησε στην ίδρυση ελληνικού ορθόδοξου σχολείου στο νησί. Με την συμβολή του Χίου λόγιου Εμμανουήλ Γλυζώνιου ο οποίος ζούσε στη Βενετία και συγκεκριμένα με κληροδοτήμά του το 1596, λειτούργησε το 1604 ελληνικό ορθόδοξο σχολείο, με σχολάρχη τον Φραγκίσκο Κόκκο.¹⁵⁶ Όπως είναι φυσικό, τα διδασκόμενα μαθήματα είχαν κυρίως θεολογικό χαρακτήρα, αφού ο κύριος στόχος του σχολείου ήταν να αντιμετωπίσει την καθολική προπαγάνδα, και να θωρακίσει την ορθόδοξη πίστη των μαθητών.

Η έντονη πνευματική κίνηση στο νησί της Χίου μέχρι τα τέλη του 16^{ου} αιώνα,

¹⁵³ Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, «Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία», (περίοδος 1453-1669), σελ. 371

¹⁵⁴ Κ. Ι. Αμαντος, *Χιακά Χρονικά*, Αθήνα 1919, τόμος Δ', σελ 73.

¹⁵⁵ Κων/νος Χατζόπουλος, «Ελληνικά σχολεία στην περίοδο της Οθωμανικής κυριαρχίας», (1453-1821), σελ. 50

¹⁵⁶ Στο ίδιο, σελ. 51

έδωσε τον πρώτο μετά την άλωση αιώνα, στο νησί το προβάδισμα στο χώρο της παιδείας όταν στις περισσότερες τουρκοκρατούμενες ελληνικές περιοχές, ήταν ανύπαρκτα, ακόμα και τα σχολεία που λειτουργούσαν με υποτυπώδη μορφή παρέχοντας τις στοιχειωδέστερες γνώσεις γραφής και ανάγνωσης.

Κοινά σχολεία

Στα σχολεία στα οποία παρέχονταν οι στοιχειώδεις γνώσεις, τα λεγόμενα «κοινά σχολεία» τα οποία στεγάζονταν στους νάρθηκες των εκκλησιών ή σε κελιά μοναστηριών, οι μαθητές διδάσκονταν γραφή, ανάγνωση και στοιχεία αριθμητικής, κατά δε την έκφραση του Ιακώβου Ρίζου Νερολού, «ήσαν άσυλον απαραβίαστον των επιστημών και των γραμμάτων.»¹⁵⁷

«.....ο θεός ούτος πολιτισμός,.....λόγω της εις τους Τούρκους υποδουλώσεως του ελληνικού έθνους, επέπρωτο να υποστή καίριον πλήγμα, κυρίως κατά τους πρώτους μετά την άλωσιν χρόνους μέχρι του ΙΖ΄ αιώνος,.....εσβέσθησαν τα απανταχού του Βυζαντινού Κράτους υπάρχοντα φυτώρια παιδείας και μόλις που διετηρήθησαν πνευματικά σπερμάτια, αναδίδοντα αμυδρόν φως εν ταις Μοναίς, τοις νάρθηξι των Μητροπόλεων και αποκρύφους τόποις υπό την αιγίδα της Μ. Εκκλησίας, του Οικουμενικού Πατριαρχείου,.....εύρισκον δε καταφύγιον και αι καταδιωχθείσαι απηνές Μούσαι,....»¹⁵⁸

«Το βασικό πρόβλημα για να λειτουργήσει ένα σχολείο ήταν η εξεύρεση του κατάλληλου προσώπου που θα εκτελούσε χρέη δασκάλου. Μέσα στο πηχτό σκοτάδι της τρομαχτικής αμάθειας που κυριάρχησε στους αμέσως μετά την άλωση αιώνες ήταν πραγματικός άθλος να βρεθεί άτομο με στοιχειώδεις γραμματικές γνώσεις»¹⁵⁹

Ο δάσκαλος, συνήθως κάποιος ιερέας ή μοναχός, «απλώς γραμμάτων είδησιν έχων», μάθαινε τους μαθητές να γράφουν και να διαβάζουν από τα μοναδικά βιβλία που διέθετε, τα λειτουργικά.

Για το πρόγραμμα του κοινού σχολείου που ιδρύει στην Καστοριά στις αρχές του 18^{ου} αιώνα ο Γεώργιος Καστριώτης γράφει: «Προς τούτοις διορίζω και τα μαθήματα κατά όνομα: Α΄, Οκτώηχον ολόκληρον. Β΄, Ψαλτήριον. Γ΄, Ωρολόγιον από της αρχής του μεσονυκτικού και με όλα τα διαμέσου μέχρι και του μικρού αποδείπνου. Δ΄ εις το ιερόν ευχολόγιον τας τρεις λειτουργίας, το μυστήριον του βαπτίσματος, του γάμου, του ευχελαίου, την ακολουθίαν μικρού τε και μεγάλου αγιασμού, την ακολουθίαν των τεθνεώτων ιερωμένων τε και λαϊκών»¹⁶⁰

Επειδή στις περισσότερες περιπτώσεις οι δάσκαλοι με τις ελάχιστες γνώσεις που είχαν δεν μπορούσαν να κατανοήσουν το περιεχόμενο των βιβλίων αυτών, δεν ήταν σε θέση να ερμηνεύσουν τα εκκλησιαστικά κείμενα στους μαθητές και η ανάγνωση γινόταν χωρίς οι διδασκόμενοι να καταλαβαίνουν αυτό που διαβάζουν.

¹⁵⁷ Ιακώβου Ρίζου Νερολού, «Ιστορία των γραμμάτων παρά τοις νεωτέροις Έλλησι» (μετάφραση από τα γαλλικά, Ολυμπία Abbot, Αθήνα 1780

¹⁵⁸ Τρύφωνας Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}, Εν Αθήναις 1936, σελ. XLII

¹⁵⁹ Νεοκλής Σαρής, «Οσμανική πραγματικότητα», τόμος 2^{ος}, εκδ. Αρσενίδης, Αθήνα, σελ. 374

¹⁶⁰ Αγγελική Σκαρβέλη Νικολοπούλου, «Μαθηματάρια των ελληνικών σχολείων κατά την τουρκοκρατία», διδακτορική διατριβή, Αθήνα 1994, σελ. 199.

Ο Άνθιμος Γαζής στον πρόλογο του έργου του «Μελετίου Γεωγραφία» γράφει. «... οι δυστυχείς νέοι χάνουν τον πολύτιμον καιρόν της νεότητος αυτών, κατατριβόμενοι εις την ανάγνωσιν της Οκτωήχου και Ψαλτήρος χωρίς να εννοώσι τι αναγιγνώσκουσι, και επομένως, χωρίς να μανθάνωσι τίποτε, και το χειρότερον, οι νέοι μη καταλαμβάνοντες τα αναγιγνώσκόμενα, αηδιάζουσι σχεδόν, και δεν έχουν καμμίαν όρεξιν προς μάθησιν».

Ο Κερκυραίος ιερέας, Νικόλαος Σοφινός, στον πρόλογο της γραμματικής που έγραψε και τύπωσε στη Βενετία το 1544 γράφει:

«..... Επειδή εις τέτοιαν κακήν τύχην κατάντησε το πάλοι ποτέ μακάριστον γένος ημών των Γραικών, ότι μόλις ευρίσκεται τώρα διδάσκαλος όπου νάναι ικανός να διδάξει τους νέους καν την γραμματικήν τέχνην, πόσω μάλλον ρητορικήν και λογικήν, γεωμετρίαν και αστρονομίαν και τα' άλλα της φιλοσοφίας μέρη».

Με το «ότι μόλις ευρίσκεται τώρα διδάσκαλος», αναφέρεται, όπως είναι φανερό, όχι μόνο στον αριθμό των δασκάλων αλλά και στο επίπεδο των γνώσεών τους, στην ποιότητα της διδασκαλίας και στη φύση των διδασκομένων μαθημάτων, δίνοντάς μας συγχρόνως μια πρώτη εικόνα για την κατάσταση της παιδείας του τουρκοκρατούμενου ελληνισμού την περίοδο αυτή.

Οπωσδήποτε η φοίτηση σε κάποιο από τα ελάχιστα μέσα σχολεία ή η μαθητεία κοντά σε κάποιο λόγιο που δίδασκε ανωτέρου κάπως επιπέδου μαθήματα, προϋπέθετε γνώσεις ανάγνωσης και γραφής από τον μαθητή, τις οποίες αποκτούσε είτε παρακολουθώντας τις αυτοσχέδιες παραδόσεις κάποιου δασκάλου σε ένα από τα «κοινά σχολεία», είτε σπανιότερα, με τη βοήθεια οικοδιδασκάλου εάν επρόκειτο για παιδί εύπορης οικογένειας.

1.1.4) Η φύση των διδασκομένων μαθημάτων (1453- 1600)

Οι πληροφορίες που έχουμε για τα διδασκόμενα μαθήματα στις σχολές οι οποίες λειτούργησαν στα πρώτα 150 χρόνια μετά την άλωση, στις περισσότερες περιπτώσεις είναι ελάχιστες. Μόνο σε γενικές γραμμές, μέσα από ορισμένες μαρτυρίες μπορούμε να σχηματίσουμε μια γενική εικόνα για την φύση των διδασκομένων μαθημάτων σε κάποιες από τις σχολές αυτές.

Στο *Πατριαρχικό σχολείο*, οι μαθητές ήταν στην πλειοψηφία τους μοναχοί, αφού στόχος των ιδρυτών της κυρίως μέσα στους πρώτους αιώνες της δουλείας, ήταν η κατάρτιση δασκάλων¹⁶¹ και μορφωμένων στελεχών του κλήρου. Επομένως η παρεχόμενη από τη Σχολή παιδεία ήταν κυρίως θεολογικού χαρακτήρα.

Ο ιδρυτής του πατριαρχικού σχολείου, Πατριάρχης Ιωάσαφ σε επιστολή του προς τον τσάρο της Ρωσίας Ιβάν Δ' τον Τρομερό, επιβεβαιώνει το γεγονός για τους μαθητές - μοναχούς και λαϊκούς- της Πατριαρχικής Ακαδημίας: «..... εξ' ών συν θεώ μετά καιρόν ού πολύν χρηματίζουνσιν αρχιερείς σοφοί και επιστήμονες εις το αξίως ποιμνέειν και διδάσκειν τους Χριστιανούς....»¹⁶²

¹⁶¹ Νεοκλής Σαρής, «Οσμανική πραγματικότητα», εκδ. Αρσενίδης, Αθήνα, σελ.376

¹⁶² Γ. Γριτσόπουλος, «Πατριαρχική Μεγάλη του Γένους Σχολή», τόμος Β', εν Αθήναις 1966, σελ. 15.

Κάποιες διασωθείσες μαρτυρίες είναι ενδεικτικές για τη φύση των διδασκόμενων μαθημάτων στη νεοσυσταθείσα σχολή.

Συγκεκριμένα:

Ο πρώτος μετά την άλωση σχολάρχης του πατριαρχικού σχολείου, ο λόγιος Ιωάννης Ζυγομαλάς, δίδασκε την ελληνική γλώσσα και ανώτερα μαθήματα φιλοσοφίας και σύμφωνα με τον γιο του Θεοδόσιο, «εδίδασκε την ελληνικήν φωνήν και τέχνην εις μαθητάς».

Ο Πατριάρχης Ιωάσαφ, στην παραπάνω επιστολή του προς τον τσάρο της Ρωσίας, μας δίνει μία εικόνα – έστω και ασαφή- για τα διδασκόμενα στο Πατριαρχικό σχολείο μαθήματα: «...και φιλόσοφον άνδρα εμισθώσαμεν και άλλους διδασκάλους, εις τε τα ρητορικά δηλαδή, ποιητικά τε και γραμματικά και μουσικά μαθήματα, και τούτους έχομεν και κρατούμεν ενταύθα μετά μισθού και δαπάνης ουκ ολίγης, ώστε σπουδάζειν και παιδεύεσθαι τους χριστιανών παίδας...»

Ο φιλομαθέστατος Πατριάρχης Ιερεμίας, παρακολουθούσε τις παραδόσεις του Ζυγομαλά διδασκόμενος από αυτόν «την διαλεκτικήν, ηθικήν και ρητορικήν, ακρώμενος μετ' άλλων καλογήρων και του Χίου ιατρού Λεονάρδου Μεντώνη εξηγούντος εν τοις πατριαρχείοις τον Ερμογένην, τον Αμμώνιον και τον Ησίοδον.»¹⁶³ Στην «*Σχολή των Φιλανθρωπινών*» των Ιωαννίνων «οι κατά καιρούς ηγούμενοι αυτής εδίδασαν τα ιερά γράμματα»¹⁶⁴. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει οι μαθητές, –όλοι μοναχοί-, διδάσκονταν κυρίως αρχαίους Έλληνες συγγραφείς, έργα των Πατέρων της Εκκλησίας, μαθήματα θεολογίας και πιθανώς ρητορική.¹⁶⁵

Στην «*Σχολή του Στρατηγόπουλου*» που σύμφωνα με κάποιες ασαφείς πληροφορίες λειτούργησε επίσης στα Γιάννενα, οι μαθητές –ελάχιστοι και στην πλειοψηφία τους μοναχοί- διδάσκονταν μαθήματα ανάλογα με εκείνα της «Σχολής των Φιλανθρωπινών».¹⁶⁶

Στο *ελληνικό ορθόδοξο σχολείο* στη Χίο, όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα διδασκόμενα μαθήματα ήταν κυρίως θεολογικού χαρακτήρα αφού το σχολείο λειτούργησε στον αντίποδα του ελληνικού καθολικού σχολείου και είχε στόχο να αντιμετωπίσει την συστηματική προπαγάνδα των καθολικών, η οποία οδήγησε πολλούς από τους ορθόδοξους μαθητές του καθολικού σχολείου να ασπαστούν τον καθολικισμό.

Τα σχολεία που προαναφέραμε ήταν – έστω και με την υποτυπώδη οργάνωσή τους- τα μόνα αξιόλογα ελληνικά εκπαιδευτήρια που λειτούργησαν στον τουρκοκρατούμενο ελλαδικό χώρο κατά τη διάρκεια του 15^{ου} και 16^{ου} αιώνα, τα οποία, είτε ιδρύθηκαν πριν από την οθωμανική κατάκτηση και συνέχισαν την λειτουργία τους και μετά από αυτήν, όπως οι σχολές των Ιωαννίνων, είτε έκαναν δευιά τη εμφάνισή τους μόλις στα μέσα του 16^{ου} αιώνα.

Το πρόγραμμα των σπουδών στα λιγοστά αυτά μέσα σχολεία, χαρακτηρίζεται από

¹⁶³ Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, «Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία», (περίοδος 1453-1669),σελ. 373

¹⁶⁴ Τρύφωνος Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}, Εν Αθήναις 1936, σελ.153

¹⁶⁵ Κων/νος Χατζόπουλος, «Ελληνικά σχολεία στην περίοδο της Οθωμανικής κυριαρχίας», (1453-1821), σελ. 46

¹⁶⁶ Στο ίδιο, σελ.46

παιτελή έλλειψη της διδασκαλίας των μαθηματικών και γενικότερα των «επιστημών», αφού ο στόχος της λειτουργίας τους το κρίσιμο αυτό για την επιβίωση του ελληνισμού διάστημα που ήταν κυρίως η κατάρτιση μορφωμένων στελεχών του κλήρου, καθόριζε και τη φύση των διδασκομένων μαθημάτων.

Οι δάσκαλοι των σχολείων αυτών, «...εν χρόνις δυστυχέσι βιούντες, εν περιστάσεσι και καιροίς δεινοίς...» με την διδασκαλία τους «...διετήρησαν την θρησκείαν και την γλώσσαν, τα τιμαλφέστερα ημών πράγματα».¹⁶⁷

Επομένως η προτεραιότητα των καιρών¹⁶⁸ που ήταν η διαφύλαξη και περιφρούρηση της θρησκευτικής ταυτότητας και η διατήρηση της γλώσσας των υποδούλων, -πολύτιμες συνιστώσες για την εθνική τους ενότητα-, «περιορίζε» τα διδασκόμενα μαθήματα, τα οποία ήταν κυρίως γραμματική της αρχαίας ελληνικής, μελέτη κειμένων αρχαίων συγγραφέων, ρητορική, αριστοτελική φιλοσοφία και κυρίως θεολογία.¹⁶⁹ Ακόμα και σε περιπτώσεις μεμονωμένης εκπαιδευτικής δράσης κάποιων λογίων, τα μαθήματα που δίδασκαν σε μικρό κύκλο μαθητών, περιορίζονταν σε «γραμματικά», «ρητορικά» και «θεολογικά».

1.1.5) Ο ρόλος της εκκλησίας (1453-1600)

Κατά τους δύο πρώτους μετά την άλωση αιώνες, (15^ο και 16^ο), καταβάλλονται μεμονωμένες και ασυντόνιστες προσπάθειες ανώτερων στελεχών του κλήρου κυρίως, για την καλλιέργεια των γραμμάτων.

Σύμφωνα με τις πηγές:

Ο πρώτος μετά την άλωση Οικουμενικός Πατριάρχης Γεννάδιος, σύμφωνα με κάποιες ιστορικές μαρτυρίες, ιδρύει σχολείο το οποίο λειτουργεί μέσα στο Πατριαρχείο.

Προσπάθεια για ίδρυση σχολείου έγινε και από τον Πατριάρχη Διονύσιο το Β' (1546-1556). Προκειμένου να εξασφαλίσει δάσκαλο για το σχολείο που ήθελε να συγκροτήσει, καλεί με επιστολή του τον λόγιο Μιχαήλ Ερμόδωρο τον Λήσταρχο το 1547 ο οποίος διδασκε στην Ιταλία να αναλάβει την σχολαρχία. και του υπόσχεται ότι η αμοιβή του θα είναι ίδια με εκείνη που του κατέβαλλαν οι Ιταλοί. Η πρόσκληση αυτή γίνεται παράκληση που εκφράζεται με το παράπονο ότι «οι Ιταλοί και άλλους έχουσι τους εκπαιδεύοντας, Έλληνες δε ουκέτι».¹⁷⁰

Ο Ιωάσαφ ως μητροπολίτης Ανδριανουπόλεως αναθέτει το 1555 την σχολαρχία κάποιου σχολείου που ίδρυσε στην Ανδριανούπολη στον λόγιο Ιωάννη Ζυγομαλά, και ένα χρόνο αργότερα, όταν ανέβηκε στον Πατριαρχικό θρόνο, με σχολάρχη τον εξάιρετο αυτό λόγιο ιδρύει το πατριαρχικό σχολείο.

Οι διάσπαρτες αυτές απόπειρες που έγιναν από ανώτερα στελέχη του κλήρου για

¹⁶⁷ Ματθαίου Παρανίκα, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ.14.

¹⁶⁸ Για τους στόχους της παιδείας στον πρώτο μετά την άλωση αιώνα, βλέπε, Παναγιώτης Χ. Ζιώγας, «Προβλήματα παιδείας του Ελληνισμού κατά τον πρώτο αιώνα της τουρκοκρατίας», διδακτορική διατριβή, Θεσσαλονίκη 1982, σελ. 159.

¹⁶⁹ Καν/νος Χατζόπουλος, «Ελληνικά σχολεία στην περίοδο της Οθωμανικής κυριαρχίας», (1453-1821), σελ. 37.

¹⁷⁰ Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, «Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία», (περίοδος 1453-1669),σελ. 373

κάποια εκπαιδευτική κίνηση στα πρώτα μετά την άλωση χρόνια, παρ' όλο που «περιέσωσαν μικρόν τι ζώπυρον παιδείας..» δεν μπορούσαν να αποτελέσουν αφετηρία για την εκπαιδευτική αφύπνιση του ελληνισμού. Αφετηρία αποτέλεσε στα τέλη του 16^{ου} αιώνα και συγκεκριμένα το 1593 η απόφαση της Ιεράς Συνόδου που συγκάλεσε ο Πατριάρχης Ιερεμίας ο Β' στην Κωνσταντινούπολη και αποφάσισε να προάγει την παιδεία σε όλες τις τουρκοκρατούμενες ελληνικές περιοχές.

Με την απόφαση αυτή ο οικουμενικός Πατριάρχης απευθύνεται στα ανώτερα στελέχη του κλήρου και τους προτρέπει να ιδρύσουν σχολεία στις επαρχίες τους, για να διδάσκονται με φροντίδα και δαπάνη της εκκλησίας «τα θεία και ιερά γράμματα», γεγονός που μαρτυρεί ότι όχι μόνο η εκκλησία αποφασίζει με επίσημη απόφαση να προάγει την παιδεία αλλά και να καθορίσει τη χροιά της με το περιεχόμενο της διδασκαλίας που επέβαλλε: «Πρόκειται δε και σαφής η διάταξης, περί διδασκαλίας: των ιερών γραμμάτων, ήτοι των πρώτων της λιτής εκπαιδεύσεως στοιχείων»¹⁷¹

Συγκεκριμένα με την απόφαση αυτή: «Ωρισεν η Αγία Σύνοδος έκαστον επίσκοπον εν τη εαυτού παροικία φροντίδα και δαπάνην την δυναμένην ποιείν, ώστε τα θεία και ιερά γράμματα δύνασθε διδάσκεσθαι. βοηθείν δε κατά δύναμιν τοις εθέλουσι διδάσκειν και τοις μαθεῖν προαιρουμένοις, εάν των επιτηδείων χρείαν έχωσιν»¹⁷²

Με την πρωτοβουλία της αυτή η εκκλησία ανακηρύσσεται και επίσημα ο κύριος φορέας της παιδείας και οριοθετεί την τελευταία δεκαετία του 16^{ου} αιώνα ως αφετηρία της ανοδικής της πορείας, η οποία με ολοένα επιταχυνόμενους ρυθμούς οδήγησε το Γένος μέχρι την ελληνική Επανάσταση.

Έτσι λοιπόν η παιδεία άρχισε να αναπτύσσεται μέσα στους κόλπους της Εκκλησίας η οποία τελικά κατέληξε να είναι και ο κύριος φορέας της περίπου μέχρι τα μέσα του 18^{ου} αιώνα. Για την εποχή αυτή, απετέλεσε φορέα αναντικατάστατο, μια που αφ' ενός διέθετε¹⁷³ τις εκκλησίες ή τα μοναστήρια τόσο στα μεγάλα αστικά κέντρα όσο και στα πιο μικρά χωριά επιλύοντας το πρόβλημα του σχολικού χώρου και αφ' ετέρου προσφέροντας το έμπυχο υλικό, τους δασκάλους, κληρικούς και μοναχούς, οι οποίοι σε πολλές περιπτώσεις ήταν οι μοναδικοί που γνώριζαν ανάγνωση και γραφή.

Ο Ευγένιος Γιαννούλης επιβεβαιώνει το γεγονός αυτό για την ιδιαίτερη πατρίδα του την Αιτωλία στις αρχές του 17^{ου} αιώνα. « Έν τοις μέρεσι της Αιτωλίας, της εμής αθλίας πατρίδος, και επί πάσιν σχεδόν τοις πέριξ εκείνη κλίμασιν εξέλιπε προ πολλών ήδη χρόνων άπαν καλόν, μεθ' ό η των πεζών γραμμάτων γνώσις και σύτω συνέβη τους εκείσε πάντας αναλαβήτους γενέσθαι και άγαν τρισβαρβάρους ... σπάνιόν τι χρήμα ο ιερεύς εκεί, ο απλώς γραμμάτων είδησιν έχων».

Κληρικοί και μοναχοί, στην πλειοψηφία τους απαίδευτοι, μαθαίνουν τους μικρούς ραγάδες μέσα σε φτωχικά κελιά να γράφουν και να διαβάζουν. Συντονισμός της προσπάθειάς τους, έστω και στοιχειώδης, με κάποιο διδακτικό πρόγραμμα ή με συμβουλές για τη μέθοδο της διδασκαλίας τους, δεν υπάρχει. Τα βιβλία της διδασκαλίας είναι κυρίως τα λειτουργικά βιβλία.

¹⁷¹ Μ. Γεδεών, «Παιδεία και πτωχεία παρ' ημίν κατά τους τελευταίους αιώνας» Εν Κωνσταντινουπόλει, 1893, σελ. 20

¹⁷² ο.α. σελ 20

¹⁷³ Ματθαίου Παρανίκα, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ.6.

Η συμβολή της Εκκλησίας στην πνευματική συνοχή του ελληνισμού τους πρώτους κρίσιμους αιώνες της δουλείας είναι καθοριστική διότι «κατά την μακράν ταύταν και οδηγηράν της ιστορίας ημών περίοδον οι λειτουργοί της Εκκλησίας ήσαν οδηγοί και ποιμένες του ως επί το πλείστον αγράμματου ποιμνίου, αι δε ιεραί Μοναί και τα θυσιαστήρια της χάριτος εγένοντο τα καταγώγια της αρετής, της ικανότητος ενίοτε, φυτώρια των γραμμάτων, και οι κευθμώνες πολλών θησαυρών των αρχαίων προγόνων ημών».

Μέσα στο διάστημα που ακολουθεί την άλωση και φτάνει μέχρι τα πρώτα φεγγοβολήματα του ν.Δ., η Εκκλησία, προστατεύοντας την θρησκεία και κατά συνέπεια την πνευματική κληρονομιά του ελληνικού έθνους, κατόρθωσε να γεφυρώσει τον Βυζαντινό κόσμο με την εποχή του διαφωτισμού και να διατηρήσει έστω και υποτυπωδώς, μέχρι τότε, την εθνική συνείδηση του λαού.

Η αφύπνιση της εθνικής συνείδησης των υποδούλων -η οποία οδήγησε στην δημιουργία του ελληνικού κράτους τον 19^ο αιώνα- έφεραν σταδιακά οι ιδέες του Διαφωτισμού και της Γαλλικής επανάστασης οι οποίες άρχισαν να διαχέονται στον πνευματικό ελληνικό χώρο μετά την άρροδο τριών αιώνων από την άλωση.

Η Εκκλησία, το μοναδικό πνευματικό στήριγμα της ελληνικής κοινωνίας στους πρώτους αιώνες της δουλείας και μοναδικός φορέας της παιδείας, κατάφερε να διατηρήσει την ορθοδοξία και τον ελληνισμό, μέσα στο αλλόφυλο και αλόθησκο περιβάλλον που δημιούργησε ο δυνάστης.

Στην εικόνα του κρυφού σχολείου στον πασίγνωστο πίνακα του Γύζη και στο ποίημα του Πολέμη «βλέπουμε» στα πρόσωπα των μικρών μαθητών το σκλαβωμένο ελληνισμό συσπειρωμένο γύρω από την εκκλησία που με αγωνία προσπαθεί να διατηρήσει την ταυτότητά του, δηλαδή τη θρησκεία του τη γλώσσα του και την εθνική του ενότητα.

«... το δε ζώπυρον ετηρήθη, ... εν τη εστία αυτή εν τοις κόλποις της Αγίας Μητρος ημών Μεγάλης Εκκλησίας, προς ήν ει μεν ως Χριστιανοί οφείλομεν σεβασμόν, ως Έθνος όμως και ευγνωμοσύνην απαράγραπτον. διότι γενομένη εκ' των περιστάσεων κέντρον θρησκευτικών άμα και πολιτικών, περιβαλούσα δια της αγάπης και προνοίας Αυτής, οία περ σωστική κιβωτός, διεβίβασεν ημάς σώους δια του τοσούτων αιώνων διαστήματος, τω με γάλακτι της ευσεβείας εκτρέφουσα, τη δε ελπίδι παραμυθουμένη».¹⁷⁴

Ο κλήρος η συντηρητική αυτή -κατά κανόνα- δύναμη του ελληνισμού με την άκρατη προσήλωσή του στην ορθόδοξη παράδοση αποτέλεσε τους πρώτους αιώνες της δουλείας την ασπίδα προστασίας ενάντια στην απειλή του μωαμεθανισμού και του καθολικισμού. κατάφερε δηλαδή με επίμονο αγώνα να αποτρέψει την αφομοίωση του ορθόδοξου λαού από τον κατακτητή καθώς και να τον προφυλάξει από την προπαγάνδα της Δυτικής Εκκλησίας που είχε σαν στόχο την προσχώρησή του στον καθολικισμό.

Η εκκλησία,- σωσίβιο της ορθοδοξίας και του ελληνισμού τους πρώτους αιώνες της δουλείας-, αργότερα, με την τυφλή εμμονή στις παραδόσεις της ορθοδοξίας και τον συντηρητισμό, αποτέλεσε τροχοπέδη στην εξελικτική πορεία της αναγεννώμενης εθνότητας . την πιο κρίσιμη εποχή, την εποχή της προπαγανδιστικής του αγώνα, όταν

¹⁷⁴ ο. α. σελ.6.

άλλες δυνάμεις, ξένες προς την αυτήν προτίθενται να χειριστούν αυτόνομα τα ζητήματα της παιδείας, με την αίσθηση πως χάνει τη δύναμή της, σκληρύνεται, αντενεργεί και εναντιώνεται με πολλές και βίαιες αντιδράσεις προσπαθώντας να περιορίσει την πνευματική ελευθερία των υποδούλων.

1.2 Η κατάσταση της παιδείας από τις αρχές του 17^{ου} μέχρι τα μέσα του 18^{ου} αιώνα

1.2.1 Η στοιχειώδης εκπαίδευση

Η εξελικτική πορεία της παιδείας του τουρκοκρατούμενου ελληνισμού από τις αρχές του 17^{ου} αιώνα είναι αργή αλλά ανοδική. Από τα μέσα κυρίως του αιώνα, η κατάσταση σε ότι αφορά στην εκπαίδευση παρουσίαζε σταδιακά αισθητή βελτίωση.

Οι κοινωνικές και πολιτικές μεταβολές που έλαβαν χώρα στις κατεχόμενες ελληνικές χώρες και είχαν ως αποτέλεσμα την βελτίωση των όρων ζωής του ελληνισμού, ευνόησαν την ανάπτυξη της.

Ο αριθμός των «κοινών σχολειών» αυξήθηκε σημαντικά. Ιδρύθηκαν οι πρώτες ανώτερες Σχολές. Εκτός από τον κύριο φορέα της παιδείας, την Εκκλησία, άρχισαν να διανοίγονται προοπτικές και για νέους φορείς. Ιδιαίτερα μετά την δεύτερη δεκαετία του αιώνα η βελτίωση σε ότι αφορά στα εκπαιδευτικά πράγματα είναι εμφανής.

Η απόφαση της Ιεράς Συνόδου το 1593 για την προαγωγή και την εξάπλωση της παιδείας, δεν είναι γνωστό αν και σε ποιο βαθμό εφαρμόστηκε, ωστόσο η σύσταση και λειτουργία ολοένα και περισσότερων κοινών σχολειών σε πολλές ελληνικές περιοχές μέσα στον αιώνα αυτό, δείχνει ότι η διάδοση της παιδείας, έστω και με τη στοιχειώδη αυτή μορφή, αρχίζει να γενικεύεται.

Ο Μ.Παρανίκας γράφει σχετικά με την πρόοδο των γραμμάτων τον 17^ο αιώνα. «Τα εις τα γράμματα κατά την ΙΖ' εκατονταετηρίδα πρόοδον του Έθνους εν τε Βασιλευούση και ταις Επαρχίαις αναγνωρίζουσιν οι τε ημέτεροι και οι ξένοι»¹⁷⁵ και ο Τρύφωνας Ευγγελίδης επιβεβαιώνει την βελτίωση της κατάστασης στην παιδεία. «...διότι έχομεν την γνώμην, ότι από του ΙΖ' αιώνος και εντεύθεν τα σχολεία είχαν πολλαπλασιασθή και ότι έκαστος ιερεύς κοινότητός τινος ήτο και διδάσκαλος αυτής, εφ' ώ ο Leake λέγει: (Researches in Greece τω 1814 σ. 228) *Δεν υπάρχει κοινότης Ελληνική έχουσα ευμάρειάν τινα να μην έχη το Ελληνικόν σχολείον της*».¹⁷⁶

Ο κατώτερος κύκλος σπουδών ολοκληρώνονταν μετά την αποφοίτηση από κάποιο από τα κοινά σχολεία, (προπαιδεία), τα ονομαζόμενα σχολεία των κοινών και ιερών γραμμάτων, τα οποία στεγάζονταν σε μονές ή στους νάρθηκες των εκκλησιών, και «ως επί το πολύ διευθύνοντο υπό ιερέων ή μοναχών, διδασκόντων, μετά την επί της πινακίδος και της φυλλάδας διδασκαλίαν της αλφαβήτου και του συλλαβισμού, εκκλησιαστικά τινα βιβλία ως αναγνωστικά...»¹⁷⁷ ή και «...εγίνετο η των παιδων αγωγή και εκπαίδευσις εν τοις σχολείοις, τοις προσηρτημένοις ταις ιεραίς Μοναίς υπό κληρικών διδασκάλων, ών αι θρησκευτικά πεποιθήσεις ούσαι εκ' των προτέρων εξεληλεγμένοι υπό της Εκκλησίας,

¹⁷⁵ Ματθαίου Παρανίκα, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ. 25

¹⁷⁶ Τρύφωνος Ευγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}. Εν Αθήναις 1936, σελ.ΧVI

¹⁷⁷ ο. α. σελ LXXXI

ηδύναντο, ως εικώς, να καρποφορήσωσιν εν τοις δικαιώμασι του Θεού,...»¹⁷⁸

Στόχος της λειτουργίας των σχολείων αυτών, ήταν η κατάρτιση ιερέων και ψαλτών, αφού προτεραιότητα των καιρών ήταν η διαφύλαξη και περιφρούρηση της θρησκευτικής κυρίως ταυτότητας των υποδούλων, η οποία θα εξασφάλιζε και την εθνική τους ενότητα.

Οι καιροί ήταν πρώιμοι ώστε να οδηγήσουν σε σκέψεις ότι με αφετηρία την παιδεία θα μπορούσε να φωτιστεί το Γένος και ότι ο φωτισμός αυτός θα μπορούσε να αποτελέσει νέα αφετηρία για να καλλιεργηθεί η εθνική του συνείδηση.

«Αλλά σχολεία, εκτός των Μονών,.....ιδρύοντο και εν τοις νάρθηξι των ενοριακών εκκλησιών ή εν τοις παραρτήμασιν αυτών. τούτο μεν προς εκμάθυσιν των ιερών γραμμάτων δια τον βίον, τούτο δε προς παρασκευήν των αναγκαιούντων τοις ιεροίς ναοίς αναγνωστών, ψαλτών, νοταρίων (νοτάρων) και αντιγραφών κωδίκων, τόσον χρησίμων δια τον πολλαπλασιασμόν των χειρογράφων και των ποικίλων διδακτικών βιβλίων»¹⁷⁹

Ο χρόνος της φοίτησης σε κάποιο από τα κοινά σχολεία, δεν ήταν συγκεκριμένος αλλά μπορούσε να διαρκέσει από ένα έως πέντε χρόνια¹⁸⁰ ανάλογα με την επίδοση του μαθητή αλλά και με την ικανότητα του δασκάλου.

Οι μαθητές στα σχολεία των κοινών και ιερών γραμμάτων, μάθαιναν, ανάγνωση, γραφή και αριθμητική, τα λεγόμενα κολλυβογράμματα¹⁸¹ Τα μόνα διαθέσιμα βιβλία, τα λειτουργικά, αποτελούσαν τα διδακτικά εγχειρίδια.

Τα κείμενα στα οποία ασκούσαν οι μαθητές στην ανάγνωση και στην γραφή, ήταν θρησκευτικά κείμενα από την Οκτώηχο, τον Απόστολο, το Ψαλτήρι, το Ανθολόγιο και άλλα εκκλησιαστικά βιβλία.

Το περιεχόμενο τους ήταν δυσνόητο για τους μικρούς μαθητές, αφού σε πολλές περιπτώσεις αδυνατούσαν να το καταλάβουν και οι δάσκαλοι: «Ο κληρικός, ο ιερεύς των πόλεων, ο εφημέριος του χωρίου ούτως εφρόνουν, ούτως εδίδασκον».¹⁸²

Το αποτέλεσμα ήταν απογοητευτικό. Ο φωτισμένος Φαναριώτης λόγιος Δημήτριος Καταρτζής γράφει: «Μετά τέσσερα πέντε χρόνια τα παιδιά ξέρουν να διαβάσουν μον' εκείνα τα βιβλία πώμαθαν να διαβάσουν, δίχως να γνωρίζουν καμμιάν ελληνική λέξι, ό εστί, χωρίς ν' αποκτήσουν ιδέ' από μάθημά τους, παρά μόνη την εξωτερική και υλική του μορφή.»¹⁸³

Ο λόγιος, κληρικός Νικόλαος Σοφιανός, απογοητευμένος από το αποτέλεσμα της

¹⁷⁸ ο. α. σελ XLVI

¹⁷⁹ ο.α. σελ XLVII

¹⁸⁰ Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, «Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία», (περίοδος 1669-1821), σελ. 323

¹⁸¹ **Κολλυβογράμματα** καλεί την παιδείαν ο Κερκυραίος λόγιος Νικόλαος Σοφιανός του ΙΣΤ' αιώνας αποβλέπων εις την επί των ιερών ανάγνωσιν ευχών επί των κολλύβων (Ευχολογίου, Ωρολογίου) και ακόμη περαιτέρω εις την απλήν ανάγνωσιν αλλ' ουχί και κατανόησιν αρχαίων ελληνικών κειμένων.» Το παράθεμα 2, στο βιβλίο του Τρύφωνος Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}, Εν Αθήναις 1936, σελ. XCII

¹⁸² Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησις του Γένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα», Αθήνα 1976, σελ.44

¹⁸³ Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, «Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία», (περίοδος 1669-1821), σελ 324

μεγάλης προσπάθειας των μαθητών, γράφει: «Και λογάριασαι πόσους χρόνους με τους δασκάλους οι νέοι κάθοντ' επί τα σχολεία να παιδεύονται νύκτα και ημέρα μόνο να γράφουν ή να διαβάζουν, και οι περισσότεροι γενειάζουν εις το σχολείον και ακόμη κάν να καλαναρχούν ή να διαβάζουν καλά δεν προκόφτουν. Δεν θέλω να ειπώ να γροικούν το τι διαβάζουν».

Τα μαθήματα διαρκούσαν όλο το έτος εκτός από τις Κυριακές και τις δεσποτικές εορτές και το ημερήσιο πρόγραμμα ήταν πολύ κοπιαστικό. Η διδασκαλία άρχιζε με την ανατολή του ηλίου και με μία μικρή διακοπή το μεσημέρι, συνεχιζόνταν μέχρι και το απόγευμα. Το σιγίλιο που αφορά στην σύσταση του σχολείου των Τρικάλων (κοινό σχολείο) στις αρχές του 18^{ου} αιώνα, ανάμεσα στις άλλες υποχρεώσεις του δασκάλου αναφέρει : «να διδάσκη με επιμέλειαν και κατά συνέχειαν τους μαθητάς του χωρίς καμμίαν διακοπήν, έξω μόνον από τας αγίας Κυριακάς, και δεσποτικές εορτάς, και πινας άλλας επισημών αγίων, οπου παρρησιαστικώς εορτάζουσιν, και κανονικώς εξ' έθους πανηγυρίζουσιν»¹⁸⁴

Οι μαθητές δεν είχαν δικαίωμα να διατυπώσουν απορίες, ενώ στη περίπτωση που η προετοιμασία των μαθημάτων τους δεν ήταν επαρκής, οι ποινές ήταν σκληρές. «...οι μαθηταί εμάνθανον τα μαθημάτα των. διότι άλλως επέκειτο ο γνωστός *φάλλαγας*, και άλλα είδη τιμωρίας οποία ήσαν: να κρατώσιν ύπερθεν των ώμων δια των τεταμένων χειρών βάρη κατά το μάλλον ή ήττον βαρέα. επίσης εφηρμόζετο ο κατά πρόσωπον εμπτυσμός, η απασβόλως του προσώπου, ο ραβδισμός με το *βεργύη* ή του *λώρου*,...»¹⁸⁵

Ο Αδαμάντιος Κοραής στην αυτοβιογραφία του αναφέρει χαρακτηριστικά για τον πρώτο του δάσκαλο τον μοναχό Ιερόθεο Δενδρινό¹⁸⁶: «Ο διδάσκαλος και το σχολείον ωμοίαζαν όλους τους αλλού διδασκάλους και τα σχολεία της τότε Ελλάδος, ήγουν έδιδαν διδασκαλίαν πολλά πτωχήν συνωδευμένην με ραβδισμόν πλουσιοπάροχον. Τόσον άφθονα εξυλοκοπούμεθα, ώστε ο αδερφός μου, μη υποφέρων πλέον, παραιτήθη την Ελληνικήν παιδείαν και παρά γνώμην των γονέων μας». Αν αναλογιστούμε ότι «η τότε Ελλάδα» είναι εκείνη στα μέσα του 18^{ου} αιώνα μέσα στον οποίο η κατάσταση της παιδείας έχει βελτιωθεί αισθητά, μπορούμε να καταλάβουμε πως ήταν τα πράγματα στη διάρκεια των δύο αιώνων που προηγήθηκαν.

Ακόμα και ο Βούλγαρης, ο «κλεινός» Ευγένιος, την εποχή της σχολαρχίας του στην Αθωνιάδα, (1753-17590), αναφέρει ότι μαστίγωνε τους μαθητές οι οποίοι δεν πειθαρχούσαν.¹⁸⁷

Στους επιμελείς μαθητές απέδιδαν τιμές και έδιναν βραβεία. «Ο αισίως αποπερατών το βιβλίον του ωδηγείτο αυθημερόν εν πομπή υπό των συμμαθητών εκ' του σχολείου εις τον πατρικόν οίκον, όπου ο *πρωτόσχολος*, εκάθιζεν αυτόν επί του *μουντεριου* και ανυψών αυτόν τρίς ανεκήρυσεν *άξιου*. προσήρχοντο δε οι γονεΐς και οι συγγενείς και συνέχαιρον, κομίζοντες δώρα,...».

Οι μαθητές στο σπίτι και στο σχολείο δεν έπρεπε να έχουν αντιδράσεις, αλλά

¹⁸⁴ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησης του Γένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα», Αθήνα 1976, σελ. 256

¹⁸⁵ Τρύφωνος Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}, Εν Αθήναις 1936, σελ. LXXXVI

¹⁸⁶ Ο Αδαμάντιος Κοραής υπήρξε μαθητής του Ιερόθεου Δενδρινού στην «Ευαγγελική Σχολή» της Σμύρνης. Μ. Παρανίκας, «Ιστορία της Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης», εν Αθήναις 1885, σελ. 166

¹⁸⁷ Άλκης Αγγέλου, «Των Φώτων, Όψεις του νεοελληνικού Διαφωτισμού», Ερμής Αθήνα 2000, σελ. 125

ακόμα και εάν είχαν δεν επιτρέπονταν να τις εκδηλώνουν. «Στο παιδί επιβάλλεται η σιωπή τόσο απέναντι στο δάσκαλο, όσο και απέναντι στους γονείς.»¹⁸⁸ Ο ανακρινιστής Φαναριώτης άρχοντας Καταρτζής, αναφέρει για το απαράδεκτο εκείνο σύστημα διαπαιδαγώγησης: «Τα παιδιά έχουνε πάθη.....Ο δάσκαλος με το ξύλο στο χέρι πάσχει να σβήσει τα πάθη του, δεν τα' αφήνει να χαρή και να εγλενδίσει, μήτε να γελάσ' ή κάποτε και να κλάψη».¹⁸⁹

Οι πιεστικές βιοτικές ανάγκες, οι δύσκολες γενικά συνθήκες ζωής ήταν η αιτία που αρκετοί από τους μαθητές εγκατέλειπαν και αυτές ακόμα τις στοιχειώδεις σπουδές τους.¹⁹⁰

Από επιστολή του Βουθροντέως, ο οποίος ήταν δάσκαλος στην Αδριανούπολη μαθαίνουμε ότι «τα παιδιά προχωρούν...καλώς, όμως οι γονείς των τα αφήνουν έως να μάθουν κάτι και μετά ταύτα τα βάνουν εις τέχνην»¹⁹¹

Τα παιδιά των πλούσιων οικογενειών και των αξιωματούχων δεν παρακολουθούσαν μαθήματα στα κοινά σχολεία στα οποία φοιτούσαν παιδιά από διάφορες οικογένειες, αλλά, είτε διδάσκονταν σε μικρές ομάδες μαθητών με την ίδια κοινωνική προέλευση, είτε περιοριζόνταν στην κατ' οίκον διδασκαλία. Τα μαθήματα που διδάσκονταν ήταν περισσότερα από εκείνα στα οποία έπρεπε να αρκεστούν οι μαθητές των κοινών σχολείων.¹⁹² Ο Κωνσταντίνος Κούμας, αυτόπτης μάρτυρας των πραγμάτων-επιβεβαιώνει το γεγονός: «καμμία σχέσις οικιακή δεν συνέδεε τους άρχοντας με το σχολείον επειδή κανείς δεν έστελλε τον υιόν του εκεί να παιδευθή, αλλά καθείς είχε τον οικοδιδάσκαλόν του....»¹⁹³

«Οι πλούσιοι γονείς εφρόντιζον είτε εν τοις γνωστοίς σχολείοις να εκπαιδεύωσι τα τέκνα των είτε ιδιωτικώς κατ' οίκον, ως συνέβαινε παρά τους αρχαίους, δια ιερομονάχων λογίων επί προσδοκία να προαχθώσιν εν τη κοινωνία ή ως γραμματείς εν τοις ύστερον χρόνοις παρά τοις Φαναριώταις ή να χειροτονηθώσιν αρχιερείς, ως οι πατέρες οι πτωχοί ηύχοντο εις τα τέκνα των : *να τοις αξιώση ο Θεός να βάλωσι πετραχήλι*. διότι οι ιερείς ήταν εξηρημένοι δημοσίων φόρων.»¹⁹⁴

Μέχρι τα μέσα του 17^{ου} αιώνα, η παρεχόμενη παιδεία -εκτός από ελάχιστες εξαιρέσεις- ήταν η στοιχειώδης, που, όπως έχει ήδη αναφερθεί, αποκτούσαν οι μαθητές

¹⁸⁸ Κ. Θ. Δημαράς, «Νεοελληνικός Διαφωτισμός», Ερμής, Αθήνα 1993, σελ. 229.

¹⁸⁹ ο. α. σελ 229

¹⁹⁰ Απόσπασμα από γραπτή μαρτυρία κάποιου μαθητή που αναγκάστηκε εξ αιτίας της μεγάλης φτώχειας να εγκαταλείψει το σχολείο, επιβεβαιώνει τα λεγόμενα του δασκάλου «....Εως τότε με είχαν εις το Ελληνικόν σχολείον λεγόμενον, εις τον διδάσκαλον Σαμουήλ Κουβελάνον, και είχα προχωρήσει έως την **χρηστοθήθειαν** λεγομένην τότε. αλλ' ο πατήρ μου από την δυστυχίαν με ηύγαλε λέγωντάς μου, ότι η περίστασις μας είναι δεινή, να με βάλλη εις μέρος να παίρνη τίποτε να πληρώνει το **χαράτζιόν** μου. έτσι μ' έβγαλεν από το Σχολείον ηξεύροντάς να γράφω μόνον, καθώς και βλέπετε τα παρόντα γράμματα, και μ' ευσημύωνσε τον χρόνον δια γρόσια πέντε και να με ταγίζει ο πατέρας μου....»¹⁹⁰ (Απόσπασμα από το βιβλίο του Θ. Ν. Φιλαδέλφως, Ιστορία των Αθηνών επί τουρκοκρατίας (1400-1800), Αθήναι 1962, τ. 2, σελ. 347-350, που περιέχεται στο «παράρτημα» του βιβλίου του Νίκου Γ. Ζαχαρόπουλου, «Η παιδεία στην τουρκοκρατία».

¹⁹¹ Τρύφωνος Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}, Εν Αθήναις 1936, σελ 57

¹⁹² Κ. Θ. Δημαράς, «Νεοελληνικός Διαφωτισμός», Ερμής, Αθήνα 1993, σελ 228

¹⁹³ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησις του Γένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα», Αθήνα 1976, σελ. 238

¹⁹⁴ Τρύφωνος Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}, Εν Αθήναις 1936, σελ. LXXI

με την φοίτησή τους στα κοινά σχολεία, μέσα στους νάρθηκες των εκκλησιών και στα κελιά των μοναστηριών. Η λειτουργία των σχολείων αυτών συνεχίστηκε κατά τον 17^ο και 18^ο αιώνα και έδινε την βασική εκπαίδευση, των θείων και ιερών γραμμάτων. «Η σπουδή της Οκτωήχου μετά τα Πινακίδια της αναγνώσεως, ή του Ψαλτηρίου μετά την Οκτώηχον, , η συνθήθεια του γράφειν και αριθμείν ήν εν τοις παρ' ημίν σχολείοις εν χρήσει και από των τελευταίων ετών της ΙΣΤ' εκατονταετηρίδος, διήρκεσε δ' ως εικός δι' όλης της ΙΖ' και κατά την ΙΗ', συνιστώσα την των κοινών γραμμάτων, ιερών και εκκλησιαστικών, παιδευσιν»¹⁹⁵

Αργότερα, μετά τα μέσα του 18^{ου} αιώνα, όταν η αισθητή βελτίωση των συνθηκών ζωής έφερε και την κοινωνική συνείδηση για την αξία της παιδείας, τότε η ίδρυση των σχολείων της στοιχειώδους εκπαίδευσης, γενικεύτηκε.

Ο κύριος στόχος σε αυτό το πρώτο στάδιο της εκπαίδευσης ήταν να μάθουν οι μαθητές να γράφουν και να διαβάζουν. Επομένως ο δάσκαλος δεν ήταν απαραίτητο να έχει ιδιαίτερη μόρφωση. Τα μοναδικά εφόδια τα οποία έπρεπε να διαθέτει, ήταν η γνώση ανάγνωσης, γραφής, και στοιχείων αριθμητικής. αυτά δηλαδή που όφειλε να διδάξει. Ο τρόπος με τον οποίο μεταδίδονταν οι ελάχιστες γνώσεις εξ αιτίας της άγνοιας ακόμα και των στοιχειωδέστερων παιδαγωγικών μεθόδων, καθιστούσαν κατάλληλο για διδασκαλία οποιοδήποτε πρόσωπο γνώριζε ανάγνωση και γραφή. Ίσως λυπτόν, δεν ακούγεται υπερβολική η παρατήρηση του λόγιου Χρήστου Χασιώτη σε ομιλία του τον Ιανουάριο του 1784, που αφορούσε στους δασκάλους των κοινών σχολείων: «Οι γραμματοδιδάσκαλοι ούτοι ήσαν το πολύ ιερείς, κανδηλανάπται, ράπται, υποδηματοποιοί, οι δε μαθηταί διαφόρου ηλικίας και δυνάμεως αναμίξ».¹⁹⁶

Ο Βάμβας το Σεπτέμβριο του 1819, αφού εξαίρει την πρόοδο των μαθητών της σχολής της Χίου, αναλογίζεται πόσο καλύτερα θα ήταν τα αποτελέσματα «αν είχαμεν συμβοηθόν και την οικιακήν ανατροφήν και τα κοινά παιδαγωγεία. Κατά δυστυχίαν όμως αι πρώτισται αύται βάσεις είναι ακόμη αναξίως παρημελημένα»¹⁹⁷

1.2.2 Εγκύκλιος- Ανώτερη παιδεία

Μετά την ολοκλήρωση των σπουδών στα κοινά σχολεία (*προπαιδεία*), άρχιζε από το δέκατο έτος περίπου της ηλικίας των μαθητών, η εγκύκλιος παιδεία (*κυκλοπαιδεία*), η οποία ελάμβανε χώρα στα ανώτερα σχολεία, τα οποία τα συναντούμε με τα ονόματα *Ακαδημία, Λύκειο, Μουσείο, Ελληνομουσείο, Παιδαγωγείο, Φροντιστήριο, Ομακόιο, Γυμνάσιο, Σχολείο, Σχολή*.

Ο Λαρισαίος λόγιος Αλέξανδρος Ελλάδιος, το 1714, αναφέρει: «εν τοις Γυμνασίοις, τα οποία, χάριτι θεία εν πάσαις ταις πόλεσι της Ελλάδος μετρίως ανθούσι, φοιτώσιν οι μαθηταί, οίτινες απεπεράτωσαν τα εαυτών μαθήματα, εν τοις κοινοίς σχολείοις.»

Στα σχολεία αυτά, όσον αφορά στην εποχή που αναφερόμαστε (1600- 1750), σε κάποιες περιπτώσεις, εκτός από τον μέσο κύκλο λειτουργούσε και ανώτερος κύκλος σπουδών ο

¹⁹⁵ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησης του Γένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα», Αθήνα 1976, σελ.11

¹⁹⁶ Άλκης Αγγέλου «Το κρυφό σχολειό, Χρονικό ενός μύθου», Εστία, Αθήνα 1999

¹⁹⁷ Άγγελικη Σκαρβέλη- Νικολοπούλου, «Μαθηματάρια των ελληνικών σχολείων κατά την τουρκοκρατία» Αθήνα 1994, σελ 210.

οποίος άρχισε να καθιερώνεται μετά τα μέσα του 17^{ου} αιώνα.

Η μέση βαθμίδα σπουδών, η *κυκλοπαίδεια*, περιελάμβανε την διδασκαλία κειμένων, επιλεγμένων από τη «θύραθεν» αλλά και από την χριστιανική γραμματεία. Παράλληλα με τα κείμενα αυτά διδάσκονταν Γραμματική, Σύνταξη, Θεματογραφία, Επιστολογραφία, Ρητορική και Ποίηση.

Η ποικιλία των κειμένων ήταν μεγάλη¹⁹⁸ και η επιλογή τους καθοριζόνταν κυρίως από το δάσκαλο και σε κάποιες περιπτώσεις και από το πρόγραμμα μαθημάτων της σχολής, το οποίο καταρτιζόταν σύμφωνα με την επιθυμία του ιδρυτή της. Μέσα από την διδασκαλία των κειμένων, οι δάσκαλοι δεν απέβλεπαν μόνο στην εκμάθηση της γραμματικής και του συντακτικού, αλλά και στην κατανόηση του περιεχομένου των, όπως φαίνεται από τα σχόλια και τις ερμηνείες που συνοδεύουν τα κείμενα στα μαθηματάρια της εποχής εκείνης.¹⁹⁹

Γενικότερα, η διάρκεια φοίτησης για την ολοκλήρωση των σπουδών και των δύο βαθμίδων (κατώτερης και μέσης) δεν ήταν καθορισμένη. Ο κατώτερος κύκλος σπουδών, όπως έχει ήδη αναφερθεί, απαιτούσε τέσσερα με πέντε χρόνια. Ο μέσος κύκλος ολοκληρώνονταν με πενταετή φοίτηση κατά μέσο όρο, εφ' όσον η παρακολούθηση των μαθημάτων ήταν συνεχής. Δηλαδή, δέκα χρόνια, ήταν ο ελάχιστος χρόνος που απαιτούσε η ολοκλήρωση των σπουδών στις δύο πρώτες βαθμίδες της εκπαίδευσης.

Οι ιδιαιτερότητα στο πρόγραμμα σπουδών, εξ αιτίας του προσωποπαγούς χαρακτήρα της κάθε σχολής, και η επίδοση του μαθητή, ήταν οι δύο παράγοντες που θα μπορούσαν να συντομεύσουν ή να επιμηκύνουν τον χρόνο φοίτησης, ο οποίος κυμαίνονταν από δέκα έως δεκαπέντε χρόνια συνολικά, για τις δύο πρώτες βαθμίδες.

Στον ανώτερο κύκλο σπουδών, ο οποίος στην περίοδο που αναφερόμαστε (1600-1750), περιελάμβανε κυρίως μαθήματα φιλοσοφίας και θεολογίας, η φοίτηση διαρκούσε περίπου επτά χρόνια. Η ολοκλήρωση των σπουδών δηλαδή, και για τις τρεις βαθμίδες εκπαίδευσης απαιτούσε από 17 έως 22 χρόνια.

Οι περισσότερες σχολές οι οποίες ιδρύονταν μετά τα μέσα του 18^{ου} αιώνα περιείχαν τις δύο τελευταίες βαθμίδες της εκπαίδευσης, την ανώτερη και την μέση, επειδή η πρώτη αποτελούσε προαπαιτούμενο της δεύτερης.

Οι δύο κύκλοι σπουδών, ο ανώτερος και ο μέσος, στεγάζονταν συνήθως στο ίδιο κτίριο, ενώ ο χώρος που διεξάγονταν η βασική εκπαίδευση ήταν συνήθως αυτόνομος, αφού ο αριθμός των κατώτερων σχολείων ήταν πολλαπλάσιος από εκείνο των ανώτερων και των μέσων σχολών

Τη βασική εκπαίδευση την οποία έπρεπε να έχουν οι μαθητές ως προϋπόθεση για να εγγραφούν σε κάποια ανώτερη σχολή, αποκτούσαν, όπως είναι γνωστό, με την φοίτησή τους στα κοινά σχολεία, ή με κατ' οίκον διδασκαλία, ή ακόμη και με την βοήθεια συγγενικών προσώπων. Επομένως, αφού ο φορέας μετάδοσης της γνώσης δεν ήταν ενιαίος, οι μαθητές, δεν είχαν ομοιόμορφη κατάρτιση, και, αν και φοιτούσαν στην ίδια βαθμίδα, δεν είχαν ασφαλώς το ίδιο επίπεδο γνώσεων. Για τον λόγο αυτό, σε πολλές περιπτώσεις, ο δάσκαλος κατέτασσε τους μαθητές σε «κλάσεις», ώστε να μπορεί να

¹⁹⁸ Ο. α. σελ, 349

¹⁹⁹ Ο. α. σελ, 351

προσαρμόζει την διδασκαλία του στις απαιτήσεις του ακροατηρίου του και να γίνεται περισσότερο κατανοητός.

Ο Αθανάσιος Βουθροντέας, ο οποίος δίδασκε στην Ανδριανούπολη, σε επιστολή του το 1714 προς τον Χρυσάνθο Νοταρά, γράφει : «...μαθητάς έχω δεκαεπτά εις κλάσεις διηρημένους τέσσαρες. εις την α' είναι τρεις, σπουδάζουν Όμηρον μετά της ποιητικής τεχνολογίας και προγυμνάσματα του Αφθονίου μετά των παρεπομένων αυτοίς θεμάτων. εις την β' τέσσαρες, σπουδάζουν βασιλέων και φιλοσόφων αποφθέγματα και τα κακτείδους θεμάτια. εις την γ' τρεις, σπουδάζουν λόγους Ισοκράτους και την ανήκουσαν τεχνολογίαν. εις την δ' πέντε, σπουδάζουν Βατραχομουμαχίαν. εις την γραμματικήν και γράψιμον δύο. προχωρούν δι' ευχών σας καλώς...»²⁰⁰

Αλλά και από τον επιφανή Λαρισαίο λόγιο, τον Κωνσταντίνο Κούμα, μαθαίνουμε ότι ο δάσκαλός του στη σχολή του Τυρνάβου (1782-1806), Ιωάννης Πέζαρος, «...εδιαίρει τους μαθητάς εις πολλές κλάσεις προβαινούσας εκ των μικροτέρων εις τα μεγαλύτερα μαθήματα. Η κλάσις, την οποία εγύμναζεν εις την τεχνολογίαν των οκτώ μερών του λόγου, ήτο η κατωτάτη. δευτέρα ήτις ήρχιζε να αναλύη την σύνταξιν του λόγου. τρίτη, ήτις εσύντασσε θέματα. τετάρτη, ήτις εγυμνάζετο τους επιστολικούς χαρακτήρας κατά τον Κορυδαλέα. η πέμπτη εκαταγίνετο εις τους ποιητάς. η έκτη εγεωμέτρη και εφιλοσόφει, ήτις πολλάκις εδιαιρείτο εις δύο...»²⁰¹

Ο Ευγένιος Βούλγαρης χωρίζει την κατηγορία των γραμματικών μαθημάτων σε δύο κύκλους. έναν για τους αρχάριους και έναν για τους προχωρημένους.²⁰²

Ο δάσκαλος της κυκλοπαιδείας, σύμφωνα με πατριαρχικό σιγίλιο του 1691 το οποίο αφορούσε στην επαναλειτουργία της Πατριαρχικής Σχολής, «οφείλει διορίζειν τους υπ' αυτού διδασκομένους εις κλάσεις δύο. και προς μεν την α' διδάσκειν έν των λογογραφικών μαθημάτων, προς δε την β' εν ποιητικόν ευληπτότερον κατά την των μαθητευομένων δύναμιν, μάλιστα δε τον σχηματισμόν των χρόνων προς τους ικανωτέρους, αρχόμενος από της συντάξεως των ρημάτων, μετά τεχνολογίας αδιαλείπτου, ά τε μάλα αναγκαίως συμβαλλούσης ταύτης τοις πρωτοπείροις εις έννοιαν και κατάληψιν των διδασκομένων αυτοίς. τη δε α' κλάσει θέματα παρέχειν καθ' ημέραν εφ'εκάστου είδους των ρημάτων, και ως ένεστι δι' επιμελείας έχουν ό,τι πλείστης και γρηγορούσης φροντίδος εις το παιδεύεσθαι τους αυτού ακροατάς την γραμματικήν τέχνην μετ' εσκεμμένης ασκήσεως».²⁰³

Ανώτερα σχολεία, εκτός από τα ελάχιστα τα οποία έχουν ήδη αναφερθεί, έκαναν την εμφάνισή τους από τα μέσα του 17^{ου} αιώνα σε ορισμένα οικονομικά και εμπορικά κέντρα των τουρκοκρατούμενων ελληνικών χωρών, τα οποία άρχισαν να αναπτύσσονται παράλληλα με την ανάπτυξη του εμπορίου. Οι μαθητές οι οποίοι φοιτούσαν στα σχολεία αυτά, διδάσκονταν τα εγκύκλια και φιλοσοφικά μαθήματα, και ήταν ελάχιστοι μέσα στο πρώτο μισό του 17^{ου} αιώνα.

Ενδεικτικά αναφέρεται ότι στην Πατριαρχική Σχολή στα μέσα του αιώνα

²⁰⁰ Μ. Γεδεών, Γράμματα εκ της Αδριανουπόλεως, Κωνσταντινούπολις 1913, σελ. 67.

²⁰¹ Κ. Μ. Κούμα, Ιστορία των ανθρωπίνων πράξεων από των αρχαιοτάτων χρόνων έως των ημερών μας εκ παλαιών απανθισθείσαι και τα νεώτερα εξ' αρίστων Γερμανών ιστοριογράφων ελευθέρας μεταφρασθείσαι. Τόμ. 12^{ος}. Εν Βιέννη της Αυστρίας 1832, σελ 569

²⁰² Άλκης Αγγέλου, «Το χρονικό της Αθωνιάδας» στο έργο «Των Φώτων», Ερμής, Αθήνα 2000, σελ.123

²⁰³ Γ. Γριτσόπουλος «Πατριαρχική Μεγάλη του Γένους Σχολή», τόμος Β΄. Εν Αθήναις 1966, σελ 359.

φοιτούσαν δέκα μαθητές, ανάμεσα στο διάστημα από 1641 έως 1665 ο αριθμός των μαθητών της Σχολής, ήταν «έξ, ή οκτώ ή ολίγω πλειόνων», ενώ σύμφωνα με ένα σιγίλιο του 1663 ήταν σχεδόν δώδεκα.²⁰⁴

1.2.3 Η «κυριαρχική μέριμνα» της Εκκλησίας για την ίδρυση και λειτουργία των σχολείων.

Την πρωτοβουλία για την ίδρυση των ανώτερων σχολών είχαν πλούσιοι έμποροι, λόγιοι, ηγεμόνες αλλά και η «Εκκλησία», η οποία αποτελούσε τον κύριο φορέα της παιδείας κατά τη διάρκεια του 17^{ου} αιώνα και είχε την εποπτεία και τον έλεγχο των σχολείων σε ολόκληρο σχεδόν τον 18^ο αιώνα, ακόμα και στην περίπτωση που οι ιδρυτές τους ήταν ιδιώτες λόγιοι είτε έμποροι του παροικιακού ελληνισμού.

Όποιος είχε πρόθεση να ιδρύσει κάποια Σχολή, απευθύνονταν στην Εκκλησία, η οποία ήταν σε θέση να στηρίξει την προσπάθειά του μια που μόνον εκείνη διέθετε τους μηχανισμούς για την διάδοση της παιδείας.

Η Εκκλησία και μόνο, είχε το δικαίωμα, με την έκδοση ειδικών ιδρυτικών εγγράφων (σιγιλίων) να επισημοποιεί την ίδρυση ενός σχολείου, να κατοχυρώνει το ακατάλυτο του σχολείου καθώς και την αυτονομία του από τις επεμβάσεις των τοπικών αρχών. Δηλαδή, η έκδοση πατριαρχικού σιγιλίου από το Πατριαρχείο, αποτελούσε, εκτός των άλλων, διαβεβαίωση προς τον ιδρυτή, για την απρόσκοπτη λειτουργία του σχολείου.

Κανείς δεν μπορούσε να αμφισβητήσει ή να ανατρέψει την λειτουργία σχολείου του οποίου την ίδρυση είχε επισημοποιήσει η Εκκλησία, γιατί «ος δ' άν τολμήση εφ' οιαδήποτε προφάσει διασεισαι και ανελείν την αρίστην ταύτην και βελτίστην παρί παιδείας διάταξιν και ευνομίαν του Γένους ημών, , αφωρισμένος εή από της Αγίας και ομοουσίου και αδιαιρέτου Τριάδος, του ενός τη φύσει υμνουμένου θεού και κατηραμένος και ασυγχώρητος και άλυτος μετά θάνατον. Η οργή του θεού εή επί την κεφαλήν αυτού, εξαλειφθήη το όνομα αυτού εκ βίβλου ζώντων και δώη λόγον τω αδεκάστω κριτή επί της δευτέρας αυτού φρικτής παρουσίας.....»²⁰⁵

Από τα ιδρυτικά έγγραφα των σχολών της Σκοπέλου, Μονεμβασίας, Τρικάλων και Σιάτιστας τα οποία εκδόθηκαν στις αρχές του 18^{ου} αιώνα (1720-1735), γίνεται έκδηλος ο ρόλος της εκκλησίας στην κατοχύρωση και ομαλή λειτουργία των σχολείων τα οποία την καλούσαν να αναγνωρίσει. Το Πατριαρχείο για την σχολή της Σκοπέλου διαβεβαιώνει ότι: «ου μόνον συστήσαι και βεβαιώσαι, αλλά και επί το κρείττον και ασφαλέστερον ως οίον τε μεθαρμόσασθαι και μεταρρυθμίσαι την κυβέρνησιν και διεξαγωγήν αυτού». για την σχολή της Μονεμβασίας: «τα φιλεργηθέντα θεοφρόνως φρονήματι κρείττονι της Εκκλησίας δυνάμει κατοχυρούν επί διαμονή κραταιών».²⁰⁶

Το βεβαιωτήριο έγγραφο για το σχολείο τω Τρικάλων αναφέρει χαρακτηριστικά:

²⁰⁴ Γιάννης Καράς, Οι θετικές επιστήμες στον ελληνικό χώρο, (15^{ος}-19^{ος} αιώνας), «Δαίδαλος»- Ι. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα, σελ. 58

²⁰⁵ Από το Πατριαρχικό σιγίλιο του πατριάρχη Σεραφείμ Β', το οποίο εκδόθηκε τον Ιανουάριο του 1759 και αφορούσε στην ανασύσταση της Πατριαρχικής Σχολής. (Γ. Γριτσόπουλος, *Πατριαρχική Μεγάλη των Γένους Σχολή*, τόμος Β', εν Αθήναις 1966, σελ 371).

²⁰⁶ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνηση του Γένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα», ΑΘΗΝΑ 1976, σελ, 4

«και χρέος έχομεν, λέγει Παΐσιος Πατριάρχης ο από Νικομηδείας, τα δια καλόν τέλος γινόμενα να τα μεγαλύνωμεν επαξίως, και όσον το δυνατόν να τα συνιστώμεν και να τα κρατύνωμεν, και εις μείζονα και διηνεκή την ασφάλειαν και βεβαιώσιν να τα εγχαράττωμεν και γράμμασιν αποδεικτικούς και συστατικούς δια να μένωσιν εις αιώνας αμετάθετα και και αμετακίνητα».²⁰⁷

Για την αναγνώριση της σχολής στην Σιάτιστα, το Πατριαρχείο επικαλείται το προνόμιό του να υποστηρίζει τους οργανισμούς που αφορούν στην ψυχική ωφέλεια των υποδοχών: «και κατά τα άπερ κέκτηται προνόμια ο οικουμενικός ούτος θρόνος, επιβάλλειν εις τας απανταχού παροικίας και επαρχίας των ευσεβών, ένθα περί κοινών υποθέσεων και πραγμάτων προς ψυχικήν αφορώντων ωφέλειαν καθέστηκεν ο αγών, καταρτισμόν τε και σύστασιν του ημετέρου γένους και οικοδομήν θεάρεστον κοινωφελούς πράγματος, ως χρέος έχοντες κήδεσθαι και προνοείν της συστάσεως και διαμονής των τοιούτων θεαρέστων έργων»²⁰⁸

Ήταν τέτοια «η κυριαρχική της εκκλησίας μέριμνα», που, μόνο αυτή, όχι μόνο είχε προνόμιο να επισημοποιεί την ίδρυση σχολείων, αλλά και να κατοχυρώνει με ειδικά σιγίλια οποιαδήποτε ενέργεια αφορούσε στην λειτουργία τους. Παραδειγματική είναι η περίπτωση, η οποία αφορά στην οικονομική συνδρομή με 3500 γρόσια, από την «συντεχνία των γουναράδων» προς την μονή της Πάτμου, για την ενίσχυση άπορων μαθητών. Σύμφωνα με την θέληση των συνδρομητών, τους τόκους από την κατάθεση του παραπάνω ποσού, θα διέθετε ο δάσκαλος της σχολής «τοις ενδεέσι των μαθητών».

Οι «φιλογενείς γουναράδες», μετά από αίτηση τους, ζήτησαν από το Πατριαρχείο να αναγνωριστεί η συνδρομή τους, «βεβαιωθήναι το θεάρεστον έργον αυτών τούτο δι εκκλησιαστικού βεβαιωτηρίου γράμματος, εις κοινήν ωφέλειαν και κατά ψυχήν σωτηριαν αυτών, και διηνεκή ασφαλή τε και αμετάτρεπτον σύστασιν του πράγματος», όπως και έγινε με βεβαιωτήριο και συστατικό γράμμα (σιγίλιο) του Πατριαρχείου.²⁰⁹

Παρ' όλο που η εκκλησία με επίσημα έγγραφα αναγνώριζε και κατοχύρωνε την λειτουργία μιας σχολής την οποία ίδρυε κάποιος ιδιώτης, ο ιδρυτής ήταν εκείνος ο οποίος καθόριζε ό,τι αφορούσε στην διαχείριση των οικονομικών πόρων του σχολείου, την διοίκηση του²¹⁰, το διδακτικό προσωπικό και τα διδασκόμενα μαθήματα.

Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα αποτελούν οι πρώτες ανώτερες σχολές που ιδρύθηκαν από ιδιώτες, οι Σχολές των Ιωαννίνων, οι οποίες οργανώθηκαν με πρότυπα τα ευρωπαϊκά κολέγια. Οι ιδρυτές των σχολών αυτών, αφού κατοχύρωσαν την λειτουργία τους με ειδικά πατριαρχικά σιγίλια, στη συνέχεια ανέθεσαν την διεύθυνση τους σε ορισμένη από αυτούς εφορευτική επιτροπή, επέλεξαν τους δασκάλους και όρισαν τα διδασκόμενα μαθήματα.

²⁰⁷ ο. α. σελ. 4

²⁰⁸ ο. α. σελ. 4

²⁰⁹ ο. α. σελ. 8

²¹⁰ Η διαθήκη του Μάνου Γκιόνμα η οποία συντάχτηκε τον Νοέμβριο του 1676 αναφέρει:

«Πληρεξουσίου δια το ιεροσπουδαστήριον εν Ιωαννίνους εκλέγει και διορίζει τους κ. κ. Μιχαήλ Καραγιάννην, Λεονδάρην Γλυκήν, και Ιωάννην Ιερομνήμονα. οίτινες θα έχουν το δικαίωμα να διορίσουν τρεις άλλους Επιτρόπους εκ της αυτής πόλεως Ιωαννίνων, ίνα τους αντικαταστήσουν μετά θάνατον και ούτω διαδοχικώς οι εκλεγόμενοι δέον να διορίζοσι και αντικαταστάτας», Κ. Δ. Μέρτζιου, «Ηπειρωτικά Χρονικά», Το εν Βενετία Ηπειρωτικών Αρχείον, σελ 98

Συγκεκριμένα, ο Μάνος Γκιόνμας, πλούσιος έμπορος της Βενετίας, ίδρυσε στην πόλη των Ιωαννίνων, την «Σχολή του Γκιόνμα» η οποία λειτουργήσε αδιάκοπα από το 1676 μέχρι το 1820. Την εποπτεία της Σχολής ανέθεσε σε τριμελή επιτροπή²¹¹ και είχε εξασφαλιστεί με πατριαρχικό σιγίλιο, η ανεξαρτησία της από τις επεμβάσεις των προκρίτων της πόλης και του μητροπολίτη. «Εκ τούτου καθίσταται φανερόν ότι είχε μάλλον λαϊκόν χαρακτήρα και απέβλεπε κυρίως εις την ανάπτυξιν των επιστημών την οποίαν και επέτυχε κατά τους πρώτους κυρίως χρόνους.»²¹²

Στην διαθήκη του ο Γκιόνμας έδινε εντολή η ανέγερση της Σχολής, να γίνει «...εις μέρος κείμενον εγγύς μιας Εκκλησίας, της εκλογής των κάτωθι ονομασθησομένων πληρεξουσίων επιτρόπων εν Ιωαννίνους, και παρ' αυτών δέον να εκλέγεται,και άλλος διδάσκαλος Έλλην, καλής φήμης και διαγωγής, έξυπνος και δόκιμος εις τας επιστήμας, με τον ολιγώτερον μισθόν που θα ημπορέσουν, όστις θα είναι υποχρεωμένος να διδάσκη Γραμματικήν, ανθρωπισμόν και επιστήμας Ελληνιστί εις τα παιδιά τα οποία θα εισαχθούν εις το ρηθέν Ιεροσπουδαστήριον...»²¹³

Ο Επιφάνιος, πλούσιος έμπορος της Βενετίας επίσης, διέθεσε ένα σημαντικό ποσόν για την ίδρυση σχολής στην πατρίδα του, τα Ιωάννινα, η οποία ονομάστηκε «Σχολή του Επιφανίου» και λειτουργήσε από το 1658 έως την κατάλυση της Ενετικής Δημοκρατίας το 1797.²¹⁴ Την σχολή του Επιφανίου διηύθυνε πενταμελής επιτροπή, εκλεγμένη από τον ιδρυτή της, με πρόεδρο τον Μητροπολίτη Ιωαννίνων «και εξηττάτο συνεπώς από της εκκλησίας ως συνέβαινε και με τας διαδεχθείσας αυτήν Μαρούτσιον και Καπλάνειον».²¹⁵ Τα διδασκόμενα μαθήματα στις δύο σχολές είχαν οριστεί από τους ιδρυτές τους να είναι «γραμματική, ανθρωπισμός και άλλα επιστήμα»²¹⁶

1.2.4 Ο Σχολάρχης

Πρωτεύοντα ρόλο για την ομαλή και επιτυχή λειτουργία μιας σχολής είχε ο διευθυντής της, (σχολάρχης), ο οποίος, όπως γινόταν στα ανώτερα σχολεία του 17^{ου} αιώνα, δίδασκε όλα τα μαθήματα, αφού ήταν και ο μοναδικός δάσκαλος της σχολής.

²¹¹ Κ. Δ. Μέρτζιου, «Ηπειρωτικά Χρονικά», Το εν Βενετία Ηπειρωτικόν Αρχειον, σελ 98

²¹² Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησης του Γένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα», ΑΘΗΝΑ 1976, σελ 16

²¹³ Κ. Δ. Μέρτζιου, «Ηπειρωτικά Χρονικά», Το εν Βενετία Ηπειρωτικόν Αρχειον, σελ 103

²¹⁴ Ο Αραβαντινός και ο Λάμπρος τοποθετούν την έναρξιν της λειτουργίας της εις το 1658, αλλ' ο Μέρτζιος εϋρεν εις τα πρακτικά της Ελληνικής κοινότητος Βενετίας εγγραφήν του 1662, κατά την οποίαν «επειδή δεν παρουσιάσθη διδάσκαλος κατάλληλος μέχρι σήμερον συμφώνως τη θελήσει του διαθέτου», τα δια τον διδάσκαλον προοριζόμενα χρήματα διατίθενται δι άλλον σκοπόν. Παναγιώτου Κ. Χρήστου, Ανθρακίτης Μεθόδιος, Έκδοσις Ηπειρωτικής Εστίας, Ιωάννινα-1953 σελ 15

²¹⁵ ο. α. σελ, 16

²¹⁶ Στην διαθήκη του ο Επιφάνιος Ηγούμενος, (2 Δεκεμβρίου 1647), γράφει: «...ίνα από τους επιτρόπους μου διορισθῇ εις Έλλην διδάσκαλος, υπό την έγκρισιν του Συλλόγου των 40 και προσθήκης, της εκκλ. του Αγίου Γεωργίου των Γραικών, πρόσωπον εγγράμματων και έμπειρον εις τας επιστήμας και ελληνικά δόγματα, όστις δέον να διαμένει εν τη ρηθείση πόλει της Γιάννινας και εκεί να είναι υποχρεωμένος να διδάσκη γραμματικήν, ανθρωπισμόν και άλλας επιστήμας και γράμματα ελληνικά εις τα παιδιά και τα κοράσια τα οποία θα θελήσουν τα μάθουν, ο οποίος διδάσκαλος πρέπει να εκλέγεται κατά τριετίαν.....ότι εκείνος που θα εκλεγῇ ἢ θα κληρωθῇ ως διδάσκαλος θα είναι πρόσωπον καλών ηθών, ενάρετος, πεπαιδευμένος και ικανός δι' αυτήν την θέσιν». Κ. Β. Μέρτζιου, Το εν Βενετία Ηπειρωτικόν Αρχειον, εν Ιωαννίνους 1936, σελ 35

Μετά την ίδρυση ενός ανώτερου σχολείου, δύο ήταν οι προϋποθέσεις για την ομαλή και επιτυχή λειτουργία του: η εξασφάλιση των απαιτούμενων οικονομικών πόρων και η κατάλληλη επιλογή του δασκάλου- διευθυντή. Ο διαθέτης, με τη δωρεά ή το κληροδότημα ικανοποιούσε την πρώτη. Η δεύτερη, απαιτούσε την παρουσία ικανού λόγιου στην σχολαρχία, η οποία δεν ήταν εύκολο να εξασφαλιστεί, αφού σπάνιζαν οι λόγιοι στον τουρκοκρατούμενο ελληνικό χώρο ιδίως μέσα στο πρώτο μισό του 17^{ου} αιώνα.

Η «Σχολή Επιφανίου» των Ιωαννίνων άρχισε να λειτουργεί μία δεκαετία περίπου μετά την ίδρυσή της «επειδή δεν παρουσιάσθη διδάσκαλος κατάλληλος μέχρι σήμερα, συμφώνως τη θελήσει του διαθέτου...».²¹⁷ Η Σχολή της Φουρνάς (1743-1768), διέκωσε την λειτουργία της όταν μετά το θάνατο του σχολάρχη και ιδρυτή της Θεοφάνη το 1768, δεν βρέθηκε δάσκαλος να τον αντικαταστήσει. Ο λόγιος Σέργιος Μακραιός, μαθητής του Θεοφάνη, παρά τις επανειλημμένες παρακλήσεις του δασκάλου του, δεν ανέλαβε την διεύθυνση της Σχολής.²¹⁸ Η σχολή των Αθηνών η οποία ιδρύθηκε από τον Επιφάνιο Ηγούμενο λειτούργησε το 1683 με καθυστέρηση....επειδή έλλειπε ο κατάλληλος δάσκαλος για να αναλάβει την σχολαρχία.²¹⁹

Σε κάποιες περιπτώσεις, ο ιδρυτής μιας σχολής, απευθύνονταν σε κάποιο γνωστό λόγιο που ζούσε στη Δύση, ο οποίος, δεν ανταποκρίνονταν πάντα θετικά στην πρόταση για την ανάληψη της σχολαρχίας. Ο λόγιος Ερμόδωρος Λήσταρχος, ο οποίος δίδασκε στην Φερράρα δεν ανταποκρίθηκε σε πρόσκληση που του έγινε το 1547 από τον Πατριάρχη Διονύσιο Β΄, προκειμένου να αναλάβει την διεύθυνση σχολείου που προσπαθούσε να συγκροτήσει ο Διονύσιος, παρ' όλο που ο τελευταίος του υποσχέθηκε ότι η αμοιβή του θα ήταν ίδια με εκείνη που του έδιναν οι Ιταλοί.²²⁰

Αφού η παρουσία ικανού δασκάλου ήταν τόσο σημαντική για την επιτυχή λειτουργία ενός σχολείου, ο χρόνος λειτουργίας του, στις περισσότερες περιπτώσεις, ταυτιζόταν με το διάστημα παραμονής του δασκάλου – διευθυντή στο σχολείο. Δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις που όταν ο δάσκαλος αποφάσιζε ή αναγκαζόταν να εγκαταλείψει το σχολείο, και αυτό παρήκμαζε ή έπαυε να λειτουργεί. Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα αποτελεί η πορεία της Αθωνιάδας Σχολής.

Η Αθωνιάδα, η οποία την εποχή που ο Ευγένιος Βούλγαρης ανέλαβε την σχολαρχία της, το 1753, απαρτιζόταν μόλις 20 μαθητές, αναδείχτηκε με την διδασκαλία του επιφανούς αυτού λόγιου σε ένα λαμπρό εκπαιδευτικό ίδρυμα με 200 μαθητές μέσα σε ένα διάστημα μόλις πέντε ετών. Μετά την αιφνίδια αποχώρηση του Βούλγαρη από την σχολή, το 1759, πολλοί μαθητές του τον ακολούθησαν και η σχολή άρχισε με ραγδαίο ρυθμό να παρακμάζει, να υπολειτουργεί και μόλις δύο χρόνια μετά την αποχώρηση του Βούλγαρη, το 1761, διέκοψε την λειτουργία της. Μόνο το 1782, είκοσι χρόνια μετά, έχουμε μαρτυρίες για την επαναλειτουργία της.²²¹ «Που ο κλεινός Ευγένιος; Πού η πολυπληθής χορεία των μαθητών.....; Εφυγαδεύθη εκείνος, εφυγαδεύθη αυτή.

²¹⁷ Κ. Β. Μέρτζιου, Το εν Βενετία Ηπειρωτικών Αρχείον, εν Ιωαννίνους 1936, σελ 97

²¹⁸ Κων/νος Χατζόπουλος, «Ελληνικά σχολεία στην περίοδο της Οθωμανικής κυριαρχίας», (1453-1821), σελ. 113

²¹⁹ Κ. Β. Μέρτζιου, Το εν Βενετία Ηπειρωτικών Αρχείον, εν Ιωαννίνους 1936, σελ 84

²²⁰ Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, «Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία», (περίοδος 1453-1669), σελ. 373

²²¹ Άλκης Αγγέλου, «Το χρονικό της Αθωνιάδας, Των Φώτων, Όψεις του νεοελληνικού Διαφωτισμού», Ερμής, Αθήνα 2000, σελ.128

Βροντή νεμέσεως επέπεσε, και εσκόρπισε διδάσκοντας και διδασκομένους...» γράφει ο Μοισιόδακας παλιός τρόφιμος της σχολής και μαθητής του Βούλγαρη για την Αθωνιάδα.²²²

Δηλαδή, οι ανώτερες Σχολές της περιόδου αυτής ήταν προσωποπαγείς. Ο μοναδικός δάσκαλος,²²³ στον οποίο, είχε ανατεθεί η διεύθυνση της Σχολής από τον διαθέτη, δίδασκε όλα τα μαθήματα όπως έχει ήδη αναφερθεί. Δεσπόζουσα μορφή κάθε σχολείου ήταν ο δάσκαλος. Στην κυρίαρχη για τη Σχολή προσωπικότητά του και στο κύρος του στηριζόταν η ομαλή και επιτυχής λειτουργία της Σχολής.

Μόνον αργότερα, από τον 18^ο αιώνα, σε κάποιες περιπτώσεις, τον δάσκαλο, υποβοηθούσε στο έργο του και κάποιος ή κάποιοι υποδιδάσκαλοι, ενώ μετά τα μέσα του 18^{ου} αιώνα, όταν έγινε η εισαγωγή των «επιστημών» στα εκπαιδευτικά προγράμματα των Σχολών, δίδασκαν δάσκαλοι διαφορετικών ειδικοτήτων. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι εννέα δάσκαλοι προβλέπονταν από το χρυσόβουλο του Αλεξάνδρου Υψηλάντη, το 1776, για τη Σχολή του Βουκουρεστίου,²²⁴ ενώ στη Σχολή της Χίου επί σχολαρχίας του Νικόλαου Βάμβα (1815-1821) δίδασκαν δεκατέσσερις δάσκαλοι.²²⁵ Τα μαθήματα τα οποία δίδασκονταν, ορίζονταν από τον ιδρυτή του σχολείου και καθόριζαν τον στόχο της παρεχόμενης παιδείας, που, στην εποχή αυτή, ήταν καθαρά ηθικοπλαστικός.

Για τα προσόντα που θα έπρεπε να έχει ο δάσκαλος ώστε να επιτυγχάνεται ο στόχος αυτός της παιδείας, είναι χαρακτηριστική η περιγραφή που δίνεται στο πατριαρχικό σιγίλιο και αφορά στην πρόσληψη δασκάλου στην Σχολή της Σκοπέλου:

«άξιος εις διδασκαλίαν, μη μόνον τη θύραθεν παιδεία, αλλά και τοις τρόποις, και τω βίω, και χρηστοίς ήθεσι κεκοσμημένος, και δυνάμενος άμα και προς λόγους και προς ευσεβειαν καταρτίζειν και χειραγωγείν τους νέους».

Οι απόφοιτοι των πρώτων αυτών Σχολών, προσοριζονταν κυρίως για να στελεχώσουν την εκπαίδευση, της οποίας οι ανάγκες για μορφωμένο διδακτικό προσωπικό ήταν μεγάλες.

1.2.5 Ο θεσμός των υποτροφιών

Ο προσωποπαγής χαρακτήρας των ανώτερων σχολείων της εποχής αυτής, σε πολλές περιπτώσεις, δυσκόλευε πολύ και την φοίτηση των Ελλήνων μαθητών.

Όταν ο δάσκαλος αποχωρούσε από μία σχολή για μία άλλη, ο μαθητής, εάν ήθελε να συνεχίσει τις σπουδές του, έπρεπε να τον ακολουθήσει. Αυτό δεν ήταν πάντα εφικτό γιατί πολλοί μαθητές, εξ αιτίας της μεγάλης φτώχειας, δεν ήταν σε θέση να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα διαβίωσης που δημιουργούσε η παραμονή τους μακριά από τον τόπο της κατοικίας τους.

²²² ο. α. σελ. 112

²²³ Ο Μ. Η. Μαλανδράκης, στο έργο του «Πατμιάς Σχολή», σελ 5, αναφέρει ότι διευθυντής της Πατμιάδας Σχολής, Μακάριος Καλογεράς «εδίδασκε μόνος δι' όλης της ημέρας υφιστάμενος ατρύτους πόνους»

²²⁴ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησης του Γένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα», ΑΘΗΝΑ 1976, σελ. 13

²²⁵ Κων/νος Χατζόπουλος, ««Ελληνικά σχολεία στην περίοδο της Οθωμανικής κυριαρχίας». (1453-1821), σελ.247

Πολλές ήταν οι περιπτώσεις μαθητών, οι οποίοι για το λόγο αυτό αναγκάστηκαν να διακόψουν τις σπουδές τους. Πολλές είναι ακόμα και οι περιπτώσεις εκείνων, οι οποίοι δεν μπορούσαν να αφιερωθούν στις σπουδές τους, αφού εργάζονταν, προκειμένου να εξασφαλίσουν τα βασικά για την συντήρησή τους.

Ο Ευγένιος Βούλγαρης, το 1753, κατά την περίοδο της σχολαρχίας του στην Αθωνιάδα σε επιστολή του προς τον Πατριάρχη Κύριλλο τον πληροφορεί ότι «οι πτωχοί μαθηταί στενοχωρούνται επισωρευμένοι επ' αλλήλοις ανά δύο τρεις εν στενωτάτοις οικίσκοις στοιβαζόμενοι, οι δε καλύβας αυτοσχεδίους πηγνύουσιν από του χειμῶνος επηρειών αμυνόμενοι»²²⁶. Εξάλλου, από επιστολή του Μάρκου Πορφυρόπουλου στο Χρυσάνθο Νοταρά, μαθαίνουμε ότι στο Βουκουρέστι το 1710, «των νυν μαθητών οι πλείονες είναι δουλωμένοι εις αρχοντικά, και μόλις δύο μήνες το χρόνο σπουδάζουσιν».²²⁷

Μόνον αργότερα, από τα μέσα του 18^ο αιώνα, πολλοί από τους ιδρυτές των σχολών, για να απαλλάξουν τους φτωχούς και άπορους μαθητές από τις βιοτικές μέριμνες, καθιέρωσαν το θεσμό των υποτροφιών. Ο διαθέτης παρείχε τροφή, στέγη και βιβλία (σε κάποιες περιπτώσεις και ένδυση) στους άπορους μαθητές. Αλλά και σε σχολεία του 17^{ου} αιώνα συναντάμε τη μέριμνα του διαθέτη για τους άπορους μαθητές.

Στην σχολή του Βουκουρεστίου, μετά από την αναδιοργάνωσή της από τον Αλέξανδρο Υψηλάντη το 1776, φοιτούσαν στην σχολή 75 άποροι υπότροφοι μαθητές.²²⁸

Η Σχολή του Καρπενήσιου η οποία ιδρύθηκε το 1645, διέθετε πολλά «κελλία» για τους φτωχούς οικότροφους σπουδαστές, οι οποίοι έρχονταν από όλη την περιοχή των Αγράφων, για να ακούσουν την διδασκαλία του εξαιρέτου λόγιου και ιδρυτή της Σχολής, Ευγένιου Γιαννούλη.²²⁹

Στο «Φροντιστήριο των Αγίων Αναργύρων» το οποίο λειτουργούσε στην Χίο στα μέσα του 17^{ου} αιώνα, είχαν προβλεφθεί ειδικά διαμορφωμένα δωμάτια για την διαμονή ξένων μαθητών οι οποίοι φοιτούσαν στο σχολείο.

Επιστολή «εν Ιουνίω μηνί του ε'τους 1745, αφορά μεν εις υποστήριξιν υλικήν των εν τη σχολή της Πάτμου σπουδαζόντων, μαυθάνει δ' ημάς ότι,κατά την προφορικήν μαρτυρίαν του διδασκάλου Αρσενίου, πολλοί των μαθητών, ένεκεν ανεχειας, ηναγκάζοντο να καταλείπωσιν ημιτελής τας σπουδάς και ν' αναχωρώσιν. αλλ' επεφάνησαν αυτοίς πάλιν προστάται γενναίοι της φιλογενούς συντεχνίας των γουναράδων οι προύχοντες, διενεργήσαντες συνδρομήν εκ τρισχιλίων και πεντακοσίων γροσίων, όπως ο τόκος αυτών,δίδηται δια του διδασκάλου τοις ενδεέσι των μαθητώνπρος περιθαλψιν και κυβέρνησιν αυτών.»²³⁰

Στην Σχολή της Μυτιλήνης της οποίας οι πόροι για την λειτουργία της ήταν 400 γρόσια ετησίως, όπως αναφέρεται σε «συστατικό και βεβαιωτήριο γράμμα» που αφορά

²²⁶ Άλκης Αγγέλου, «Το χρονικό της Αθωνιάδας, Των Φώτων. Όψεις του νεοελληνικού Διαφωτισμού», Ερμής, Αθήνα 2000, σελ.120

²²⁷ Αγγελική Σκαρβέλη- Νικολοπούλου, «Μαθηματάρια των ελληνικών σχολείων κατά την τουρκοκρατία» Αθήνα 1994, σελ 335

²²⁸ ο. α. σελ.200

²²⁹ Κων/νος Χατζόπουλος, «Ελληνικά σχολεία στην περίοδο της Οθωμανικής κυριαρχίας», (1453-1821), σελ.109

²³⁰ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησης του Γένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα» Αθήνα 1976, σελ. 8

στη Σχολή, «από των τετρακοσίων τούτων γροσίων ωρίσθη και ο διδάσκαλος να μισθοδοτηται και πτωχοί μαθηταί εν ταίς σπουδές αυτών να υποστηρίζονται»²³¹

Ο θεσμός των υποτροφιών γενικεύτηκε στα τέλη του 18^{ου} αιώνα, αν και ο αριθμός τους σε κάποιες σχολές, δεν κάλυπτε όλες τις περιπτώσεις των άπορων μαθητών όπως ήταν η περίπτωση της Αθωνιάδας.

Συγκεκριμένα, ο Ευγένιος Βούλγαρης, μαρτυρεί για την περίοδο της σχολαρχίας του στην Αθωνιάδα, (1753-1759), ότι τα 2/3 των μαθητών ήταν άποροι και για τον λόγο αυτό πολλοί διέκοπταν τη φοίτησή τους πριν να ολοκληρώσουν τις σπουδές τους. «Οι δε πολλοί και τον άρτον τον καθ' ημέραν αυτόν δάνειον εκ του παρ' ημίν αρτοπώλου λαμβάνοντες, ουδ' εν ελπίδι γουν ευτυχούσιν οι τάλαντες»²³²

1.2.6 Ανώτερα σχολεία (1600-1750)

Από τα μέσα του 17^{ου} αιώνα αυξάνεται το ενδιαφέρον για την ίδρυση ανώτερων σχολείων. Τα σχολεία, «...ιδίως από της ΙΖ' Εκατ. υπερμεσούσης, έλαβον άλλην μορφήν, εγένοντο κατά την φράσιν του Ελλαδίου *Γυμνάσια* τα δε υπάρχοντα επολλλαπλασιάζοντο»²³³.

«Ως ανώτερα σχολεία είναι δυνατόν να χαρακτηρισθούν πρώται αι εν Ιωαννίνους ιδρυθείσαι κατά τον 17 αιώνα σχολαί, αι οποιαί απετέλουν αυτοτελή ιδρύματα με ιδίαν διοίκησιν και ιδίον οικονομικόν εξοπλισμόν. Παρόμοιαι σχολαί ιδρύθησαν βραδύτερον υπό την άμεσον επίδρασιν της πνευματικής κινήσεως των Ιωαννίνων εις τας γειτονικάς προς την Ήπειρον επαρχίας της Θεσσαλίας και της Δυτικής Μακεδονίας, εις τας Αθήνας (υπό του Ιωαννίτου Επιφανείου Ηγουμένου) και αλλαχού.»²³⁴

Ο Επιφάνιος, πλούσιος έμπορος της Βενετίας, το 1647, διέθεσε ένα σημαντικό ποσόν για την ίδρυση σχολής στην πατρίδα του, τα Ιωάννινα, η οποία ονομάστηκε «Σχολή του Επιφανίου» και λειτούργησε από το 1658 έως την κατάλυση της Ενετικής Δημοκρατίας το 1797.²³⁵

Ο μοναχός, Ευγένιος Γιαννούλης ο Αιτωλός, αξιόλογος λόγιος του 17^{ου} αιώνα, ίδρυσε με την συμπαράσταση των κατοίκων ανώτερες σχολές, στο Καρπενήσι το 1645 και στα Βραγγιανά, το 1662²³⁶, στις οποίες διδάσκονταν κυρίως «ελληνικά και θεολογικά μαθήματα» καθώς και η αριστοτελική φιλοσοφία.²³⁷

Το 1667 ο ιδρυτής της ομώνυμης Σχολής των Ιωαννίνων, Επιφάνιος, ίδρυσε στην

²³¹ ο. α. σελ, 9

²³² Άλκης Αγγέλου, «Το χρονικό της Αθωνιάδας. Των Φώτων, Οψεις του νεοελληνικού Διαφωτισμού». Ερμής, Αθήνα 2000, σελ 124

²³³ Ματθαίου Παρνίκα, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ.41

²³⁴ Παναγιώτου Κ. Χρήστου, Ανθρακίτης Μεθόδιος, Έκδοσις Ηπειρωτικής Εστίας, Ιωάννινα 1953, σελ 14

²³⁵ Ο Αραβαντινός και ο Λάμπρος τοποθετούν την έναρξιν της λειτουργίας της εις το 1658. αλλ' ο Μέρτζιος εύρεν εις τα πρακτικά της Ελληνικής κοινότητος Βενετίας εγγραφήν του 1662, κατά την οποίαν «επειδή δεν παρουσιάσθη διδάσκαλος κατάλληλος μέχρι σήμεραν συμφώνως τη θελήσει του διαθέτου», τα δια τον διδάσκαλον προοριζόμενα χρήματα διατίθενται δι άλλον σκοπόν. Παναγιώτου Κ. Χρήστου, Ανθρακίτης Μεθόδιος, Έκδοσις Ηπειρωτικής Εστίας, Ιωάννινα, 1953, σελ 15

²³⁶ Δ. Γ. Τσάκωνα, «Ηπειρωτική Εστία», τεύχος 81, σελ. 3

²³⁷ Κων/νος Χατζόπουλος, «Ελληνικά σχολεία στην περίοδο της Οθωμανικής κυριαρχίας», (1453-1821), σελ. 112

Αθήνα, Σχολή, «εν ή εδιδάσκοντο η γραμματική, η φιλοσοφία, αι επιστήμαι»²³⁸

Ο Μάνος Γκιόνμας, πλούσιος έμπορος της Βενετίας επίσης, ίδρυσε στην πόλη των Ιωαννίνων, την «Σχολή του Γκιόνμα» η οποία λειτούργησε αδιάκοπα από το 1676²³⁹ μέχρι το 1820.

Στα μέσα του 17^{ου} αιώνα λειτουργούσε στη Χίο το «Φροντιστήριο των Αγίων Αναργύρων», ενώ ο πλούσιος έμπορος της Κωνσταντινούπολης Μανωλάκης Καστοριανός, ίδρυσε στο νησί, το 1660²⁴⁰, σχολή, κοντά στο ναό του Αγίου Βίκτωρος, η οποία πιθανόν αποτελούσε την συνέχεια του «Φροντιστηρίου».

Στα τέλη του 17^{ου} αιώνα, ιδρύθηκε στην Μοσχόπολη ανώτερη Σχολή η οποία εξελίχτηκε σε ένα από τα λαμπρότερα εκπαιδευτήρια του ελληνισμού του 18^{ου} αιώνα.

Στην Καστοριά στα μέσα του 17^{ου} αιώνα λειτουργούσε Σχολή, στην οποία διδασκε από το 1710 ο Μεθόδιος Ανθρακίτης.²⁴¹

Εκτός από τον συνεχώς αυξανόμενο αριθμό των ανώτερων σχολείων κατά την διάρκεια 17^{ου} αιώνα, η στοιχειώδης εκπαίδευση γενικεύτηκε με την εκτεταμένη ίδρυση κοινών σχολείων: «οι μαθηταί των μεγάλων διδασκάλων εγένοντο διδάσκαλοι των μικροτέρων πόλεων, κωμών και χωρίων, ούτω δε από των μειζόνων ως από κέντρων τα φώτα διεδιδόντο ακτινιδόν, το δ' Έθνος βαθμηδόν εμορφούτο και ησθάνετο υψηλότερα»²⁴²

Πέντε πατριαρχικά σιγίλια τα οποία χρονολογούνται ανάμεσα στο 1720 και 1735 εκδόθηκαν για την ανασύσταση ή την ίδρυση των πρώτων σχολών του 18^{ου} αιώνα.²⁴³

Το πρώτο από αυτά αναφέρεται στην αναδιοργάνωση της Σχολής της Πάτμου με δαπάνη του ευεργέτη της παιδείας Κυρίτζη Μανολάκη και τα επόμενα, στην ίδρυση σχολών στην Σκόπελο, Αθήνα, Σιάτιστα και Τρίκαλα.

Η Σχολή της Σκοπέλου ονομάζεται στο πατριαρχικό σιγίλιο «των εγκυκλίων και των φιλοσοφικών μαθημάτων», και η σχολή των Αθηνών χαρακτηρίζεται «φροντιστήριον ελληνικών άμα τε και κοινών μαθημάτων», εκφράσεις που υποδηλώνουν ότι επρόκειτο για ανώτερες σχολές.

Ο χαρακτηρισμός «φροντιστήριον» τον οποίο συναντάμε στο σιγίλιο για την Σχολή στην Σιάτιστα, την κατατάσσει πιθανότατα στις ανώτερες σχολές, ενώ το πρόγραμμα του σχολείου των Τρικάλων δείχνει ότι πρόκειται για κοινό σχολείο.²⁴⁴

Το 1713 ο ιεροδιάκονος Μακάριος Καλογεράς ίδρυσε στην πατρίδα του, την Πάτμο, την «Πατμιάδα σχολή»²⁴⁵

²³⁸ Κ. Δ. Μέρτζιου, «Ηπειρωτικά Χρονικά», Το εν Βενετία Ηπειρωτικών Αρχείων, σελ 84

²³⁹ Σ. Π. Λάμπρου, Νέος Ελληνισμός, τόμος 13^{ος}, σελ. 288

²⁴⁰ Τ. Τρύφωνος Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}, Εν Αθήναις 1936, τόμος 2^{ος}, σελ. 135.

²⁴¹ ο.α.σελ 118

²⁴² ο.α. σελ 41

²⁴³ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησης του Γένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα», Αθήνα 1976, σελ

2

²⁴⁴ ο. α. σελ 7

²⁴⁵ Μ. Η. Μαλανδράκη, «Πατμιάς Σχολή», Εν Αθήναις 1911, σελ 4

Στις αρχές του 18^{ου} αιώνα φαίνεται ότι στον Τύρναβο λειτουργούσε Σχολή, η οποία μεταρρυθμίσθηκε το 1702 από τον Λαρισαίο λόγιο Παρθένιο.²⁴⁶

Στις αρχές του 18^{ου} αιώνα επίσης στην Ζαγορά, (1712) φαίνεται ότι λειτουργούσε Σχολή Ελληνική.²⁴⁷

Στην Σμύρνη το 1733 οι έμποροι της Σμύρνης Παντολέοντας Σεβαστόπουλος, Γεώργιος Όμηρος και Γεώργιος Βιτάλης αποφάσισαν την ίδρυση Σχολής, της οποίας η λειτουργία παγιώθηκε το 1743 και ονομάστηκε Ευαγγελική Σχολή.²⁴⁸

Το 1742²⁴⁹ οι μεγαλέμποροι Ιωαννίτες της Βενετίας, Σίμος και Λάμπρος Μαρούτσης,²⁵⁰ με σημαντικό ποσόν το οποίο διέθεσαν, αναδιοργάνωσαν την παρακάμζουσα «Επιφάνιο Σχολή», η οποία προς τιμήν τους μετονομάστηκε «Μαρουτσαία».

Στα Αμπελάκια πριν από τα μέσα του 18^{ου} αιώνα λειτουργούσε Σχολή, της οποίας αγνοούμε τους δασκάλους μέχρι το 1777.²⁵¹

1.3 Η κατάσταση της παιδείας από τα μέσα του 18^{ου} αιώνα μέχρι την Ελληνική επανάσταση

1.3.1 Γενικά

Από τα μέσα του 18^{ου} αιώνα ευνοϊκότερες συνθήκες για τη διάδοση και κυρίως για την ποιοτική αναβάθμιση της παιδείας δημιουργήθηκαν από

- Την ολοένα και μεγαλύτερη προσέλευση των Ελλήνων λογίων από τα κέντρα του παροικιακού ελληνισμού και κυρίως της Δύσης, στις τουρκοκρατούμενες ελληνικές χώρες, οι οποίοι στελέχωσαν τα ήδη υπάρχοντα εκπαιδευτικά ιδρύματα ή συνετέλεσαν στην ίδρυση νέων.
- Την ανάρρηση στους θρόνους των παραδουνάβειων Ηγεμονιών, (Μολδαβία, Βλαχία), φωτισμένων Ελλήνων ηγεμόνων (φαναριωτών),²⁵² οι οποίοι καλλιέργησαν τα ελληνικά γράμματα και με τη σημαντική συμβολή τους εξύψωσαν τις δύο Ακαδημίες που λειτουργούσαν στο Βουκουρέστι και το Ιάσιο, στα σημαντικότερα εκπαιδευτικά ιδρύματα του ελληνισμού του 18^{ου} και των αρχών του 19^{ου} αιώνα.
- Τη διαμόρφωση μιας ισχυρής αστικής τάξης, –της τάξης των εμπόρων–, η οποία

²⁴⁶ Τρύφωνος Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}, Εν Αθήναις 1936, σελ.

²⁴⁷ ο.α. σελ. 201

²⁴⁸ Ματθαίου Παρνικά, «Σχεδιασμοί», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ.115

²⁴⁹ Κ. Δ. Μέρτζιου, «Ηπειρωτικά Χρονικά», Το εν Βενετία Ηπειρωτικόν Αρχαίον, σελ 181

²⁵⁰ Σ. Π. Λάμπρου, Νέος Ελληνισμός, τόμος 13^{ος}, σελ. 290

²⁵¹ Τρύφωνος Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}, Εν Αθήναις 1936, σελ 217

²⁵² Ο έγκριτος μελετητής της παιδείας κατά την διάρκεια της τουρκοκρατίας, Μανουήλ Γεδεών γράφει: «... διότι εις ανωτάτας πολιτικές αρχάς οι ομογενείς υψωθέντες επεδείξαντο προστασίαν εις τους πεπαιδευμένους, θέλοντες ν' αρδεύσωσιν ούτω την καθ' ημάς ευσεβοστρόφον άρουραν εις το παράγειν ζώντα πρότυπα και διδασκάλων ευσυνειδήτως εκπληρούντων την αποστολήν αυτών, και λογίων ευσυνειδήτως σπουδόντων εις υπηρεσίαν του διψώντος φωτός παιδείας ομογενούς, και αρχιερέων μετά ζήλου προς επούλωσιν εκκλησιαστικών- εθνικών πληγών αγωνιζομένων»

αναπτύχθηκε παράλληλα με τη ραγδαία ανάπτυξη του εμπορίου, μετά την συνθήκη του Κιουτσούκ-Καϊναρτζή και του Αϊνάλη Καβάκ.

- Την ολοένα αυξανόμενη κυκλοφορία του έντυπου σχολικού βιβλίου και την κατάρτιση βιβλιοθηκών σε πολλές από τις νεοσύστατες αλλά και τις ήδη υπάρχουσες Σχολές, ώστε να έχουν πρόσβαση σε αυτό και όσοι εκ των μαθητών λόγω του υψηλού του κόστους δεν μπορούσαν να το αποκτήσουν.

Την αισθητή βελτίωση σε ό,τι αφορά την παιδεία (διάδοση, ποιοτική αναβάθμιση, προγράμματα σπουδών) επιβεβαιώνουν μαρτυρίες λογίων της εποχής αλλά και σύγχρονοι μελετητές της παιδείας του ελληνισμού της ιστορικής περιόδου στην οποία αναφερόμαστε: «Μέσα στα μακρά χρόνια της ζωής του, από τα 1748, δηλαδή, ως τα 1833, κλείνονται μερικές από τις πιο σημαντικές σελίδες από όσες ευτύχησε να γράψει το γένος μας. Μέσα στα ογδονταπέντε αυτά χρόνια, αναρίθμητα είναι τα περιστατικά όσα μας σταματούν και μας αναγκάζουν να τα απομονώσουμε και να τα εξετάσουμε. Αποτόμες μεταβολές: αύξηση του αριθμού των βιβλίων που εκδίδονται, αύξηση του αριθμού των λογίων, αύξηση του αριθμού των σχολείων, αύξηση του εθνικού πλούτου, ο Ρήγας, ο Αγώνας, η ανεξαρτησία».²⁵³

«Πάντες ως από ληθάργου εγεθέντες», γράφει ο Φιλαδελφεύς, «ημιλώντο περί την μάθησιν... Η περί τα γράμματα σπουδή έφθασεν εις τον κολοφώνα. Σχολεία επί σχολείων ιδρύοντο, βιβλία πανταχού εξετυπούντο, περιοδικά συγγράμματα εξεδίδοντο μετά ζήλου, πανταχού υποστηριζόμενα. Η Ελλάς ομοιάζε μέγα χαλκείον διανοητικών, εν ώ εχαλκεύοντο τα όπλα δι ων έθραυσε κατόπιν τας αλύσεις της δουλείας».²⁵⁴

Ο Κοσμάς ο Αιτωλός, αναφέρει σε επιστολή του προς τον αδερφό του Χρυσάνθο το 1779 : «Το κατ' εμέ δε και περί εμέ φαίνονται πολλά και απίστευτα εις τους πολλούς και μήτε δύναμαι να τα καταλάβω...έως τριάκοντα επαρχίας περιήλθον, δέκα σχολεία ελληνικά εποίησα, διακόσια δια τα κοινά γράμματα».²⁵⁵

Ο Κοραΐς, το 1815 διαπιστώνει ενθουσιασμένος: «δεν έμεινεν αμφιβολία, πλην εις τας κεφαλάς των μαρών ή των κακών, ότι έφθασε και των Γραικών ο καλός καιρός. και έφθασε με τώσσην ορμήν ώστε καμμία δύναμις ανθρώπινος δεν είναι πλέον καλή να μας οπισθοποδίσση».²⁵⁶

Ο Άνθιμος Γαζής, αναφερόμενος στην Θεσσαλία, την ιδιαίτερη πατρίδα του, γράφει: «όλαι αι κωμοπόλεις έχουσι σχολεία Ελληνικά, όπου μικραί τινες βιβλιοθήκαι ευρίσκονταν».²⁵⁷

Ο έγκριτος μελετητής της ιστορίας παιδείας των χρόνων της τουρκοκρατίας, Μ.

²⁵³ Κ. Θ. Δημαράς, «Νεοελληνικός Διαφωτισμός», Νεοελληνικά μελετήματα, 2, Ερμής, Αθήνα 1993, σελ. 304

²⁵⁴ Φιλαδελφεύς, Θ., «Ιστορία των Αθηνών επί τουρκοκρατίας: 1400-1800. τόμος Β'. Αθήνα 1902, σελ.

265. το παράθεμα από: Αναστάσιος Β. Γιαννικόπουλος, «Η εκπαίδευση στην περίοδο της τουρκοκρατίας, εκδόσεις Γρηγόρη, Αθήνα 2001, σελ 16.

²⁵⁵ Γιάννη Καρρά, Οι Φυσικές Θετικές Επιστήμες στον Ελληνικό 18^ο αιώνα, Αθήνα 1977, GUTENBERG, σελ 16, («Νεοελληνική Επιστολογραφία», Αθήνα 1963)

²⁵⁶ Το παράθεμα από το έργο του Κ. Θ. Δημαρά, «Νεοελληνικός Διαφωτισμός», Νεοελληνικά μελετήματα, 2, Ερμής, Αθήνα 1993, σελ. 305.

²⁵⁷ Το παράθεμα από: Αναστάσιος Β. Γιαννικόπουλος, «Η εκπαίδευση στην περίοδο της τουρκοκρατίας, εκδόσεις Γρηγόρη, Αθήνα 2001, σελ 17

Γεδεών, γράφει: «επιτραπήσεται δε να χαρακτηρισθή το δεύτερον ήμισυ της ΙΗ' εκατονταετηρίδος ως εποχή μεταρρυθμίσεως της παρ' ημίν κατωτέρας, οίον ευτείν, παιδεύσεως και της παιδεύσεως, ήν παρείχον αι μικταί σχολαί, αι των κοινών ή ιερών γραμμάτων και των ελληνικών και εγκυκλίων μαθημάτων»²⁵⁸

Η «μεταρρύθμιση της παιδεύσεως», για την οποία κάνει λόγο ο Μ. Γεδεών αφορά κυρίως εις τα διδακτικά προγράμματα των ανώτερων σχολών τα οποία εμπλουτίστηκαν με τις νεοεισαχθείσες στον ελληνικό πνευματικό χώρο επιστήμες.

1.3.2 Διδακτικά προγράμματα ανώτερων Σχολών μετά τα μέσα του 18^{ου} αιώνα

Ενδεικτικά αναφέρουμε:

α). Το διδακτικό πρόγραμμα της Ακαδημίας στο Βουκουρέστι (1776)

Πρότυπο για τα προγράμματα σπουδών ανώτερων Σχολών, *ιδίως για το τμήμα το οποίο αφορά στα επιστημονικά μαθήματα*, αποτέλεσε ό,τι με το χρυσόβουλό του το 1776 ο φωτισμένος ηγεμόνας της Βλαχίας Αλέξανδρος Υψηλάντης επικύρωσε για την Ακαδημία στο Βουκουρέστι.

Συγκεκριμένα, το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Ηγεμονικής Ακαδημίας, ορίζει, όχι μόνο τον αριθμό των δασκάλων, - εννέα (9) «επιστημόνως έχοντας περί έκαστον είδος μαθήσεως»-, και τα διδασκόμενα μαθήματα, αλλά περιέχει και σαφείς οδηγίες προς τους δασκάλους για την επιλογή των διδασκομένων ενοτήτων, τον τρόπο καθώς και την χρονική διάρκεια διδασκαλίας των ενοτήτων αυτών: «τίθενται πέδα τινές τοις διδασκάλοις, μη δυναμένοις διδάσκειν ως ήθελον, αλλ' ως ήθελεν η αυλή»²⁵⁹

Το χρυσόβουλο του ηγεμόνα με βάση το οποίο διαρθρώθηκε η εκπαίδευση και σε άλλες ανώτερες σχολές της εποχής, προβλέπει: δύο δασκάλους των «Γραμματικών», δύο των Μαθηματικών και της Ιστορίας, ένα των Φυσικών, ένα των Θεολογικών και τρεις, ένα για κάθε μία από τις ξένες γλώσσες, τα Ιταλικά, τα Γαλλικά και τα Λατινικά. Με το χρυσόβουλο αποφασίζεται για «τον μεν των φυσικών διδάσκειν ελληνιστή, παρακολουθούντα τω Αριστοτέλει και τοις υπομνηματισταίς αυτού. τους δε των μαθηματικών, ήν μη τύχωσιν εγκρατείς ως δει της Ελλάδος φωνής, παραδιδόναι και τη λατινική, ή γαλλική, ή ιταλική διαλέκτω, εν οποιασούν διαλέκτω τύχωσιν ευδοκιμούντες».

Σε ό,τι αφορά στον χρόνο διάρκειας των σπουδών με το χρυσόβουλο αποφασίζεται:

«Τους πρωτοπείρους των μαθητών έτη τρία κατά συνέχειαν γυμνασθέντας περί μόνα τα γραμματικά, είτα αρχήν ποιείσθαι και της λατινίδος φωνής και εφεξής τρία έτη γυμνάζεσθαι άμα περί τε την ελληνικήν και λατινικήν, τοις άρίστοις των εκατέρας συγγαφών εγκύπτοντας. μετά δε την συμπλήρωσιν των έξ' ετών εφεξής τρία έτη ενδιατριβειν έωθεν μεν περί τα ποιητικά και ρητορικά ματά γυμνασμάτων ελληνικών τε και λατινικών και δη και περί την μελέτην των του Αριστοτέλους ηθικών. μετά δε το άριστον διδάσκεσθαι την ιταλικήν και γαλλικήν διάλεκτον. ούτω δ' ακριβώς

²⁵⁸ Μανουήλ Ι. Γεδεών. «Η πνευματική κίνησης του Γένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα» Ερμής, Νεοελληνικά Μελετήματα, ΑΘΗΝΑ 1999, σελ 13.

²⁵⁹ ο.α. σελ.14

προγυμνασθέντας εν έτεσιν εννέα και εγκρατείς γενομένους των τε γραμματικών και εγκυκλίων μαθημάτων και δη και των άλλων διαλέκτων πείραν όσον ένεστι λαβόντας μεταβαίνειν έπειτα εις την των επιστημονικών ακρόασιν. Και πρώτον εν όλοις έτεσι τρισί διδάσκεισθαι έωθεν μεν την αριθμητικήν και την γεωμετρίαν. μετά δε το άριστον τα της ιστορίας στοιχεία μετά της ιστορικής γεωγραφίας εν οποιαούν των ειρηνένων διαλέκτων. μετά δε ταύτα έωθεν μεν ακροάσθαι της αριστοτελικής φιλοσοφίας, μετά δε το άριστον αστρονομίας. αποχρώντως δε γυμνασθέντας περί εκάστην των επιστημών εξιέναι του λοιπού της σχολής και αιρείσθαι οπότερον αν βιον εθέλοι έκαστος, είτε εκκλησιαστικόν, είτε πολιτικόν. Αι δε πέντε τάξεις άς ανωτέρω έφημεν Εισίν αύται. Α΄, η των αρχαρίων εν τρισίν έτεσι περιστρεφομένη εν μόνοις τοις γραμματικοίς μαθήμασι. Β΄, η των προβεβηκότων εν έτεσιν έτι τρισί περί τα ελληνικά και λατινικά. Γ΄, η εν έτεσιν έτι τρισί περί τα ελληνικά κα λατινικά γραμματικά τε και ποιητικά και ρητορικά μετά γυμνασμάτων, και άμα περί την γαλλικήν και ιταλικήν διάλεκτον. Δ΄, η περι τα αριθμητικά, γεωμετρίαν και ιστορίαν μετά γεωγραφίας. Ε΄, και τελευταία η περί τα φυσικά και αστρονομία»²⁶⁰

Το εκσυγχρονιστικό πρόγραμμα σπουδών της Σχολής του Βουκουρεστίου με την προβλεπόμενη τριετή φοίτηση της διδασκαλίας των θετικών επιστημών, υιοθέτησαν από τα τέλη του 18^{ου} αιώνα και άλλες ανώτερες Σχολές. ανάλογα προγράμματα καταρτίστηκαν και για την Ακαδημία στις Κυδωνίες, την Πατριαρχική Ακαδημία, το Φιλολογικό Γυμνάσιο της Σμύρνης την Σχολή της Χίου κ.ά.

β). Το πρόγραμμα διδασκαλίας του Ι. Πέζαρου στην Σχολή του Τυρνάβου

Ο αξιόλογος δάσκαλος των επιστημών, Κωνσταντίνος Κούμας, στον ΙΒ΄ τόμο του έργου του «Ιστοριαί των ανθρωπίνων πράξεων»²⁶¹ μας πληροφορεί για το σύστημα διδασκαλίας του δασκάλου του, Ιωάννη Πέζαρου, ο οποίος διδάξε στον Τύρναβο της Θεσσαλίας από το 1782 μέχρι το τέλος του αιώνα²⁶²: «Εδιαίρει τους τους μαθητάς εις πολλάς κλάσεις προβαινούσας εκ των μικροτέρων εις τα μεγαλύτερα μαθήματα. Η κλάσις, την οποίαν εγύμναζεν εις την τεχνολογίαν των οκτώ μερών του λόγου, ήτο η κατωτάτη. δευτέρα ήτις ήρχιζε να αναλύη την σύνταξιν του λόγου. τρίτη ήτις εσύντασσε θέματα. τετάρτη, ήτις εγυμνάζετο τους επιστολικούς χαρακτήρας κατά τον Κορυδαλέα. η πέμπτη εκαταγίνετο εις τους ποιητάς. η έκτη εγεωμέτρει και εφίλοσόφει, ήτις πολλάκις εδιαίρειτο εις δύο. Γραμματικήν δεν ηθέλησε ποτέ άλλην παρά την του Λασκάρεως. ελληνικά μαθήματα παρέδιδε τας γνώμας του Χρυσολωρά, τους μύθους του Αισώπου, τον Λουκιανόν, όσα περιείχεν η εγκυκλοπαιδεία του Πατούσα, πολλούς λόγους του Δημοσθένους, την ιστορίαν του Ηρωδιανού, τας επιστολάς του Συνεσίου, τον Όμηρον και τους σκηνικούς ποιητάς. Θέματα υπηγόρευεν αυτοσχεδίως δις της εβδομάδος, πρώτον κατά τα είδη των ρημάτων, και έπειτα καθ' όλα τα είδη, χωρίς να εμποδίζει αυτόν από την παράδοσιν των άλλων μαθημάτων η διόρθωσις των θεμάτων. Εις την φιλοσοφίαν ήρχιζε συγχρόνως την εισαγωγήν της λογικής του Σουγδουρή, και τα

²⁶⁰ Α. Κομνηνού- Ψηλάντου, «Τα μετά την Άλωσιν», σελ 584-590.

²⁶¹ Κ. Μ. Κούμας, «Ιστοριαί των ανθρωπίνων πράξεων», τόμος 12^{ος}, Εν Βιέννι της Αυστρίας 1832. σελ. 569.

²⁶² Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησις του Γένους κατά τον ΙΗ΄ και ΙΘ΄ αιώνα», Ερμής, Νεοελληνικά Μελετήματα, Αθήνα 1999, σελ 12.

στοιχεία της γεωμετρίας του Ευκλείδου, μετέβαιναν εις την λογικήν του Ευγενίου, και εις την αριθμητικήν, εις την μεταφυσικήν του Γενουηνσίου, και εις το κατά Γένεσιν μαθηματικόν του Ευγενίου, εις την φυσικήν του Θεοδοκίου, και τέλος επέθετε το θεολογικόν του Ευγενίου. Παρέδιδεν αδιακόπτως όλον τον ενιαυτόν.... Ο υπέρ της ευσεβείας ζήλος του ήτο πάντοτε ζωντανός, το πρωί και αυτός και οι μαθηταί του υπέστρεφαν από την ακολουθίαν και λειτουργίαν της εκκλησίας, και ήρχιζαν την σπουδήν, και όταν ετελείωναν το βραδύ, αμέσως υπήγεναν εις τον εσπερινόν»

γ). Το διδακτικό πρόγραμμα της Πατριαρχικής Ακαδημίας το 1804

«....Τούτοις συν οικείως έχοντας προς τον σκοπόν αποκαθίστασθαι δει τον τε φιλόσοφον και τον πρώτον των γραμματικών, εφ' ώ αυτούς διδόναι λόγον τοις τε μαθημασιν επιδόσεως των μαθητών και της ευταξίας απάσης της Σχολής. και ο μεν φιλόσοφος τα πρώτα εν τοις διδασκάλοις φερέσθω, όστις άτε δη λιαν επωφελούς και ες τα μάλιστα συμφερούσης προς τε γύμνασιν νοός και εύρεσιν της αληθείας της των επιστημονικών μαθημάτων, οίον Αριθμητικής, Γεωμετρίας, Γεωγραφίας, Σφαιρικών, Αστρονομίας και των λοιπών της Φιλοσοφίας μαθημάτων παραδόσεως, ήτις μετά την εις τα γραμματικά και ποητικά και ρητορικά τελείωσιν δει γίγνεσθαι, παραδιδόναι ταύτα οφείλει μετά της προσηκούσης ακριβείας τε και επιμελείας. Ο δε πρώτος των γραμματικών διδάσκαλος μηδόλως υποκείσθω τω φιλοσόφω τα προς διδασκαλίαν των γραμματικών. εξησκημένος δε ών τα ρητορικά, μετά την του συντακτικού παράδοσιν διδασκέτω δια γυμνασμάτων και την ρητορικήν τέχνην. Αιρήσεται δε τη ειδήσει μέντοι των εφόρων και επιτρόπων υποδιδασκάλους δύο, τον μεν επί τοις σμικρόν τι επιδεδωκόσι, τον δε επί τοις των μαθημάτων προσαπτομένοις. Των δε γραμματικών έκαστος διδασκέτω σαφώς και διακεκριμένως της επιδόσεως των μαθητών ή δυνατόν στοχαζόμενος, ο μεν πρώτος το συντακτικόν, ο δε δεύτερος το ορθογραφικόν, σχηματιστικόν και κλιτικόν μέχρι των λεγομένων συμφωνιών, ο δε τρίτος τον Χρυσολωράν και Αίσωπον και Χρηστοθήειαν και τους τύπους της Γραμματικής προς διάκρισιν των οκτώ μερών του λόγου, όστις καταμενεί εν εν τη του Φαναρίου αρχαία Σχολή μέλος λογιζόμενη της ώδε, εξηρημένος του πρώτου των γραμματικών διδασκάλου. ο δε άπαξ γουν του μηνός απερχόμενος, ως δη επιστάτης εκείνου και έφορος αναθεωρείτο τα κατ' αυτόν και διορθούτω, ως εικός, όσα αν διορθώσεως δέωνται, και ούτως επιμελείσθωσαν άπαντες οι διδάσκαλοι προσάγειν μαθητάς έκαστου έτους ο μεν πρώτος των γραμματικών τω φιλοσόφω, ο δε δεύτερος των γραμματικών τω πρώτω, και ο τρίτος τω δευτέρω, ιν' ούτως αεί μη διαλείπη η των μαθητών προαγομένη επιδοσις. Έστω δ' επί της διδασκαλίας τιμωρίας επιτιθέναι τοις μαθηταίς προς σωφρονισμόν μεν τοι και επιδοσιν, αλλά μη αναιτιώς. Ήν γαρ τοιούτόν τι συμβή, τότε οι επίτροποι συμβουλαίς και παραινέσεσι καταπαύσουσι τους τοιούτους οργίλους των διδασκάλων..... Επειδάν δ' ο φιλόσοφος διδάσκαλος κατίδη μαθητάς άλις έχοντας μαθήσεως, τότε αναγγελέτω τοις εφόροις και επιτρόποις και συνερχέσθωσαν σύμπαντες εν τη Σχολή προς έρευναν των μαθητών και προς πείραν της επιδόσεως αυτών προβληθήτωσαν και απορίαι αι προσήκουσαι και ούτως όσοιπερ αν των μαθητών αναφανώσι παρασχόμενοι εαυτούς επιδεδωκότας μεν εν τοις μαθημασι, κοσμίους δε τοις ήθεσι και αξίους, τούτοις προκείσθω ανελέσθαι γέρα και άθλα παρά των εφόρων και επιτρόπων και του φιλοσόφου και του πρώτου των γραμματικών διδασκάλου, αποδεικτικά της επιδόσεως και κοσμιότητος αυτών υπογεγραμμένα γράμματα, καθ' ά εί

μεν ιερωμένοι, υπό της Εκκλησίας τα προσήκοντα τιμηθήσονται, εἰ δὲ λαϊκοί, εἰς υπουργίας προαχθήσονται αυθεντιῶν καὶ τῆς ἄλλης ἀξιοθήσονται ωφελείας καὶ τιμῆς τῆς προσήκουσας.»²⁶³

δ). Το διδακτικό πρόγραμμα του «Φιλολογικὸύ Γυμνασίου» τῆς Σμύρνης (1813)

Το «Φιλολογικὸ Γυμνάσιο» ἰδρύθηκε στὴν Σμύρνη τὸ 1808. Ἀπὸ τὸν Σεπτέμβριο τοῦ 1809 τὴν διεύθυνση τῆς Σχολῆς ἀνέλαβαν οἱ ἐκσυγχρονιστές δάσκαλοι τοῦ Γένους, Κωνσταντῖνος Κούμας ὁ ὁποῖος δίδασκε κυρίως τὰ Μαθηματικά καὶ ὁ Κωνσταντῖνος Οικονόμου ὁ ὁποῖος δίδασκε τὴν Ἑλληνικὴ φιλολογία.²⁶⁴ Λίγο ἀργότερα, προκειμένου νὰ διευρυνθεῖ τὸ πρόγραμμα τοῦ «Γυμνασίου» προσελήφθη καὶ τρίτος δάσκαλος, ὁ γιατρός Στέφανος Οικονόμος –ἀδελφός τοῦ Κωνσταντῖνου-, ὁ ὁποῖος δίδασκε τὴν Λατινικὴ γλῶσσα, τὴν Φυσικὴ ἱστορία καὶ τὴν Χημεία.²⁶⁵

Μετά ἀπὸ τὴν διακοπὴ τῆς λειτουργίας τοῦ «Γυμνασίου» καὶ τὴν συγχώνευσή τοῦ με τὴν Εὐαγγελικὴ Σχολή τὸ 1819, τὴν διεύθυνσή τῆς νέας Σχολῆς μέχρι τὴν Ἑλληνικὴ Ἐπανάσταση, ἀνέλαβε ὁ λαμπρός λόγιος δάσκαλος τῶν ἐπιστημῶν καὶ προ πάντων ἱκανὸς Μαθηματικός, ὁ Βενιαμίν ὁ Λέσβιος.

Τὸ ἐκσυγχρονισμένο ἀναλυτικὸ πρόγραμμα σπουδῶν τοῦ «Φιλολογικὸύ Γυμνασίου» τῆς Σμύρνης δημοσιεύθηκε τὸ 1813 στὸ περιοδικὸ «Λόγιος Ἑρμῆς»²⁶⁶ ὡς «Ἐκθεσις τῶν μαθημάτων, ὅσα συν θεῷ ἀγίῳ μέλλουν νὰ παραδοθῶσιν εἰς τὸ Φιλολογικὸν Γυμνάσιον κατὰ τὸ πέμπτον τῆς συστάσεως αὐτοῦ ἔτος»

Σύμφωνα με τὸ πρόγραμμα σπουδῶν τοῦ Γυμνασίου: «ὁ Κ. Μ. Κούμας θέλει παραδίδειν Α΄. ἀπὸ 9 1/2 ἕως 11 προ μεσημβρίας καθ' ἡμέραν, πλὴν τοῦ Σαββάτου, τὰ Στοιχεῖα τῆς Μαθηματικῆς καὶ τὴν Φυσικὴν ἐκ τῆς σειρᾶς τῶν Μαθηματικῶν καὶ Φυσικῶν πραγματειῶν²⁶⁷, κατὰ δὲ τὸ παρὸν τὸν λογισμόν τῶν ἀπειροστῶν καὶ τῶν ολοκληρῶν. Β΄. τρις τῆς εβδομάδος, Δευτέραν καὶ Τρίτην καὶ Τετάρτην, ἀπὸ 4-5 ὥρας ἐκ μεσημβρίας, τὴν Μεταφυσικὴν καὶ τὴν Αἰσθητικὴν. Κατὰ δὲ τὸ παρὸν τὴν περὶ σωμάτων φυσιολογίαν ἐκ χειρογράφων αὐτοῦ συνταγμάτων εἰς τὴν ομιλουμένην γλῶσσαν. Γ΄. ἀπαξ τῆς εβδομάδος, τὴν Πέμπτην ἀπὸ 4-5 ὥρας, Ἠθικὴν δια τοὺς πρωτοπείρους μαθητάς ἐκ χειρογράφων συνταγμάτων. Δ΄. ἀπαξ τῆς εβδομάδος, τὴν Παρασκευὴν, ἀπὸ 4-5 ὥρας ἐκ μεσημβρίας, γεωγραφικὰ καὶ ἀστρονομικὰ τινὰ θεωρήματα χειρόγραφα. Ε΄. κατὰ Σάββατον ἀπὸ 11-12 προ μεσημβρίας τὴν Σύνοψιν τῆς Φυσικῆς δια τοὺς πρωτοπείρους μαθητάς²⁶⁸.

Ὁ Σ. Οικονόμος, ὁ ἰατρός, θέλει διδάσκειν: Α΄. καθ' ἡμέραν, παρεκτός Τετράδος καὶ

²⁶³ Γ. Γριτσόπουλος «Πατριαρχικὴ Μεγάλὴ τοῦ Γένους Σχολή», τόμος Β΄. Ἐν Αθήναις 1966 σελ 419

²⁶⁴ Μ. Παρανικά. Ἱστορία τῆς Εὐαγγελικῆς Σχολῆς Σμύρνης. ἐν Αθήναις 1885, σελ 26

²⁶⁵ ο.α., σελ 26

²⁶⁶ Α. Σκαρβέλλη- Νικολοπούλου, «Μαθηματάρια τῶν ἐλληνικῶν σχολείων κατὰ τὴν τουρκοκρατίαν», διδακτορικὴ διατριβή, Αθήνα 1994.

²⁶⁷ Σειρὰς στοιχειώδους τῶν μαθηματικῶν καὶ φυσικῶν πραγματειῶν ἐκ διαφόρων συγγραφέων συλλεχθεισῶν ὑπὸ Κ. Μ. Κούμα Λαρισσαίου... Ἐν Βιέννῃ τῆς Αὐστρίας 1807.

²⁶⁸ Σύνοψις Φυσικῆς εἰς χρῆσιν τῶν πρωτοπείρων μαθητῶν τοῦ Φιλολογικὸύ τῆς Σμύρνης Γυμνασίου ὑπὸ Κ. Μ. Κούμα... Ἐν Βιέννῃ τῆς Αὐστρίας 1812.

Σαββάτου, από 11-12 προ μεσημβρίας, τα στοιχειωδέστερα της Φυσικής Ιστορίας, εξ' ιδίων εαυτού χειρογράφων συνταγμάτων εις την ομιλουμένην γλώσσαν. Και την Χημείαν εκ της του Αδήτου βίβλου κατά την μετάφρασιν του Κ. Μ. Μούμα εξηγών εντάμα και των επιστημών τούτων την εις τον κοινωνικόν βίον εφαρμογήν και ωφέλειαν. Κατά δε το παρόν την Χημείαν. Β'. τρις της εβδομάδος, Δευτέραν, Τετάρτην και Παρασκευήν από 2-3 ώρας εκ μεσημβρίας θέλει εξηγείν την λατινικήν γλώσσαν.

Κ. Οικονόμος ο πρεσβύτερος θέλει ερμηνεύειν καθ' ημέραν, πλην του Σαββάτου, προ μεσημβρίας, από 8 ώρας και εφεξής Α'. τον Ηρόδοτον και Όμηρον και άλλους τινάς ποιητάς. τώρα δε κατ' αρχάς τον Ηρόδοτον. Β'. τους παραλλήλους του Πλουτάρχου βίους και λόγους εκ των του Δημοσθένους. Γ'. από 3-4 ώρας εκ μεσημβρίας, την Ρητορικήν εκ της νεοτυπώτου αυτού ρητορικής πραγματείας. Δ'. κατά Σάββατον από 9-11 ώρας προ μεσημβρίας θέλει διορθώνειν την θεματογραφίαν και άλλα γυμνάσματα. Ε'. από 4-5 ώρας εκ μεσημβρίας κατά Σάββατον θέλει εξηγείν την ιεράν κατήχησιν της αμωμήτου ημών πίστεως προς όλους τους μαθητάς.

Ευστάθιος Ιωαννίδης διωρίσθη βοηθός του Κ. Οικονόμου εις τας παραδόσεις των Ελλήνων συγγραφέων. Υποδιδάσκαλοι δε είναι οι εφεξής: Α'. Αποστόλιος Σμυρναίος. Β'. Μισαήλ ιεροδιάκονος. Γ'. Γερμανός ιερομόναχος. Δ'. Κωνσταντίνος Ιθακήσιος. Ε'. Παύλος Κύπριος. ΣΤ'. Χριστόδουλος Τρικκεύς.

Τίνας δε συγγραφείς πρέπει κατά καιρούς να παραδίδωσιν οι ειρημένοι υποδιδάσκαλοι, θέλει διορίζειν ο διδάσκαλος Οικονόμος.

Τρία μαθήματα, την Ιεράν Κατήχησιν και την Ηθικήν και την Σύνοψιν της Φυσικής, είναι μεν υπόχρεοι χωρίς εξαίρεσεως να τα ακροώνται όλοι οι μαθηταί. Χρεωστούσι δε να εξετάζονται οι της δευτέρας τάξεως του διδασκάλου Οικονόμου μαθηταί και οι των τριών πρώτων υποδιδασκάλων»

1.3.3) Σχολεία

Ειδικότερα το τέλος του αιώνα είναι περίοδος μεγάλων διακυμάνσεων και αλλαγών οι οποίες προϋφίστανται τους «φοβερούς» καιρούς που θα ακολουθήσουν. Τους καιρούς που μαζί με την επανάσταση του πνεύματος θα φέρουν και την ανάσταση του σκλαβωμένου Γένους.

Η «φωνή» των λογίων- διαφωτιστών του Γένους υψώνεται όλο και δυνατότερα ενάντια στα συντηρητικά στοιχεία του τόπου, ενάντια σε κάθε μορφής δουλεία και καταπίεση. Ο επιγραμματικός λόγος του Ρήγα «Όποιος ελεύθερα συλλογάζεται, συλλογάζεται καλά» έχει γίνει συνείδηση όχι μόνο στους διαφωτιστές του Γένους αλλά και στα αστικά στρώματα ανάμεσα στα οποία η παιδεία βρίσκει ένθερμο υποστηρικτές.

Στα τέλη του αιώνα το κέντρο της πνευματικής ακτινοβολίας έχει μετατοπιστεί από την ηπειρωτική Ελλάδα στα παράλια της μικράς Ασίας. Στην οικονομική άνθιση της περιοχής λόγω του εμπορίου οφείλεται κυρίως η μετατόπιση της εκπαιδευτικής δραστηριότητας του υπόδουλου ελληνισμού την περίοδο αυτή. Νέα λαμπρά εκπαιδευτικά καθιδρύματα του ελληνισμού αντικατέστησαν τις παλαιότερες Σχολές του υπόδουλου ελληνικού χώρου και καλλιεργούν τις ώριμες πλέον ιδέες του νεοελληνικού διαφωτισμού.

Στην Σμύρνη, στον αντίποδα της Ευαγγελικής Σχολής, ιδρύεται το Φιλολογικό Γυμνάσιο (1803) ένα από τα σημαντικότερα εκσυγχρονιστικά εκπαιδευτικά ιδρύματα του ελληνισμού, στις Κυδωνίες στην θέση της παλιάς σχολής λειτουργεί η Ακαδημία (1800) προσαρμοσμένη στα νέα ευρωπαϊκά πρότυπα, στην Χίο αναδιοργανώνεται η παλιά Σχολή (1792)²⁶⁹ και η Πατριαρχική Ακαδημία (μετονομασμένη σε Σχολή του Κουρούτσεσμε) αναδιοργανώνεται (1804) με στόχο να καταστεί και πάλι το ανώτερο πνευματικό καθίδρυμα του υπόδουλου ελληνισμού.

Στον υπόλοιπο ελλαδικό χώρο ο ρυθμός της ίδρυσης νέων Σχολών και η ανασύσταση των ήδη υπαρχόντων υποδηλώνουν τον «αναβρασμό» στα εκπαιδευτικά δρώμενα.

Το 1744²⁷⁰ αναδιοργανώθηκε το σχολείο της Μοσχόπολης (προστέθηκε ανώτερος κύκλος σπουδών) και μετονομασμένο σε «Νέα Ακαδημία» ή και «Ελληνικό Φροντιστήριο» μετά την εγκατάστασή του σε λαμπρό ιδιόκτητο κτίριο το 1750, εξελίχτηκε, με το εκσυγχρονισμένο πρόγραμμα σπουδών του σε ένα περίφημο νεωτεριστικό πνευματικό ίδρυμα του ελληνισμού.

Στην Κοζάνη το 1746 ιδρύθηκε ανώτερη Σχολή, η λεγόμενη «Στοά», με πρώτο σχολάρχη τον «κλεινό» Ευγένιο Βούλγαρη, (1746-1750).²⁷¹

Στο Άγιο Όρος ιδρύεται η «Αθωνιάδα Σχολή» (1748) η οποία κατά την διάρκεια της σύντομης σχολαρχίας του Ευγένιου Βούλγαρη (1743-1759) απέκτησε μεγάλη φήμη και εξελίχθηκε σε ένα αξιολογο εκπαιδευτικό κέντρο.

Το 1750 ιδρύθηκε στην Αθήνα η Σχολή Ντέκα,²⁷² από τον πλούσιο Αθηναίο έμπορο της Βενετίας Ιωάννη Ντέκα η οποία αναδιοργανώθηκε από την «Φιλόμουσο Εταιρία» το 1813 και μετονομασμένη σε «Επιστημονικό Γυμνάσιο» έγινε με την παρουσία επιφανών λόγιων και την εισαγωγή των νέων επιστημονικών μαθημάτων, μία αξιολόγη Σχολή των προεπαναστατικών χρόνων.

Το 1764 οι λόγιοι Γεράσιμος Γούνας και Αγάπιος Λεονάρδος ίδρυσαν στην

²⁶⁹ Ο στόχος της ανασύστασης της Σχολής της Χίου και η σημαντική συμβολή της στην πνευματική ανάταση του Γένους γίνεται φανερός από επιστολή την οποία έστειλαν οι επιτροπικοί του σχολείου της Χίου το 1803 προς τους επιτρόπους της ορθόδοξης Εκκλησίας του Λιβόρνου: «.... Οποίον άραγε αυτό το κοινόν συμφέρον (της Ελλάδος): είναι φανερόν τοις πάσιν, ότι είναι ένα σχολείον των Επιστημών και της Φιλοσοφίας, το οποίον δύναται να εγδύση το Γένος από τη βαρβαρότητα και να το φωτίση, να το κοσμήση, να το λαμπρύνει εις την σοφίαν και μάθησιν, καθώς ήτον ένα καιρόν..... Βεβαιωθείτε, Αδερφοί, ότι κατά την έφεσιν, ουδ' έχομεν εις την προειρημένην επιχείρησιν του Σχολείου, αν αι δυνάμεις, ουδ' είπομεν, δεν μας εχάνοντο συχνά, ηθέλαμεν κατορθώση εξαπαντος μίαν Ακαδημίαν, η οποία δεν ήθελεν είναι κατωτέρα μιας των της Ευρώπης. Αλλά με όλην μας την αδυναμίαν δεν ελλείψαμεν να προξενήσωμεν δια μέσου του Σχολείου αρκετήν ωφέλειαν εις την Ελλάδα. επειδή πολλοί μαθηταί ευδοκίμησαν εις τα μαθήματα, και τώρα ευρίσκονται αυτοί διδάσκοντες εις διάφορα μέρη της Ελλάδος. Πελοπόννησος συν Θεω και Ρούμελη και νησία διάφορα του Αρχιπελάγους και Κωνσταντινούπολις αυτή έχουσι διδασκάλους εξ' αιτίας του ρηθέντος Σχολείου. και καθ' έκαστον χρόνον λαμβάνουσι διδασκάλους από εδώ. το οποίον, Αδερφοί ως βλέπετε δεν είναι μόνον ωφέλιμον εις ημάς, αλλά κοινώς εις όλον το δυστυχές ημών Γένος. αναμεταξύ εις το πλήθος των μαθητών έν ολογώτατον μέρος είναι Χιοι. οι δε λοιποί από διαφόρους τόπους της Ελλάδος», «Χιακά Χρονικά», Κωνσταντίνος Άμαντος, εν Αθήναις 1911. τεύχος Α', σελ. 113

²⁷⁰ Ματθαίου Παρνικά, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ 80

²⁷¹ Τρύφωνος Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», τόμος 1^{ος}, Εν Αθήναις 1936, σελ 125

²⁷² Ματθαίου Παρνικά, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ 100

Δημητσάνα «την περίφημον γενομένην Σχολήν της Δημητσάνης».²⁷³

Το 1776, όπως μας πληροφορεί πατριαρχικό γράμμα το οποίο έστειλε ο Οικουμενικός Πατριάρχης Σωφρόνιος Β΄ στον Μητροπολίτη Παροναζίας Νεόφυτο Β΄,²⁷⁴ ιδρύθηκε ελληνική Σχολή με σχολάρχη τον Χρυσάνθο τον Αιτωλό «.....επί το παραδιδόναι ελληνικά μαθήματα...».

Το 1805 ιδρύεται στα Ιωάννινα με δωρεά του πλούσιου εμπόρου Ζώη Καπλάνη η «Καπλάνειος Σχολή» η οποία με το εκσυγχρονιστικό, πρωτοποριακό –για την εποχή του– πρόγραμμα σπουδών το οποίο εφάρμοσε ο εξάιρετος λόγιος και διευθυντής της, ο Αθανάσιος Ψαλίδας, συνέβαλε σημαντικά όχι μόνο στην καλλιέργεια των γραμμάτων αλλά και στην ανάπτυξη της εθνικής αυτογνωσίας των μαθητών.

Το 1814²⁷⁵ ένας από τους λαμπρούς εκπροσώπους του νεοελληνικού διαφωτισμού, ο Γρηγόριος Κωσταντάς, αναδιοργάνωσε το «κοινό» σχολείο το οποίο λειτουργούσε στις Μηλίες του Πηλίου. Με τον επιφανή λόγιο Άνθιμο Γαζή (ο οποίος υπήρξε ηγετικό στέλεχος της Φιλικής Εταιρίας), και την διδασκαλία σοφών λογίων, όπως ο Δανιήλ Φιλιππίδης, ο Στέφανος Δούγκας, ο Δημήτριος Αλεξανδρίδης και ο Ζήσης Κάβρας, πέτυχαν με την εισαγωγή των επιστημών, την εφαρμογή νέων εκπαιδευτικών μεθόδων και τον εμπλουτισμό με 4.000 τόμους αξιόλογων επιστημονικών συγγραμμάτων της βιβλιοθήκης της Σχολής, να αναδείξουν το Πήλιο «αληθή Πιερίαν, εστίαν φωτοβόλον, ομοίαν, ίνα μη και ανωτέραν, των Ιωαννίνων και της Χίου»²⁷⁶

1.3.4 Εκκλησία και Παιδεία (18^{ος} αιώνας μέχρι την Επανάσταση)

Οι αρχές του 18^{ου} αιώνα σηματοδοτούν την απαρχή των διώξεων²⁷⁷ των εκπροσώπων του νεοελληνικού Διαφωτισμού και του έργου τους, από τον μόνο οργανωμένο φορέα και εκφραστή της εκπαιδευτικής πολιτικής στην προεπαναστατική Ελλάδα: την Εκκλησία.

Η Εκκλησία, εχθρική απέναντι σε κάθε είδους νεωτεριστική ιδέα, ιδιαίτερα τώρα που οι νέες κοινωνικές δυνάμεις του ελλληνισμού, (εμπορική αστική τάξη), αναλαμβάνουν πρωτοβουλία στα εκπαιδευτικά δρώμενα και αισθάνεται ότι η αρχική

²⁷³ Γ. Παπαδόπουλου, Νεοελληνική Φιλολογία, σχόλια, «Περί της εν Δημητσάνη Ελληνικής Σχολής» σελ. 8

²⁷⁴ Π. Γ. Ζερλέντης, «Περί της εν νήσω Νάξω Ελληνικής σχολής του Αγίου Γεωργίου», Παρνασσός, τόμος 10^{ος}, σελ 21

²⁷⁵ G. P. Henderson, «Η αναβίωση του Ελληνικού στοχασμού, 1620-1830», μετάφραση Φ. Κ. Βώρου, Αθήνα 1994, σελ.240

²⁷⁶ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησης του Γένους κατά τον ΙΗ΄ και ΙΘ΄ αιώνα» Ερμής, Νεοελληνικά Μελετήματα, Αθήνα 1999 σελ 141

²⁷⁷ Ο Άλκης Αγγέλου, περιγράφει με τον καλύτερο τρόπο την διώξη αυτή των εκπροσώπων του νεοελληνικού διαφωτισμού: ««Επί ένα διάστημα εκατό περίπου χρόνων, από τις αρχές δηλαδή του ΙΗ΄ αιώνα, όταν η νεοελληνική σκέψη αρχίζει να προσανατολίζεται οριστικά προς την ευρωπαϊκή παιδεία, έως λίγα χρόνια πριν από τον Αγώνα, όταν ο νεοελληνικός διαφωτισμός έχει πια ωριμάσει, βλέπουμε να επαναλαμβάνεται σταθερά σε εκπαιδευτικά κέντρα της Ελλάδας, το ίδιο φαινόμενο: ένας λόγιος σπουδασμένος στη Δύση απομακρύνεται από την σχολαστική παράδοση στην διδασκαλία της φιλοσοφίας και των θετικών επιστημών. Το συντηρητικό στοιχείο αντιδρά και ο αφετικός καταγγέλλεται στην εκκλησία. Το Πατριαρχείο τον καλεί να αποκηρύξει την διδασκαλία του, διαφορετικά διατρέχει τον κίνδυνο του αφορισμού. Εκείνος, είτε προσαρμόζεται προς τα παραγγέλματα της εκκλησίας, είτε παραιτείται από το έργο του.», «Γων Φώτων», Ερμής, Αθήνα 2000, σελ. 258.

«κυριαρχική» της μέριμνα υποβαθμίζεται και ότι το εκπαιδευτικό πρότυπο το οποίο είχε επιβάλλει αμφισβητείται, σκληραίνει την στάση της προς τους φορείς των νέων ιδεών. «Καιναί διδασχάι και δόγματα ξενίζοντα ετάραττον τας συνειδήσεις των ορθοδόξων κληρικών, αλλ' υπήρχον λαϊκοί τινες λογιώτατοι ζητήματα αναμοχλεύοντες, την οργήν της Εκκλησίας αναρριπίζοντες, εκδίκησιν ίσως πνέοντες εναντίον σοφών ανδρών, ών μεθ' αθυμίας έβλεπον την διανοητικήν υπεροχήν»²⁷⁸

Ο φθόνος των σχολαστικών για την φήμη και την διανοητική υπεροχή των σπουδασμένων στην Ευρώπη επιστημόνων-δασκάλων του Γένους ή και η αποδοκιμασία των για τα παραδιδόμενα απ' αυτούς νεωτεριστικά φιλοσοφικά συστήματα, τους οδηγούσαν σε συκοφαντίες και καταγγελίες στην «Μεγάλη Εκκλησία», η οποία στην συνέχεια κατεδίωκε τους «αιρετικούς» νεωτερίζοντας φιλοσόφους. «Ει δ' ετύγχανεν ο κατά καιρόν Πατριάρχης εκ των ψοφοδεών, των εκταρασσομένων από βοής κεραμέων κεραμεί κοτεόντων, εί παρείχεν ούς εηήκοον εις συκοφαντίας, η καταδίκη του τα καινά διδάσκοντος ήν προσδοκόμενη και το συνοδικόν ανάθεμα άφυκτον»²⁷⁹

Με την τραγική προδρομική μορφή του Μεθόδιου Ανθρακίτη «άνοιξε» ο δρόμος της καταδίωξης. Ο σεβάσμιος Ηπειρώτης επιστήμονας, -θύμα συκοφαντίας των συντηρητικών δασκάλων της Καστοριάς- αφορίστηκε από την Εκκλησία τον Αύγουστο του 1723.²⁸⁰ Τα συγγράμματά του χαρακτηρίστηκαν από την Ιερά Σύνοδο «ασύντακτα, σολοικίζοντα και δυσσεβείας γέμοντα» και η διδασκαλία του «αιρετική».²⁸¹

Σαράντα χρόνια αργότερα, ο θρησκευτικός φανατισμός οπλίστηκε και κατά του Ευγένιου Βούλγαρη. Στην περίπτωση του, η «Εκκλησία» αντιμετώπισε με δυσaráσκεια την διδασκαλία του, χωρίς να φθάσει σε ακραίες αντιδράσεις. Παρ' όλες τις εναντίον του κατηγορίες, τις συκοφαντίες και τις μηχανορραφίες που διενεργούσαν οι συντηρητικοί κύκλοι, ο Ευγένιος, δεν μπορούσε να κατηγορηθεί ούτε για έλλειψη ευσέβειας αλλά ούτε και να αμφισβητηθεί η ορθόδοξη πίστη του. Από τον Κωσταντίνο μαθαίνουμε, ότι ο Πατριάρχης Ιωαννίκιος Γ' ο Καρατζάς, «...προσπετηκώς ταις του Αριστοτέλους δόξαις, απταιστους ταύτας πρεσβεύων,απεστρέφετο τα παρ' Ευγενίου παραδιδόμενα, ως νεωτέρας φρενός κηήματα».²⁸²

Η διδασκαλία του Ευγένιου Βούλγαρη με την εισαγωγή της νεότερης φιλοσοφίας αποδοκιμάστηκε και από τον Πατριάρχη Χατζερή, ο οποίος, «αχωρίστως προσκείμενος ταις αριστοτελικαίς δόξαις και ταύτας μόνας αλαθήτους πρεσβεύων απεδοκίμαζε πάσαν καινοφανή φιλοσοφικήν αίρεσιν»²⁸³

Στην βιογραφία του Ευγένιου²⁸⁴ αναφέρονται συμβάντα την εποχή κατά τη οποία ο

²⁷⁸ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησης του Γένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα Ερμής. Νεοελληνικά Μελετήματα, ΑΘΗΝΑ 1999, σελ 98.

²⁷⁹ Μανουήλ Ι. Γεδεών, ο. α., σελ. 99

²⁸⁰ Π. Κ. Χρήστου, «Μεθόδιος Ανθρακίτης», έκδοσις Ηπειρωτικής Εστίας, Ιωάννινα, 1953, σελ 28

²⁸¹ ο.α. σελ. 30

²⁸² Μανουήλ Γεδεών, «Χρονικά της Πατριαρχικής Ακαδημίας», Εν Κωνσταντινουπόλει, ΑΩΠΓ', σελ 163.

²⁸³ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησης του Γένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα», Ερμής. Νεοελληνικά Μελετήματα. Αθήνα 1999, σελ. 99

²⁸⁴ ο.α. σελ 102

Βούλγαρης, δίδασκε (1759- 1961) στην Πατριαρχική Ακαδημία: «Δωρόθεός τις Μιτυληναίος διδάσκαλος των γραμματικών εν τη ιδία σχολή, φθόνω ή απειροκαλία κινούμενος, διέσυρε πανταχού τον αοίδιμον Ευγένιον, ως μη ειδότα την ελληνικήν γλώσσαν, και ως διδάσκοντα περιττά και άχρηστα μαθήματα, οποία ενόμιζε την αριθμητικήν, γεωμετρίαν και τα λοιπά μέρη της μαθηματικής. η δε χαμερπής καταδρομή αυτού λέγουσιν ότι κατήντησεν εις τοιούτον βαθμόν, ώστε και παντοπώλην τινά εμίσθωσεν, ινα παρουσιασθή εις την παράδοσιν του Ευγενίου, φέρων τον Γληζούνιον επί χειράς και ζητήση λύσιν προβλημάτων αριθμητικής, δεικνύων δήθεν δια τούτου το ευτελές των διδασκομένων παρά του Ευγενίου μαθημάτων. Εις ταύτα όμως λέγεται ότι συνηυδόκει και ο τότε οικουμενικός πατριάρχης Σαμουήλ, όστις ήν μεν ανήρ πεπαιδευμένος, αλλά προστετηκός εις τα τότε διδασκόμενα σχολαστικά μαθήματα, όχι μόνον απεδοκίμαζε την νεωτέραν μέθοδον της φιλοσοφίας, αλλά και τους διδάσκοντας αυτήν απεστρέφετο, και τα σχολεία αυτών κατεδίωκε, διό και εις του Ευγενίου τα μαθήματα δεν ευηρεστείτο»

Από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα, όσο οι ιδέες του διαφωτισμού διαχέονταν στον ελληνικό πνευματικό χώρο και οι νεοεισαχθείσες επιστήμες εδραιώνονταν στα εκπαιδευτικά προγράμματα των Σχολών του ελληνισμού, τόσο ο πόλεμος των συντηρητικών κύκλων και της Μεγάλης Εκκλησίας εναντίον των φορέων του διαφωτισμού και δασκάλων του Γένους γίνονταν σφοδρότερος: «Η ιθύνουσα ομάδα στην Ελλάδα ήταν στο σύνολό της εχθρική προς τις νέες ιδέες. Άλλωστε το πνεύμα ανοχής τερματίζεται με τη Γαλλική Επανάσταση που έδειχνε τον κίνδυνο των νέων ιδεών για την ιθύνουσα τάξη και η σύγκρουση μπήκε σε οξεία φάση»²⁸⁵

Θύμα συκοφαντίας των συντηρητικών κύκλων ακόμα ένας δάσκαλος μεγάλης ακτινοβολίας. Ο σχολάρχης του «Φιλολογικού Γυμνασίου» των Κυδωνιών, Βενιαμίν ο Λέσβιος. Ακόμα μία ομολογία πίστεως, Έλληνα διανοούμενου και δάσκαλου των επιστημών, προς την Μεγάλη Εκκλησία.²⁸⁶

Γύρω στο 1805 ο Βενιαμίν καταγγέλθηκε στο Πατριαρχείο για αθεισμό. Η γραπτή απολογία του, προς τον Πατριάρχη Καλλίνικο τον Ε΄, για τις εναντίον του καταγγελίες δείχνει ένα πνεύμα τολμηρό, μία σκέψη γεμάτη θάρρος: «Εγώ εγεννήθην τέκνον της Ανατολικής Εκκλησίας, ειμί εκείνο, όπερ ανετράφην. όσα η εμή μήτηρ φρονεί τοσαύτα και εγώ, όσα εκείνη αναθεματίζει τοσαύτα και εγώ, και όσα εκείνη δέχεται και εγώ, δίχα τινός προσθέσεως ή αφαιρέσεως». Για την διδασκαλία του γράφει: «ουκ ειμί διδάσκαλος θεολογίας αλλά μαθηματικών και φυσικών μαθημάτων, εις τα μαθηματικά δέ νομίζω αδύνατον την παρείσδυσίν τινος βλασφημίας και ει ο διδάσκων αν είη ο παγκάκιστος

²⁸⁵ Νίκος Σβορώνος «Επισκόπηση της νεοελληνικής ιστορίας», εκδόσεις Θεμέλιο, Αθήνα, 1994, σελ. 57

²⁸⁶ Στην βιογραφία του αναφέρεται ότι «... μοναχός τις Ιάκωβος άνθρωπος αμαθής και φαύλος τον βίον, κατήγγειλε τον Βενιαμίν εις τον τότε πατριάρχην Ιερεμίαν Δ΄ (1808-1813) ως διδάσκοντα την κίνησιν της γης και την πληθύν των κόσμων, και κατά συνέπειαν ως αθετούντα τας ιεράς Γραφάς και αυτό τούτο ως άθεον. Ο τότε μητροπολίτης Εφέσου έγραψε κεραυνοβόλον επιστολήν προς τον νέον Γαλλίλιον, επισείων αυτώ τας εκκλησιαστικάς τιμωρίας, αν δεν παύση τα ασεβή αυτού διδάγματα και δεν δηλώση την ομολογίαν της πίστεως» Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησις του Γένους κατά τον ΙΗ΄ και ΙΘ΄ αιώνα», Ερμής, Νεοελληνικά Μελετήματα, ΑΘΗΝΑ 1999, σελ 119

των ανθρώπων»²⁸⁷

Μετά τις συνεχιζόμενες εναντίον του καταγγελίες – κυρίως από τον ιεροκήρυκα της Μ. Εκκλησίας, Δωρόθεο το Λέσβιο-, μετέβη στην Κωνσταντινούπολη το 1812 ή 1813, «όπως αυτοπροσώπως απολογηθή προς την μυσάραν συκοφαντίαν, και απέδειξε ηλίου φανώτερον το γνήσιον των ευσεβών αυτού φρονημάτων»²⁸⁸

Ο φανατισμός των Πατριαρχικών κύκλων οπλίστηκε και εναντίον του Θεσσαλού λόγιου Στέφανου Δούγκα, άριστου Μαθηματικού και Φιλόσοφου, ο οποίος, αφού σπούδασε στην πατρίδα του κοντά στον Ιωάννη Πέζαρο, «κατηνύθνη ακολουθώς εις Άλλην, Γοτίγγην και Ιέναν, όπου εσπούδασε Μαθηματικά ακούων τον Σελλίγγιον»²⁸⁹. Για το ήθος του και την επιστημονική του κατάρτιση μαθαίνουμε από τον Ρίζο Νερουλό: «πλήρης καθαρής ηθικής, ήτις κατοικεί εν τω βάθει της καρδιάς, επέστρεψεν εις την Ελλάδα όπου ανευφημείτο πανταχού». Ανέλαβε την διεύθυνση της Πατριαρχικής Ακαδημίας για ένα χρόνο (1809-1810) και στην συνέχεια, σύμφωνα με τον Κούμα²⁹⁰, παραιτήθηκε «μη δυνηθείς να αντιπαλαίση εις τας μυρίας μηχανορραφίας».

Κατά την διάρκεια της σχολαρχίας του στην Ηγεμονική Ακαδημία του Ιασίου, (1813-1816), αναγκάστηκε από το Οικουμενικό Πατριαρχείο να δώσει ομολογία πίστεως (1816) εξ' αιτίας της ενασχόλησής του με την συγγραφή φιλοσοφικού έργου στο οποίο επιχείρησε να συμβιβάσει τις Φυσικές Επιστήμες με την Θεολογία.²⁹¹ Στην ομολογία πίστεως που έδωσε στην Μεγάλη Εκκλησία, ο ίδιος ο Δούγκας, αναγκάστηκε να αποκηρύξει το περιεχόμενο του έργου του: «... στέργω, και αποδέχομαι εξ' όλης μου ψυχής και καρδιάς την κατάργησιν της κακώς εξεργασθείσης υπ' εμού θεολογικοφυσικής εκείνης πραγματείας,... μήτε κοινή μήτε ιδία παραδούναι ταύτην ενί μηδενί, ή προσασίζειν αυτής, ή έχειν όλως εις χρήσιν και μελέτην ιδίαν, αλλ' έχειν, και νομίζουν διόλου απόβλητον και κακόσχολον, υποτασσόμενος τη απαραλογίστω πνευματική ψήφω της μητρός μου αγίας του Χριστού Εκκλησίας, και, όσα αύτη φρονεί, φρονών καγώ, και όσα αποδέχεται, και όσα αποστρέφεται, συναποδεχόμενος καγώ και συναποστρεφόμενος αμεταμελήτως δια παντός του βίου μου».²⁹²

Άξια σχολιασμού, στην περίπτωση του Λέσβιου και του Δούγκα, είναι η στάση της Εκκλησίας. Αν και οι δύο στοχαστές καταγγέλθηκαν σε μία περίοδο που οι διώξεις λογίων είχαν γενικευτεί και κατηγορήθηκαν για απόκλιση από την ορθόδοξη πίστη, εν τούτοις, η «Εκκλησία» κράτησε στάση επιφυλακτική απέναντι στις καταγγελίες αυτές και δεν έφτασε σε ακραίες διώξεις όπως έγινε με τον αφορισμό του Μεθόδιου Ανθρακίτη και του Χριστόδουλου Παμπλέκη²⁹³. Οι δύο στοχαστές μετά την ομολογία πίστεως την

²⁸⁷ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησης του Γένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα», Ερμής, Νεοελληνικά Μελετήματα, ΑΘΗΝΑ 1999, σελ 119.

²⁸⁸ ο.α.σελ. 119

²⁸⁹ Τ. Γριτσόπουλος, «Πατριαρχική Μεγάλη του Γένους Σχολή», τόμος 2^{ος}, Αθήνα 1971, σελ 102

²⁹⁰ Κ. Κούμας, «Ιστορία των ανθρωπίνων πράξεων», τόμος ΙΒ', σελ 593.

²⁹¹ Τ. Γριτσόπουλος, «Πατριαρχική Μεγάλη του Γένους Σχολή», τόμος 2^{ος}, Αθήνα 1971,σελ 102

²⁹² Μανουήλ Γεδεών, «Χρονικά της Πατριαρχικής Ακαδημίας», Εν Κωνσταντινουπόλει, ΑΩΠΓ', σελ 185 .

²⁹³ Ο Χριστόδουλος Παμπλέκης (1733- 1793), αφορίστηκε από την ιερά σύνοδο του Οικουμενικού Πατριαρχείου της Κωνσταντινουπόλης τρεις μήνες περίπου μετά τον θάνατό του το 1793.(Ν. Κ. Ψημμένος, «Η Ελληνική Φιλοσοφία από το 1453 ως το 1821», εκδ. Γνώση, Αθήνα 1989, σελ 34).

οποία υποχρεώθηκαν να δώσουν στο Πατριαρχείο συνέχισαν ανενόχλητοι την εκπαιδευτική τους δραστηριότητα.

Ο πόλεμος που δέχτηκαν οι επιστήμες και οι δάσκαλοι των επιστημών κορυφώθηκε τον Μάρτιο του 1819, λίγο πριν από τον Αγώνα, με την Ποιμαντορική εγκύκλιο του Πατριάρχη Γρηγορίου του Ε'. Με την εγκύκλιό του, ο Πατριάρχης, επιχειρεί να καθιερώσει μία αντιπροοδευτική και υποδουλωτική για το λαό διαποτισμένη με την στείρα προγονολατρεία παιδεία. Επιδιώκεται η πνευματική στασιμότητα του Γένους και διώκονται οι φορείς των νέων ιδεών οι οποίες αποτέλεσαν αντίρροπο στην πνευματική τελμάτωση του λαού.

Η Εκκλησία στην κρισιμότερη περίοδο στάθηκε τροχοπέδη στην πρόοδο του έθνους και στην διάδοση των ιδεών του Διαφωτισμού οι οποίες εκφράζουν τις καινούργιες δυνάμεις της νεοελληνικής κοινωνίας.

Με τις αντιδραστικές και αναχρονιστικές πνευματικές αντιλήψεις του Γρηγορίου του Ε' είναι διαποτισμένο το κείμενο της εγκυκλίου του 1819: «*Τίς ωφέλεια προσκολλόμενοι οι νέοι εις τας παραδόσεις αυτάς να μανθάνωσι αριθμούς, και αλγέβρας, και κύβους και κυβοκύβους και τρίγωνα, και τριγωνοτετράγωνα, και λογαριθμούς και συμβολικούς λογισμούς, και τας προβαλλομένας ελλείψεις, και άτομα, και κενά, και δυνάμεις και έλξεις και βαρίτητας, και φωτός ιδιώματα, και βόρεια σέλα, και οπτικά τινα, και ακουστικά και μυρία τοιαύτα, και άλλα τερατώδη, ώστε να μετρώσι την άμμον της θαλάσσης, και τας σταγόνας του υετού και να κινώσι την γην, εάν αυτοίς δοθή πη στώσι κατά τον Αρχιμήδην, έπειτα εις τας ομιλίας των βάρβαροι, εις τας γραφάς των σόλοικοι, εις τας θρησκείας ανείδει, εις τα ήθη παράφοροι και διεσθαρμένοι, εις τα πολιτεύματα επιβλαβείς, και άσημοι πατριώται, και αναξιοι της προγονικής κλήσεως»*

Μέσα από αυτόν τον τρόπο έκφρασης της εκπαιδευτικής πολιτικής του ανώτατου πνευματικού ηγέτη του ελληνισμού, είναι εύλογο να διερωτάται κανείς εάν και με ποιο τρόπο επιθυμούσε την απελευθέρωση του σκληρά δοκιμαζόμενου Γένους.

1.3.5 Η «Θέση» των «Παραδοσιακών Σχολών» στα τέλη του 18^{ου} αιώνα.

«Το κίνημα όμως για την προώθηση μιας μαζικής και εκσυγχρονισμένης παιδείας ήταν αίτημα των καιρών και δεν μπορούσε να ανακοπεί με διοικητικά μέτρα.»²⁹⁴

Στα τέλη του 18^{ου} αιώνα, όταν οι ιδέες του νεοελληνικού διαφωτισμού ωριμάζουν και διαχέονται στον ελληνικό πνευματικό χώρο, οι Σχολές που με το συντηρητικό πρόγραμμα σπουδών τους καταπολέμησαν κάθε «νεωτεριστική ιδέα» και έγιναν εμπόδια για την πνευματική αναγέννηση του ελληνισμού, μοιραία, ήταν καταδικασμένες στην παρακμή και οι περισσότερες, μετά από μία φθίνουσα πορεία οδηγήθηκαν στη διακοπή της λειτουργίας τους μια που οι σχολάρχες και οι ιδρυτές τους είχαν να αντιμετωπίσουν έναν ολόκληρο κόσμο που αναγεννιόταν.

Η Πατριαρχική σχολή, στα τέλη του 18^{ου} αιώνα, ακολουθούσε φθίνουσα πορεία και

²⁹⁴ Α. Ι. Πούλου, «Ελληνική Μαθηματική Βιβλιογραφία, (1500-1900)», έκδοση Ε.Μ.Ε. 1998, σελ. 26

όδευε προς τη διάλυση.²⁹⁵ Ο κυριότερος λόγος, σύμφωνα με την γνώμη των περισσότερων ιστορικών ήταν το απαρχαιωμένο σύστημα διδασκαλίας του επί δωδεκαετία σχολάρχη της Σέργιου Μακραιού, ο οποίος με την προσκόλληση εις το μονίμως συντηρητικό πνεύμα της Εκκλησίας και τον σχολαστικισμό του, ήταν ανίκανος να προσαρμοστεί στα αιτήματα και τα ιδεολογικά ρεύματα των σύγχρονων καιρών.

Η επίμονη άρνηση των συντηρητικών Πατριαρχικών κύκλων να αποδεχτούν την εισαγωγή νέων μαθημάτων –κυρίως των θετικών επιστημών- και νέων παιδαγωγικών μεθόδων που εφαρμόζονταν ήδη σε πολλά νεοσύστατα σχολεία του τουρκοκρατούμενου ελλαδικού χώρου οδήγησαν την Σχολή σε συνεχιζόμενη παρακμή μετά την αποχώρηση του Βούλγαρη (1761), η οποία κορυφώθηκε στα τέλη του αιώνα.

Μόνον από το 1804 και μετά όταν μια σειρά από λαμπρούς λόγιους, (Δωρόθεος Πρώτος, Στέφανος Δούγκας, Κωνσταντίνος Κούμας), οι οποίοι ήταν φορείς των ιδεών του νεοελληνικού διαφωτισμού ανέλαβαν τη σχολαρχία της σχολής του Κουρούτσεσμε, (όπως είχε μετονομαστεί η Πατριαρχική Σχολή), η Σχολή επανέκτησε την αίγλη και το κύρος της που είχε χαθεί εξ' αιτίας του λόγου που προαναφέραμε.

Η «Μπαλαναία» σχολή, την οποία διηύθυνε για εκατό περίπου χρόνια η οικογένεια των Μπαλάνων «δια πολιτικής συντηρητικής, πάντα φιλελεύθερον και νεωτεριστήν διδάσκαλον διαβάλλουσα επί νεωτερισμοίς και αθεΐα ως τον Ευγένιον, τον Μεθόδιον...»²⁹⁶, κατά την περίοδο 1799-1818 έχασε τελείως το κύρος και την ακτινοβολία της και υπολειμματούσε με ελάχιστους μαθητές που προέρχονταν κυρίως από τον ιερατικό κλάδο.

Η αιτία ήταν, ότι ο νέος σχολάρχης Κωνσταντίνος Μπαλάνος υπερσυντηρητικός²⁹⁷ και πολέμιος των νέων ιδεών όπως και οι προκάτοχοί του, επέμενε στις απαρχαιωμένες μεθόδους διδασκαλίας καταπολεμώντας κάθε «νεωτερική» ιδέα και αγνοώντας τα μηνύματα του διαφωτισμού. «Επί τούτου η σχολή παρήκμασεν, ως εκ της εμμονής του εν τη αρχαϊζούσῃ διδασκαλίᾳ και εκ της υπάρξεως και άλλων σχολών, διότι ήδη είχαν αναφανῆ αι σχολαί Χίου, Κυθωνίων, αίτινες εδίδασκον συγχρονισμένας διδασκαλίας των εν Εσπερία σοφών.»²⁹⁸

Σε αντίθεση με την φθίνουσα πορεία της Μπαλαναίας, η αρτισύστατη (1797) Καπλάνειος Σχολή των Ιωαννίνων με διευθυντή τον ελευθερόφρονα Αθανάσιο Ψαλίδα προόδευε ραγδαία²⁹⁹ αφού σύμφωνα με τις επιταγές των καιρών, στην Καπλάνειο, διδάσκονταν οι νεοεισαχθείσες στον ελληνικό χώρο επιστήμες.

Έτσι «ο μοναδικός δάσκαλος και τελευταίος σχολάρχης της *Αναστάσιος Μπαλάνος* (1818-1821) και οι ελάχιστοι μαθητές που φοιτούσαν στη σχολή αποτελούσαν θλιβερή παραφωνία μέσα σ' ένα κόσμο που αναγεννιόταν χάρη στην ορμή του νεοελληνικού

²⁹⁵ Τ. Γριτσόπουλος, «Πατριαρχική Μεγάλη του Γένους Σχολή», τόμος 2^{ος}, Αθήνα 1971, σελ. 58.

²⁹⁶ Τρύφωνος Ε. Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», εν Αθήναις 1936, τόμος 1^{ος} σελ. 158

²⁹⁷ Ο Ιωαννίτης Δημήτριος Αθανασίου εκάκιζε την διδασκαλίαν αυτού ως απηρχαιωμένην λέγων ότι έπρεπε να έχη μαθητάς τους πάππους και προπαπάους μας. «Νέος Ελληνομνήμων», Συμπ. Π. Λάμπρου, Αθήνα 1916, τόμος 13^{ος} σελ. 288.

²⁹⁸ ο. α. σελ. 158

²⁹⁹ ο. α. σελ. 292

διαφωτισμού».³⁰⁰

Η Ευαγγελική Σχολή της Σμύρνης στα τέλη του 18^{ου} αιώνα «έμενεν τρόπον τινά στάσιμος και περιορισμένη» και οδηγήθηκε σε βαθιά κρίση εξ' αιτίας της επιμονής των δασκάλων και κυρίως του Σχολάρχη της, Χρύσανθου, «εις τα καθεστώτα, δηλαδή εις την διδασκαλίαν των γραμματικών, της φιλοσοφίας και των ιερών μαθημάτων κατά την αρχαίαν της διδασκαλίας μέθοδον»³⁰¹, ενώ αντιστικτικά μια άλλη νεοσύστατη σχολή, «το Φιλολογικό Γυμνάσιο», που ιδρύθηκε στη Σμύρνη στα 1809 παρουσίαζε εντυπωσιακή και ραγδαία ανάπτυξη αφού οι ιδρυτές της με το εκσυγχρονισμένο πρόγραμμα σπουδών έγιναν φορείς των ιδεών του νεοελληνικού διαφωτισμού. «Τούτου ακμάζοντος η Ευαγγελική Σχολή φθίνειν εφίλει, *παλαιά Σχολή επιλεγόμενη*»³⁰²

Φωτεινό διάλειμμα στην βαθιά κρίση της Ευαγγελικής Σχολής αποτέλεσε η σύντομη σχολαρχεία ενός από τους εκφραστές των νέων ιδεών, του εξέχοντος λόγιου Θεόφιλου Καΐρη, ο οποίος μέσα σε λιγότερο από ένα χρόνο (το έτος 1811),³⁰³ με την εισαγωγή των «επιστημονικών» μαθημάτων στο πρόγραμμα, προσπάθησε να ξαναδώσει στη Σχολή τη χαμένη ακτινοβολία και αίγλη της.

Η επαναφορά όμως, μετά την αποχώρηση του Καΐρη, του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας ο σχολαστικισμός που κυριάρχησε και πάλι στη Σχολή, καθώς και ο εξοβελισμός από το πρόγραμμα σπουδών των «επιστημονικών» μαθημάτων που είχε εισάγει επί της σχολαρχείας του ο Καΐρης, είχαν σαν αποτέλεσμα να συνεχιστεί με ολοένα επιταχυνόμενους ρυθμούς η παρακμή της Σχολής, ενώ την ίδια εποχή το «Φιλολογικό Γυμνάσιο» της Σμύρνης που λειτουργούσε ως αντίποδας της Ευαγγελικής Σχολής είχε εξελιχθεί ραγδαία σε ένα λαμπρό παιδευτικό ίδρυμα.³⁰⁴

Μέσα από το διάστημα που λειτουργήσαν παράλληλα οι δύο Σχολές, απομονώσαμε την περίοδο μέσα στην οποία είχαν αρχίσει να εξαπλώνονται και να καρποφορούν οι ιδέες του νεοελληνικού διαφωτισμού, και σκιαγραφήσαμε την πορεία

³⁰⁰ Κ. Χατζόπουλος, «Ελληνικά σχολεία στην περίοδο της Οθωμανικής κυριαρχίας» (1453-1821), σελ. 104

³⁰¹ Ματθαίου Παρανίκα, «Ιστορία της Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης», Μάρτιος 1885.

³⁰² Ματθαίου Παρανίκα, «Σχεδιάσμα», Εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ. 116

³⁰³ ο. α. σελ. 115

³⁰⁴ Την μεγάλη «απόσταση» η οποία υπήρχε ανάμεσα στις παραδοσιακού τύπου Σχολές όπως ήταν η Ευαγγελική και στις νεωτεριστικές Σχολές του 19^{ου} αιώνα, όπως αυτές της Κυδωνίας και της Χίου περιγράφει με άριστο τρόπο ο μελετητής των θεμάτων της παιδείας Μ. Παρανίκας στο έργο του «Ευαγγελική Σχολή». Συγκεκριμένα, γράφει: «Η Ευαγγελική Σχολή υπό την διεύθυνσιν του Χρυσάνθου έβαινε πάντοτε, ως και πρότερον, θεωρείτο δηλαδή σχολείον ιερόν και οι διδάσκαλοι αυτής ήσαν το πλείστον ιερωμένοι και πιστώς αφωσιωμένοι εις τα καθεστώτα. Ο Χρυσάνθος τοις ίχνεσι του διδασκάλου αυτού ουδέ βήμα εδέχτο να παρεκκλίνη των διαταγών του προκατόχου, όν εσέβετο υπερβαλλόντως. Ο Χρυσάνθος καθηγητής λεγόμενος εδίδασκε προς άλλους και μαθήματα φιλοσοφίας. Αλλά' οι καιροί είχαν αλλάξει, εις τας αρχάς της ενεστώσης εκατονταετηρίδος (ΙΘ') το νέον του αιώναος πνεύμα, εξωτερικόν και φιλελεύθερον, είχαν επιπνεύσει πανταχού. Παρά την Σμύρνην ήκμαζον ήδη τα γυμνάσια της Χίου και των Κυδωνιών κατά νέον τρόπον διαργανισμένα, νέον πρόγραμμα διδασκαλίας έχοντα, νέον σύστημα φιλοσοφίας, τας φυσικάς επιστήμας μετά πειραμάτων, νεότερας γλώσσας και άλλα μαθήματα, τα οποία η Ευαγγελική Σχολή τότε δεν είχαν. ούτε ο Χρυσάνθος, ούτε ο Αγάπιος, οι μαθηταί του Ιεροθέου, ηδύναντο να παραβληθώσι προς τον Ν. Βώμβαν εν Χίω, τον Θ. Καΐρην και Βενιαμίν εν Κυδωνίαίς, τας νεωτέρας θεωρίας εισάγοντας εις μαθητάς ακορέστως των νέων ιδεών ακρωμένους», σελ. 21

των δύο ανώτερων εκπαιδευτικών ιδρυμάτων χωριστά, πριν αυτά συγχωνευτούν και αποτελέσουν μια κοινή σχολή, την «Ευαγγελική», ένα μόλις χρόνο πριν την επανάσταση και αφού οι ιδρυτές του Φιλολογικού Γυμνασίου αναγκάστηκαν από τα συντηρητικά στοιχεία του τόπου να διακόψουν τη λειτουργία του.³⁰⁵

Το πρώτο από τα ιδρύματα αυτά, προτύργιο του συντηρητισμού και του σχολαστικισμού, αντιπροσώπευε με τη διδασκαλία του, έναν πνευματικό κόσμο καταδικασμένο να αφανιστεί –όπως δείχνει και η πορεία της λειτουργίας του- από την ορμή του ρεύματος των νέων ιδεών, σε αντίθεση με το δεύτερο, το οποίο είναι η έκφραση της αναγεννητικής εποχής, και με τη ραγδαία του ανάπτυξη δείχνει το μέγεθος της αποδοχής των νέων ιδεών από τον ελληνισμό της Σμύρνης.

Η σχολή της Πάτμου (Πατιμάδα), στα τέλη του 18^{ου} αιώνα και συγκεκριμένα επί σχολαρχίας του Δανήλ Κεραμέα, στα 1796, παρά τις προσπάθειες του Πατριάρχη Γρηγορίου του Ε' και του διαδόχου του Νικηφόρου του Ζ' δεν κατάφερε να σταματήσει την ολοένα αυξανόμενη παρακμή της και να ξεπεράσει την βαθιά κρίση στην οποία είχε περιέλθει, είχε δε την ίδια τύχη με τις περισσότερες σχολές που χρησιμοποιούσαν απαρχαιωμένες διδακτικές μεθόδους ακολουθώντας το παραδοσιακό πρόγραμμα σπουδών, στην περίοδο ακμής του νεοελληνικού Διαφωτισμού.

Η κρίση της «Πατιμάδας» συνεχίστηκε μέχρι και την κήρυξη της Ελληνικής Επανάστασης του 1821 εκτός από μία σύντομη περίοδο ακμής, (1809-1818), με σχολάρχη τον Παΐσιο Καραπατά, ο οποίος «εμαθήτευσε παρά Δωροθέω τῷ Πρωΐῳ ἐν Χίῳ διδάσκοντι τα φυσικά καὶ μαθηματικά» και «διηυθέτησε τα τῆς σχολῆς εἰσαγωγὰν καὶ νεώτερα μαθήματα, κατὰ το παρὰδειγμα ἴσως τῶν ἐν Χίῳ καὶ Σμύρνῃ ἀκμαζουσῶν τότε σχολῶν....».³⁰⁶

Η δημόσια σχολή της Χίου στα τέλη του 18^{ου} αιώνα λειτουργούσε με σχολάρχη τον υπερσυντηρητικό λόγιο και πολέμιο της εισαγωγής των νέων επιστημών στο πρόγραμμα της Σχολής, Αθανάσιο Πάριο. Επί της σχολαρχίας του, ιδιαίτερα την περίοδο 1790-1800, η Σχολή παρουσίασε ραγδαία ανάπτυξη και απέκτησε μεγάλη φήμη ανάμεσα στον ελληνικό πληθυσμό.

Εν τούτοις, όπως συνέβη με τις περισσότερες σχολές των οποίων οι σχολάρχες ήταν πολέμιοι των νέων ιδεών, η Σχολή της Χίου οδηγήθηκε σε κρίση, ο σχολάρχης της κατηγορήθηκε από λαμπρούς εκπροσώπους του νεοελληνικού διαφωτισμού για υπονόμευση της αναγεννητικής προσπάθειας του ελληνισμού, και αναγκάστηκε μετά από πίεση της εφορευτικής επιτροπής της σχολής, στα 1811, να παραιτηθεί από την σχολαρχία.

Τη θέση του Αθανάσιου Πάριου, ο οποίος θέλησε να αγνοήσει τα εκσυγχρονιστικά αιτήματα των καιρών και αναγκάστηκε να αποχωρήσει από τη σχολή, πήρε έως το 1815 ο Ιωάννης Τζελεπής και στη συνέχεια τη σχολαρχία ανέλαβε ο εξάιρετος λόγιος και εκπρόσωπος του νεοελληνικού Διαφωτισμού, Νεόφυτος Βάμβας, ο οποίος

³⁰⁵ Μ. Παρανικά, *Ιστορία της Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης*, εν Αθήναις 1885, σελ 38

³⁰⁶ Μ. Η. Μαλανδράκη, «Πατιμάς Σχολή», εν Αθήναις 1911, σελ 28

αναδιοργάνωσε τη Σχολή με βάση τα ευρωπαϊκά πρότυπα.

1.4 Η εισαγωγή και η εξέλιξη της διδασκαλίας των Μαθηματικών από τις αρχές του 17^{ου} μέχρι τα μέσα του 18^{ου} αιώνα.

1.4.1 Γενικά

Όπως είναι γνωστό στα χρόνια της τουρκοκρατίας η εισαγωγή και η διάδοση των μαθηματικών στα σχολεία δεν έγινε απρόσκοπτα αλλά προκάλεσε αντιδράσεις οι οποίες εκδηλώθηκαν ποικιλότροπα.

Δυσαρέσκεια, συκοφαντίες, φραστικές επιθέσεις, ήταν οι ηπιότερης μορφής αντιδράσεις από μέρους των συντηρητικών κύκλων προς τους φορείς των νέων ιδεών, αντιδράσεις, οι οποίες σε κάποιες περιπτώσεις κορυφώθηκαν από την Εκκλησία, με τους αφορισμούς δασκάλων, οι οποίοι, με την διδασκαλία τους, προσπάθησαν να εισάγουν τα μαθηματικά (και γενικότερα τις επιστήμες) στον εκπαιδευτικό ορίζοντα του υπόδουλου ελληνικού χώρου.

Το γεγονός ότι η εκπαίδευση στα χρόνια της Τουρκοκρατίας δεν είχε ενιαίο φορέα ούτε και εποπτεύουσα αρχή καθώς και ο προσωποπαγής χαρακτήρας των σχολών, δυσχεραίνει την μελέτη και την εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων για:

- τον χρόνο εισαγωγής της διδασκαλίας των Μαθηματικών (Αριθμητικής, Άλγεβρας, Γεωμετρίας) στις ανώτερες σχολές
- την επιλογή των μαθηματικών εννοιών τις οποίες διδάσκονταν οι μαθητές³⁰⁷
- τα μαθηματικά έργα από τα οποία οι δάσκαλοι επέλεγαν τις διδασκόμενες ενότητες, όπως επίσης, και για
- το σύνολο των ωρών που αφιέρωναν στην διδασκαλία του μαθήματος.

Την εισαγωγή και την πορεία της διδασκαλίας των μαθηματικών στα σχολεία εκείνης της εποχής μπορούμε να παρακολουθήσουμε κυρίως μέσα από τις γενικές γραμμές τις οποίες χάραξαν για τα προγράμματα σχολών οι ιδρυτές τους. Πατριαρχικά σιγίλια, ιδρυτικά έγγραφα σχολείων, ηγεμονικά χρυσόβουλα, ανάλογα με τους φορείς, (Εκκλησία, έμποροι, ηγεμόνες, λόγιοι), μας διαφωτίζουν ως ένα βαθμό βέβαια, για την «τύχη» των Μαθηματικών στους αιώνες της Τουρκοκρατίας.

Ακόμα, επιστολές μεταξύ λόγιων, διαφωνίες και απόψεις τους δημοσιευμένες στα περιοδικά της εποχής εκείνης, επιστολές δασκάλων, γραπτές μαρτυρίες μαθητών, σκέψεις και προβληματισμοί λόγιων οι οποίες διατυπώνονται στα προοίμια των έργων τους, συνθέτουν την εικόνα της μαθηματικής παιδείας του υπόδουλου ελληνισμού.

³⁰⁷ Ο Λαρισσαίος λόγιος Αλέξανδρος Ελλάδιος το 1714 γράφει «εν τοις Γυμνασίοις... οι μαθηταί,... διδάσκονται... την αριθμητικήν του Νικομάχου Γερασίου μετά των σχολίων του φιλοσόφου Πρόκλου. Επίσης και Μαθηματικά του Ευκλείδου και του Αρχιμήδους. Φυσικά δε και Μεταφυσικά...» Τρύφωνος Ε. Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», εν Αθήναις 1936. τόμος 1^{ος}, σελ ΧCII

Ο «θόρυβος» που προκαλούσε το εγχείρημα κάποιου λόγιου, να διδάξει τις Μαθηματικές επιστήμες σε σχολείο του 17^{ου} αιώνα, και οι γραπτές μαρτυρίες για τις δυσμενείς επιπτώσεις που επέφερε τις περισσότερες φορές στην ζωή και το έργο του ένα τέτοιο εγχείρημα, μας βοηθούν ακόμα να προσδιορίσουμε την εισαγωγή της διδασκαλίας των μαθηματικών σε ανώτερες σχολές του αιώνα αυτού.

Επειδή πολλά από τα έγγραφα που αφορούν στα προγράμματα σχολείων δεν έχουν ακόμα εντοπιστεί ή έχουν καταστραφεί, δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε την «μεταχείριση» που είχαν τα Μαθηματικά για κάθε μία από τις ανώτερες σχολές που λειτούργησαν μέχρι τις παραμονές του Αγώνα.

Αλλά μέσα από τα προγράμματα σπουδών τα οποία έχουν σωθεί για κάποιες από τις σχολές αυτές, μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα και για άλλες, στις οποίες δίδαξαν δάσκαλοι των οποίων η δράση ήταν γνωστή από τη θητεία τους σε άλλα σχολεία, άρα και οι προτιμήσεις τους για τα διδασκόμενα μαθήματα ήταν γνωστές.

Για παράδειγμα γνωρίζουμε όχι μόνο ότι ο Ευγένιος Βούλγαρης³⁰⁸ δίδαξε Μαθηματικά στην Αθωνιάδα, αλλά και κάποιες από τις διδασκόμενες ενότητες. Είναι επομένως εύλογο να συμπεράνουμε ότι τα μαθηματικά ήταν ανάμεσα στα διδασκόμενα μαθήματα επί σχολαρχίας του Βούλγαρη στην «Μαρουτσαία» σχολή των Ιωαννίνων (1742-1746 και 1750-1753), στην «Στοά» της Κοζάνης, (1746-1750) και στην Πατριαρχική Ακαδημία (1759).

Στις τρεις επιμέρους χρονικές περιόδους στις οποίες υποδιαιρέσαμε τους αιώνες της δουλείας προκειμένου να σκιαγραφήσουμε την κατάσταση της παιδείας, θα μελετήσουμε και την εξέλιξη και καλλιέργεια των μαθηματικών.

- Στην πρώτη περίοδο, από την άλωση έως τα τέλη του 16^{ου} αιώνα, έχουμε ήδη περιγράψει την κατάσταση της παιδείας, η οποία, εκτός των άλλων, για τους λόγους που έχουμε ήδη εκθέσει,³⁰⁹ χαρακτηρίζεται από **παντελή έλλειψη της διδασκαλίας των μαθηματικών**.
- Η δεύτερη περίοδος, από τις αρχές του 17^{ου} μέχρι τα μέσα του 18^{ου} αιώνα, είναι εκείνη στην οποία επιχειρείται η εισαγωγή της διδασκαλίας των μαθηματικών, από τους πρώτους λόγιους, οι οποίοι, αφού σπούδασαν στα πανεπιστήμια της Δύσης, επέστρεψαν, με σκοπό να μεταδώσουν μέσω της εκπαίδευσης τις νέες ιδέες και επιστήμες και στην πατρίδα τους.
- Στην Τρίτη περίοδο, μετά τα μέσα του 18^{ου} αιώνα, με την διάχυση των ιδεών του νεοελληνικού διαφωτισμού, νέες δυνάμεις, ξένες προς την «Εκκλησία», οι οποίες εμφορούνταν από τα νέα ιδεολογικά ρεύματα, ανέλαβαν το προβάδισμα στα θέματα της παιδείας και έφεραν στο προσκήνιο τις επιστήμες. Οι νέες κοινωνικοοικονομικές συνθήκες που διαμορφώθηκαν στους κόλπους του ελληνισμού και ιδιαίτερα μετά την συνθήκη του Κιουτσούκ- Καϊναρτζή (1774), δημιούργησαν θετικό κλίμα για την καλλιέργεια των επιστημών και διευκόλυναν

³⁰⁸ Βλέπε και Ch. Pluli, Eugenios Voulgaris and his letter of introduction by Segner to Euler. *Acta historiae rerum naturalium necnon technicorum* New series vol 5. Prague 2001 p. 185-192.

³⁰⁹ 1.1.4) Η φύση των διδασκόμενων μαθημάτων (1453-1600), σελ. 49

ποικιλότητα την διάδοσή τους.

1.4.2 Η περίοδος (1600-1750)

Θα αναφερθούμε σε κάποια από τα σημαντικότερα ανώτερα σχολεία τα οποία λειτούργησαν στον τουρκοκρατούμενο ελληνικό χώρο από το 16^ο αιώνα, και θα προσπαθήσουμε, αξιοποιώντας τις πληροφορίες που μας δίνουν οι γραπτές μαρτυρίες, - όσες από αυτές έχουν διασωθεί-, να προσδιορίσουμε την εισαγωγή των Μαθηματικών στα εκπαιδευτικά προγράμματα των σχολών αυτών.

Η αποδοχή -θετική ή αρνητική- την οποία είχε από το κοινωνικό και εκπαιδευτικό κατεστημένο της εποχής το εγχείρημα της διδασκαλίας των επιστημών, αποτελεί τον δείκτη της εκσυγχρονιστικής στάθμης της παιδείας.

Ο ρυθμός εισαγωγής της διδασκαλίας των επιστημών στις παραδοσιακού τύπου σχολές υποδεικνύει και το ρυθμό εκσυγχρονισμού της ελληνικής κοινωνίας του 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα.

Η εισαγωγή των Μαθηματικών στο πρόγραμμα ενός ανώτερου σχολείου, δεν συνεπάγονταν οπωσδήποτε και την καθιέρωση της διδασκαλίας του μαθήματος. Συχνά, σε «παραδοσιακές» σχολές, δάσκαλοι, οι οποίοι ήταν φορείς των νέων ιδεών, αναγκάστηκαν από τους συντηρητικούς κύκλους να εγκαταλείψουν την διδασκαλία, και στην συνέχεια, εξοβελίζονταν τα Μαθηματικά και οι άλλες «επιστήμες», από τα εκσυγχρονιστικά προγράμματα τα οποία είχαν καταρτίσει.

Αργότερα, στα τέλη του 18^{ου} αιώνα, οι παραδοσιακές σχολές οδηγήθηκαν σε παρακμή, αλλά, άκόμα και σε διακοπή της λειτουργίας τους αν δεν αναμόρφωναν το πρόγραμμα των σπουδών τους με την εισαγωγή των επιστημών και των νέων παιδαγωγικών μεθόδων.

Τα νεοσύστατα λαμπρά εκπαιδευτικά ιδρύματα τα οποία λειτούργησαν από τα τέλη του 18^{ου} αιώνα μέχρι την ελληνική επανάσταση, με τα εκσυγχρονιστικά προγράμματα σπουδών τους έγιναν δέκτες των νέων ιδεολογικών ρευμάτων, ενώ με την διδασκαλία σημαντικών λόγιων, απέβαλαν τον σχολαστικό και θεολογικοκεντρικό χαρακτήρα της παιδείας και απετίναξαν τον συντηρητισμό και την στείρα προσήλωση στην παράδοση.

Πατριαρχική Σχολή:

Μέχρι το 1691 τα Μαθηματικά απουσιάζουν από τα διδακτικά προγράμματα της Μεγάλης του Γένους Σχολής, όπως προκύπτει από πατριαρχικό σιγίλιο το 1663. Συγκεκριμένα:

Το 1663 επιχειρείται αναδιοργάνωση της Πατριαρχικής Σχολής με την οικονομική συμβολή του πλούσιου εμπόρου Μανολάκη Καστοριανού.

Στην ανασύσταση της Σχολής αναφέρεται ο Πατριάρχης Ιεροσολύμων Νεκτάριος, στην ομιλία που εκφώνησε στο Αγιοταφικό Μετόχι της Κωνσταντινούπολης τον Ιανουάριο του ίδιου έτους: «...ένευσε ο Θεός εις τούτην, (την Κωνσταντινούπολη), να καταστήση διδασκαλείον εδώ και να βάλη διδασκάλους επί μισθώ κοινών γραμμάτων της αγίας εκκλησίας και κυκλοπαιδείας, γραμματικής, ρητορικής και λογικής και

φιλοσοφίας και θεολογίας.ο τιμιώτατος και φιλόχριστος άρχων Κυρίτζη Μανολάκης το πρώτον εις αυτό πληρωμήν τριών διδασκάλων, ενός δια τα κοινά γράμματα...άλλον διδάσκαλον της κυκλοπαιδείας, γραμματικής, ρητορικής και λογικής...και έτερον τρίτον διδάσκαλον σοφόν και επιστήμονα φιλοσοφίας και θεολογίας.»³¹⁰

Σιγίλιο για την ανασύσταση της Σχολής, εκδόθηκε τον Ιούλιο του ίδιου έτους από τον Πατριάρχη Διονύσιο τον Γ΄ και κατοχύρωσε τις αλλαγές που ανακοινώθηκαν από τον Νεκτάριο στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα της Σχολής. Δηλαδή, το περιεχόμενο της διδασκαλίας στην κατώτερη βαθμίδα εκπαίδευσης, είναι τα κοινά γράμματα της Αγίας Εκκλησίας, «τα γράμματα» που παρέχονταν από όλα τα σχολεία της βασικής εκπαίδευσης.

Για την μέση βαθμίδα σπουδών αν και τα διδασκόμενα κείμενα δεν καθορίζονται αυστηρά, εν τούτοις δίνονται κατευθυντήριες γραμμές για τον κύκλο των μαθημάτων που έπρεπε να διδασχτούν, δηλαδή εκείνα τα μαθήματα τα οποία συσταίνουν την κυκλοπαιδεία.

Για την ανώτερη βαθμίδα «των τελειοτέρων μαθημάτων», απαιτείται δάσκαλος «σοφός και επιστήμονας φιλοσοφίας και θεολογίας». Άρα η φιλοσοφία και η θεολογία είναι τα επιστημονικά μαθήματα του ανώτερου κύκλου σπουδών.

Από την ομιλία του Πατριάρχη Ιεροσολύμων προκύπτει ότι:

- Στην Πατριαρχική Σχολή υπήρχαν και οι τρεις βαθμίδες εκπαίδευσης, η *κατώτερη* για τα κοινά γράμματα της αγίας εκκλησίας, η *μέση* για τα μαθήματα της κυκλοπαιδείας και η *ανώτερη* για τα μαθήματα της φιλοσοφίας και της θεολογίας.
- Απουσιάζουν τα μαθηματικά και γενικότερα οι επιστήμες από το εκπαιδευτικό πρόγραμμα της Σχολής.

Η επόμενη αναδιοργάνωση της Πατριαρχικής σχολής έγινε τον Ιούλιο του 1691, «φροντίδι και δαπάνη του τιμιωτάτου και επισημοτάτου άρχοντος κυρίου Μανουήλ (Μανωλάκη)» και επικυρώθηκε με σιγίλιο από τον Οικουμενικό Πατριάρχη Καλλίνικο το Β΄.

Στο σιγίλιο ανάμεσα στα άλλα αναφέρεται : «Και δή προς σύστασιν αυτού του φροντιστηρίου διετάξαμεν είναι και προσεδρεύειν εν αυτό διδασκάλους δύο, τον μεν ένα διδάσκοντα τα επιστημονικά μαθήματα, τον δε έτερον τα γραμματικά της κυκλοπαιδείας διερμηνεύοντα, Καντεύθεν οφείλουσιν ο μεν διδάσκαλος των επιστημών εις δύο κλάσεις διδάσκειν τους μαθητάς τα μαθήματα, ών μετά την παράδοσιν ερωτών τε και λύειν τας από των αυτών μαθημάτων απορίας, καθ' ημέρα ντε επιτάτειν ενί των μαθητών αναλαμβάνειν το προειλημμένον μάθημα, χωρίς του παρέχειν αυτό τινα προλαβούσαν ειδησιν, τη δε ημέρα του Σαββάτου μαθήματα μεν της προκειμένης επιστήμης μη διδάσκειν, αθροίζειν δε ενώπιον αυτού τους μαθητάς, είτε δι εαυτού τε και δι αλλήλων εκείνων επεξεργάζεσθαι τριβήν τινα και αναπόλησιν κατά νουν των παρελθόντων μαθημάτων δια τινων προσαρμοζόντων προβλημάτων, προτρέπει ντε τοις επάιους

³¹⁰ Το παράθεμα απ' την διατριβή της Αγγελικής Σκαρβέλη- Νικολοπούλου. «Μαθηματάρια των ελληνικών σχολείων κατά την τουρκοκρατία» Αθήνα 1994, σελ 335

μαθηταίς και συνιστάν αυτοίς ενδελεχώς διαλέξεις αλλήλοις, δι' ὧν ἔχωσι γυμνάζεσθαι καλῶς και προχωρεῖν εἰς ἐπίδοσιν. Ο δε διδάσκαλος της κυκλοπαιδείας οφείλει διορίζειν τους υπ' αὐτοῦ διδασκόμενους εἰς κλάσεις δύο, και προς μεν την α' διδάσκειν ἐν των λογογραφικῶν μαθημάτων, προς δε την β' ἐν ποιητικῶν ευληπτότερον, κατὰ την μαθητευομένων δύναμιν, μάλιστα δε τον σχηματισμὸν των χρόνων προς τους ικανότερους, αρχόμενος ἀπὸ της συντάξεως των ρημάτων, μετὰ τεχνολογίας αδιαλήπτου, ἄτε μάλᾳ αναγκαίως συμβαλλούσης ταῦτοις τοῖς πρωτοπείροις, εἰς ἐννοιαν και κατὰληψιν των διδασκόμενων αὐτοῖς,»

Απὸ το σιγίλιο του 1691 που αφορά στην νέα ανασύσταση της Πατριαρχικῆς Σχολῆς, φαίνεται ὅτι στην Σχολή υπήρχαν δύο βαθμίδες εκπαίδευσης, η ἀνώτερη και η μέση. Προβλέπονταν δύο δάσκαλοι, ἕνας για την κάθε βαθμίδα, στους οποίους δίνονταν συγκεκριμένες οδηγίες για τις διαδικασίες τις οποίες ἔπρεπε να εφαρμόσουν, για την πληρέστερη κατανόηση και αφομοίωση των διδασκόμενων ἐνοτήτων ἀπὸ τους μαθητές.

Αν και στο πατριαρχικό σιγίλιο δεν αναφέρονται ποια εἶναι τα ἐπιστημονικά μαθήματα του ἀνώτερου κύκλου σπουδῶν, μπορούμε βάσιμα να ισχυριστοῦμε ὅτι δεν διέφεραν ἀπὸ ἐκεῖνα τα οποία ἔχχαν καθοριστεῖ το 1663: Η φιλοσοφία και η θεολογία.

Τα ἐπιχειρήματα στα οποία στηρίζουμε τον ισχυρισμό μας εἶναι:

1). Η σχετικὰ πρῶμη -για την διάδοση των ἐπιστημῶν- εποχή (17^{ος} αἰώνας) και το θεολογικό πνεῦμα το οποίο χαρακτήριζε τις σπουδές στην Πατριαρχική Σχολή. Τα πρῶτα προγράμματα σπουδῶν στα οποία ἔγινε λόγος για διδασκαλία «ἐπιστημῶν» το 17^ο αἰῶνα, ἀνήκαν σε Σχολές των Ἰωαννίνων οι οποίες ἰδρύθηκαν ἀπὸ ἐμπόρους του παροικιακοῦ ἐλληνισμοῦ. Ο συντηρητισμός των πατριαρχικῶν κύκλων και η ἐμμονή τους στην σχολαστική διδασκαλία, πιθανότατα ἀπέκλειαν καθ' ὅλη την διάρκεια του 17^{ου} αἰῶνα την εἰσαγωγή των θετικῶν ἐπιστημῶν στο πρόγραμμα της σχολῆς.

2). Μία τέτοια καινοτομία, ὅπως θα ἦταν η εἰσαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικῶν στην Σχολή, πιστεύουμε ὅτι θα ἀναφέρονταν ὡπωσδήποτε στο πατριαρχικό σιγίλιο. Φαίνεται ὅμως ὅτι δεν υπήρξαν ἀλλαγές στα ἐπιστημονικά μαθήματα του ἀνώτερου κύκλου σπουδῶν, γι' αὐτό και δεν κρίθηκε ἀπαραίτητο να διευκρινισθεῖ η φύση τους.

Δηλαδή παρ' ὅλο που η νέα ανασύσταση της Σχολῆς ἀπέχει ἀπὸ την προηγούμενη περίπου τριάντα χρόνια, τα Μαθηματικά και γενικότερα οι ἐπιστήμες δεν ἔχουν ἀκόμα θέση στο διδακτικό της πρόγραμμα. Επομένως το νέο σιγίλιο του 1691 μπορούμε βάσιμα να ισχυριστοῦμε ὅτι:

- Δύο ἦταν οι βαθμίδες σπουδῶν στην Πατριαρχική Σχολή, η ἀνώτερη και η μέση.
- Τα μαθηματικά και γενικότερα οι ἐπιστήμες δεν συμπεριλαμβάνονταν στα διδασκόμενα μαθήματα.

Τα δύο ἐπόμενα πατριαρχικά σιγίλια τα οποία ἐκδόθηκαν ἀπὸ τον Πατριάρχη Παῖσιο τον Β', τον Ἰανουάριο του 1748 και τον Μάρτιο του 1752³¹¹ ἀφορούν σε οικονομικά θέματα της Σχολῆς (ἐξοικονόμηση πόρων για την λειτουργία της, μισθοῦς

³¹¹ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Γράμματα Πατριαρχικά, περὶ των ἐλληνικῶν σχολείων Κωνσταντινουπόλεως», σελ 6, 7.

δασκάλων) και δεν παρουσιάζουν ενδιαφέρον για το θέμα το οποίο μας απασχολεί.

Επομένως, στην δεύτερη χρονική περίοδο η οποία οροθετήθηκε από τις αρχές του 17^{ου} και τα μέσα του 18^{ου} αιώνα, τα Μαθηματικά και γενικότερα οι «επιστήμες» δεν είχαν θέση στα διδακτικά προγράμματα της «Μεγάλης του Γένους Σχολής».

1.4.3 Η περίοδος (1750-1821)

Μεγάλο ενδιαφέρον για την μελέτη μας παρουσιάζει το συνοδικό σιγίλιο το οποίο εκδόθηκε **τον Ιανουάριο του 1759** από τον πατριάρχη Σεραφείμ τον Β΄ καθώς και το σιγίλιο του Φεβρουαρίου του 1760, το οποίο υπογράφεται από τον ίδιο.

Συγκεκριμένα, το πατριαρχικό έγγραφο του 1759, ανάμεσα στα άλλα ορίζει: «διδασκάλους καθεστάναι τέτταρας, ένα μεν των φιλοσοφικών, ένα δε των μαθηματικών και δύο των γραμματικών, πρώτον και δεύτερον των πρωτοπείρων χάριν, τους δε μισθούς τούτοις υπάρχουν καθ' έκαστον, όσους αν τον αριθμόν οι του σχολείου επίτροποι κατ' ενιαυτόν δοκιμάσουσι έκαστον»³¹².

Επομένως από το σιγίλιο του 1759 πληροφορούμαστε ότι:

- Τέσσερις δάσκαλοι χωρισμένοι σε ειδικότητες αναλαμβάνουν την διδασκαλία των μαθημάτων της Σχολής.
- **Τα Μαθηματικά εισάγονται για πρώτη φορά επίσημα από την Εκκλησία στην «Μεγάλη του Γένους Σχολή» το έτος 1759, δηλαδή λίγα χρόνια μετά τα μέσα του 18^{ου} αιώνα.**

Βέβαια, όπως ήδη έχουμε αναφέρει η εισαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε μία Σχολή, δεν σήμαινε και την καθιέρωση του μαθήματος στο διδακτικό πρόγραμμα της Σχολής αυτής.

Ειδικά στην περίπτωση της Πατριαρχικής Ακαδημίας, τα Μαθηματικά, πριν καθιερωθούν σαν ένα από τα διδασκόμενα μαθήματα στις αρχές του 19^{ου} αιώνα, πέρασαν μέσα από πολλές δοκιμασίες. Η διαφορετική «μεταχείριση» την οποία είχαν κατά καιρούς, οφείλονταν κατά κύριο λόγο στις εκσυγχρονιστικές ή όχι τάσεις του εκάστοτε Πατριάρχη και κατά δεύτερο στον λόγο- διευθυντή της Σχολής.

Υπήρξαν περιπτώσεις –ακόμα και μέσα στον 19^ο αιώνα- κατά τις οποίες δάσκαλοι των «επιστημών» και φορείς των ιδεών του νεοελληνικού Διαφωτισμού, αναγκάστηκαν να εγκαταλείψουν την διδασκαλία στην Πατριαρχική Ακαδημία, μη μπορώντας να αντέξουν την πολεμική που δέχονταν από τους συντηρητικούς πατριαρχικούς κύκλους, η οποία αφορούσε στο περιεχόμενο της διδασκαλίας τους.

Ο Κωστάντιος γράφει ότι ο Πατριάρχης Ιωαννίκιος Γ΄ ο Καρατζάς, «....απεστρέφeto τα παρ' Ευγενίου παραδιδόμενα, ως νεωτέρας φρενός κνήματα».³¹³

Ο Στέφανος Δούγκας, ο οποίος σπούδασε τα Μαθηματικά και την Φιλοσοφία και

³¹² Γ. Γριτσόπουλος, «Πατριαρχική Μεγάλη του Γένους Σχολή» τόμος Α΄, εν Αθήναις 1996, σελ 369

³¹³ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Χρονικά της Πατριαρχικής Ακαδημίας». Εν Κωνσταντινουπόλει, έτος ΑΩΠΓ΄ σελ 163

δίδαξε ένα χρόνο (1809-1810) στην Πατριαρχική Ακαδημία, σύμφωνα με τον Κούμα, «μη δυνηθείς να αντιπαλαίσει εις τας μυρίας μηχανορραφίας παραίτησε την σχολήν»³¹⁴

Ο επιφανής λόγιος διαφωτιστής και δάσκαλος των «επιστημών», Κωνσταντίνος Κούμας, «απέθετο την αρχήν του διευθύνειν την σχολήν περί τας αρχάς Αυγούστου 1815, μη έχων ελευθερίαν ενεργείας»³¹⁵

Το σιγίλιο το οποίο εκδόθηκε τον **Φεβρουάριο του 1760**, από τον Πατριάρχη Σεραφεΐμ τον Β', γνωστοποιεί ότι «συνεκροτήθη ήδη εν τη βασιλευούση ταύτη των πόλεων κοινόν φροντιστήριον, εις παράδοσιν των θύραθεν επιστημών και της καθ' ημάς ιεράς θεολογίας, εν ώ αποκατεστάθη καθηγεμών και διδάσκαλος ο οσιώτατος και σοφολογιώτατος κυρ- Ευγένιος, ανήρ σοφώτατος και πολυμαθέστατος, καθ' ά δια μακράς πείρας εγνώσθη. Έχομεν λοιπόν ελπίδας χρηστάς ότι θέλει ακολουθήσει μεγάλος καρπός και πολλή ωφέλεια εις το ημέτερον γένος εκ της συστάσεως του φροντιστηρίου τούτου.»³¹⁶

Δηλαδή, το νέο πατριαρχικό έγγραφο:

- Χαρακτηρίζει την Πατριαρχική Ακαδημία «κοινόν φροντιστήριον εις παράδοσιν των θύραθεν επιστημών και της καθ' ημάς ιεράς θεολογίας».
- Αναγγέλλει την συγκρότηση του Φροντιστηρίου υπό την διεύθυνση του Ευγένιου Βούλγαρη, αλλά δεν κάνει λόγο για την κατανομή της διδασκαλίας των μαθημάτων στους τέσσερις δασκάλους της Σχολής οι οποίοι διορίζονται σύμφωνα με το σιγίλιο του 1759.

Είναι πιθανόν, ο Βούλγαρης και ο Δωρόθεος να εδίδασκαν τα «επιστημονικά» μαθήματα και οι άλλοι δύο τα «γραμματικά».

Το επόμενο «Συννοδικόν πατριαρχικόν οροθετήριον και βεβαιωτήριον γράμμα του Πατριάρχου Μελετίου Β' του από Λαρίσης, **τη 1 Μαρτίου 1769** απολυθέν και ρυθμίζον τα της Πατριαρχικής Μεγάλης του Γένους Σχολής» αποφασίζει:

«Διδασκάλους μεν καθιστάναι δύο, τον μεν των φιλοσοφικών και μαθηματικών, τον δε των γραμματικών, οφείλοντας μετά πάσης ακριβείας και επιμελείας ποιείσθαι την των μαθημάτων παράδοσιν και της των μαθητιόντων επιδόσεως αγρύπνως και αόκνως φροντίζουν, απεχομένους μακρών διακοπών, ώστε μη τους μαθητάς αποδειλιώντας προς το του χρόνου μήκος αποσκιρτάν και υστερείσθαι άκοντας της δια πάντων των μαθημάτων ελεύσεως, ο μεν οσιολογιώτατος κυρ-Χρύσανθος των φιλοσοφικών και Μαθηματικών, ο δε λογιώτατος κυρ- Ηλίας των γραμματικών.»³¹⁷

Το πατριαρχικό έγγραφο του 1769 μας πληροφορεί ότι:

³¹⁴ ο. α. σελ 184

³¹⁵ ο. α. σελ 188

³¹⁶ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Γράμματα Πατριαρχικά, περί των ελληνικών σχολείων Κωνσταντινουπόλεως», σελ 10.

³¹⁷ Γ. Γριτσόπουλος, «Πατριαρχική Μεγάλη του Γένους Σχολή» τόμος Α', εν Αθήναις 1996, σελ 381

- Οι δάσκαλοι στην Σχολή από τέσσερις έγιναν δύο³¹⁸. ένας για τα «Φιλοσοφικά» και τα «Μαθηματικά» και ένας για τα «γραμματικά», τους οποίους και κατονομάζει. Καθήκον τους είναι, την επίδοση των μαθητών «αγρύπνως και αόκνως φροντίζειν».
- Στην Σχολή ιδρύεται βιβλιοθήκη με τα βιβλία του Μεγάλου Λογοθέτου Νικολάου Σούτζου «όστις ... ανέθετο τη αυτή Σχολή εις ωφέλειαν του Γένους και μνημόσυνον αυτού διηνεκές και την αυτού άπασαν βιβλιοθήκην βιβλίων αξιολόγων απάντων, ως εν ακριβεί καταλόγω και ιδίω κώδικι φαίνεται κατεστρωμένα, επιβεβαιωθέντι παρά της ημών Μετριότητος»³¹⁹

Με το σιγίλιο του 1769 ο Πατριάρχης Μελέτιος Β΄ επιχειρεί να ανασυστήσει την Πατριαρχική Σχολή, η οποία μετά την αποχώρηση του Βούλγαρη (1761) άρχισε να παρακμάζει με ολόένα επιταχυνόμενους ρυθμούς μέχρι τα τέλη του αιώνα.

Η μεγάλη κρίση της Σχολής σε μια περίοδο η οποία χαρακτηρίζεται από έντονη πνευματική κίνηση του υπόδουλου ελληνισμού, αποδόθηκε από τους ιστορικούς στο συντηρητικό πνεύμα της Εκκλησίας και στην έντονη αντίδραση σε κάθε ανανεωτική προσπάθεια για ότι αφορούσε την παρεχόμενη από την Σχολή παιδεία.

Η μείωση του αριθμού των δασκάλων από τέσσερις τους οποίους προβλέπει το σιγίλιο του 1759, σε δύο τους οποίους προβλέπει το παρόν σιγίλιο, μαρτυρεί τα όσα παραπάνω αναφέραμε.

Ειδικά από το 1773 η Σχολή αρχίζει να φυτοζωεί. Η μεγάλη κρίση της οφείλεται κυρίως στην έλλειψη ικανού σχολάρχη «Λείπει η ανωτέρα πνοή και η ικανότης χαράζεως σαφών κατευθύνσεων»³²⁰

Ο Σέργιος Μακραίος, ο τελευταίος δάσκαλος της συντηρητικής παράταξης, κατά την διάρκεια της δωδεκαετούς σχολαρχίας του (1778- 1790) ήταν υπαίτιος για την μεγάλη παρακμή της Σχολής στα τέλη του αιώνα. Επί της θητείας του, λόγω της αποτυχημένης διδασκαλίας του το φιλοσοφικό τμήμα διαλύεται και τα άλλα υπολειποντάς εξ αιτίας της συνεχούς διαρροής των μαθητών. Η Σχολή διαρκώς χάνει το γόητρό της.

Επί σχολαρχίας του Μακραίου, όσο διάστημα λειτουργούσε το φιλοσοφικό τμήμα της Σχολής, διδάσκονταν Αριθμητική και επίτεδη Γεωμετρία.³²¹

Το επόμενο συνοδικό πατριαρχικό βεβαιωτήριο γράμμα το οποίο εκδόθηκε, όπως και το προηγούμενο το 1769, από τον Πατριάρχη Μελέτιο τον Β΄ αφορά στην αναδιοργάνωση της Πατριαρχικής Σχολής.

Συγκεκριμένα: «Θεῖω γαρ ζήλω κεκινημένοι, προς κοινήν του Γένους ωφέλειαν, ευκοσμία ντε και καλλονήν, συστήσασθαι κοινήν προτεθίμηνται το ενταύθα

³¹⁸ Οι δάσκαλοι ήταν, ο Χρύσανθος ο Αιτωλός των Διλοσοφικών και Μαθηματικών και Ηλίας ο Κύπριος των Γραμματικών

³¹⁹ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Γράμματα Πατριαρχικά, περί των ελληνικών σχολείων Κωνσταντινουπόλεως», σελ 16.

³²⁰ Γ. Γριτσόπουλος, «Πατριαρχική Μεγάλη του Γένους Σχολή» τόμος Α΄, εν Αθήναις 1996, σελ 54

³²¹ ο. α. σελ 54

φροντιστήριον, ήδη που παρεωραμένον, ως αν οι έρωτι παιδείας προσφουώντες τοις τε εγκυκλίσι των μαθημάτων εγγυμαζόμενοι και δη και των μαθηματικών, φυσικών τε και μεταφυσικών ακουσμάτων και θεωρημάτων ικανώς απογευόμενοι, επί τα πρόσω και θεϊότερα χωρείν έχωσι...»³²²

Επομένως η διδασκαλία των Μαθηματικών θεωρείται δεδομένη από τον Πατριάρχη Μελέτιο αφού οι μαθητές της Σχολής σύμφωνα με το παρόν σιγίλιο, «των μαθηματικών, φυσικών τε και μεταφυσικών ακουσμάτων και θεωρημάτων ικανώς απογευόμενοι...»

Τα δύο επόμενα πατριαρχικά σιγίλια, (1769 και 1778), αφορούν θέματα οργάνωσης και εισφορών της Σχολής και δεν παρουσιάζουν ενδιαφέρον για την μελέτη την οποία εκπονούμε.

Το σιγίλιο που ακολουθεί έχει εκδοθεί από τον Πατριάρχη Νεόφυτο Ζ' το 1793 και αναφέρεται σε οικονομικά θέματα της Σχολής και στο οποίο ανάμεσα στα άλλα αποφασίζεται: «διδάσκαλοι αποκαθιστάσθωσαν τρεις, πρώτος, δεύτερος και τρίτος, ο μεν πρώτος τη αιρέσει και συναινέσει των τε ναζιρηδων και επιτρόπων, οι δε λοιποί δυο τη συναινέσει και αιρέσει των τε επιτρόπων και του πρώτου διδασκάλου,...»³²³

Το παρόν έγγραφο μας πληροφορεί για την πρόσληψη τριών διδασκάλων αλλά όχι και για το περιεχόμενο της διδασκαλίας τους. Ο αριθμός των δασκάλων τους οποίους προβλέπει το σιγίλιο δείχνει ότι επιχειρείται η επαναλειτουργία του ανωτέρου τμήματος της Σχολής και πιθανόν η εισαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών η οποία είχε διακοπεί επί σχολαρχίας του Σέργιου Μακραίου.

Τα σιγίλια τα οποία εκδόθηκαν τον Φεβρουάριο του 1796, τον Φεβρουάριο του 1797 και τον Μάρτιο του 1798 αφορούν σε θέματα οργάνωσης, διοίκησης και διαχείρισης εσόδων της Πατριαρχικής Σχολής.

Το έγγραφο του 1797,³²⁴ «απολυθέν ένεκα παρατηρηθείσης χαλαρώσεως της επιδόσεως και ευκοσμίας εν τη της Κωνσταντινουπόλεως Σχολή των ελληνικών μαθημάτων» φανερώνει ότι η Πατριαρχική Σχολή έχει παρακμάσει και ο χαρακτηρισμός της «Σχολή των ελληνικών μαθημάτων» δηλώνει το περιεχόμενο των παρεχόμενων από την Σχολή σπουδών. Οι αρχές του 19^{ου} αιώνα λόγω έλλειψης μαθητών, βρήκαν την Σχολή να υπολειπεται. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει το ανώτερο τμήμα σπουδών είχε διακόψει την λειτουργία του και στα υπόλοιπα οι μαθητές που φοιτούσαν ήταν ελάχιστοι.

Το πολυσέλιδο συνοδικό γράμμα το «κατ' Ιανουάριον του έτους 1804 απολυθέν υπό του πατριάρχου Κωνσταντινουπόλεως Καλλινίκου Ε'» αφορά στην απόφαση

³²² ο.α. σελ 384

³²³ ο. α. σελ 389

³²⁴ ο. α. σελ 393

μεταφοράς της Μεγάλης του Γένους Σχολής από το Φανάρι εις την Ξηροκρήνη, (Κουρούτσεσμε), και στην αναδιοργάνωση της Σχολής «εν τη οικία ...τη κατά τον Κουρούτσεσμεν του υψηλτάτου αυθέντου Αλεξάνδρου Μαυροκορδάτου...».³²⁵

Ενδιαφέρον για την μελέτη μας παρουσιάζει το επόμενο Πατριαρχικό έγγραφο του **1804** το οποίο ρυθμίζει θεμελιώδη ζητήματα για την λειτουργία της Σχολής, μετά «την αναγκαιοτάτην μετάστασιν αυτής του λοιπού εις την του καθ' ημάς Καστένου Κουρουτζεσμέν», και καθορίζει τα προσόντα των δασκάλων και τα διδασκόμενα μαθήματα.

Στο σιγίλιο διαβάζουμε: «δε περί την αίρεσιν και αποκατάστασιν των δύο διδασκάλων, φιλοσόφου τε και του πρώτου των γραμματικών, ότι πλείστην και μεγίστην την επιμέλειαν καταβλητέον, πεπεισμένους ότι τα περί την άλλην της Σχολής διοίκησιν αμαρτήματα ου τοσαύτην επάγει την βλάβην, όσσην η των διδασκάλων αμαθία και αμέλεια ή αφροσύνη και λουπή κακοήθεια. Ως ούν αρχής καλής ούσης τη Σχολή της των διδασκάλων μαθήσεως και φρονήσεως, και τα μέγιστα. μάλλον δε συμβαλλομένης προς τε την εν λόγους επιδοσιν και προς κατάρτισιν των ηθών των μαθητώνμηδέ προσίεσθαι διδάσκαλον ...ών την έξιν προς διδασκαλίαν ουκ έχει.....»

Τούτοις ουν οικειώς έχοντας προς τον σκοπόν αποκαθίστασθαι δει τον τε φιλόσοφον και τον πρώτον των γραμματικών, εφ' ώ αυτούς διδόναι λόγον τοις τε μαθήμασιν επιδόσεως των μαθητών και της ευταξίας απάσης της Σχολής. και ο μεν φιλόσοφος τα πρώτα εν τοις διδασκάλοις φερέσθω, όστις άτε δη λίαν επωφελοός και ες τα μάλιστα συμφερούσης προς τε γύμνασιν νοός και εύρεσιν της αληθείας της των επιστημονικών μαθημάτων, οίον Αριθμητικής, Γεωμετρίας, Γεωγραφίας, Σφαιρικών, Αστρονομίας και των λοιπών της Φιλοσοφίας μαθημάτων παραδόσεως, ήτις μετά την εις τα γραμματικά και ποητικά και ρητορικά τελείωσιν δει γίνεσθαι, παραδιδόναι ταύτα οφείλει μετά της προσηκούσης ακριβείας τε και επιμελείας. Ο δε πρώτος των γραμματικών διδάσκαλος μηδόλως υποκεισθω τω φιλοσόφω τα προς διδασκαλίαν των γραμματικών. εξησκημένος δε ών τα ρητορικά, μετά την του συντακτικού παράδοσιν διδασκέτω δια γυμνασμάτων και την ρητορικήν τέχνην. Αιρήσεται δε τη ειδήσει μέντοι των εφόρων και επιτρόπων υποδιδασκάλους δύο, τον μεν επί τοις σμικρόν τι επιδεδωκόσι, τον δε επί τοις των μαθημάτων προσαπτομένους. Των δε γραμματικών έκαστος διδασκέτω σαφώς και διακεκριμένως της επιδόσεως των μαθητών ή δυνατόν στοχαζόμενος, ο μεν πρώτος το συντακτικόν, ο δε δεύτερος το ορθογραφικόν, σχηματιστικόν και κλιτικόν μέχρι των λεγομένων συμφωνιών, ο δε τρίτος τον Χρυσολωράν και Αίσωπον και Χρηστοθήθειαν και τους τύπους της Γραμματικής προς διάκρισιν των οκτώ μερών του λόγου, όστις καταμενεί εν εν τη του Φαναρίου αρχαία Σχολή μέλος λογιζόμενη της ώδε, εξηρητημένος του πρώτου των γραμματικών διδασκάλου»³²⁶

Οι πληροφορίες τις οποίες μας δίνει το παρόν σιγίλιο είναι πολύ σημαντικές. Πρώτη φορά σε έγγραφο το οποίο αφορά στην διδασκαλία και το περιεχόμενο σπουδών

³²⁵ ο. α. σελ. 398

³²⁶ ο. α. σελ 419

της Πατριαρχικής Ακαδημίας, δίνονται λεπτομερείς οδηγίες, όχι μόνο για τα προσόντα του δασκάλου και την φύση των διδασκόμενων μαθημάτων αλλά και τις διδασκόμενες ενότητες σε καθένα από τα μαθήματα αυτά.

Το σιγίλιο καθορίζει την διαδικασία την οποία πρέπει να εφαρμόζουν κατά τις παραδόσεις τους οι δάσκαλοι ώστε να επιτυγχάνουν όσο το δυνατόν καλύτερα αποτελέσματα και την σειρά προτεραιότητας διδασκαλίας των μαθημάτων την οποία οφείλουν να ακολουθούν.

Ωστε το Πατριαρχικό έγγραφο του **1804**:

- Εκτιμά την σημαντική συμβολή «της των διδασκάλων μαθήσεως και φρονήσεως» στην επιτυχή εκπαιδευτική πορεία της Σχολής και υποδεικνύει τα κριτήρια επιλογής των δασκάλων αυτών.
- Προβλέπει δύο δασκάλους «τον φιλόσοφον» και «τον πρώτον των γραμματικών», και δύο υποδιδασκάλους οι οποίοι θα υποβοηθούν την διδασκαλία.
- Καθορίζει τα επιστημονικά μαθήματα σε Αριθμητική, Γεωμετρία, Γεωγραφία, Σφαιρικά, Αστρονομία, «και των λοιπών της Φιλοσοφίας μαθημάτων»
- Καθορίζει τα διδασκόμενα από τον «πρώτον των γραμματικών» δάσκαλο μαθήματα, στα γραμματικά, ποιητικά και ρητορικά και «μετά την του συντακτικού παράδοσιν διδασκέτω δια γυμνασμάτων και την ρητορικήν τέχνην»
- Περιγράφει λεπτομερώς τις από τους υποδιδασκάλους διδασκόμενες ενότητες.

Δηλαδή το παρόν έγγραφο περιλαμβάνει ένα ολοκληρωμένο πρόγραμμα σπουδών για την Πατριαρχική Ακαδημία στο οποίο *περίοπτη θέση καταλαμβάνουν τα Μαθηματικά* και γενικότερα οι επιστήμες.

Από το προτεινόμενο διδακτικό πρόγραμμα στο σιγίλιο του 1804, γίνεται φανερή η προσπάθεια του Πατριάρχη Καλλίνικου του Ε΄ να εκσυγχρονίσει το πρόγραμμα σπουδών της Σχολής, για να επανακτήσει αυτή το χαμένο κύρος της.

Το τρίτο πατριαρχικό έγγραφο το οποίο εκδόθηκε τον Ιούνιο του **1804** αφορά στην έγκριση της εκλογής στην σχολαρχία της νέας Σχολής (του Κουρούτσεσμε) του Δωιρόθεου του Πρωΐου, ο οποίος «προτετίμηται ως άξιος και εξελέγη αριστίνδην και αποκατεστάθη σχολάρχης εν αυτή τη Πατριαρχική Σχολή και διδάσκαλος των επιστημονικών μαθημάτων, όπως διδάσκη επιμελώς τα της φιλοσοφίας εγκύκλια μαθήματα...»³²⁷

Ο εξέχων αυτός λόγιος διαφωτιστής δεσμεύτηκε ενυπογράφως ότι δεν θα εγκαταλείψει την διεύθυνση της Σχολής μέχρι να βρεθεί άξιος αντικαταστάτης του «...και παραστήσεται άξιον διάδοχον αυτού σχολάρχην, ίσον εαυτώ, κατά την ενυπόγραφον ιδιώχειρον αυτού υπόσχεσιν»

Ο Πρώμος, ο οποίος είχε σπουδάσει στην Ιταλία και στην Γαλλία, κατά την διάρκεια της θητείας του στην Σχολή, (1804-1807), δίδαξε τα Μαθηματικά και

³²⁷ ο. α. σελ 424

γενικότερα τις θετικές επιστήμες και σηματοδότησε την αρχή μιας νέας περιόδου ακμής της Μεγάλης του Γένους Σχολής.

Με το εμπλουτισμένο με τις νέες επιστήμες πρόγραμμα σπουδών σε συνδυασμό με την Σχολαρχεία επιφανών λόγιων και τα υπερεπαρκή οικονομικά μέσα, η Σχολή σύντομα επανάκτησε το γόητρό της.

Συγκεκριμένες γραπτές μαρτυρίες μας διαφωτίζουν -ως ένα βαθμό βέβαια- για το περιεχόμενο της διδασκαλίας των Μαθηματικών από τον μεγάλο εκσυγχρονιστή δάσκαλο Δωρόθεο τον Πρώιο. Συγκεκριμένα, σε επιστολή του προς τους αδελφούς Ζωσιμάδες στις 29 Νοεμβρίου του 1804, τους πληροφορεί ότι στην τάξη των Μαθηματικών δίδασκε τα Μαθηματικά του Νικηφόρου Θεοτόκη, εκδόσεις Ζωσιμάδων, και μία Λογική του αββά Γενουνησιού.³²⁸ Γνωρίζουμε ακόμα ότι «Οι αδελφοί Ζωσιμάδες είχαν αποστείλει εις τον Δωρόθεον Πρώιον 49 σώματα των Μαθηματικών του Θεοτόκη χάριν των μαθητών της Μεγάλης του Γένους Σχολής»³²⁹

Στις 30 Νοεμβρίου 1804, ο Πρώιος, σε επιστολή του προς τον Κοραή εκδηλώνει την επιθυμία να είχε «ένα νεώτερο συγγραφέα περί της πρακτικής Γεωμετρίας και αγρομετρίας και υψιμετρίας και εν ενί λόγω un inginiere civile μετά των ανηκόντων εργαλείων δια να δείξη εις τους νεανίσκους την χρήσιν της Γεωμετρίας».

Στην ίδια επιστολή ζητούσε ακόμα από τον Κοραή να του στείλει ένα κώνο ξύλινο όπως αυτόν που είχε ο ίδιος δει στην Ιταλία διδασκόμενος τις κωνικές τομές, «τετμημένον μεν κατά τας τρεις καμπυλοειδείς τομάς, ίσως και κατά τρίγωνον και κύκλον, συγκεκολλημένον δε δι' εξωτερικών ξυλίνων γόμφων εν ταις χρεΐαις διαλυόμενον κατά τας τομάς και πάλιν απαρτιζόμενον». Τον κώνο θεωρούσε απαραίτητο «προς μείζονα σαφήνεια των κωνικών θεωρημάτων»³³⁰

Από τον Κοραή, για την ενημέρωσή του, ζητούσε «τας εσχάτως εγκρινομένας Μαθηματικὴν, Φυσικὴν και Μεταφυσικὴν, τα μέχρι τοῦδε πρακτικὰ του νεοσυσταθέντος Πανεπιστημίου (Παρισίων), δύο ἢ τρία σώματα των λογαριθμῶν του Γαρδινεριου και ένα ἄλταντα καλόν»³³¹

Η πρόθεση του Πρωίου είναι φανερή. Θέλει να οργανώσει και να εδραιώσει όσο το δυνατόν καλύτερα την διδασκαλία των Μαθηματικών. Σε επιστολή του προς τον Ηγεμόνα της Μολδαβίας Αλέξανδρο Μουρούζη τον Σεπτέμβριο του 1803, ο Δωρόθεος, τον ενημερώνει «...ετελείωσεν το πρώτον έτος του Μουσείου λυσιτελώς, λαμπρώς και ενδόξως, κατά τε την μαθημάτων πρόοδον και την των ετησίων και προφορικών πρόσοδον. μαθήματα γαρ εν αυτώ ετω πρώτω έτει αριθμητικά, γεωμετρικά, τριγωνομετρικά και λογικά διδάχθησαν,...»³³²

Μετά την αποχώρηση του Πρωίου από την Ακαδημία, το 1807, την διεύθυνσή της ανέλαβε για μία διετία (1807-1809) ο καλά καταρτισμένος δάσκαλος των Μαθηματικών και πρώην μαθητής του Πρωίου, Παντολέων Φραγκάδης.

³²⁸ Εράνισμα. Κώδιξ περιέχων τας αντιγραφάς των επιστολών, ψηφισμάτων, επιταγμάτων, αιτημάτων, ών επιστέλλει και δέχεται το εν Βυζαντίω μέγα και κοινόν του Γένους Μουσείον επί Σχολαρχίας Δωροθέου Πρωίου, ΠΕΦΣΚ, τόμος ΙΓ' (1878-79) σελ 21 (ο. α. σελ 85)

³²⁹ Γ. Γριτσόπουλος, «Πατριαρχική Μεγάλη του Γένους Σχολή» τόμος Α', εν Αθήναις 1996, σελ 88

³³⁰ ο. α. σελ 88

³³¹ ο. α. σελ 89

³³² ο. α. σελ 91

Τα δύο τελευταία Πατριαρχικά έγγραφα του 1809 και του 1817, (τα οποία αφορούν σε οικονομικές διευθετήσεις καθώς και θέματα οργάνωσης και τάξης της Σχολής), δεν μας δίνουν πληροφορίες για την διδασκαλία των Μαθηματικών από το 1807 μέχρι την Ελληνική Επανάσταση. Αλλά η –έστω και βραχύχρονη- παρουσία δύο από τους σημαντικότερους εκπροσώπους του νεοελληνικού Διαφωτισμού και φορείς των νέων ιδεών στην διεύθυνση της Σχολής, δηλώνει ότι οι Μαθηματικές Επιστήμες κατείχαν σημαντική θέση στα διδακτικά της προγράμματα.

Ο Στέφανος Δούγκας, άριστος μαθηματικός και φιλόσοφος,³³³ ανέλαβε μόνο για ένα χρόνο (1809-1810) την διεύθυνση της Σχολής και αποχώρησε «μη δυνηθείς να αντισταλάσει εις τας μυριάς μηχανορραφίας» όπως λέει ο Κούμας.³³⁴

Ο επιφανής λόγιος Κωνσταντίνος Κούμας ανέλαβε την διεύθυνση της Σχολής τον Σεπτέμβριο του 1814, δίδαξε φιλοσοφία, μαθηματικά και φυσικές επιστήμες, αλλά «απέθετο την αρχήν του διευθύνειν την Σχολήν περί τας αρχάς Αυγούστου 1815, μη έχων ελευθερίαν ενεργείας».³³⁵

Η προεπαναστική λειτουργία της Σχολής κλείνει με την σχολαρχία του Σέργιου Μυστάκη (1815-1820). Το κενό που δημιουργήθηκε στην διδασκαλία των Μαθηματικών μετά την αποχώρηση του Κούμα από την Σχολή, ήταν δυσαναπλήρωτο αφού ο τελευταίος σχολάρχης, ένας καλός γραμματικός, καταγίνονταν κυρίως με την διδασκαλία της γλώσσας.

Συμπεράσματα

Τα Μαθηματικά εισάγονται στο πρόγραμμα σπουδών της Πατριαρχικής Σχολής με επίσημο έγγραφο το οποίο εκδόθηκε από τον Πατριάρχη Σεραφεΐμ τον Β΄ τον Ιανουάριο του 1759.

Στην περίοδο 1759 έως 1804 η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Σχολή δεν γίνεται συστηματικά αλλά κατά διαστήματα.

Από το 1804 μέχρι την Ελληνική Επανάσταση, δηλαδή μετά την μεταφορά της Πατριαρχικής Ακαδημίας στο Κουρούτσεσμε, τα προγράμματα σπουδών της Σχολής εκσυγχρονίστηκαν σημαντικά με την εισαγωγή και την καθιέρωση της διδασκαλίας των επιστημών.

Όσο και αν η βάση της παιδείας στην Πατριαρχική Ακαδημία εξακολουθούσε να είναι η αρχαιογνωσία, τα θεολογικά γράμματα και η διδασκαλία της γλώσσας, εν τούτοις τα Μαθηματικά (Άλγεβρα, Γεωμετρία, Τριγωνομετρία, Κωνικές Τομές) διδάχτηκαν συστηματικότερα.

³³³ «σπουδάσας εν Αλλή της Σαζωνίας, Ιένη και Γοτίγγη, μαθητής του διασήμου Σχέλιγγ» Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησης του Γένους κατά τον ΙΗ΄ και ΙΘ΄ αιώνα», Ερμής, Νεοελληνικά Μελετήματα, Αθήνα 1999, σελ 117

³³⁴ ο. α. σελ 117

³³⁵ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Χρονικά της Πατριαρχικής Ακαδημίας». Εν Κωνσταντινουπόλει, έτος ΑΩΠΓ σελ 188

Η διδασκαλία τους από λαμπρούς λόγιους -σημαντικούς εκπροσώπους του νεοελληνικού Διαφωτισμού- οι οποίοι σπούδασαν στα καλύτερα πανεπιστήμια της Ευρώπης, (Δωρόθεος ο Πρώτος, Στέφανος Δούγκας, Κωνσταντίνος Κούμας), μαρτυρεί την «θέση» την οποία κατέλαβαν την εποχή της προπαρασκευής του αγώνα στα διδακτικά προγράμματα της «Πατριαρχικής Σχολής», η οποία στους μετά την άλωση χρόνους ήταν «η έκφρασις της πνευματικής ανησυχίας και δίψης του υπόδουλου Ελληνισμού»³³⁶

Η Αθωνιάδα

Το πρώτο σιγίλιο το οποίο εκδόθηκε το 1750 από τον Πατριάρχη Κύριλλο τον Ε' και αφορούσε στην ίδρυση της Αθωνιάδας, την χαρακτηρίζει «φροντιστήριο ελληνικών μαθημάτων, παιδείας τε και διδασκαλίας παντοδαπούς εν τε λογικαίς, φιλοσοφικαίς τε και θεολογικαίς επιστήμαις»³³⁷. Ο πρώτος δάσκαλος της Σχολής, ο Νεόφυτος Κausοκαλυβίτης, δίδαξε φιλοσοφία και γραμματική όπως επιβεβαιώνει και ο ίδιος σε επιστολή του προς την μονή Βατοπεδίου. Συγκεκριμένα γράφει ότι αναλαμβάνει από τον Δεκέμβριο του 1749 «μεταδούναι των Μουσών την, καθ' Ησίοδον, Πολύμνιαν»³³⁸

Επομένως, αν και δεν υπάρχουν σχετικές μαρτυρίες για το περιεχόμενο της διδασκαλίας του Κausοκαλυβίτη, είναι βέβαιο ότι κατά την διάρκεια της τριετούς σχολαρχίας του, (Δεκέμβριος 1749- Ιούλιος 1753), στην Αθωνιάδα, δεν διδάχθηκαν Μαθηματικά.

Τον Ιούλιο του 1753, το νέο σιγίλιο το οποίο εκδόθηκε από τον Πατριάρχη Κύριλλο τον Ε' και αναφέρεται στην ανάληψη της διεύθυνσης της Αθωνιάδας από τον Ευγένιο Βούλγαρη χαρακτηρίζει τον νέο σχολάρχη ως «άνδρα πεπαιδευμένον και λόγιον και παντοδαπαίς επιστήμαις κεκοσμημένον και γεγυμνασμένον και δυνάμενον παιδεύσαι τους μαθητάς ου μόνον την γραμματικήν και την λογικήν τέχνην, αλλά και την φιλοσοφίαν και **τα μαθηματικάς επιστήμας**, ναι μην και την Θεολογίαν και όσα εις ηθικήν φιλοσοφίαν ανήκουσι».³³⁹

Από το νέο σιγίλιο γίνεται σαφές ότι η διδασκαλία των μαθηματικών στην Αθωνιάδα εισάγεται από τον Ευγένιο Βούλγαρη το 1753.

Ο Ευγένιος αναφέρει ότι διδάσκει καθημερινά μαθηματικά³⁴⁰ (με τον όρο μαθηματικά περιλαμβάνει ένα κύκλο μαθημάτων: Αριθμητική, Γεωμετρία, Φυσική, Κοσμογραφία).

Το χειρόγραφο έργο του Βούλγαρη «Εισαγωγή εις τα αριθμητικά τοις κατά την Αθωνιάδα ακαδημίαν των επιστημών ακροωμένοις συντόμως σχεδιασθείσας»,³⁴¹ (έτος

³³⁶ Γ. Γρισόπουλος, «Πατριαρχική Μεγάλη του Γένους Σχολή» τόμος Α', εν Αθήναις 1996

³³⁷ Άλκης Αγγέλου, «Το χρονικό της Αθωνιάδας, Των Φώτων, Οψεις του νεοελληνικού Διαφωτισμού», Ερμής, Αθήνα 2000, σελ.124

³³⁸ ο. α. σελ 117

³³⁹ Τρύφωνος Ε. Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», εν Αθήναις 1936, τόμος 1^{ος}, σελ 91.

³⁴⁰ Άλκης Αγγέλου, «Το χρονικό της Αθωνιάδας, Των Φώτων, Οψεις του νεοελληνικού Διαφωτισμού», Ερμής, Αθήνα 2000, σελ.123

³⁴¹ Γιάννης Καράς «Οι επιστήμες στην τουρκοκρατία», Τόμος Α', 1992, σελ 60

1760), το οποίο καλύπτει ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών εννοιών, περιλαμβάνει, όπως από τον τίτλο του γίνεται προφανές, τα των παραδόσεων του Βούλγαρη στους μαθητές της Αθωνιάδας στο μάθημα της Αριθμητικής.

Παρ' όλο που τα μαθηματικά έργα του Ευγένιου Βούλγαρη εκδόθηκαν αρκετά χρόνια αργότερα,³⁴² τα χειρόγραφα έργα του τα οποία έχουν διασωθεί³⁴³ (Στοιχεία γεωμετρίας, Στοιχεία αναλύσεως, Στοιχεία μαθηματικών κ. ά.) μαρτυρούν το υψηλό -για την εποχή- επίπεδο διδασκαλίας των Μαθηματικών στην Αθωνιάδα

Ο Ιώσηπος Μοισιόδακας σχολιάζοντας με σκωπτική διάθεση την διδακτική και ρητορική δεινότητα του δασκάλου του την οποία επιδείκνυε αρκετές φορές στους μαθητές του, γράφει, δίνοντάς μας συγχρόνως μια εικόνα για το επίπεδο διδασκαλίας των Μαθηματικών στην Αθωνιάδα, το οποίο ξεπερνούσε κατά πολύ τις απαιτήσεις του ακροατηρίου του: «η ερμηνεία του πρώτου βιβλίου μόνου του Ευκλείδου παρετάθη εν έξ μησί σώοις, και ο λόγος αυτής της παραστάσεως είναι ο επιφερόμενος. Ο ανήρ παρέδιδε την ογδόην πρότασιν, φερ' εειπείν, πρώτον κατά τον Ευκλείδην, είτα κατά τον Πρόκλον, είτα κατά τον Κλαύδιον, είτα κατά τον Τακουέτιον είτα και καθ' εαυτόν, πλήν οσάκις καθ' εαυτόν, αεί πολυτρόπως. Μετά την πολυτροπωτάτην δείξιν ταύτην, υποσυνήπτεν ο ανήρ επομένως και τα πορίσματα του Βίστωνος, αν καλά πράγματα υπέρτερα πάντα σχεδόν της εν τω τότε δυνάμεως ημών»³⁴⁴

Ο Μοισιόδακας, ανάμεσα στα άλλα, μαρτυρεί ότι τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ήταν από τις διδασκόμενες ενότητες της Γεωμετρίας.

Μετά την απότομη αποχώρηση του Βούλγαρη από την Αθωνιάδα, την διεύθυνση της ανέλαβε ο Νικόλαος Ζερζούλης, ο οποίος δίδασκε Μαθηματικά στην Πατριαρχική Σχολή.³⁴⁵ Επομένως κατά την διετή σχολαρχία του Ζερζούλη (1759-1761) στην Αθωνιάδα συνεχίστηκε η διδασκαλία των Μαθηματικών. Μετά την αποχώρησή του Ζερζούλη, η Σχολή διέκρινε την λειτουργία της και μόνο το 1782 επαναλειτούργησε, υποβαθμισμένη σε μία κατώτερη σχολή γραμματικών μαθημάτων.

Η Ευαγγελική Σχολή της Σμύρνης

Ιδρύθηκε το 1733 από τρεις προκρίτους της Σμύρνης και τον Ιερόθεο Δενδρινό, δάσκαλο «εφ' όρου ζωής» του σχολείου, ο οποίος όπως αναφέρεται στο επίσημο ιδρυτήριο έγγραφο της Σχολής «εις ότι εγγίζει αυτό εις προκοπήν μαθητών και επίδοσιν του αυτού όλου Σχολείου, συν Θεώ υπόσχεται να επαρκή προθύμως κατά συνείδησιν εν φόβω Θεού της ψυχής του εφ' όρου ζωής αυτού...».³⁴⁶

Δέκα χρόνια αργότερα μετά τον θάνατο των τριών από τους ιδρυτές της, οι νέοι επίτροποι με επίσημο έγγραφο παγίωσαν την σχολή αφιερώνοντας την «εις τον Υιόν του

³⁴² Το έργο του «Των Μαθηματικών Στοιχείων αι πραγματεΐαι αι αρχαιοδέσταιαι» προτοεκδόθηκε στην Λειψία το 1778 και το έργο «Τακουετίου, Στοιχεία Γεωμετρίας» στην Βιέννη το 1805.

³⁴³ ο. α. σελ 62, 63, 64

³⁴⁴ ΙΕΕ, «Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία» (περίοδος 1669-1821), σελ. 327

³⁴⁵ Άλκης Αγγέλου, «Το χρονικό της Αθωνιάδας, Των Φώτων, Οψεις του νεοελληνικού Διαφωτισμού», Ερμής, Αθήνα 2000, σελ.127.

³⁴⁶ Μ. Παρκανίκα, Ιστορία της Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης, εν Αθήναις 1885, σελ 7

Θεού, τον Κύριον ημών Ιησούν Χριστόν» για σχολείο των «Ευαγγελικών του εντολών και φροντιστήριον πάντων των ελληνικών μαθημάτων».³⁴⁷

Το 1747 στην Σχολή εδίδασκαν δύο δάσκαλοι. Ο Ιερόθεος Δενδρινός, (ο διευθυντής) δίδασκε τα «γραμματικά» μαθήματα, δηλαδή την ελληνική γλώσσα, και ο μαθητής του Χρύσανθος Καραβίας υποδιδάσκαλος της Σχολής, ο οποίος με την διδασκαλία του στους πρωτόπειρους μαθητές συνεπικουρούσε στο έργο του τον Ιερόθεο.

Επομένως η παρεχόμενη παιδεία από την Ευαγγελική Σχολή η οποία «εθεωρείτο δήλα δὴ Σχολεῖον ιερὸν καὶ οἱ διδάσκαλοι αὐτῆς ἦσαν το πλείστον ιερωμένοι καὶ πιστῶς αφοσιωμένοι εἰς τὰ καθεστῶτα»³⁴⁸ ἦταν θεολογικὸν χαρακτήρα. Τα Μαθηματικά και οι επιστήμες δεν περιλαμβάνονταν στα διδασκόμενα μαθήματα.

Ακόμα και μετά τον θάνατο του Ιερόθεου (1780), ο νέος σχολάρχης Χρύσανθος επέμεινε εις τα «καθεστῶτα, δήλα δὴ εἰς τὴν διδασκαλίαν τῶν γραμματικῶν, τῆς φιλοσοφίας καὶ τῶν ἱερῶν μαθημάτων κατὰ τὴν ἀρχαίαν τῆς διδασκαλίας μέθοδον»³⁴⁹

Τα Μαθηματικά διδάχτηκαν στην Ευαγγελική Σχολή για ἑξι μῆνες ἀπὸ 21 Φεβρουαρίου μέχρι 21 Αυγούστου τοῦ 1811.

Συγκεκριμένα, ἐξ αἰτίας τοῦ ανταγωνισμοῦ τῆς Ευαγγελικῆς Σχολῆς με το νεοσύστατο «Φιλολογικὸ Γυμνάσιον», οἱ ἐπίτροποι τῆς Σχολῆς, προσκύλεσαν τὸν διάσημο Θεόφιλο Ιεροδιάκονο –πολὺ πιθανόν τὸν Θεόφιλο Καῖρη– νὰ ἀναλάβει τὴν διδασκαλία τῶν Μαθηματικῶν. Μετὰ ἀπὸ τὴν ἐξάμηνη παραμονή τοῦ στὴν Σχολή, ὁ Θεόφιλος ἀποχώρησε γιὰ τὶς Κυδωνίες.³⁵⁰

Μετὰ τὴν δεκαετὴ ἐρίδα καὶ τὶς συνεχεῖς ἀντεγκλήσεις ἀνάμεσα σὲ δασκάλους καὶ μαθητὲς τῶν δύο σχολείων, ποὺ εἶχαν σαν ἀποτέλεσμα τὴν συγχώνευση τῶν δύο Σχολῶν ἀφοῦ πρῶτα ἀναγκάστηκαν οἱ ἰδρυτὲς τοῦ Γυμνασίου νὰ διακόψουν τὴν λειτουργία τοῦ, (1819), ἡ νέα Σχολή, με τὸ ὄνομα «Ευαγγελική», λειτούργησε με διευρυμένο πρόγραμμα σπουδῶν με διευθυντὴ τὸν ἐξέχοντα λόγιο καὶ **ικανὸ μαθηματικὸ Βενιαμὶν τὸν Λέσβιο ὁ ὁποῖος ὅπως καὶ οἱ συνεργάτες τοῦ δίδαξε μόνον γιὰ ἑξι μῆνες**³⁵¹ ἀπὸ τὸν Σεπτέμβριο τοῦ 1820 μέχρι τὸν Μάρτιο τοῦ 1821, ποὺ ξέσπασε ἡ Επανάσταση καὶ ἡ σχολὴ σταμάτησε νὰ λειτουργεῖ.

Δηλαδή, δύο ἐξάμηνες, τὰ ὁποῖα ἀπεῖχαν περίπου μία δεκαετία, διδάχτηκαν τὰ Μαθηματικά κατὰ τὴν διάρκεια τῆς πολὺχρονης λειτουργίας τῆς Ευαγγελικῆς Σχολῆς.

Ἡ Σχολὴ τῆς Πάτμου

Στὴν Πατμιάδα Σχολή, «τω ἐν νήσῳ Πάτμῳ φροντιστήριον τῶν ἐλληνικῶν μαθημάτων» ὅπως χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὸ σιγίλιο τοῦ Πατριάρχου Θεοδοσίου τοῦ Β'³⁵², ὁ ἰδρυτὴς καὶ διευθυντὴς τῆς, Μακάριος Καλογεράς, ἀπὸ τὴν ἰδρυση τῆς Σχολῆς τὸ 1713, ἕως τὸν θάνατό τοῦ τὸ 1737, γιὰ εἴκοσι τέσσερα χρόνια, «ἠρμήνευε τοὺς Ἑλληνας συγγραφεῖς

³⁴⁷ ο. α. σελ 9

³⁴⁸ ο. α. σελ 21

³⁴⁹ ο. α. σελ 22

³⁵⁰ ο. α. σελ. 25

³⁵¹ ο. α. σελ. 59

³⁵² ο. α. σελ 155

και ποιητάς και τους πατέρας της Εκκλησίας, εδίδασκε γραμματικά, φιλοσοφικά, ρητορικήν, εκκλησιαστικήν μουσικήν και λατινικά.»³⁵³

«Περὶ δε των Μαθηματικῶν και των ἄλλων εγκυκλίων μαθημάτων, οἶον ιστορίας, γεωγραφίας και ἄλλων, ουδεμίαν ἐνδειξιν ἔχομεν ὅτι ἐδιδάσκοντο ταῦτα ἐπὶ των πρώτων πέντε σχολαρχῶν. βέβαιον θεωροῦμε ὅτι ἐδιδάσκοντο ἐπὶ Παΐσιου του Καραπατά, γινώσκομεν δε ὅτι ἐδίδασκεν αὐτὰ Ἰεζεκιήλ ο Καλύμνιος και οι μετ' αὐτόν.»³⁵⁴

Δηλαδή ἀπὸ την ἰδρυση της Σχολῆς, το 1713, μέχρι την ἀνάληψη της διεύθυνσής της ἀπὸ τον Παῖσιο Καραπατὰ το 1809, τα Μαθηματικά δεν διδάχτηκαν στην Πατμιάδα.

Τα Μαθηματικά δίδαξε κατὰ την διάρκεια της σχολαρχίας του Καραπατὰ (1809-1818)³⁵⁵ ο Ἰεζεκιήλ ο οποίος «ἦν των διαπρεπῶν δασκάλων των χρόνων αὐτοῦ, μετερῦθμισε δε τα της σχολῆς εἰσαγαγὼν πάντα τα διδακτικά βιβλία του Κούμα»³⁵⁶

Μετὰ τον Καραπατὰ η Σχολή παρήκμασε ραγδαία, παρακμή, ολοένα αυξανόμενη μέχρι την Ἑλληνική ἐπανάσταση, παρ' ὅλες τις προσπάθειες που ἔγιναν ἀπὸ τον Πατριάρχη Γρηγόριο τον 5^ο για την ανασύστασή της Σχολῆς.

Επομένως στην περίοδο λειτουργίας της Πατμιάδας, ἀπὸ την ἰδρυση της, το 1713, μέχρι την διακοπή της λειτουργίας της ἀπὸ την ἐπανάσταση, **δηλαδή μέσα σε ἕναν αἰῶνα λειτουργίας της, τα Μαθηματικά διδάχτηκαν περίπου για μια δεκαετία, (1809-1818).**

Οι Σχολές των Ἰωαννίνων

α) Η Σχολή του Γκιόνμα

Η Σχολή του Γκιόνμα ἰδρύθηκε μετὰ το 1676 και πριν το 1680 πιθανότατα το 1677³⁵⁷

Μετὰ τον Βησσαρίωνα Μακρή και πρώτο διευθυντή της Σχολῆς (1674-1683) και τον διάδοχό του Γεώργιο Σουγδουρή ο οποίος ἀνέλαβε την διεύθυνση (1683- 1715), «...παραδοὺς ἄριστα τα Ἑλληνικά μαθήματα, φιλοσοφίαν τε και θεολογίαν»,³⁵⁸ ἀμέσως μετὰ το πέρας των σπουδῶν του στην Ἰταλία, την σχολαρχία ἀνέλαβε μέχρι το 1723 ο μαθητὴς του, Μεθόδιος Ανθρακίτης.³⁵⁹

Την διεύθυνση της Σχολῆς του Γκιόνμα μετὰ τον Μεθόδιο Ανθρακίτη, ἀνέλαβε ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος. Γόνος διακεκριμένης Ἡπειρωτικῆς οἰκογένειας και ἄριστος μαθητὴς του Ανθρακίτη ἀνέλαβε για 37 χρόνια (1723-1760) την διεύθυνση της Σχολῆς, η οποία λόγω της μεγάλης φήμης που ἀπέκτησε ἐξ αἰτίας της επιτυχούς διδασκαλίας του,

³⁵³ Μ. Η. Μαλανδράκη, «Πατμιάς Σχολή», ἐν Αθήναις 1911, σελ 5

³⁵⁴ ο. α. σελ. 56

³⁵⁵ ο. α. σελ 28

³⁵⁶ ο. α. σελ 32

³⁵⁷ Κ. Δ. Μέρτζιου, «Ἡπειρωτικά Χρονικά», Το ἐν Βενετία Ἡπειρωτικὸν Ἀρχεῖον, σελ 103

³⁵⁸ Ο Σουγδουρὴς ἀφοῦ «εμαθίτευσεν ἐν Ουενετίας την Λατινικήν, Ἰταλικήν και Ἑλληνικήν διάλεκτον, ἐλθὼν εἰς Ἰωάννινα διδάσκαλος ἐ χρημάτισε της ἐκεῖ οὔσης σχολῆς, παραδοὺς ἄριστα τα Ἑλληνικά μαθήματα, φιλοσοφίαν τε και θεολογίαν, ἐν πολλοῖς δε διαρκέσας χρόνοις τῷ ρηθέντι σχολείῳ...» Κ. Δ. Μέρτζιου, «Ἡπειρωτικά Χρονικά», Το ἐν Βενετία Ἡπειρωτικὸν Ἀρχεῖον, σελ 107

³⁵⁹ Β. Α. Μυστακίδου, «Περὶ συμβολῆς εἰς την ιστορίαν των ἐν Ἰωαννίνοις σχολείων», Παρνασσός, τόμος Ι, τεῦχος Β', σελ 66

επικράτησε να λέγεται Μπαλαναία.³⁶⁰

Ο Μπαλάνος άκρως συντηρητικός έτρεφε μεγάλη δυσπιστία προς τα νεώτερα φιλοσοφικά ρεύματα καταδίκασε κάθε νεώτερη θεωρία και διακρίθηκε κυρίως «ως μαθηματικός άριστος, ως ουδείς των καθ' ημάς εν τοις χρόνοις εκείνοις»³⁶¹

Μετά τον θάνατο του Βασιλόπουλου (1760) στην σχολαρχία τον διαδέχτηκε ο γιός του Κοσμάς, δάσκαλος Μαθηματικών και ο ίδιος αλλά άκρως συντηρητικός όπως και ο πατέρας του, ο οποίος διηύθυνε την Σχολή για 47 χρόνια (1760-1807).

Το Κοσμά διαδέχτηκε στην σχολαρχία, ο αδερφός του Κωνσταντίνος Μπαλάνος, (1807-1818). Υπερσυντηρητικός όπως και οι προκατόχοί του, παραγνώριζε τις νεότερες προόδους και μεθόδους των επιστημών³⁶². Επί της σχολαρχίας του άρχισε η παρακμή της Σχολής η οποία συνεχίστηκε με επιταχυνόμενους ρυθμούς και μετά το θάνατό του, το 1818, όταν την διεύθυνση ανέλαβε ο αδερφός του Αναστάσιος Μπαλάνος.

β) Επιφάνειος- Μαρουτσαία – Καπλαναία Σχολή

Στην Επιφάνειο Σχολή από 1^η Αυγούστου 1719 δίδαξε ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος. Αν και δεν είναι ακριβώς γνωστό πότε αποχώρησε από την Σχολή γιατί τα πρακτικά της ελληνικής κοινότητας την περίοδο αυτή παρουσιάζουν κενά, εν τούτοις, σύμφωνα με κάποια οικονομικά στοιχεία της Σχολής τα οποία αφορούν σε μισθοδοσίες δασκάλων, εικάζεται ότι ο Μπαλάνος δίδαξε μέχρι τον Σεπτέμβριο του 1725³⁶³.

Είναι πιθανόν, στην Επιφάνειο μετά την αποχώρηση του Μπαλάνου, να δίδαξε ο Μεθόδιος Ανθρακίτης μέχρι το 1736³⁶⁴.

Η ανάθεση της διεύθυνσης της Επιφανείου Σχολής σε δύο από τους πλέον γνωστούς δασκάλους των Μαθηματικών των χρόνων της δουλειάς, τον Μεθόδιο Ανθρακίτη και τον Μπαλάνο Βασιλόπουλο, αποτελεί τεκμήριο ότι τα Μαθηματικά διδάχτηκαν κατά την περίοδο της σχολαρχίας τους.

Η ίδρυση της Μαρουτσαίας Σχολής (ή, η ανασύσταση της Σχολής του Επιφανείου) το 1742³⁶⁵ άνοιξε νέους ορίζοντες στα εκπαιδευτικά δρώμενα της πόλης των Ιωαννίνων.

Ο εξάιρετος λόγιος Ευγένιος Βούλγαρης –γνωστός δάσκαλος των επιστημών- ο οποίος εκλέχτηκε από τους ιδρυτές της πρώτος διευθυντής της Σχολής, δίδαξε από το 1742 έως το 1746 και στην συνέχεια από το 1750 έως το 1753³⁶⁶. Ο Ευγένιος δίδαξε στην «Μαρουτσαία», τις Φυσικές Επιστήμες και τα Μαθηματικά.

Μετά την αποχώρηση του Βούλγαρη, η Σχολή παρέμεινε κλειστή για 40 χρόνια περίπου γιατί αφ' ενός μεν δεν μπορούσε να βρεθεί κατάλληλος δάσκαλος για την διεύθυνσή της και αφ' ετέρου γιατί το ποσόν που κληροδοτήθηκε για την αμοιβή δασκάλου με τα

³⁶⁰ «οι Μπαλάνοι διδάσκαλοι του Γένους», Ηπειρωτικά Χρονικά, τόμος 5^{ος}, σελ 230

³⁶¹ Γ. Ζαβίρα, «Νέα Ελλάς», Αθήνα 1872, σελ 450-452

³⁶² «οι Μπαλάνοι διδάσκαλοι του Γένους», Ηπειρωτικά Χρονικά, τόμος 5^{ος}, σελ 234

³⁶³ Κ. Β. Μέρτζιου, Το εν Βενετία Ηπειρωτικών Αρχείον, εν Ιωαννίνους 1936, σελ 79

³⁶⁴ ο. α. σελ 81

³⁶⁵ Β. Α. Μυστακίδου, «Περί συμβολής εις την ιστορίαν των εν Ιωαννίνους σχολείων», Παρνασσός, τόμος Ι, τεύχος Β', σελ 57

³⁶⁶ Σ. Π. Λάμπρου, Νέος Ελληνισμός, τόμος 13^{ος}, σελ 290

προσόντα που όριζε η διαθήκη (γνώστης των επιστημών και κάτοχος ξένων γλωσσών) δεν αρκούσε για την μισθοδοσία του.³⁶⁷

Ο Αθανάσιος Ψαλίδας ανέλαβε την διεύθυνση της Σχολής από το 1795- 1797 και μετά την ανασύστασή της από τον Ζώη Καπλάνη³⁶⁸ ανέλαβε την διεύθυνση της μετονομασθείσας σε «Καπλαναία» Σχολής μέχρι το 1820. Ο Ψαλίδας ο οποίος είχε σπουδάσει στην Βιέννη και «κατά τον Κρίνον ή ο πρώτος την Φυσικήν μετά πειραμάτων διειδάξας κατά το παρεληλυθός 1796 ου μόνον δε εις την σχολήν αλλά και εις αυτούς του Αλή πασά τους υιούς»³⁶⁹. Ήταν ένας από τους σημαντικότερους εκπροσώπους του νεοελληνικού Διαφωτισμού και έδωσε περίοπτη θέση στα Μαθηματικά (Αριθμητική Άλγεβρα και Γεωμετρία) στο πρωτοποριακό διδακτικό πρόγραμμα το οποίο εφάρμοσε στην Σχολή: «... ο Ψαλίδας δια των Μαθηματικών στοιχείων του Μεταβουργίου, τα οποία μετέφρασε και παρέδιδεν, ωφέλησε πολύ τους συμπατριώτας του και ήθελεν ωφελησείν και την άλλην Ελλάδα, εάν ηδύνατο να ακούσουν τα μαθήματά του και εξωτερικοί μαθηταί».³⁷⁰

Στις Σχολές των Ιωαννίνων, δίδαξαν κάποιοι από τους σημαντικότερους εκπροσώπους του νεοελληνικού διαφωτισμού και επιφανέστερους δασκάλους του Γένους. Ο Μεθόδιος Ανθρακίτης στον οποίο οφείλεται η εισαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών στον υπόδουλο ελληνικό χώρο (1708) από πολύ πρώιμους -για την διάδοση των επιστημών- χρόνους, ο εξαιρετός λόγιος Ευγένιος Βούλγαρης, ο εκσυγχρονιστής δάσκαλος Αθανάσιος Ψαλίδας, δίδαξαν τα Μαθηματικά και τις επιστήμες στις Σχολές των Ιωαννίνων.

Αλλά και οι συντηρητικοί λόγιοι Μπαλάνος Βασιλόπουλος (μαθητής του Ανθρακίτη) και Μπαλάνος Κοσμάς (γιος του Βασιλόπουλου) δίδαξαν επί σειρά ετών (περίπου 80) τα Μαθηματικά στην Σχολή του «Γκιόνμα» στα Ιωάννινα, η οποία προς τιμήν τους μετονομάστηκε σε «Μπαλαναία Σχολή»

Δηλαδή, οι Σχολές των Ιωαννίνων είχαν την πρωτοπορία στην διδασκαλία των Μαθηματικών. Από πολύ πρώιμους -για την διάδοση των επιστημών- χρόνους, μέχρι και τις παραμονές του Αγώνα, τα Μαθηματικά διδάχτηκαν ανελλιπώς στις Σχολές των Ιωαννίνων

³⁶⁷ Κ. Δ. Μέρτζιου, «Ηπειρωτικά Χρονικά», Το εν Βενετία Ηπειρωτικόν Αρχαίον, σελ 182

³⁶⁸ «..... επειδή ο ευλογημένος Κοσμάς Βαλάνος δεν ηθέλησε να παραδεχθή καμμίαν νεωτέραν θεωρίαν εκ της φιλοσοφίας των Ευρωπαίων, ουδέ να εισαγάγη κανέν από τα μαθήματα του Ευγενίου. Ένας φιλογενής Ιωαννίτης, Ζώης Καπλάνιος, πραγματευόμενος εις την Ρωσίαν, ηθέλησε να αναπληρώση την έλλειψιν, έκτισε λοιπόν και επρόκισε δεύτερον σχολειον εις τα Ιωάννινα, και έστειλεν εις αυτό διδάσκαλον τον συμπατριώτην του Αθανάσιον Ψαλιδαν (1795).....» Κωνσταντίνου Κούμα, *Ιστορία των Άνθρωπων Πράξεων*, τόμος ΙΒ', εν Βιέννη 1832, σελ. 572

³⁶⁹ Β. Α. Μυστακίδου, «Περί συμβολής εις την ιστορίαν των εν Ιωαννίνους σχολείων», Παρνασσός, τόμος Ι, τεύχος Β', σελ 59

³⁷⁰ Κωνσταντίνου Κούμα, *Ιστορία των Άνθρωπων Πράξεων*, τόμος ΙΒ', εν Βιέννη 1832, σελ. 573.

Η Σχολή της Δημητσάνας

Η σχολή της Δημητσάνας ιδρύθηκε από τους μοναχούς Γεράσιμο Γούνα και Αγάσιο Λεονάρδο οι οποίοι μετά τις σπουδές τους στην Σμύρνη επέστρεψαν το 1764 στην γενέτειρά τους, την Δημητσάνα, με στόχο την ίδρυση της Σχολής.³⁷¹

Το πατριαρχικό σιγίλιο το οποίο αφορά στην ίδρυση της Σχολής της Δημητσάνας και εκδόθηκε τον Μάιο του 1769 από τον Πατριάρχη Θεοδοσίο τον Β', αναφέρει ότι οι ιδρυτές της Σχολής «συνέστησαν φροντιστήριον ελληνικών μαθημάτων δι' ιδίων μόχθων και αναλωμάτων οικοδομησάμενοι οικίαν προς οίκησιν διδασκάλων άμα και μαθητών, ότι οι ίδιοι προθύμως ανεδέξαντο το της διδασκαλίας έργον, υποδεχόμενοι τους έρωτι παιδείας προσφωιτώντας, διδάσκοντες και παιδεύοντες αυτούς επιμελώς τα εγκύκλια των μαθημάτων»³⁷²

Επομένως με το πρωτοεκδοθέν Πατριαρχικό σιγίλιο το οποίο αφορά στην Σχολή της Δημητσάνας και μας πληροφορεί ότι τα διδασκόμενα μαθήματα ήταν αυτά της εγκυκλίου παιδείας καταλαβαίνουμε ότι **μέσα στο πρώτο σύντομο χρονικό διάστημα που λειτούργησε η Σχολή μέχρι την διακοπή της λειτουργίας της το 1770, δεν διδάχτηκαν τα Μαθηματικά.**

Η αποτυχημένη εξέγερση των Ελλήνων της Πελοποννήσου το 1770,³⁷³ έγινε αιτία να διακοπεί η λειτουργία της Σχολής και μόλις το έτος 1779 οι δύο ιδρυτές της επιχείρησαν την ανασύστασή της.

Από το έτος 1781 έως το 1812, δηλαδή τα επόμενα 32 χρόνια, την διεύθυνση της Σχολής ανέλαβε ο μοναχός Αντώνιος Παπαδόπουλος ο οποίος μετονομάστηκε σε Αγάσιο.³⁷⁴

Νέο Πατριαρχικό σιγίλιο εκδόθηκε από τον Πατριάρχη Γαβριήλ Δ' για την ανασύσταση της Σχολής ενώ ο νέος σχολάρχης Αγάσιος ο νεότερος, σε υπόμνημά του το οποίο χρονολογείται τον Σεπτέμβριο του 1781 υπόσχεται ότι στην Σχολή αυτή «...και τον βιον καταλύσαι, περί τε την των μαθημάτων παράδοσιν και άλλην αύξησιν της αυτής σχολής ενασχολούμενος...»³⁷⁵

Ο Αγάσιος «την εν τω σχολείω διδασκαλίαν περιώρισεν εις την εκμάθησιν της ελληνικής γλώσσης, ερηνεύων Έλληνας συγγραφείς και ποιητάς και τους εκκλησιαστικούς πατέρας...Εν καιρώ δε της ερμηνείας των Ελλήνων συγγραφέων και ποιητών αφορμάς λαμβάνων εκ' του κειμένου ανέπτυσσε την ελληνικήν ιστορίαν και μυθολογίαν. Εις δε τους μαθητάς της ανωτάτης τάξεως εδίδασκε σύντομον μετρικήν και την λογικήν του Βλεμμίδου και επίτομον ρητορικήν»³⁷⁶

Κατά την διάρκεια της σχολαρχίας του Αγάσιου, η οποία θεωρείται η γονιμότερη

³⁷¹ Γ. Γ. Παπαδόπουλου, Νεοελληνική Φιλολογία, σχόλια, «Περί της εν Δημητσάνη Ελληνικής Σχολής», σελ. 8

³⁷² ο.α. σελ 37

³⁷³ Το επαναστατικό κίνημα των Ελλήνων της Πελοποννήσου το 1770 είναι γνωστό σαν κίνημα του Ορλώφ

³⁷⁴ Γ. Γ. Παπαδόπουλου, Νεοελληνική Φιλολογία, σχόλια, «Περί της εν Δημητσάνη Ελληνικής Σχολής», σελ. 15

³⁷⁵ Τάσου Αθ. Γριτσόπουλου, «Σχολή Δημητσάνης», Εν Αθήναις 1962. σελ. 41

³⁷⁶ Γ. Γ. Παπαδόπουλου, Νεοελληνική Φιλολογία, σχόλια, «Περί της εν Δημητσάνη Ελληνικής Σχολής», σελ. 21

περίοδος της Σχολής, **διδάχτηκαν και Μαθηματικά (θεωρητική και πρακτική Αριθμητική, Ευκλείδεια Γεωμετρία)** όπως φαίνεται από τους υπ' αριθμόν 50 και 72 χειρόγραφους κώδικες της βιβλιοθήκης της Σχολής της Δημητσάνας.³⁷⁷

Για τα διδασκόμενα μαθήματα στην Σχολή της Δημητσάνας πληροφορούμαστε από μία συλλογή χειρογράφων ανάμεσα στα οποία υπάρχουν και πολλά μαθηματάρια τα οποία έχουν διασωθεί από την παλιά Σχολή.

Από το είδος των διδακτικών κειμένων τα οποία περιέχουν τα μαθηματάρια³⁷⁸ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι παρ' όλο που στην Σχολή της Δημητσάνας διδάχτηκαν Φυσική, Μαθηματικά, Γεωγραφία, Ιστορία εν τούτοις το επίκεντρο της σχολικής διδασκαλίας αποτελούσαν τα Ελληνικά και Θεολογικά μαθήματα και ότι ο σκοπός της διδασκαλίας ήταν κυρίως η εκμάθηση της αρχαίας ελληνικής γλώσσας και η ερμηνεία εκκλησιαστικών κειμένων κάθε μορφής.

Όσον αφορά την θέση που είχαν τα Μαθηματικά στο πρόγραμμα σπουδών της Σχολής στην Δημητσάνα, τα χειρόγραφα τα οποία έχουν διασωθεί και περιέχουν τις διδασκόμενες ενότητες του μαθήματος, μας επιτρέπουν να διαμορφώσουμε μια ικανοποιητική εικόνα για την διδασκαλία του μαθήματος.

Τις πληροφορίες για το περιεχόμενο των χειρογράφων αυτών αντλούμε από το έργο *Σχολή Δημητσάνης* του Τάσου Γριτσόπουλου (σελ. 161-168) οι οποίες μας δίνουν μια πλήρη εικόνα για τις διδασκόμενες ενότητες καθώς και για το υψηλό επίπεδο της μαθηματικής παιδείας στην Σχολή της Δημητσάνας.

Το περιεχόμενο των χειρογράφων αυτών παραθέτουμε στη συνέχεια.

1. Αριθμητική. Δύο χειρόγραφα (υπ' αριθ. 50 και 72) μας πληροφορούν για την διδασκαλία του μαθήματος της Αριθμητικής.

Το υπ' αριθμόν 50 χειρόγραφο, διαιρεί την διδακτέα ύλη σε πέντε κεφάλαια κάπως έτσι:

Κεφ. Α' (φ. 1-6). Προλογικώς εξετάζεται η αριθμησης και η γραφή των αριθμών, ο σχηματισμός κλάσεων (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες, μυριάδες, χιλιώνια), ο τόπος (θέσις ψηφίων) και ο σχηματισμός κλασματικών αριθμών. Ιδού η αρχή του προλόγου: «Η θαυμαστή του ανθρωπίνου πνεύματος δύναμις, δι' ἧς τας ιδιότητας των περὶ αὐτὸν ὄντων οὐ μόνον ἐπ' αὐτὰν τούτων ἀλλὰ και κατὰ μέρος θεωρεῖν δύναται, ἔδωκεν ἀρχὴν εἰς τὸν μέγαν ἐκεῖνον μαθηματικὸν κόσμον, οὐτινος κτίστης ἐστὶν ὁ ἄνθρωπος και δι οὐ μάλιστα ἡ ὑπὲρ τα φαινόμενα κτίσματα τοῦ λογικοῦ τούτου ὄντος καθοράται υπεροχή. Οὕτω φερ' εἰπεῖν δια τῆς τοιαύτης δυνάμεως τας διαφόρους διαστάσεις των περὶ αὐτὸν ὄντων κατὰ μέρος θεωρῶν, τὴν των μεγεθῶν ἐπιστήμην, εἴτε τὴν Γεωμετρίαν ἢ Μεγεθομετρίαν ἐν γένει παρήγαγεν. Οὕτω τα

³⁷⁷ Τάσου Αθ. Γριτσόπουλου, Κατάλογος των χειρογράφων κωδίκων της βιβλιοθήκης της Σχολής Δημητσάνης, ανατύπωσις ἐκ' των ΚΒ' και ΚΔ' τόμων της ἐπετηρίδος της εταιρείας Βυζαντινῶν Σπουδῶν, ἐν Αθῆναις 1954. σελ. 40, 50

Ο υπ' αριθμόν κώδικας 50

Χαρτ. Διαστ. 0,21×0,15. Αιών ΙΘ'. Φ. 106

Πρακτική αριθμητική μετά τινων κεφαλαίων θεωρητικής αριθμητικής.

Ο υπ' αριθμόν κώδικας 72

Χαρτ. Διαστ. 0,21×0,166. Αιών ΙΗ'. Φ. 184.

1. (φ. 4α). Γεωμετρία μετά σχημάτων.

Φ. 29α: Τέλος του α' βιβλίου αφοθεσπετρίου η ημέρα Τετάρτη ηρξάμεθα της Γεωμετρίας.

2. (φ 150α). Πρακτική αριθμητική.

³⁷⁸ ο.α σελ 103

όντα ή τα μέρη εκάστου όλου, ή κατά μέρος και οίον μεμονωμένως θεωρείσθαι έχοντα επινοών της μονάδος την ιδέαν λαμβάνειν, ή δε όμοια και όμοι εν γένει θεωρών το λεγόμενον ποσόν συνίστησι. ωρισμένως δε αυτό επισυνάπτων το ορισμένον ποσόν είτε αριθμόν συγκροτεί. Όθεν μανθάνομεν ότι ποσόν εν γένει εστί το άθροισμα όμοίως θεωρουμένων πραγμάτων ή άθροισμα ταυτιζομένων μερών ή μονάδων. Και συνεχές μεν, ου αι μονάδες θέσιν τινά συνεχή προς αλληλάς έχουσι, όπερ και τη εκτάσει ή τω μεγέθει ταυτίζεται. διακεκριμένον δε ου αι μονάδες χωρίς κείνται και αριθμός τελευταίον το ωρισμένον των μονάδων άθροισμα.

Εις το Β' Κεφ. (από φ. 6β) λόγος γίνεται περί των παθών των αριθμών. Πάθος είναι η κατ' αύξήσιν ή κατά μείωσιν μεταβολή ενός αριθμού. Ακολουθεί διαπραγματεύσεις περί των τεσσάρων πράξεων της Αριθμητικής. Διαφοραί παρατηρούνται σχεδόν μόνον εις την ορολογίαν, π.χ. το άθροισμα ονομάζεται *άλσιν* ή *κεφάλαιον*, το υπόλοιπον *υπεροχή* ή *λείψανσι*, η δοκιμή *βάσανος*. Ο τρόπος της εύρεσεως του γινομένου αναλυτικός και παραστατικός, ως και η εξήγησις των εννοιών τελείας ή ατελούς διαιρέσεως. Τοιούτος είναι ο συμβολισμός της πράξεως:

Κεφ. Γ' (φ. 25α ε.). Περί κλασμάτων. Ορισμός, γραφή, ανάγνωσις, ιδιότητες μετά παραδειγμάτων, ως και σήμεραν. Η απολοποίησης διδάσκεται χωρίς να χρησιμοποιείται ο όρος, ονομάζονται δε τα κλάσματα ισοδύναμα και της αυτής αξίας. Με την απολοποίησιν εισάγεται η έννοια και ο όρος του κοινού διαιρέτου και του μεγίστου κοινού διαιρέτου δύο αριθμών και πέραν αυτών το κεφάλαιον χωρεί εις την εύρεσιν και τας ιδιότητας του μ.κ.δ. δοθέντων αριθμών. Επίσης εξετάζεται το κεφάλαιον της διαιρετότητας, ως και σήμεραν. Τα ομώνυμα κλάσματα καλούνται *ομοειδή*, τα δε ετερόνυμα *ετεροειδή*. Αι πράξεις επί των κλασμάτων ουδεμίαν διαφοράν παρουσιάζουν και εκτελούνται μετά των σχετικών παραδειγμάτων κατά τρόπον παιδαγωγικόν. Εν συνεχεία εξετάζονται τα *δεκαδικά κλάσματα*, αι επ' αυτών πράξεις η *μεταβολή* (=μετατροπή) των *γενικών* (εν αντιθέσει προς τα δεκαδικά) *κλασμάτων* εις δεκαδικά. Περαιτέρω εξετάζονται τα *κοινά κλάσματα*, ήτοι το μετρικόν σύστημα των μονάδων και οι συμμεγείς αριθμοί μετά των τεσσάρων πράξεων, με συστήματα όχι τα σήμεραν εν χρήσει. Τα παραδείγματα είναι πλήρη και προσφέρουν γνώσεις χρησίμους. Ούτω (φ. 59β-60α) ως παράδειγμα φέρεται ο συμμεγής αριθμός ο περιέχων μνάς, δραχμάς, οβολούς και λεπτά και παρέχεται η επεξηγήσις ότι η μνά διαιρείται εις 100 δραχμάς, ή δραχμή εις 6 οβολούς, ο οβολός εις τρία λεπτά. Εν συνεχεία λόγος γίνεται δια τα *συνεχή κλάσματα*, δηλ. τα περιοδικά, απλά η μεικτά, κλάσματα μετά παραδειγμάτων.

Κεφ. Δ' (φ. 68α) δυνάμεις και ρίζαι. Με λεπτομερή παραδείγματα και αποδοτικήν μέθοδον εξετάζονται τα των ορισμών, της υψώσεως, της δυνάμεως, της βάσεως και του εκθέτου, καθώς επίσης αναφέρονται τα τετράγωνα των δέκα πρώτων αριθμών και γίνεται περί τετραγωνικής ρίζης λόγος, περί εξαγωγής της και περί της βασάνου (= δοκιμής).

Υπάρχει και Ε' Κεφ. (από φ. 91^α). σχετικών προς τας προς αλλήλους αναφοράς (= σχέσεις) των αριθμών και τους λόγους ή αναλογίας αυτών. Τας αναλογίας διακρίνει και εκτενώς εξετάζει εις αριθμητικές και γεωμετρικά μετά των ιδιοτήτων των, ως συνήθως με παραδείγματα. Άξιος σημειώσεως είναι ο συμβολισμός. Η αριθμητική πρόοδος γράφεται: $1/4/7/10/13$

Με την ευκαιρίαν των αναλογιών θίγονται τα κεφάλαια Αλγέβρας, περί προόδων, δικρινομένων εις αριθμητικές και γεωμετρικάς, κατά τα γνωστά. Η συμβολική των παραστάσεως είναι τοιαύτη:

3 7 7 11 ή 3 7 11 Αριθμητική

2 : 4 :: 4 : 8 ή :: 2 : 4 : 8 Γεωμετρική.

Συνέχεια του αυτού κεφαλαίου έρχεται περιληπτικώς (από φ. 104) η εξέτασις των ογαριθμών. Ο λογάριθμος ορίζεται ως αναφορά (= σχέσις) αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, ως και σήμεραν. Εις τον συμβολισμόν αντι Λογ 500 εμποτιστήθη Λ 500. Αι ιδιότητες των λογαριθμών δεν ανάγονται εις την Άλγεβραν, ούτε αναπτύσσονται με την βοήθειαν των αλγεβρικών αριθμών, αλλ' εις το βιβλίον της Αριθμητικής και με την βοήθειαν των αριθμητικών και και γεωμετρικών προόδων. Οι λογαριθμικοί πίνακες ακροθιγώς αναφέρονται χωρίς να εξετάζεται η ουσία του θέματος, με την παρατήρησιν (φ. 106 α) ότι «εν άλλους λεχθήσεται».

Γενική παρατήρησις ημπορεί να διατυπωθή, ότι από την ακολουθουμένην σειράν και μέθοδον καταφαίνεται βάθος σκέψεως, σαφήνεια και ακρίβεια διατυπώσεως των θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών, παρά την χρησιμοποιουμένην αρχαϊζουσαν γλώσσαν. Το χροφ. 71 δεν είναι πανομοιότυπον του χροφ. 50 αλλά γενίκευσις αυτού ως προς τα κεφάλαια ακεραίων, κλασμάτων, περιοδικών και δεκαδικών

αριθμών, μετρικού συστήματος μονάδων, συμμεγών αριθμών, δυνάμεων και ριζών. λόγων και αναλογικών αριθμών και των λογαριθμών.

2. Γεωμετρία. Περί του μαθήματος πληροφορεί το χρφ. 72.

Τούτο περιέχει την Γεωμετρίαν, ως την διεμόρφωσεν ο Ευκλείδης και οι μεταγενέστεροί του, μη διακρινόμενην εις θεωρητικήν και πρακτικήν αλλ' ενιαίως. Η ύλη χωρίζεται εις Βιβλία επτά, ως ακολούθως:

Βιβλ. Α' (φ. 4 α). Ορίζεται η γεωμετρική έννοια του σημείου, της γραμμής (ευθείας ή καμπύλης), των επιπέδων εν γένει γωνιών, της καθετότητος δύο ευθειών, της παραλληλίας, περαιτέρω δε δίδεται ο ορισμός των ευθυγράμμων σχημάτων, ως και σήμερον, καθώς επίσης του κύκλου, της περιφέρειας και των μερών αυτών. Προστίθενται αιτήματα και αξιώματα και παρατίθενται άφθονα σχήματα, πλήρως κατατοπιστικά. Εν συνεχεία εξετάζεται η ισότης δύο τριγώνων κατά τρόπον εξαιρετον. Αντί της λ. απόδειξης χρησιμοποιείται η λ. δείξις. Επίσης αι ιδιότητες των ισοπλεύρων και ισοσκελών τριγώνων καθώς και τα είδη των γωνιών, μετά τινων θεμελιωδών γεωμετρικών κατασκευών. Ορίζονται ακόμη αι υπό παραλλήλων ευθειών τεμνομένων υπό τρίτης πλάγιας σχηματιζόμεναι γωνίαι, ως και προτάσεις (=θεωρήματα) επ' αυτών. Ακόμη τα στοιχεία των πολυγώνων, ως αι διαγώνιοι, αι γωνίαι με τας ιδιότητας αυτών, των παραλληλογράμων, μετά των ιδιοτήτων των και διάφοροι άλλοι προτάσεις σχετικά με σχήματα και θαυμαστήν διατύπωσιν. Με την ευκαιρίαν του ορισμού του τετραγώνου, ορίζεται το πυθαγόρειον θεωρήμα και τινα σχετικά θεωρήματα, χωρίς να αναφέρεται ο Πυθαγόρας.

Βιβλ. Β' (φ. 30 α). Είδη των παραλληλογράμων και πρώτον το ορθογώνιον (βάσις, ύψος, εμβαδόν δια του γνωστού τύπου), σχετικά γνωσταί προτάσεις με τα ορθογώνια μετ' εφαρμογών. Ευρεία ανάπτυξις του πυθαγορείου θεωρήματος, λύσις διαφόρων γεωμετρικών προτάσεων. Εύρεσις του τυχόντος παραλληλογράμου και τριγώνου, υπολογισμός εμβαδού οιοδήποτε σχήματος με την βοήθειαν των τριγώνων. Άφθονα γεωμετρικά σχήματα αξίας προσοχής ακριβείας συμπληρούν το κεφάλαιον τούτου της εξετάσεως των μετρικών σχέσεων, που απορρέουν από τα είδη των παραλληλογράμων.

Βιβλ. Γ' (φ. 42 α). Κύκλος και θεωρήματά του (μέρη του κύκλου, θέσις ευθείας και κύκλου, θέσις δύο μη ομόκεντρων περιφερειών, διάκεντρον, κοινή χορδή, εφαπτομένη, θεωρήματα των χορδών κλπ., επίκεντρος γωνία, σχέσις αυτής μετά του αντιστοίχου τόξου ή της εγγεγραμμένης βαίνουσής επί το αυτό τόξον μετά πολλών σχημάτων). Τρόπος εργασίας, ως και σήμερον, ήτοι υπόθεσις, συμπέρασμα, απόδειξις. Το κεφάλαιον συμπληρούται δια της δυνάμεως σημείου ως προς κύκλον με πλήρη ανάπτυξιν. χωρίς να γίνεται μνεία του ονόματος του αντιστοίχου θεωρήματος.

Βιβλ. Δ' (φ. 63 α). Ορισμός και εξετάσις των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων εις άλλα σχήματα και εις τον κύκλον και κατασκευαί όλων των κανονικών ευθυγράμμων σχημάτων, των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων εις κύκλον.

Βιβλ. Ε' (φ. 74 α). Μετρικάί σχέσεις, εφαρμοζόμεναι εις την Γεωμετρίαν. Ορισμός του λόγου, των αναλογιών κλπ. Κατά τινα τρόπον το κεφάλαιον είναι γεωμετρικόν μέρος εφαρμογής του κεφαλαίου λόγοι και αναλογίαι της Αριθμητικής, αναπτυσσόμενον πλήρως και ακριβώς. Περαιτέρω αξιώματα και ωρισμένοι έννοιαι. Η ανάπτυξις άνευ σχημάτων. Ούτως εισάγεται τις εκ της Αριθμητικής εις την Γεωμετρίαν δια γεωμετρικών μεγεθών.

Βιβλ. ΣΤ' (φ 88 α). Ομοιότης σχημάτων. Ορισμοί εν αρχή και περαιτέρω δια γνωστών θεωρημάτων θεωρία ομοιότητος, εν σειρά ομοιότης τριγώνου, παραλληλογράμων, πολυγώνων. Βοηθεία της ομοιότητος απόδειξις του πυθαγορείου θεωρήματος. Τέλος της επιπεδομετρίας.

Βιβλ. Ζ' (φ. 109 α). Στερεομετρία. Ορισμοί σχετικοί με τας διαστάσεις των στερεών, του επιπέδου, της θέσεως ευθείας ως προς επίπεδον κλπ., πλήρης περιγραφή των στοιχείων εκάστου των γνωστών στερεών σχημάτων, διάφορα γνωστά θεωρήματα δια την μεταξύ των επιπέδων θέσιν. Απόδειξις του γνωστού θεωρήματος του Θαλού εκ της Επιπεδομετρίας εις την Στερεομετρίαν. Εν έκαστον των στερεών, κύβος, παραλληλεπίπεδον, πρίσμα, πυραμίς, γνωσταί ιδιότητές των, μέτρησις αυτών. Κύλινδρος, κώνος, σφαίρα, αναπτύσσονται πλήρως και θεωρήματα γνωστά διατυπώνονται θαυμασίως.

Το χρφ. εν τέλει (από φ. 150 α) περιέχει εν παρατήρησι εις κεφάλαια 5, βιβλία ωσαύτως ονομαζόμενα, ωρισμένα κεφάλαια της Αριθμητικής, ήτοι α) γραφή αι ανώνυμοις των αριθμών, πυθαγόρειος πίναξ αριθμών, εκτέλεσις του πολλαπλασιασμού δια παραδειγμάτων, εκτέλεσις διαιρέσεως όχι ως τα χρφ. 50 και 71, δια παραδειγμάτων μετά ή άνευ υπολοίπου, εκσυγχρονισμός των πράξεων και επί

πλέον παραδείγματα ασφαλών και επισφαλών βασάνων επί των τεσσάρων πράξεων. β) κλάσματα και δεκαδικοί (ορισμοί, συμπλήρωσις κεφαλαίων). γ) μέθοδος των ριζών και της εξαγωγής αυτών, μετά ορισμών και πλήρους περιγραφής της εξαγωγής των τετραγωνικών ριζών, έτι δε εξαγωγή της κυβικής ρίζης με θεωρήμα σχετικών. δ) μέθοδοι εις την εμπορίαν και τον βίον, απλή μέθοδος των τριών, μέθοδος εταίρειας, πεντεμέθοδος, μέθοδος ψευδούς υποθέσεως.

3. Ποσοτική. Εν χειρόγραφον, το υπ' αριθ. 49, ομιλεί ερί του μαθήματος της Ποσοτικής, δι ου νοούνται θέματα Αλγέβρας, Γεωμετρίας και Τριγωνομετρίας. Η διδασκόμενη ύλη του μαθήματος διαιρείται εις δύο μέρη. Τούτων το Α' μέρος περιλαμβάνει 6 Κεφάλαια, ως ακολούθως: α) Μεταβλητά και συµμεταβλητά ποσά, ορισμός και παραδείγματα. Υπό τον όρον *εκθέσις ποσού* ως προς άλλο νοείται η σήμερον καλουμένη συνάρτησις ποσού ως προς άλλα, αι δ' εκθέσεις αύται διακρίνονται εις ποσοτικές και υπερβατάς (= υπερβατικές, εκθετικές), εις ρητάς, αρρήτους, ολοσχερείς (= ακεραίας), κλασματικές, ομοίας και ανομοίας, ομοειδείς και ετεροειδείς (= ομοβάθμους και ετεροβάθμους). β) Περί των ποσών του κύκλου είτε περί Ευθυγράμμου Τριγωνομετρίας, της οποίας ορίζεται ο σκοπός και ο λόγος της υπάρξεώς της. Αι λύσεις ενός προβλήματος της Τριγωνομετρίας διακρίνονται εις γενικάς και μερικάς. Περαιτέρω αι μετρικαί σχέσεις των τριγώνων εκ της Γεωμετρίας βοηθούν εις την εξήγησιν διαφόρων τριγωνομετρικών σχέσεων. Ούτως ορίζεται το ημίτονον, συνημίτονον, εφαπτομένη, συνεφαπτομένη ενός τόξου ή γωνίας και αι αντίστοιχοι τιμαί των δια της δημιουργίας σχετικών πινάκων, ως και σήμερον, εν συνεχεία δε αναφέρεται η δημιουργία των πινάκων των γεωμετρικών αριθμών και πρώτα εκτίθενται οι πίνακες εις πίνακες του Καλλέτου με προσέγγισιν εκατοστού, περαιτέρω δε εξηγείται η χρήσις των. Λύσις δίδεται εις δύο ερωτήματα, ήτοι 1) δοθείσης μιας γωνίας ενός τόξου ευρείν την τομήν των γεωμετρικών αριθμών αυτής και 2) αντιστρόφως, δοθείσης της τιμής ενός τριγωνικού αριθμού ευρείν την γωνίαν ή το τόξον, εις το οποίον αντιστοιχεί. Επίσης εξηγείται και η έννοια της παρεμβολής, μεθ' ό εκτίθενται οι εκατοστόβαθμοι πίνακες και δίδονται αι χαρακτηριστικά τιμαί των τριγωνομετρικών αριθμών ωρισμένων τόξων ή γωνιών, έτι δε επιλύονται ορθογώνια τρίγωνα, αναφερομένων των σχετικών τύπων, αλλά και μη ορθογώνια τρίγωνα, διδομένων τέλος ωρισμένων παραδειγμάτων. Από φ. 23^α λόγος γίνεται περί Σφαιρικής Τριγωνομετρίας και ευρίσκονται οι σχετικοί τύποι αναλυτικών και διεξοδικώς.

γ) Εξετάζονται έννοιαι και σχετικά θεωρία περί των συµμεταβλητών εκθέσεων εις σειράς μεταβολής. Τα μαθήματα είναι καθαρώς πανεπιστημιακά. δ) Περί καμπύλων εν γένει, αναπτυσσομένης αναλυτικώτατα της εφαρμογής της Αλγέβρας εις την Γεωμετρίαν και εξεταζομένων των στοιχείων και των εφαρμογών του σημερινού μαθήματος της Αναλυτικής Γεωμετρίας, πανεπιστημιακού επίσης. ε) Κωνικά τομαί, μάθημα πανεπιστημιακόν, πλήρως αναπτυσσόμενον. στ) Περί ετέρων τινών καμπύλων, ωσαύτως πανεπιστημιακόν μάθημα.

Το Β' μέρος περιλαμβάνει δύο τμήματα εκ τριών κεφαλαίων εκάτερον. Ουτω 1^{ον} τμήμα: α) περί απειροστών και περί διαφορικού υπολογισμού β) Συνέχεια του προηγούμενου. γ) Εφαρμογή του διαφορικού υπολογισμού εις την θεωρίαν των καμπύλων, με πλήρη αναπτύξιν. Το 2^{ον} τμήμα: α) Ολοκληρωτικός υπολογισμός, αι πρώται αυτού έννοιαι. β) Μέθοδοι ολοκληρώσεως των αρρήτων εκθέσεων, εν συνεχεία του προηγούμενου. γ) Ομοίως, επομένων διαφόρων σχημάτων μ' εφαρμογήν της Ποσοτικής εις τα προβλήματα της Μηχανικής εν γένει, Εφηρμοσμένης και Θεωρητικής, μετά σχημάτων. Εν κατακλείδι δύνатаι να παρατηρηθή ότι ολίγαι μεν αλλά βασικαί θεωρία αναπτύσσονται και εν πολλοίς καθ' υπέρβασιν της σημερινής γυμνασιακής ύλης. Προφανές όμως είναι ότι αι επέκεινα των χρόνων εκείνων σημειωθείσαι πρόοδοι αποτελούν μόχθον εντατικής εργασίας δύο περίπου αιώνων και φυσικόν είναι να ήσαν τότε άγνωστοι εις τα σχολεία της Τουρκοκρατίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2° ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΡΓΑ

2.1 Τα Μαθηματικά στον ευρωπαϊκό χώρο.

Την ευρωπαϊκή επιστημονική επανάσταση του 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα, η οποία έμμεσα καλλιέργησε και την επαναστατική ιδέα εναντίον οποιασδήποτε μορφής πολιτικής ή κοινωνικής τυραννίας, μετέφεραν οι σπουδασμένοι στην Ευρώπη λόγιοι- δάσκαλοι του Γένους μέσω της εκπαίδευσης στην υποδουλωμένη πατρίδα τους, ώστε η πνευματική κίνηση που δημιουργήθηκε να εξελιχθεί σε αγώνα πρώτα ενάντια στα συντηρητικά στοιχεία του τόπου και στην συνέχεια ενάντια στον κατακτητή.

Μέχρι τον 17^ο αιώνα η Αριστοτελική φιλοσοφία η οποία επικρατούσε στα πανεπιστήμια της Δύσης³⁷⁹ με τον σχολαστικισμό που την χαρακτήριζε απέκλειε την εισροή νέων ιδεολογικών ρευμάτων.

Με την ανάπτυξη τους οι νέες επιστήμες ήρθαν αντιμέτωπες με το δογματικό κύρος του Αριστοτέλη και σταδιακά, μετά από σφοδρές αντιδράσεις της συντηρητικής τάξης και του κλήρου, άρχισε να υποβαθμίζεται η αυθεντία της αριστοτελικής σκέψης και να παίρνουν την θέση της τα νέα φιλοσοφικά συστήματα.

Οι νεοεισαχθείσες ιδέες και τα διδάγματα των νέων επιστημών αποτέλεσαν κηρύγματα για την απαλλαγή από τις προλήψεις και κάθε μορφής τυραννία.

Η επιστημονική επανάσταση του ευρωπαϊκού χώρου τον 17^ο αιώνα η οποία δημιούργησε το φαινόμενο του ευρωπαϊκού Διαφωτισμού, άνοιξε τον δρόμο για την ανάπτυξη των επιστημών μερικές δεκαετίες αργότερα και στον ελληνικό πνευματικό χώρο.

Οι επιστημονικές ανακαλύψεις του 16^{ου}, 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα και οι πρωτότυπες συγγραφές των ευρωπαίων επιστημόνων έφτασαν με υστέρηση κάποιων δεκαετιών στον ελλαδικό χώρο με την μορφή έργων τα οποία αποτέλεσαν μεταφράσεις είτε και συμπληήματα των επιστημονικών ευρωπαϊκών έργων από τους Έλληνες λόγιους οι οποίοι σπούδασαν στην Ευρώπη.

2.1.1 Σύνοψη αναφορά στην πορεία της έρευνας στην περιοχή των θετικών επιστημών στην ευρωπαϊκή Δύση κατά τον 16^ο, 17^ο και 18^ο αιώνα.

α) Η δημιουργική πορεία της έρευνας στα Μαθηματικά στις χώρες της Δύσης κατά τον 16^ο και 17^ο αιώνα

Κατά τον 16^ο και 17^ο αιώνα το πλήθος των ερευνητών στην περιοχή των Μαθηματικών στις χώρες της Ευρωπαϊκής Δύσης αυξάνει σε εντυπωσιακό βαθμό.

Βαθιά φροντισμένες εκδόσεις πολλών από τα αντίστοιχα αρχαιο- ελληνικά έργα βλέπουν το φως της δημοσιότητας –μερικά και στην λατινική γλώσσα- ενώ οι σελίδες της Ιστορίας των Μαθηματικών και της Φιλοσοφίας κοσμούνται από τα ονόματα των δυτικο-ευρωπαίων ερευνητών στα Μαθηματικά για τα θαυμαστά αποτελέσματα των

³⁷⁹ Βλέπε, Γεώργιος Ν. Βλαχάκης, «Η Φυσική του Νικηφόρου Θεοτόκη σταθμός στην επιστημονική σκέψη τον 18^ο αιώνα», διδακτορική διατριβή, Αθήνα 1990.

ερευνών τους τα οποία τροφοδότησαν την έρευνα του 18^{ου} αιώνα.

Με την εδώ σύντομη αναφορά θα δοθεί μια αμυδρή –ουσιαστικά- εικόνα³⁸⁰ της ανάπτυξης των Μαθηματικών στην Ευρωπαϊκή Δύση, που σημάδεψε το 16^ο και 17^ο αιώνα και τροφοδότησε την συνέχιση της έρευνας κατά τον 18^ο αιώνα.

Περιοριζόμαστε ενδεικτικά σε μερικά από τα μεγάλα ονόματα ερευνητών του 16^{ου} και 17^{ου} αιώνα με «ψήγματα» για την προσφορά τους.

1. **N. Tartaglia** (1499-1557, μετάφραση στα Ιταλικά των Στοιχείων του Ευκλείδη, Βλητική, μέγιστο βεληνεκές κατά την πλάγια ρίψη βλήματος στο κενό, προβλήματα με εξισώσεις 3^{ου} βαθμού, κ.ά.)
2. **G. Gardano** (1571- 1576, ανακάλυψη της λύσης των εξισώσεων 3^{ου} βαθμού)³⁸¹
3. **F. Viete** (1540- 1603, βαθύς μελετητής των αρχαιο-ελληνικών Μαθηματικών και «συνεχιστής» στην ανάπτυξη και τον εκσυγχρονισμό της Άλγεβρας, που πραγματοποιήθηκε στην Γαλλία και στην Ιταλία κατά το πρώτο μισό του 16^{ου} αιώνα).
4. **J. Napier** (1550-1615, Λογάριθμοι, Λογαριθμικός Λογισμός, λογαριθμικοί πίνακες)
5. **Galileo Galilei**³⁸² (Γαλιλαίος, 1564-1642, Μαθηματικός, Φυσικός, Αστρονόμος, θεμελιωτής της πειραματικής μεθόδου στις φυσικές επιστήμες, νόμοι της πτώσης των σωμάτων στο πεδίο της βαρύτητας, μη αποδεχόμενος την θέση του Αριστοτέλη ότι η γη δεν κινείται προκάλεσε τον άγριο κατατρεγμό του από την Δυτική Εκκλησία)³⁸³
6. **J. Kepler**³⁸⁴ (1571-1630, κορυφαίος αστρονόμος. Στο έργο του *Νέα Αστρονομία* διατυπώνει τους δύο από τους νόμους του Kepler . Στα Μαθηματικά εμφανίζεται με το έργο του «Στερεομετρία των βυτίων», όπου σημειώνεται η πρώτη ευρωπαϊκή εξέλιξη της θεωρίας, που ανέπτυξε ο Αρχιμήδης στα βιβλία του *περί κωνοειδών και σφααιροειδών*.)
7. **R. Descartes**³⁸⁵ (Καρτέσιος, 1596-1650, επινόηση της Αναλυτικής Γεωμετρίας, σημαντική συμβολή στην θεωρία αριθμών).
8. **P. Fermat**³⁸⁶ (1601- 1665, σημαντική συμβολή στην Αναλυτική Γεωμετρία, στην Θεωρία Αριθμών, στο Διαφορικό Λογισμό, στην Άλγεβρα)
9. **G. Desargues**³⁸⁷ (1593-1661, ξεκίνησε από την «στρατιωτική Μηχανική» από όπου και οδηγήθηκε στην Γεωμετρία. υπήρξε ο θεμελιωτής της προβολικής Γεωμετρίας).
10. **B. Pascal**³⁸⁸ (1623- 1662, παρά το γεγονός της σύντομης ζωής του έχει μείνει στην ιστορία των Μαθηματικών χάρη στην πολύπλευρη ερευνητική

³⁸⁰ Για μια «ολοκληρωμένη» εικόνα βλ. **I).** G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, μετ. από Ε.Μ.Ε., τόμοι 2, σελ 1-465 2). **Θ.Γ.** Εξαρχάκος, *Εισαγωγή στα Μαθηματικά*, τόμος Α' και Β', Αθήνα 1993

³⁸¹ Βλ. G. Loria, σελ 11-43

³⁸² ο. α. σελ 11-43

³⁸³ Μαθητές του Γαλιλαίου υπήρξαν οι B. Cavalieri (1598-1629), E. Toricelli (1608-1647), V. Viviani (1620-1703)

³⁸⁴ Βλ. G. Loria, σελ 171-178

³⁸⁵ ο.α. σελ 224-262

³⁸⁶ ο.α. σελ 252-279

³⁸⁷ ο. α. σελ 281-286

³⁸⁸ ο. α. σελ 9287-307)

δραστηριότητα του. Σε ηλικία 16 ετών ανακάλυψε το θεμελιώδες θεώρημα των κωνικών τομών που φέρει το όνομά του).

11. Οι πρόδρομοι του Απειροστικού Λογισμού, **G. B. Roberval** (1602-1675), **J. Wallis** (1616-1703), **J. Barrow** (1630-1677), δάσκαλος του Νεύτωνα.
12. **G. Huguens**³⁸⁹ (1629-1695, με μεγάλη ερευνητική δραστηριότητα σε όλους σχεδόν τους κλάδους των Μαθηματικών).

β). Σύντομη αναφορά στην πορεία ανάπτυξης των Μαθηματικών κατά τον 18^ο αιώνα.

Τα σημαντικά επιτεύγματα στην περιοχή της μαθηματικής έρευνας κατά τον 16^ο και τον 17^ο αιώνα τροφοδότησαν τον 18^ο αιώνα με την ανάγκη της συνέχισης της έρευνας στα «ανοικτά» ακόμη προβλήματα των αιώνων αυτών, αλλά και με νέα μεγάλα προβλήματα.

Ήδη κατά το πρώτο τέταρτο του 18^{ου} αιώνα η εργώδης ερευνητική προεργασία που είχε αρχίσει ήδη από το 17^ο αιώνα των μεγάλων **Newton (1642-1727)** και **Leibniz (1646- 1716)** οδήγησε στην πραγματοποίηση του λαμπρού επιτεύγματος της θεμελίωσης (σε ικανό βαθμό) του Απειροστικού Λογισμού (της Μαθηματικής Ανάλυσης, όπως λέγεται και γράφεται στα αντίστοιχα βιβλία, ιδιαίτερα από το τέλος του 2^{ου} παγκοσμίου πολέμου).

Η θεμελίωση του «νέου» Λογισμού από τον **Newton** και τον **Leibniz** είχε αρκετά «αδύνατα» σημεία. Οι «αδυναμίες» του νέου Λογισμού απαλείφθηκαν με την σημαντική συμβολή των κορυφαίων επιστημόνων: **C. Maclaurin** (1698-1746), **Jacques Bernoulli** (1654-1705), **Jean Bernoulli** (1667-1748), **A. Moivre** (1667-1750), **A. Clairaut** (1713-1765), **L. Euler** (1707-1785), **J. d'Alembert** (1717-1783), **J. L. Lagrange** (1736-1813), **K. F. Gauss** (1777-1855), **B. Bolzano** (1781-1848), **A.L. Cauchy** (1789-1857), **G.F. B. Riemann** (1826-1866), **K. Weierstrass** (1815-1897), **R. Dedekind** (1831-1916), **G. Peano** (1858-1932), **G. Cantor** (1845-1918), **F. Klein** (1849-1925).

Κατά το 18^ο αιώνα «εμφανίζεται» ακόμα και προχωρεί με ζωηρό ενδιαφέρον ο κλάδος της Θεωρίας των Πιθανοτήτων³⁹⁰, ενώ σημειώνεται σημαντική πρόοδος στην περιοχή της Μαθηματικής Φυσικής.

Ιδιαίτερα ο κλάδος των διαφορικών εξισώσεων που άρχισε να θεμελιώνεται από προβλήματα σχετικά με τη φύση (πρ. το πρόβλημα των παλλομένων χορδών) , πραγματοποιεί εκπληκτικές προόδους χάρη στις έρευνες των **Jacques Bernoulli** (1654-1705), 1748), **A. Clairaut** (1713-1765), **L. Euler** (1707-1785), **J. d'Alembert** (1717-1783), **J. L. Lagrange** (1736-1813), **P. S. Laplace** (1749-1827), **J.F Ricatti** (1679-1754).

³⁸⁹ ο.α. σελ. 339-346

³⁹⁰ ο.α. τόμος 3^{ος} σελ. 333-348

2.2 Πηγές των έργων «Λογαριαστική», «Οδός Μαθηματικής» και «Στοιχεία Μαθηματικών».

Κατά την διάρκεια του 16^{ου} και 17^{ου} αιώνα οι ευρωπαϊκές επιστημονικές ανακαλύψεις δεν φτάνουν μέχρι τον υπόδουλο ελληνικό χώρο. Η μαθηματική παιδεία βρίσκεται ακόμα σε εμβρυώδη κατάσταση και εκφράζεται μέσα από απλά εκλαϊκευτικά εγχειρίδια αριθμητικής.

Τον 18^ο αιώνα πρώτος ο Μεθόδιος Ανθρακίτης εισάγει στα σχολεία του ελληνικού χώρου την διδασκαλία έργων μεγάλων αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και μόνο μετά τα μέσα του αιώνα, εμφανίζονται οι πρώτοι εκφραστές της δυτικής επιστήμης όπως ο Ευγένιος Βούλγαρης και κυρίως ο Νικηφόρος Θεοτόκης.

Το πρώτο έντυπο ελληνικό βιβλίο με μαθηματικό περιεχόμενο «Σύνταγμα ευσύνοπτον εις τας τέσσερας μαθηματικές επιστήμας, Αριθμητικήν, Μουσικήν, Γεωμετρία και Αστρονομίαν» του Μιχαήλ Ψελλού,³⁹¹ τυπώθηκε το 1532 στη Βενετία, 60 χρόνια αργότερα από την έκδοση του πρώτου ελληνικού βιβλίου (1471) που ήταν η ελληνική γραμματική «τα Ερωτήματα» του Μανουήλ Χρυσολωρά.³⁹²

Το έργο του Ψελλού (το οποίο κυκλοφορούσε σε χειρόγραφη μορφή 500 χρόνια περίπου), επανεκδόθηκε το 1545 στο Παρίσι, το 1556 στην Βασιλεία της Ελβετίας και το 1647 στο Λέυντεν της Ολλανδίας.

Το 1568, τριάντα έξι χρόνια μετά την έκδοση του «Συντάγματος» εκδόθηκε επίσης στην Βενετία το δεύτερο ελληνικό βιβλίο με μαθηματικό περιεχόμενο, «η πρακτική αριθμητική, ή λογαριαστική» του Χιώτη λόγιου Εμμανουήλ Γλυζώνιου, μία αριθμητική αντίστοιχη με εκείνες τις οποίες κυκλοφορούσαν ευρέως στην Ιταλία την εποχή της έκδοσης του έργου γνωστές ως: «trattato d' Arithmetica», «trattato d' abbasco» ή «libro d' abbasco»³⁹³.

Η πρακτική αριθμητική δεν συμπεριλαμβάνονταν από τους αρχαίους Έλληνες στην μαθηματική επιστήμη. Βιβλία πρακτικής αριθμητικής αλλά και πληροφορίες για την ύπαρξη τους κατά την αρχαιότητα δεν έχουν διασωθεί. Μόνο από κάποια έργα του Πλάτωνα έχουμε ενδείξεις ότι αυτή ονομάζονταν και λογιστική.³⁹⁴

Πολύ αργότερα, περίπου στα μέσα του 9^{ου} αιώνα μ.Χ. όταν ο Λέων ο Μαθηματικός

³⁹¹ Ο Heath στην Ιστορία του, αμφισβητεί την πατρότητα ολοκλήρου του έργου από τον Ψελλό διότι το μέρος του έργου το οποίο περιέχει την αστρονομία έχει ημερομηνία του 1008, δηλαδή δέκα χρόνια πριν από την γέννησή του, σελ 545. Μ. Τερδής, «Σύνταγμα ευσύνοπτον εις τας τέσσερας μαθηματικές επιστήμας, Αριθμητικήν, Μουσικήν, Γεωμετρία και Αστρονομίαν» του Μ. Ψελλού, ΕΜΕ, Ευκλείδης Γ', Τα Μαθηματικά στην τουρκοκρατία, τεύχος 40-41, Μάιος-Δεκέμβριος 1994, τόμος 11, σελ 27

³⁹² Ανδρέας Πούλος, Ελληνική Μαθηματική βιβλιογραφία (1500-1900). Συνοπτική ιστορία του ελληνικού μαθηματικού βιβλίου» έκδοση, ΕΜΕ, 1988, σελ 19

³⁹³ Τριαντάφυλλος Σκλαβενίτης, «Τα Εμπορικά Εγχειρίδια της βενετοκρατίας και τουρκοκρατίας και η εμπορική εγκυκλοπαίδεια του Νικολάου Παπαδόπουλου». Εταιρία μελέτης νέου ελληνισμού, παράρτημα του περιοδικού Μνήμων αρ. 5, Αθήνα 1991, σελ 18.

³⁹⁴ Ευαγγέλου Σ. Σταμάτη, «Ιστορία των ελληνικών Μαθηματικών, Αριθμητικά- αι αρχαι της ελληνικής Γεωμετρίας», εν Αθήναις 1980, σελ 6

και φιλόσοφος ανακάλυψε³⁹⁵ την χρήση των γραμμάτων της αλφαβήτου στην αριθμητική και στην άλγεβρα, σημειώθηκε πρόοδος στην επιστήμη της αριθμητικής. Την ίδια ανακάλυψη έκανε 750 χρόνια αργότερα ο Γάλλος Μαθηματικός F. Viete (1540-1603).

Στο Βυζάντιο, τους τρεις τελευταίους αιώνες πριν από την άλωση, με πρακτική αριθμητική ασχολήθηκαν οι λόγιοι, Γ. Παχυμέρης,³⁹⁶ Μ. Πλανούδης,³⁹⁷ Μ. Ψελλός, Νικ. Γρηγοράς, Νικ. Ραβδάς ο οποίος στο έργο του «Εκφρασις δακτυλικού μέτρου» πραγματεύεται την επί των δακτύλων αρίθμησης³⁹⁸ και ο Εμμανουήλ Μοσχόπουλος ο οποίος ήταν μαθητής του Πλανούδη και δίδαξε τα μαγικά τετράγωνα στην Ιταλία μετά την άλωση της Κωνσταντινούπολης.³⁹⁹ Η εργασία του «Περί μαγικών τετραγώνων»⁴⁰⁰ περιγράφει την διαδικασία της διαίρεσης ενός τετραγώνου σε μικρά τετραγωνάκια κάθε ένα από τα οποία φέρει το μέλος μιας αριθμητικής προόδου, έτσι ώστε καθέτως, οριζοντίως και διαγωνίως να δίνεται το ίδιο άθροισμα.

Η αριθμητική του Νικολάου Ραβδά η οποία ήταν γραμμένη στην αττική γλώσσα, δημοσιεύτηκε στην Κωνσταντινούπολη γύρω στο 1330 και από τον Paul Tannery στα γαλλικά το 1920. (Memoires Scientifiques, tom. IV, p. 86-187, Toulouse-Paris 1920).⁴⁰¹

Γύρω στο 1330 δημοσιεύτηκε στην Κωνσταντινούπολη και άλλο βιβλίο πρακτικής αριθμητικής (σε γλώσσα αττική) το οποίο περιείχε κυρίως αριθμητικά προβλήματα. Το μεγαλύτερο μέρος του βιβλίου αυτού εκδόθηκε στην Βιέννη το 1968 από τον K. Vogel, μεταφρασμένο στα Γερμανικά με τον τίτλο Ein byzantinisches Rechenbuch des friihen 14. Jahrhunderts, Wien 1968 (Εν βυζαντινόν βιβλίον αριθμητικής των αρχών του 14^{ου} αιώνα).⁴⁰²

Περίπου εκατό χρόνια αργότερα, γύρω στις αρχές του 15^{ου} αιώνα, εκδόθηκε στην Κωνσταντινούπολη και άλλο βιβλίο πρακτικής αριθμητικής σε γλώσσα εντελώς λαϊκή στην οποία είναι φανερή η γλωσσική επίδραση των Φράγκων των Ενετών και των Τούρκων.⁴⁰³

Ο τρόπος παρουσίασης του βιβλίου με τις ανορθογραφίες, την ανάμιξη της καθαρεύουσας με την δημοτική, τους «τακισμούς»⁴⁰⁴, τις παραφθορές των φωνηέντων, δείχνει την έλλειψη παιδείας του συγγραφέα.

Άξιος σχολιασμού είναι ο νέος τρόπος συμβολισμού των δεκαδικών κλασμάτων σε

³⁹⁵ ο. α. σελ 6

³⁹⁶ Έργο του τον 11^ο αιώνα είναι το «Σύνταγμα των τεσσάρων μαθηματικών Αριθμητικής Μουσικής Γεωμετρίας και Αστρονομίας», όπως και του Μ. Ψελλού, Μ.Στεφανίδου, «Εισαγωγή εις την Ιστορίαν των Φυσικών Επιστημών», Αθήνα 1938, σελ 216.

³⁹⁷ Με το έργο του «Ψηφοφορία κατ' Ινδούς» έκανε γνωστά για πρώτη φορά στο Βυζάντιο τα αραβικά αριθμητικά ψηφία. Την αφαίρεση ο Πλανούδης ονομάζει **εκβολή**, την διαίρεση **μερισμό**, την τετραγωνική ρίζα **τετραγωνική πλευρά**, για την εξαγωγή της οποίας δίνει δική του μέθοδο. Μ.Στεφανίδου, «Εισαγωγή εις την Ιστορίαν των Φυσικών Επιστημών», Αθήνα 1938, σελ 218

³⁹⁸ Μ.Στεφανίδου, «Εισαγωγή εις την Ιστορίαν των Φυσικών Επιστημών», Αθήνα 1938, σελ 218

³⁹⁹ Ευαγγέλου Σ. Σταμάτη, «Ιστορία των ελληνικών Μαθηματικών. Αριθμητικά- αι αρχαί της Ελληνικής Γεωμετρίας», εν Αθήναις 1980, σελ 6.

⁴⁰⁰ Για την ανακάλυψη των «μαγικών τετραγώνων», βλέπε Θ. Γ. Εξαρχάκος, «Ιστορία των Μαθηματικών τόμος Β' : Τα Μαθηματικά των Ινδών και των Κινέζων», Αθήνα 1999, σελ. 391, 397, 521, 522, 523.

⁴⁰¹ ο. α. σελ 7

⁴⁰² ο. α. σελ 7

⁴⁰³ Ε. Σταμάτη, «Κριτική βυζαντινού βιβλίου αριθμητικής», Αθήνα 1965 σελ 15

⁴⁰⁴ μετατροπή του η σε ι του ι σε ε κτλ

κάποια από τα προβλήματα του βιβλίου καθώς και ο συντηρητικός τρόπος γραφής των αριθμών με γράμματα και όχι με τους ινδικούς αριθμούς,⁴⁰⁵ παρ' όλο που ο Μάξιμος Πλανούδης (1255-1305) από τον 13^ο αιώνα εισάγει και χρησιμοποιεί για πρώτη φορά στο Βυζάντιο τα αραβικά αριθμητικά ψηφία, με το έργο του «Ψηφοφορία κατ' Ινδούς».⁴⁰⁶ Το μηδέν, στο έργο του, ο άγνωστος συγγραφέας συμβολίζει με ένα μικρό πλήρη κύκλο.⁴⁰⁷

Εκατό προβλήματα του βιβλίου αυτού μεταφρασμένα στα γερμανικά εκδόθηκαν στην Βιέννη το 1963 από τους Herbert Hunger και K. Vogel με τον τίτλο *Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts*, Wien 1963 (Εν βυζαντινόν βιβλίον αριθμητικής του 15^{ου} αιώνα).⁴⁰⁸

Οι εκδότες κατατάσσουν τα 100 προβλήματα σε τρεις κατηγορίες⁴⁰⁹

1. Προβλήματα υπολογισμού τιμής ειδών και ποσών. Προβλήματα τόκου και εταιρείας. Προβλήματα υπολογισμού φόρων. Προβλήματα μετατροπής αξίας νομισμάτων. Προβλήματα πρακτικής Γεωμετρίας.
2. Κλάσματα. Προσδιορισμός ενός αγνώστου. Προσδιορισμός τριών αγνώστων της μορφής $\chi + \psi = \alpha$, $\chi + \zeta = \beta$, $\psi + \zeta = \gamma$.⁴¹⁰ Εδώ κατατάσσεται και το μοναδικό πρόβλημα που αφορά σε υπόλοιπο.⁴¹¹
3. Προβλήματα της καθημερινής ζωής, και άλλα γνωστά προβλήματα τα οποία αναφέρονται σε μαθηματικά εγχειρίδια άλλων λαών, όπως λαγός και κύων, λιοντάρι εις την πηγή, το πρόβλημα με τις βρύσες, προβλήματα διαθήκης, μέτρησης ύψους αντικειμένου από την σκιά του κ.ά.

Στις λύσεις των προβλημάτων ο συγγραφέας χρησιμοποιεί την «Μέθοδο των τριών απλή», «Μέθοδο των τριών με τσακίσματα», «Μέθοδο ή τανάπαλιν των τριών» και «Ρέγουλα εξ' ανάστροφον».

Οι εκδότες, εξετάζοντας την ιστορία των προβλημάτων βρήκαν πολλές ομοιότητες με αιγυπτιακά, βαβυλωνιακά, κινεζικά, ινδικά και αρχαία ελληνικά προβλήματα

Την πολύ σύντομη παρουσίαση του βυζαντινού αυτού βιβλίου θεωρήσαμε απαραίτητη γιατί έχει αναφερθεί⁴¹² ότι είναι πιθανόν το βιβλίο αυτό να αποτέλεσε – τουλάχιστον μερικώς- το πρότυπο για τον Γλυζώνιο, ισχυρισμός μάλλον αβάσιμος, ο οποίος στηρίζεται στα εξής δύο επιχειρήματα:

- σε κάποιες ομοιότητες που παρατηρούνται στο περιεχόμενο προβλημάτων, καθώς

⁴⁰⁵ Ε. Σταμάτη, «Κριτική βυζαντινού βιβλίου αριθμητικής», Αθήνα 1965 σελ 4

⁴⁰⁶ Μ.Στεφανίδου, «Εισαγωγή εις την Ιστορίαν των Φυσικών Επιστημών», Αθήνα 1938, σελ217.

⁴⁰⁷ Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε το βιβλίο του B. Rotman, *Signifying Nothing: the Semiotics of zero*, London Mac Millan 1987

⁴⁰⁸ Ευαγγέλου Σ. Σταμάτη, «Ιστορία των ελληνικών Μαθηματικών, Αριθμητικά- αι αρχαί της ελληνικής Γεωμετρίας», εν Αθήναις 1980, σελ 7.

⁴⁰⁹ Ε. Σταμάτη, «Κριτική βυζαντινού βιβλίου αριθμητικής», Αθήνα 1965 σελ 12

⁴¹⁰ Όμοιο πρόβλημα περιέχεται εις τα Αριθμητικά του Διόφαντου, Ε Σταμάτης Διοφάντου Αριθμητικά, Αθήνα 1964, σελ 23, 67, 407

⁴¹¹ Ε. Σταμάτη, «Κριτική βυζαντινού βιβλίου αριθμητικής», Αθήνα 1965 σελ 12

⁴¹² Σκλαβενίτης Τ., «Εμπορικά Εγχειρίδια», «Προσεγγίσεις στις νοοτροπίες των Βαλκανικών λαών. 15^{ος} έως 20^{ος} αιώνας», εκδόσεις Ζαχαρόπουλος, Αθήνα 1988, σελ. 74-75.

- σε ομοιότητες που εμφανίζονται στην γλωσσική μορφή των κειμένων των δύο έργων.

Για το πρώτο επιχείρημα:

Τα προβλήματα τα οποία παρουσιάζονται από τον άγνωστο συγγραφέα στο έργο του, σύμφωνα με τους Hunger και Vogel, έχουν πολλές ομοιότητες με αιγυπτιακά, βαβυλωνιακά, κινεζικά, ινδικά και αρχαία ελληνικά προβλήματα⁴¹³, επομένως θα μπορούσαν να παρουσιάζονται και σε διάφορα άλλα ευρωπαϊκά βιβλία αριθμητικής της εποχής εκείνης τα οποία πιθανότατα είχε υπ' όψιν του ο Γλυζώνιος και εξ' αιτίας της ενασχόλησής του με την τυπογραφία.

Για το δεύτερο επιχείρημα:

Η γλωσσική μορφή της αριθμητικής του Γλυζώνιου παρουσιάζει κάποιες ομοιότητες όχι μόνο με την συγκεκριμένη αριθμητική του 15^{ου} αιώνα, αλλά και με άλλα βυζαντινά βιβλία αριθμητικής όπως είναι η Αριθμητική του Βυζαντινού Νικολάου Ραβδά (14^{ος} αιώνας) και του Μανουήλ Μοσχόπουλου (14^{ος} αιώνας).

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι πολλά από τα προβλήματα προέρχονται από τις συναλλαγές κατά την καθημερινή ζωή επομένως είναι λογικό τα προβλήματα αυτά να διατυπώνονται γλωσσικά σύμφωνα με την γλώσσα του καθημερινού εμπορίου, την γλώσσα του παιδείου του λαού.

Κατά την γνώμη μας βασικές διαφορές στο μαθηματικό περιεχόμενο των δύο έργων αποτελούν ισχυρές ενδείξεις για το εναντίον.

Συγκεκριμένα:

1) Οι μέθοδοι τις οποίες χρησιμοποιεί ο άγνωστος συγγραφέας για την επίλυση των προβλημάτων στο βυζαντινό βιβλίο Αριθμητικής είναι λόγω της φύσης των προβλημάτων περισσότερες από εκείνες τις οποίες εφαρμόζει ο Γλυζώνιος στην «Λογαριαστική» του. Το φάσμα των προβλημάτων του βυζαντινού βιβλίου είναι πολύ ευρύτερο από εκείνο του Γλυζώνιου αφού περιέχει επί πλέον:

- προβλήματα προσδιορισμού τριών αγνώστων: $\chi + \psi = \alpha$, $\chi + \zeta = \beta$, $\psi + \zeta = \gamma$ (όμοιο πρόβλημα υπάρχει και στα Αριθμητικά του Διόφαντου)
- πρόβλημα το οποίο αφορά στα υπόλοιπα (κατά τον υπολογισμό του άγνωστου αριθμού N των προβλήματος πρόκειται για τις ισοδυναμίες

$$N \equiv 1 \pmod{2,3,4,5,6} \equiv 0 \pmod{7}^{414}$$

- προβλήματα απροσδιόριστης ανάλυσης όπως είναι το ενδιαφέρον πρόβλημα των

⁴¹³ Ε. Σταμάτη. «Κριτική βυζαντινού βιβλίου αριθμητικής», Αθήνα 1965 σελ 13.

⁴¹⁴ Το πρόβλημα αυτό δημοσιεύει ο Ε. Σταμάτης στην εργασία του «Κριτική βυζαντινού βιβλίου αριθμητικής». Αθήνα 1965 σελ 12. Το πρόβλημα για την παρουσίαση του οποίου έχουν διορθωθεί τα ορθογραφικά λάθη είναι το εξής: «Μία γραία επούλιεν αυγά εις το παζάρι και έτυχεν και εβάνδισαν δύο άνθρωποι και εχτύπησαν την γραίαν και ετόκισαν τα αυγά της. επήγεν τους εις τον κριτήν, και όρισεν η κρίσις, να αποβάλουν την γραίαν τα αυγά της, και ερωτούν την γραίαν πόσα ήσαν τα αυγά, να τα πληρώσουν, και λέγει η γραία. δεν ηξεύρω, τούτο μόνον ηξεύρω, ότι εμέτρουν τα δύο δύο και απόμεινεν ένα, τρία τρία και έμεινεν ένα, τέσσερα τέσσερα και έμεινεν ένα, επτά επτά και ουδέν επέμεινεν ουδέ ένα και τόσα ήσαν τα αυγά της γραίας. ερωτώσε πόσα ήσαν;

100 πτηνών το οποίο παρουσιάζεται με τέσσερεις διαφορετικές διατυπώσεις και είναι της μορφής: $\alpha\chi+\beta\psi+\zeta/\gamma=\delta$ και $\chi+\psi+\zeta=\delta$ ⁴¹⁵

2) Πολλές μονάδες μέτρησης οι οποίες χρησιμοποιούνται στο βυζαντινό βιβλίο αριθμητικής του 15^{ου} αιώνα δεν αναφέρονται στην αριθμητική του Γλυζώνιου. Τέτοιες είναι:

- οι μονάδες νομισμάτων: υπέρπυρον, τουρέσιον, καράτιον
- οι μονάδες βάρους: κεκτηνάριον δράμια, οκά
- οι μονάδες μήκους: πράτσι, κάρτο, πήδημα
- μονάδες όγκου: μουζούρια.

Μάλλον το πρόβλημα του εντοπισμού του προτύπου για την αριθμητική του Γλυζώνιου παραμένει. Από το περιεχόμενο του βιβλίου (την ποικιλία των θεμάτων που πραγματεύεται και τα προβλήματα που περιέχει) καταλήγουμε στον ισχυρισμό ότι μάλλον χρησιμοποίησε για το έργο του περισσότερα από ένα εγχειρίδια αριθμητικής τα οποία δεν είναι εύκολο να εντοπίσουμε γιατί σταχυολόγησε από αυτά όσα εκείνος θεώρησε απαραίτητα για την συγγραφή του έργου του.

Η πρακτική αριθμητική του Γλυζώνιου είναι το πρώτο έργο το οποίο θα μας απασχολήσει.

Αν και ο χρόνος εμφάνισής του -τυπώθηκε για πρώτη φορά το 1568 στη Βενετία- δεν συμπεριλαμβάνεται στο διάστημα που περιορίζουμε την έρευνά μας, ο μεγάλος αριθμός των επανεκδόσεών του, (1569, 1596, 1621, 1641, 1654, 1679, 1681, 1687, 1708, 1724, 1750, 1765, 1777, 1778, 1779, 1783, 1804, 1805, 1818)⁴¹⁶ που φτάνουν μέχρι το 1818, είναι ένας από τους λόγους, για τους οποίους θα αποτελέσει το συγκεκριμένο έργο αφετηρία της μελέτης μας.

Ο κυριότερος όμως λόγος, είναι, ότι το έργο αυτό, θα μας διαφωτίσει, για το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης την περίοδο που προηγείται του ν.Δ., αλλά ως ένα βαθμό και για το διάστημα που ακολουθεί, αφού συνεχίζει να επανεκδίδεται αρκετές φορές, ακόμα και όταν υψηλού επιπέδου –για την εποχή τους- μαθηματικά έργα έκαναν την εμφάνισή τους στον εκπαιδευτικό ορίζοντα.

Το έργο «Οδός Μαθηματικής» του Μεθόδιου Ανθρακίτη το οποίο εκδόθηκε το 1749 λίγα χρόνια μετά τον θάνατό του, από τον μαθητή του, Μπαλάνο Βασιλόπουλο, είναι εκείνο το οποίο θα μελετήσουμε στην συνέχεια.

⁴¹⁵ ο.α.σελ 13

⁴¹⁶ Ανδρέας Πούλος, Ελληνική Μαθηματική βιβλιογραφία (1500-1900). Συνοπτική ιστορία του ελληνικού μαθηματικού βιβλίου» έκδοση, ΕΜΕ, 1988

Η έκδοση αυτή της «Οδού», είναι μία έκδοση «vulgar», όπως χαρακτηρίζονταν όλες οι επιστημονικές εκδόσεις που δεν ήταν γραμμένες στην λατινική γλώσσα, η οποία εκείνη την εποχή θεωρείτο η γλώσσα της επιστήμης.

Το έργο του Ηπειρώτη λόγιου θα πρέπει να αποτέλεσε σταθμό στην ελληνική μαθηματική βιβλιογραφία, αφού τουλάχιστον μέχρι το 1805 κυκλοφορούν χειρόγραφα με τον ίδιο τίτλο όπως π. χ. η «Οδός Μαθηματικής» του Μιχαήλ Περδικάρη εκ' Κοζάνης Μακεδονίας.

Τα χειρόγραφα έργα με τον ίδιο τίτλο τα οποία γράφτηκαν είτε μεταφράστηκαν μέσα στον 18^ο και 19^ο αιώνα είναι:

- Η «Οδός Μαθηματικής» του Μινωΐδη Κωνσταντίνου, το οποίο ήταν μετάφραση του έργου *Cours complet des mathematiques pures*, του Γάλλου μαθηματικού L.B. Francoeur⁴¹⁷. Η μετάφραση δεν διασώθηκε. Το ίδιο έργο μεταφράστηκε επίσης από τους Ιωάννη Τσελεπή, Στέφανο Κανέλο, Κύριλλο Λιβέριο και Αθανάσιο Βογορίδη.
- Το έργο «Στοιχείων οδού μαθηματικής τα αρχαιοδέστατα», (19^{ος} αιώνας), του Στέφανου Κομνητά⁴¹⁸
- Η «Οδός Μαθηματικής» του La Caille, έργο, το οποίο μεταγλώττισε ο Ιώσηπος Μοισιόδακας όπως μας πληροφορεί ο ίδιος στην «Απολογία» του, αφού το ίδιο δεν έχει διασωθεί⁴¹⁹.
- Η «Οδός μαθηματικής» του Μιχαήλ Περδικάρη⁴²⁰

Η αξία της «Οδού Μαθηματικής» του Μεθόδιου Ανθρακίτη αναγνωρίστηκε όχι μόνο την εποχή της έκδοσής της από λόγιους – δασκάλους του Γένους αλλά και από τους σύγχρονους μελετητές της παιδείας την εποχή της δουλείας.

Σε ολόκληρο το 16^ο και 17^ο αιώνα δεν συναντάμε εκτός από τα βιβλία «Οι τέσσερεις μαθηματικές επιστήμες» (1532) του Μιχαήλ Ψελλού, την «Πρακτική Αριθμητική» (1568) του Γλυζώνιου και την «Λογιστική» (1600) του μοναχού Βαρλαάμ κανένα άλλο ελληνικό βιβλίο με μαθηματικό περιεχόμενο.

Το έργο του Ψελλού, αποτελεί «σύνθεση και επεξεργασία των παραδοσιακών γνώσεων της εποχής του»⁴²¹ και σύμφωνα με τον συγγραφέα του: «Σύνταγμα ευσύνοπτον εις τας τέσσερας μαθηματικές επιστήμας, Αριθμητικήν, Μουσικήν, Γεωμετρίαν και Αστρονομίαν».

Η «Λογιστική» του Βαρλαάμ είναι βιβλίο το οποίο αναφέρεται στην θεωρία των κλασμάτων. Στην έκδοση του βιβλίου, το 1645, προστέθηκαν δεκαέξι σελίδες οι οποίες αναφέρονται στην πράξη του πολλαπλασιασμού, απαραίτητη για όσους ασχολούνταν με την Λογιστική.⁴²²

Από το 1568⁴²³ η πρακτική Αριθμητική του Εμμανουήλ Γλυζώνιου, -βιβλίο κατάλληλο για μια στοιχειώδη μαθηματική αγωγή- ήταν σχεδόν το αποκλειστικό έργο με μαθηματικό περιεχόμενο το οποίο κυκλοφορούσε στις κατεχόμενες ελληνικές χώρες και

⁴¹⁷ Γιάννης Καρράς, Οι επιστήμες στην τουρκοκρατία, χειρόγραφα και έντυπα, τόμος Α', τα Μαθηματικά, εκδόσεις Εστία, Αθήνα 1992, σελ 119

⁴¹⁸ ο. α. σελ 113

⁴¹⁹ ο.α. σελ 120

⁴²⁰ ο.α. σελ 127

⁴²¹ Ανδρέας Ι. Πούλος, Ελληνική μαθηματική βιβλιογραφία, εκδ. Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 1988

⁴²² ο.α., σελ 21

⁴²³ Το έτος που τυπώθηκε για πρώτη φορά στην Βενετία η «Πρακτική Αριθμητική» του Γλυζώνιου.

αποτελούσε την κυριότερη πηγή μαθηματικών γνώσεων για το λαό.

Η εμφάνιση του έργου «Οδός Μαθηματικής» το 1749 αποτέλεσε ένα σημαντικό γεγονός για την εκπαίδευση την εποχή της τουρκοκρατίας.

Με το αξιόλογο ογκώδες τρίτομο έργο, παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά συστηματικά στον ελληνικό πνευματικό χώρο, γνώσεις και πνευματικά επιτεύγματα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών (τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, τα «Σφαιρικά» του Θεοδοσίου κ.ά), εφαρμογές των τύπων της γεωμετρίας και της τριγωνομετρίας (επιπέδου και σφαιρικής) στην Αστρονομία, καθώς και η χρήση των γεωμετρικών οργάνων στην Μηχανική, Υψομετρία, Γεωδεσία, Χωρογραφία, Στερεομετρία και Κοιλομετρία.

Την αξία του έργου αναγνωρίζουν οι λόγιοι της εποχής, όπως φαίνεται από τις αναφορές τους στο πρόσωπο του συγγραφέα, του Μεθόδιου Ανθρακίτη.

Ο Κούμας αναφέρει ότι «ούτος ο θαυμάσιος ανήρ μετεκόμισε εις τα Ιωάννινα τας Γεωμετρικάς γνώσεις, αι οποιαί έλειπαν προ χρόνων».

Ο φιλογενής πλούσιος έμπορος και αρωγός της παιδείας, Ζωσιμάς, στο προοίμιο του έργου «Στοιχεία Μαθηματικών» του Νικηφόρου Θεοτόκη, γράφει: «ο αιδίμος εκείνος των Μαθηματικών διδάσκαλος, ο Μεθόδιος, ώσπερ ναυς τις μεγάλεμπορος από τας δυτικές επιστρέψας χώρας, τους Ευκλείδους και Αρχιμήδους και Απολλωνίους και Διοφάντους επί την Ελλάδα επαναγαγών, εις την των Ιωαννίνων Σχολήν εισήγαγεν»⁴²⁴

Η πηγή από την οποία ο Ανθρακίτης άντλησε τα κείμενά του, δεν είναι γνωστή. Η μοναδική πληροφορία που μας δίνει ο ίδιος στην προμετωπίδα του έργου του είναι ότι «εκ' της Λατινίδος εις την Ελληνίδα μετενεχθείσα τε φωνήν και ερμηνευθείσα λίαν μέντοι συντόμως και αμυδρώς». Δηλαδή μας πληροφορεί μόνο, ότι το έργο αποτελεί σύντομη μετάφραση από τα λατινικά.

Είναι δύσκολος ο εντοπισμός κάποιου κώδικα τον οποίο θα μπορούσε να είχε μεταφράσει από τα λατινικά ο Ανθρακίτης. Το πιθανότερο είναι ότι χρησιμοποίησε περισσότερους από έναν κώδικες για να συνθέσει το έργο του.

Αυτή η εντύπωση μας δημιουργήθηκε μετά από την μελέτη του έργου και την σύγκριση που κάναμε ανάμεσα στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη έτσι όπως αυτά παρουσιάζονται από τον Ανθρακίτη και από τον Δανό ελληνιστή και ιστορικό των επιστημών J. L. Heiberg στο έργο του «Euclidis Opera Omnia».⁴²⁵

Η έκδοση του Heiberg, η οποία έγινε στην Λειψία το 1883, θεωρείται η καλύτερη των «Στοιχείων» και έχει σαν θεμέλιο παλαιότερη έκδοση των «Στοιχείων» του Θέωνα του Αλεξανδρέα (4^{ος} αιώνας μ.Χ.)⁴²⁶. Στον ελληνικό χώρο παρουσιάζεται από τον Ευάγγελο Σταμάτη σε έργο του το οποίο εκδόθηκε κατά την περίοδο 1952-1957.

Το τρίτο έργο και τελευταίο έργο το οποίο θα μελετήσουμε και θα αναλύσουμε στην συνέχεια με στόχο την συγκριτική του παρουσίαση με την «Οδό Μαθηματικής», είναι το αξιόλογο τρίτομο έργο «Στοιχεία Μαθηματικών» του Κερκυραίου λόγιου Νικηφόρου Θεοτόκη το οποίο εκδόθηκε στην Μόσχα το 1798 με δαπάνη των φιλογενών Ελλήνων εμπόρων, αδερφών Ζωσιμά.

Η κυριότερη πηγή του πρώτου τόμου των «Στοιχείων Μαθηματικών» του Νικηφόρου Θεοτόκη, είναι το έργο του Tacquet «Elementa Geometriae planae ac solidae.

⁴²⁴ «Στοιχείων Μαθηματικών εκ παλαιών και νεωτέρων συνερανισθέντων, υπό του Πανιερωτάτου Αρχιεπισκόπου πρώην Αστραχανίου κυρίου Νικηφόρου». Μόσχα 1798, τόμος πρώτος, σελ 7

⁴²⁵ Θ. Εξαρχάκος, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. Ευκλείδη «Στοιχεία», τόμος Ι, σελ 9

⁴²⁶ Ευάγγελου Σ. Σταμάτη, «Ευκλείδους Γεωμετρία», Ο.Ε.Δ.Β. Αθήνα 1975, τόμος Ι, σελ 23

ei selecta ex Archimede theorematata» το οποίο κυκλοφόρησε το 1654.

Ο ίδιος ο συγγραφέας, στον πρόλογο του έργου του, (τόμος 1^{ος}, σελ. ιγ') παραπέμπει στο βιβλίο του Βέλγου Μαθηματικού: «ὅρα τον πρόλογ. της του Τακουέτου Γεωμετρ. της εν Νεαπόλ. Έτ 1744 εκδοθ. ομοίως και τον της Άλγεβρ. Βικεντίου του 'Ρικάτου, της εν έτ. 1765 εν Βονων. εκδοθ.»

Για την Αριθμητική του πρώτου τόμου, χρησιμοποίησε το έργο του Ch. Wolff: «Elementa Matheseos universae», τόμος I. Παραπομπή στην σελίδα 260 της Αριθμητικής γράφει: «Όρα το Ι σχόλιο της του Ουόλφ. Αριθμ.»

Στο πρώτο κεφάλαιο του δεύτερου τόμου «Αρχιμήδου θεωρήματα», ο Θεοτόκης κάνει αναφορές στο έργο του Tacquet. (σε παραπομπή της σελίδας 13 του 2^{ου} τόμου γράφει: «Όρα το στ' θεώρ. Του Τακουέτιου. το εν τοις Αρχιμ. Θεωρ.»).

Για το κεφάλαιο των «Κωνικών τομών» του 2^{ου} τόμου ο συγγραφέας χρησιμοποιεί⁴²⁷ το έργο του Josepho Orlahdo, «Sectionum conicorum tractatus», Νεάπολη 1744.

Στο ίδιο κεφάλαιο, γίνονται αναφορές από τον Θεοτόκη στο έργο του Wolff, (στην σελ. 126 γράφει «Όρα την Ουόλφ. Οπτικ.»)

2.3 Το έργο «Πρακτική Αριθμητική ή Λογαριαστική»

2.3.1 Εμμανουήλ Γλυζώνιος (1530-1596)

Ο Εμμανουήλ Γλυζώνιος ή Γλυζούνιος ή Μανουήλ Γλυντζούνης όπως ο ίδιος υπογράφεται γεννήθηκε στην Χίο το 1530.

Στην γενέτειρά του διδάχτηκε τα πρώτα γράμματα από τον σπουδαίο λόγιο Μιχαήλ Λήσταρχο και στην συνέχεια σπούδασε ιατρική και φιλολογία στην Ιταλία.⁴²⁸

Στην Βενετία όπου και εγκαταστάθηκε μόνιμα μετά τις σπουδές του, ασχολήθηκε με την συλλογή χειρογράφων για λογαριασμό του βασιλιά Φιλίππου Β' της Ισπανίας τον οποίο επισκέφτηκε το 1581.⁴²⁹

Οι επιχειρηματικές του δραστηριότητες εκτός από το εμπόριο των χειρογράφων επικεντρώθηκαν στις εκδόσεις ελληνικών βιβλίων. Ήταν ο πρώτος εκδότης εκκλησιαστικών χειρογράφων και πρώτος αυτός εφοδίασε με έντυπα λειτουργικά και εκκλησιαστικά βιβλία την υπόδουλη πατρίδα του⁴³⁰.

Το 1586 εκδίδει ένα από τα πρώτα έντυπα ψαλτήρια. Το 1587 τυπώνει το πρώτο εκκλησιαστικό Ανθολόγιο και το επόμενο έτος 1588 εκδίδει Ευαγγέλιο και Ευαγγελιστάριο. Το 1595 εκδίδει το «Σύνταγμα τινών αναγκαίων ακολουθιών» και τα Μηναία Σεπτεμβρίου και Οκτωβρίου. Το 1596 το Μηναίο Νοεμβρίου και «Αναγνωστικόν»⁴³¹

⁴²⁷ Ο. α. σελ. 94

⁴²⁸ Κ. Ι. Άμαντος, Χιακά χρονικά. Αθήνα 1919, τόμος Δ', σελ 75

⁴²⁹ Νίκου Δ. Σωτηράκη, «Μανουήλ Γλυζώνιος και Δωρόθεος Πράϊος» Αθήνα 1973, ανάτυπον εκ της «Χιακής Επιθεωρήσεως», Τεύχος 33^{ον}. Νοέμβριος 1973, σελ 81

⁴³⁰ ο.α σελ 81

⁴³¹ ο.α.σελ 81

Με τα βιβλία αυτά τα οποία επανεκδόθηκαν πολλές φορές, καλύφθηκαν οι ανάγκες της Ορθόδοξης Εκκλησίας σε μια εποχή που τα λειτουργικά βιβλία -ιδιαίτερα στις φτωχές ενορίες- σπάνιζαν εξ' αιτίας του υψηλού κόστους του χειρόγραφου βιβλίου.

Πέθανε στις 11 Σεπτεμβρίου του 1596. Με την διαθήκη του πρόσφερε το σπίτι του στην Χίο για να χρησιμοποιηθεί συγχρόνως σαν σχολείο και κατοικία του δασκάλου, του οποίου τον μισθό εξασφάλισε από τους τόκους χρηματικού ποσού (1000 δουκάτων) που κληροδότησε για τον σκοπό αυτό.

Ο Γλυζώνιος, με την τυπογραφική του δραστηριότητα, έγινε ο πρόδρομος των μεγάλων Ελλήνων τυπογράφων της Βενετίας, του Γλυκή και του Σάρου.

Μία ακόμα σημαντική προσφορά του προς το υπόδουλο Γένος είναι η συγγραφή και η έκδοση της «Αριθμητικής» του, η οποία εκδόθηκε για πρώτη φορά στην Βενετία το 1568.

2.3.2 Η «Αριθμητική»: σχόλια στο περιεχόμενο του έργου.

Το βιβλίο του Γλυζώνιου τυπώθηκε και κυκλοφόρησε σε μια χρονική περίοδο μέσα στην οποία η κατάσταση που επικρατεί για τον ελληνισμό όχι μόνο δεν είναι κατάλληλη για την δημιουργία κάποιου έστω και υποτυπώδους πνευματικού κλίματος, αλλά ούτε αφήνει περιθώρια για σκέψεις και προβληματισμούς για τον τόπο, που είχε καταντήσει "μη μόνον σοφίας αλλά και παιδεύσεως έρημος".⁴³²

Η μεγάλη φτώχεια, που οδηγούσε σε καθημερινό αγώνα για βιολογική επιβίωση, ο φόβος και η αβεβαιότητα που η παρουσία του ξένου δυνάστη προκαλούσε, παρουσία, που εκδηλώνονταν καθημερινά με διάφορους τρόπους (βαριές φορολογίες, λεηλασίες, βασανιστήρια, εξισλαμισμούς, παιδομάζωμα), δεν έδιναν κατ' αρχάς προτεραιότητα σε έντονους προβληματισμούς και ανησυχίες για την κακή κατάσταση στα θέματα της παιδείας.

Επιτακτικότερες ανάγκες, -ανάγκες για την επιβίωση- έπαιρναν κατά κανόνα την κυρίαρχη θέση στη ζωή των ραγιάδων ενώ η απαιδευσία που επικρατούσε δυσκόλευε ακόμα περισσότερο την ζωή τους και πρόσθετε νέες συμφορές στις ήδη υπάρχουσες.

Σκέψεις για μόρφωση δεν χωρούσαν μέσα στην δραματική καθημερινότητα που έφερε η υποδούλωσή τους στον ασιάτη δυνάστη. «Οι στοιχειωδέστερες έννοιες γραφής και ανάγνωσης, οι απλούστερες πράξεις της λογαριαστικής, τα στοιχεία δηλαδή εκείνα που είναι αναγκαία για την καθημερινή ζωή -όπως αυτή εξελισσόταν την εποχή εκείνη-, συνθέτουν τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της παιδείας των πρώτων αιώνων της δουλείας»⁴³³

Σε ένα τέτοιο κλίμα η αποδοχή και η διάδοση του βιβλίου υπήρξε μεγάλη. Το μαθηματικό επίπεδο του βιβλίου που απευθύνονταν στον απλό, στον αγράμματο λαό, το εύρος των καθημερινών προβλημάτων που περιείχε καθώς και το σύνολο των απλών και πρακτικών λύσεων που έδινε στα προβλήματα που απασχολούσαν τον άνθρωπο στην καθημερινή του ζωή, έκαναν το βιβλίο που κυκλοφορούσε με την επωνυμία το

⁴³² Σχολάριος, «Άπαντα», σελ. 291

⁴³³ Γιάννης Καράς, ο φυσικός κόσμος ,α.τ. 81,σελ 10.

γλυτίζουν» ένα «Ευαγγέλιο»⁴³⁴ της πρακτικής αριθμητικής.

Η «Πρακτική αριθμητική» του Εμμανουήλ Γλυζώνιου, είναι ένα λαϊκό βιβλίο Αριθμητικής. Όπως συνηθίζονταν στις εκδόσεις της εποχής εκείνης, το βιβλίο περιέχει ένα προοίμιο, στο οποίο ο συγγραφέας αναφέρει ποιος είναι ο στόχος συγγραφής του και σε ποιους απευθύνεται.

Από το προοίμιο μαθαίνουμε, ότι το παρόν βιβλίο, «επειδή το παν της σοφίας ζημιωθέντες εις τοσούτον απαιδευσίας προήχθημεν.....πάσι δώρον τι κοινόν και επωφελές εντυπώσας χαρίσασθαι».

Το βιβλίο δηλαδή είναι γραμμένο για όλους. Δεν αποτελεί μόνο διδακτικό εγχειρίδιο, αλλά και πολύτιμο βοήθημα για όσους ασχολούνταν ή επρόκειτο να ασχοληθούν με το εμπόριο και στερούνταν «καν εκείνων άτερ των αναγκαιών έστι».

Αφού ο ίδιος δεν είναι μαθηματικός, παρακαλεί «τους ειδóσι και επιστήμοσι» να μην τον κατηγορήσουν για αμάθεια, αλλά να εκτιμήσουν την πρόθεσή του, να βοηθήσει με το βιβλίο του το Έθνος : «τούτους μεν εκλιπαρώ ίνα μην μου καταγνώσονται αμαθίαν μονουχί καθορώντες το πρόθυμον».

Εξ αιτίας της μεγάλης κυκλοφορίας του , -με δεκαεννέα επανεκδόσεις μέσα σε 250 χρόνια-, η επωνυμία του βιβλίου «το γλυτίζουν» ταυτίστηκε με την ίδια την πρακτική αριθμητική.

Τα γενικά χαρακτηριστικά του βιβλίου όπως προκύπτει από τη μελέτη που έγινε είναι:

- Εκτός από το προοίμιο το οποίο είναι γραμμένο σε γλώσσα αττικίζουσα γιατί με αυτό απευθύνεται στα λόγια στρώματα, το υπόλοιπο βιβλίο είναι γραμμένο στην ζωντανή καθομιλούμενη γλώσσα, αφού απευθύνεται στον απλό λαό. Ο Γλυζώνιος, ενδιαφέρεται να μεταδώσει με όσο το δυνατόν απλούστερο τρόπο το περιεχόμενο του βιβλίου, άρα γι' αυτόν η γλώσσα είναι μόνο το μέσον για την κατανόηση των κειμένων και τίποτα περισσότερο. Αυτό φαίνεται και από τον τρόπο που την χρησιμοποιεί για να συντάξει τα κείμενα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να είναι γραμμένη μία λέξη, εξαρτάται από τα φωνήεντα που περιέχει. Υπάρχουν περιπτώσεις, στις οποίες στην ίδια πρόταση, επαναλαμβάνεται η ίδια λέξη δύο φορές με διαφορετική ορθογραφία. Π.χ. «.....εδούλεψαν 5 μήνες και σ' αυτούς τους μήνες.....», ή «...είταν 6 οργιές. πόσες οργιαίς χρειάζεται.....»
- Οι ορισμοί των πράξεων και των εννοιών, δίνονται με τρόπο απλοϊκό. Ο στόχος του συγγραφέα δεν είναι να δώσει τον αυστηρό ορισμό μιας έννοιας ή μιας διαδικασίας, αλλά, για το αναγνωστικό κοινό που απευθύνεται, να περιγράψει όσο πιο απλά γίνεται την διαδικασία αυτή, ώστε να μπορεί ο αναγνώστης να την εφαρμόσει. Π.χ. η απλοποίηση των κλασμάτων (σχισμός), ορίζεται ως «ο καθολικός τρόπος της τέχνης, και γίνεται εις τοιούτον τρόπον ήγουν αν έχης τζάκισμα και θέλεις να το φέρης εις το μικρότερον που να εμπορείς»
- Ο αριθμός των προβλημάτων που περιέχει είναι μεγάλος⁴³⁵ και η ευρύτητα των

⁴³⁴ Ο επιτυχημένος αυτός χαρακτηρισμός έγινε από τον Ανδρέα Πούλο, Ελληνική Μαθηματική βιβλιογραφία (1500-1900). Συνοπτική ιστορία του ελληνικού μαθηματικού βιβλίου» έκδοση, ΕΜΕ, 1988, σελ 21

θεμάτων που διαπραγματεύεται είναι εντυπωσιακή. Ποικίλα προβλήματα που αφορούν σε δανεισμούς ποσών, ανταλλαγές και πωλήσεις προϊόντων, μετρήσεις, μετατροπές νομισμάτων, συνεταιρισμούς, κληρονομίες, υποδιαίρέσεις νομισμάτων και μονάδων βάρους κ.ά. διευκολύνουν την καθημερινότητα του λαού και συμβάλλουν στην βελτίωση των συνθηκών της ζωής του. Τα προβλήματα αυτά μας δίνουν συχνά πολύτιμες πληροφορίες για τις μετρικές μονάδες της εποχής, τα προϊόντα τα οποία εμπορεύονταν οι υπόδουλοι και τις τιμές των προϊόντων αυτών.

- Οι οδηγίες για τις εκτελέσεις των πράξεων, τις δοκιμές που απαραίτητα τις συνοδεύουν και τις λύσεις των προβλημάτων, δίνονται βήμα προς βήμα, ώστε το βιβλίο μπορεί να χαρακτηριστεί «πρακτική αριθμητική άνευ διδασκάλου». Ίσως αυτός να ήταν και ο στόχος του Γλυζώνιου, να μπορεί οποιοσδήποτε, να κατανοήσει τα κείμενα, να εφαρμόζει τις διαδικασίες και να ελέγχει την ορθότητα των αποτελεσμάτων, αρκεί να γνωρίζει ανάγνωση και γραφή. Εάν κρίνουμε από τον μεγάλο αριθμό των επανεκδόσεων του βιβλίου, φαίνεται ότι συγγραφέας πέτυχε τον στόχο του.
- Παρά τον πρακτικό χαρακτήρα του βιβλίου, σε κάποια κεφάλαια, ο συγγραφέας, επινοεί διαλόγους, με ερωτήσεις και απαντήσεις. Οι ερωτήσεις περιέχουν απορίες που θα μπορούσαν να έχουν δημιουργηθεί από τον αναγνώστη, και ο συγγραφέας μέσα από παραδείγματα προσπαθεί να εξηγήσει την υποτιθέμενη απορία. Δηλαδή, χρησιμοποιεί τον διάλογο τον οποίο αυτός επινόησε, σαν μέσο διδασκαλίας, για την καλύτερη κατανόηση μιας διαδικασίας. Όπως είναι γνωστό, στο «ΑΠΑΝΘΙΣΜΑ» του, ο Ρήγας, μέσα από έναν υποτιθέμενο διάλογο ανάμεσα σε ένα μαθητή και τον δάσκαλό του, προσπαθεί να ερμηνεύσει στο μαθητή βασικές έννοιες της Αστρονομίας και της Φυσικής.
- Για την λύση των περισσότερων προβλημάτων, ο συγγραφέας εφαρμόζει την μέθοδο των τριών την οποία χαρακτηρίζει «πρώτη μέθοδο και κυρία πάντων των μεθόδων».
- Για την περιγραφή κάθε διαδικασίας αφιερώνονται δύο ή περισσότερα κεφάλαια. Ενδεικτικά αναφέρουμε για την πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ φυσικών αριθμών:

Κεφάλαιο θ' : «Αρχή του πολυπλασιασμού, και τι εστί πολυπλασιασμός.»

Κεφάλαιο ι' : «Ετερος πολυπλασιασμός»

Κεφάλαιο ια' : «Ετερος πολυπλασιασμός»

Κεφάλαιο ιβ' : «Ετερος πολυπλασιασμός με νούλες πολλά εύκολος»

⁴³⁵ Θα θέλαμε να θυμίσουμε πως λίγο νωρίτερα κυκλοφορούσαν ανάλογα βιβλία στην Ευρώπη. (π.χ. βλ. το βιβλίο του Christoff Rudolff, *Coss*, Strassburg 1525), όπου η λογιστική έπαιξε σημαντικό ρόλο στην καθημερινή ζωή. Οι λεγόμενοι *Rechenmeister* (δάσκαλοι της λογιστικής) είχαν σημαντική θέση στην κοινωνία. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. P. Treutlein *Die Deutsche Coss. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften* 2 (1879) σελ. 1-124. Βλ. επίσης και τη διδακτορική διατριβή του Warren van Egmond, *The Commercial Revolution and the Beginnings of Western Mathematics in Renaissance Florence 1300-1500*, University of Indiana 1976.

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίζεται η πράξη και δίνονται τα πρώτα απλά παραδείγματα και προβλήματα, ενώ στα κεφάλαια που ακολουθούν ο βαθμός δυσκολίας των πράξεων και των προβλημάτων αυξάνεται σταδιακά.

Η εικόνα του βιβλίου του Εμμανουήλ Γλυζώνιου αντικατοπτρίζει το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης του ελληνισμού τον αιώνα που κυκλοφόρησε.

Τα σημαντικά ευρωπαϊκά επιστημονικά επιτεύγματα του 16^{ου} αιώνα έγιναν κτήμα μόνο των ελάχιστων Ελλήνων λόγιων οι οποίοι σπούδαζαν στα ανώτατα πνευματικά κέντρα της Ευρώπης, ενώ η μαθηματική παιδεία στην τουρκοκρατούμενη Ελλάδα τον αιώνα αυτό, ελάμβανε χώρα μέσα από πρακτικές Αριθμητικές με εκλαϊκευτικό περιεχόμενο.

Η πρακτική Αριθμητική του Γλυζώνιου χρησιμοποιήθηκε και σαν διδακτικό εγχειρίδιο όχι μόνο σε σχολεία του τουρκοκρατούμενου αλλά και του παροικιακού ελληνισμού.

Ο Μανουήλ Γεδεών, ανάμεσα στα διδακτικά εγχειρίδια του 17^{ου} αιώνα, αναφέρει και το βιβλίο του Χιώτη λόγιου. «...αι πολλαί εκδόσεις της Αριθμητικής του Γλυζουνίου και κατά τον αιώνα τούτον δεικνύουσιν ότι ήν εν χρήσει τούτο το βιβλίον εν τοις παρ' ημίν σχολείοις, ...»⁴³⁶

Ο Θεσσαλός λόγιος Αλέξανδρος Ελλάδιος αναφέρει ότι η «Λογαριαστική» διδάχτηκε και στο Φλαγγίνειο Κολέγιο της Βενετίας⁴³⁷

Ο μεγάλος αριθμός των επανεκδόσεών του μαρτυρεί με ενάργεια την ευρεία χρήση του καθώς και το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης του λαού όχι μόνον όταν κυκλοφόρησε για πρώτη φορά, αλλά και αρκετά χρόνια μετά την πρώτη έκδοσή του.

⁴³⁶ Μανουήλ Ι. Γεδεών, «Η πνευματική κίνησης του Γένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα», Αθήνα 1976, σελ. 20

⁴³⁷ Α. Ε. Καραθανάσης, «Η Φλαγγίνειος Σχολή της Βενετίας», εκδ. Κυριακίδη, Θεσ/νίκη 1975, σελ. 191

2.3.3 Η ανάλυση της «Αριθμητικής».

Στο εξώφυλλο του βιβλίου του πληροφορεί τους αναγνώστες ότι πρόκειται για



BIBLION

PROXEIRON TOIS PASI

PERIECHON TIN TEN PRAKTIKHN

Αριθμητικὴν, ἢ μάλλον εἰπεῖν τὴν λογαριαστικὴν.

Καὶ περὶ τοῦ πῶς να εὐρίσκει ἕκαστος τὸ Ἅγιον Πάσχα,

καὶ τέλειον Πασχάλιον αἰὶ καὶ πάντοτε. Καὶ

περὶ εὐρέσεως σελήνης ἐν ποίᾳ ἡμέρᾳ γίνεται ἡ γέννα αὐτῆς.

Στον πρόλογο του έργου του, αναφέρει ότι "...επειδή το παν της σοφίας ζημιωθέντες εἰς τοσούτον ἀπαιδευσίας προήχθημεν, ...πάσης σοφίας τε καὶ ἐπιστήμης γυμνωθέντες, (οἱς κρίμασι κύριος οἶδε) δεῖν ἔγνωι μη παριδεῖν, ἀλλὰ καὶ ἐκείνων ἀπερ τῶν ἀναγκαίων ἐστὶ καὶ εἰ ταῖς ἡμῶν ἐμπορίας χρώμεθα, δῶρον τι κοινόν καὶ ἐπωφελές ἐντυπώσας χαρίσασθαι, τὴν θυλλουμένην δηλαδὴ παρὰ πάντων πρακτικὴν ἀριθμητικὴν, ἢ μάλλον εἰπεῖν λογαριαστικὴν ἐπιστήμην".

Με το ἀπλό ὕφος γραφῆς που ὁ συγγραφέας τοῦ μεταχειρίζεται, (ἐκτός ἀπὸ τον

πρόλογο ο οποίος είναι γραμμένος στην αρχαϊζουσα) καθώς και με το περιεχόμενο του - είναι ένα λαϊκό βιβλίο αριθμητικής-,⁴³⁸ το "Γλυτζούνι", κατάφερε για δύομιση αιώνες να αποτελέσει το πιο διαδεδομένο λαϊκό Μαθηματικό βιβλίο στις τουρκοκρατούμενες ελληνικές περιοχές.

Μετά τον πρόλογο, ο "**πίναξ του παρόντος βιβλίου**", που αποτελείται από τέσσερις σελίδες, αναφέρει τα θέματα που πραγματεύεται.

Ενδεικτικά αναφέρουμε.

- Σημεία ψηφίων των τε ελλήνων και ιταλών και τουρκών.
- Περί του αριθμού των ψηφίων εν συνθέσει.
- Περί του υφειλμού και τι εστί υφειλμός.
- Περί πολυπλασιασμού και τι εστί πολυπλασιασμός.
- Περί μερισμού και τι εστί μερισμός.
- Έτερος μερισμός, ήγουν άσπρα να τα κάμης φλουρία, ή φλουρία να τα μερίσης εις ανθρώπους.
- Περί τζακισμάτων και τι εστί τζάκισμα και πως γράφονται.
- Περί υφειλμού των τζακισμάτων, και τι εστί υφειλμός των τζακισμάτων.
- Περί συνάψεως των ειλημάτων, και τι εστί σύναψις ειλημάτων.
- Σουμαρισμός τριών τζακισμάτων.
- Περί της μεθόδου των τριών.
- Περί συντροφιών.
- Μοιρασία ζημίας.
- Περί ταξιδίων.
- Περί διαφοράς δρόμου караβίων, και ολάκιδων και στρατοκόπων.
- Περί του πως να εύρης ύψος πύργου ή άλλου τινός πράγματος.
- Περί τινός ανθρώπου που εσυμφώνησεν και έκτισεν ένα σπίτι, και εις το τέλος

⁴³⁸ Ο εκδότης του αναμνηστικού τόμου στην εκατονταετηρίδα του Ευγένιου Βούλγαρη (Αθήνα 1865), Σταμάτιος Νικολαΐδης αναφέρει το εξής περιστατικό, το οποίο συνέβη κατά την διάρκεια της διδασκαλίας του Βούλγαρη όταν ήταν σχολάρχης στην Πατριαρχική Ακαδημία (1761-1762), και αφορά στο εκλαϊκευτικό περιεχόμενο της «Λογαριαστικής»: «Αλλά Δωρόθεος τις Μυτιληναίος διδάσκαλος των Γραμματικών εν τη ιδία σχολή, φθόνω ή απειροκαλία κινούμενος, διέσυρε πανταχού τον Ευγένιον, ως μη ειδόντα την Ελληνικήν γλώσσαν και ως διδάσκοντα περττά και άγνωστα μαθήματα, τα οποία ενόμιζε την Αριθμητικήν, την Γεωμετρίαν και λοιπά μέρη της Μαθηματικής. Η δε χαμερπής καταδρομή αυτού λέγουσιν, ότι κατήγγισεν εις τοιούτον βαθμόν, ώστε και παντοπώλην τινά εμίσθωσεν, ινα παρουσιασθή εις την παράδοσιν του Ευγενίου φέρων το Γλυτζούνιον επί χείρας και ζητήση λύσιν προβλημάτων αριθμητικής δεικνύων δείθεν δια τούτου το ευτελές των διδασκομένων παρά του Ευγενίου μαθημάτων. Εις τοιαύτα όμως λέγεται ότι συνευδόκει και ο τότε Οικουμενικός Πατριάρχης...» Νίκου Δ. Σωτηράκη, «Μανουήλ Γλυτζόνιος και Δωρόθεος Πρώϊος» Αθήνα 1973, ανάτυπον εκ της «Χιακής Επιθεωρήσεως». Τεύχος 33^{ον} . Νοέμβριος 1973, σελ 185.

Ιδιαίτερα αναφέρεται στο ψηφίο μηδέν, «αυτό το λέγουσιν ελληνικά ουδέν», και εξηγεί πως μεταβάλλεται η αξία ενός αριθμού εάν προσθέσουμε στο τέλος του ένα, δύο, τρία ή περισσότερα μηδενικά.

Με λεπτομερείς περιγραφές, –μέσα σε τέσσερις πυκνογραμμένες σελίδες–, προσπαθεί να διδάξει τον αναγνώστη, πώς να αναγνωρίζει την αξία κάθε ψηφίου ανάλογα με τη θέση που έχει σε έναν αριθμό, και την αξία του ίδιου του αριθμού.

Ο συγγραφέας του βιβλίου, όπως θα διαπιστώσουμε και στη συνέχεια, μέσα από πολλά παραδείγματα, και λεπτομερείς περιγραφές της διαδικασίας για την εκτέλεση των πράξεων και την λύση των προβλημάτων, επιχειρεί να αναπληρώσει τη συμβολή του δασκάλου στην κατανόηση των εννοιών, αφ' ενός μεν γιατί με το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε όλες τις ηλικίες, και αφ' ετέρου, γιατί γνωρίζει, -ειδικά στους πρώιμους καιρούς που το βιβλίο κυκλοφόρησε για πρώτη φορά-, ότι η παρουσία κάποιου δασκάλου, όχι μόνο ήταν σπάνια, αλλά στις περισσότερες τουρκοκρατούμενες περιοχές, ανύπαρκτη. Δηλαδή το βιβλίο του Γλυζώνιου, θα μπορούσε να χαρακτηριστεί, σαν μία πρακτική αριθμητική «άνευ δασκάλου».

Ενδεικτικά για την λεπτομερή περιγραφή του τρόπου με τον οποίο μπορεί κάποιος να βρίσκει τη θέση των ψηφίων ενός αριθμού και να αναγνωρίζει την αξία του αριθμού, αναφέρουμε από μία παράγραφο του βιβλίου.

«Όταν ιδής μέτρος ψηφίων, και θέλῃς να το εύρης πόσα είναι, ποιήσον ούτως. άρχισον δεξιὰ από το ύστερον ψηφίον, και πήγαινε ζερβά, ήγουν εις εκ το πρώτον ψηφίον, και λέγε το μέτρον του καθενός ψηφίου. ήγουν μονάδα, δεκάδα, εκατοντάδα, μονάδα χιλιάδος, δεκάδα χιλιάδος, εκατοντάδα χιλιάδος. έως να σώσεις εις το πρώτον ψηφίον του ζερβού χεριού. Και όποιο ψηφίο είπες μονάδα. όσα γράφει το ψηφίο, τόσα μονά είναι, και το ψηφίο που είπες δεκάδα, είναι τόσαις δεκάδες, και το ψηφίο που είπες εκατοντάδα, είναι τόσες εκατοντάδες,...», και παρακάτω συνεχίζει «...ήγουν 123 το λοιπόν αρχίζομεν δεξιὰ, και λέγομεν, μονάδα, δεκάδα, εκατοντάδα. και το μεν ένα η εκατοντάδα, λέγεται εκατόν και τω δύο η δεκάδα, λέγεται είκοσι. και τρία η μονάδα. Λέγονται όλα αντάμα εκατόν είκοσι τρία...»

Το τέταρτο κεφάλαιο, αναφέρεται στην «Ψηφηφορία των ψηφίων» (προπαίδεια). Το κεφάλαιο περιέχει τον πίνακα της προπαίδειας, ενώ ο συγγραφέας συμβουλεύει ότι «όποιος θέλει να μάθει λογαριασμόν, είναι χρεία να μάθει εκτούθου την Προπαίδειαν, δια να μην κοπιάζει εύκερα».

Τα επόμενα έντεκα κεφάλαια που ακολουθούν, από το 5^ο έως και το 20^ο, αναφέρονται στις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής, την «σύναψη (πρόσθεση), τον υφειλμό (αφαίρεση), τον πολυπλασιασμό και τον μερισμό.

Προηγούνται οι ορισμοί και ακολουθεί, μέσα από πολλά παραδείγματα, η διαδικασία με την οποία εκτελούνται οι τέσσερις πράξεις. Τα παραδείγματα αφορούν οικονομικές συναλλαγές της καθημερινής ζωής, με τα νομίσματα εκείνης της εποχής, τα φλουρία, τα άσπρα, και τις φόλες.

Οι ορισμοί καθώς και όλες οι έννοιες, δίνονται με όσο το δυνατόν απλούστερο τρόπο, ώστε να μπορούν να γίνουν κατανοητοί από τον απλό, τον αγράμματο λαό.

Η «Σύναψις, είναι ένα μέρος από τα τέσσερα μέρη της αριθμητικής, ήγουν μία σμίξις η οποία σμίγει πολλά μέτρα, και τα κάμνει ένα μέτρον, την οποίαν την λέγουσι οι Φράγγοι σουμαρία και δια τούτο την λέγομεν και ημείς σουμαρισμόν...» είναι ο εκλαϊκευμένος ορισμός της πρόσθεσης που περιέχει το βιβλίο της «λογαριαστικής» του Γλυζώνιου, ο οποίος, με ανάλογο τρόπο ορίζει και τις υπόλοιπες τρεις πράξεις της αριθμητικής.

Για τη διαδικασία της πρόσθεσης καθοδηγεί τον αναγνώστη με τον εξής τρόπο . «το λοιπόν αν θέλεις να σουμάρης, ήγουν να ανταμώνεις πολλά μέτρα και να τα κάμης ένα, ή φλουρία ή άσπρα, ή σολδία, ή λίτρες, ποιήσον ούτως. βάλε τα ψηφία αράδα εις την τάξιν τους. ήγουν ταις μονάδαις με ταις μονάδες, ταις δεκάδαις με ταις δεκάδαις, ταις εκατοντάδαις, με ταις εκατοντάδαις. και ταις χιλιάδεις με ταις χιλιάδεις, να έρχονται ίσια...έπειτα άρχισε δεξιά υποκάτω και σουμάριζε, ήγουν από ταις μονάδεις, και όσα εύγουν κράτησε ταις δεκάδεις.....»

Με πολλά παραδείγματα, που αναφέρονται στην αρχή σε προσθέσεις μονοψήφιων αριθμών, και στη συνέχεια σε προσθέσεις διψήφιων , τριψήφιων και πολυψήφιων αριθμών και με λεπτομερή περιγραφή σε κάθε μία περίπτωση της διαδικασίας με την οποία γίνεται η πρόσθεση, φτάνει το στόχο του, που είναι να μπορεί να εφαρμόσει ο αναγνώστης την συγκεκριμένη πράξη, τόσο απαραίτητη στις καθημερινές του συναλλαγές.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν τον ορισμό της αφαίρεσης, αφορούν δανεισμούς χρημάτων, όπου κάθε φορά ο δανειζόμενος, επιστρέφει ένα μέρος των χρημάτων αυτών και θέλει να γνωρίζει το υπόλοιπο του χρέους του.

«...είς άνθρωπος εχρεώσται άλλου ανθρώπου άσπρα 156 και του έδωσεν άσπρα 144 τι χρεωσται ακόμη να του φέρει»

Ο συγγραφέας καθοδηγεί «Βάλε τα ψηφία εις την τάξιν τους, ήγουν εκείνα που χρωστεις επάνω, και εκείνα που έδωσες υποκάτω έπειτα ύφελον τα υποκάτω, από τα επάνω, και ότι μένουσιν τα γράφε υποκάτω της γραμμής και αυτά χρωστά ακόμη να φέρη.»

Στις αφαιρέσεις με κρατούμενα, περιγράφει πολύ αναλυτικά την διαδικασία του δανεισμού μιας μονάδας της ανώτερης τάξης, προκειμένου να μπορέσει να αφαιρέσει ένα μεγαλύτερο από ένα μικρότερο ψηφίο. Αρχικά καθοδηγεί, «...έχε εις τον νουν σου, ότι όταν είναι το υποκάτω ψηφίν ολιγότερον και δεν φθάνει να εύγει από το απάνω ψηφίν, έπαρε από το άλλο ψηφίν που είναι σημά του ένα δανεικόν, και αυτό λέγεται μία δεκάδα, και σμίγε το με το άλλο ψηφίν, και έβγαζε το υποκάτωθεν, και ούτως κάμνε πάντα.», και στη συνέχεια με προβλήματα που ακολουθούν εξηγεί εκτενώς τη διαδικασία της αφαίρεσης στην περίπτωση αυτή.

«... εις άνθρωπος έδωσεν δανεικά άλλου ανθρώπου φλωρία 783 και του έφερεν φλωρία 695 πόσα χρεωσται να του φέρι ακόμη, γράφομεν τα ψηφία ωσάν είπαμεν.....και θέλομεν να βγάλωμεν τα 5 από τα 3 και δεν βολεϊ, έσοντας ότι είναι τα υποκάτω περισσότερα παρά τα απάνω το λοιπόν πέρνομεν ένα δανεικόν από το άλλο ψηφίν και αυτό είναι δέκα, και τρία το άλλον ψηφίν , γίνονται 13 βγάζωμεν γουν τα 5 από τα 13 μένουν 8 και τα γράφομεν υποκάτω της γραμμής. Και πάλιν....»

Σε κάθε πρόβλημα την πράξη της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης ακολουθεί η δοκιμή,

απαραίτητη, για να ελέγξει εάν το αποτέλεσμα είναι σωστό.

της ἑρμηνείας.	45348	τὰ ἑχρήσται,	ἄλλος ἀνθρώπος ἐχρήσται.	Παράδειγμα,
	36259	τὰ ἑδωσαν.	φλωρεία.	48540
	09089	τὰ χρεωστῆ.	καὶ τὰ ἑδωσαν.	47952
	45348	ἡ δοκιμή.	τὰ χρεωστῆ.	00588
			ἡ δοκιμή.	48540
Παράδειγμα, δ'.	ἄλλος ἐδάνεισεν ἄλλῳ ἀνθρώπῳ	ἄλλος ἐδάνεισεν	2012000	Παράδειγμα,
	ἄσπρα	200130	καὶ ἑφίρετο	2009189
	καὶ τὰ ἑφίρετο	89457	τὰ χρεωστῆ	0002811
	τὰ χρεωστῆ	110673	ἡ δοκιμή	2012000
	ἡ δοκιμή	2000130		

Στον πολλαπλασιασμό, μετά τον ορισμό, «...πολυπλασιάζει ένα μέτρος με άλλο μέτρος, ἴγουν που το πληθαίνει εἴτι πράγμα και αν είναι,...», με τρία παραδείγματα, στα οποία ο πολλαπλασιαστής στο πρώτο είναι μονοψήφιος, στο δεύτερο διψήφιος και στο τρίτο τριψήφιος, οδηγεί σταδιακά τον αναγνώστη να κατανοήσει την διαδικασία της πράξης, που περιγράφεται πολύ αναλυτικά και να φτάσει στο αποτέλεσμα.

«Εἰς ἄνθρωπος ἀγόρασεν κερὶ, λύτρες 24 πρὸς 6 ἄσπρα,...,και εἰς ἄνθρωπος θέλῃς να ιδεῖς τι χρεωστῆ να δώση να πληρώση το κερὶ, ποιήσων οὕτως...»

«...εἰς ἄνθρωπος, ἀγόρασεν σιτάρη φορτία 87 πρὸς ἄσπρα 67 το κάθε φορτίον τι χρεωστῆ να πληρώση...»

«Ἄλλος ἄνθρωπος ἀγόρασεν ἀσήμη λύτρες 145 πρὸς ἄσπρα 574 την κάθε λύτραν, τι χρεωστῆ να πληρώσει ...»

Τα παραπάνω παραδείγματα, που αναφέρθηκαν για την πράξη του πολλαπλασιασμοῦ, μας διαφωτίζουν, ως ἓνα βαθμὸ βέβαια και για κάποια εἶδη που εμπορεύονταν οἱ υὑόδουλοι –κερὶ, σιτάρη, ἀσήμη-, αφού με τα προβλήματα της πρακτικῆς αριθμητικῆς του, ο Γλυζώνιος, προσπάθησε να «ακουμπήσει» την καθημερινότητα του λαοῦ, για να διευκολύνει τη ζωὴ του.

Ὅπως και στις δύο προηγούμενες πράξεις, ἡ δοκιμὴ του πολλαπλασιασμοῦ, κρίνεται ἀπαραίτητη και περιέχεται σε κάθε ἓνα ἀπὸ τα παραπάνω προβλήματα, αφού φυσικά προηγείται ἡ περιγραφή της διαδικασίας

Ιδιαίτερο κεφάλαιο, το 12°, αναφέρεται στον πολλαπλασιασμό φυσικῶν αριθμῶν με τους αριθμούς, 10, 100, 1000 «ἕτερος πολλαπλασιασμός με νοῦλες (μηδενικά) πολλὰ εὔκολος», καθώς και στον πολλαπλασιασμό αριθμῶν των οποίων τα τελευταία ψηφία αποτελούνται ἀπὸ ἓνα ἢ περισσότερα μηδενικά.

Στο 13° κεφάλαιο περιγράφεται ἡ διαδικασία «του πῶς να κάμεις να ἔρχονται ὅλα τα ὑποκάτω ψηφία του πολλαπλασιασμοῦ ἴσια».

Δηλαδή υποδεικνύεται ποιους αριθμούς πρέπει να πολλαπλασιάσει κάποιος, ώστε το αποτέλεσμα του γινομένου να είναι εξαψήφιος αριθμός του οποίου όλα τα ψηφία να είναι ίσα, δηλαδή κάποιος από τους αριθμούς 111111, 222222, ..., 999999.

Η περιγραφή της διαδικασίας γίνεται πρακτικά, χωρίς δικαιολόγηση, με τον εξής τρόπο.

«Εάν θέλεις να κάμεις πολλαπλασιασμόν, και να έρχονται τα υποκάτω ψηφία όλα ίσια, ποιήσον ούτως. βάνε πάντα τα επάνω ψηφία 777 και αν θέλεις να έλθουν, τα υποκάτω ψηφία ένα ήγουν 1 βάλε υποκάτω 143 και πολλαπλασίαζε. Εί δε θέλεις να έλθουν 2 βάλε 286 ήγουν δύο φορές τα 143. ...Εί δε θέλεις να έλθουν 9 βάλε εννέα φορές τα 143 ήγουν 1287 και πολλαπλασίαζε ...» Εκτελώντας παράλληλα τους πολλαπλασιασμούς που δίνουν γινόμενα όλους τους εξαψήφιους αριθμούς με ίσα ψηφία, βοηθάει τον αναγνώστη, να καταλάβει τη διαδικασία που περιγράφει.

$$\begin{array}{r}
 143 \quad 777 \\
 7 \quad 1001 \\
 \hline
 1001 \quad 777 \\
 \quad 77700 \\
 \hline
 777777 \\
 \hline
 143 \quad 777 \\
 8 \quad 1144 \\
 \hline
 1144 \quad 3108 \\
 \quad 3108 \\
 \quad 777 \\
 \quad 777 \\
 \hline
 888888
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 143 \quad 777 \\
 2 \quad 286 \\
 \hline
 286 \quad 6662 \\
 \quad 6216 \\
 \hline
 1554 \\
 \hline
 222222 \\
 \hline
 143 \quad 777 \\
 8 \quad 858 \\
 \hline
 858 \quad 6216 \\
 \quad 3885 \\
 \quad 6216 \\
 \hline
 666666
 \end{array}$$

Στο ίδιο κεφάλαιο προτείνεται και μία άλλη μέθοδος «πολλά έμορφος», όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται.

Συγκεκριμένα, εάν κάποιος θέλει να πάρει γινόμενο εξαψήφιο αριθμό με ψηφία ίσα το καθένα με α, πρέπει να πολλαπλασιάσει τον αριθμό 481 με τον αριθμό $200\alpha + 30\alpha + \alpha$ (αν αποδοθεί με σύντομο συμβολισμό ο πολλαπλασιαστέος).

Η διαδικασία που προτείνεται από τον συγγραφέα είναι ..«Το λοιπόν θέλομεν να έλθουν υποκάτω εις τον πολλαπλασιασμόν όλα 1 και πέρνομεν δύο φορές εκατοντάδες όσο είναι το ψηφίν. Ήγουν 200 ακόμι πέρνομεν και τρις φορές τόσες δεκάδες ήγουν 30 τα οποία τα σουμάρομεν με τα 200 και γίνονται 230 και εις αυτά προσθένομεν και το ψηφίν. ήγουν το 1 και γίνονται 231 και αυτά τα πολλαπλασιάζομεν, με τα 481 και γίνονται 111111 και ιδού που εβγήκαν υποκάτω όλα ένα. Πάλιν λέγομεν, ότι θέλομεν να έλθουν υποκάτω 2 ...»

Με παρόμοια διαδικασία η οποία περιγράφεται λεπτομερώς υποδεικνύεται ποιοι

είναι οι αριθμοί που πρέπει να πολλαπλασιάσει κάποιος ώστε το γινόμενο να είναι εξανήφιος αριθμός με διψήφια επαναλαμβανόμενα τμήματα.(π. χ., 121212, 232323, 707070,...).

Το ερώτημα που γεννάται, -μια που το βιβλίο γράφτηκε κυρίως για να χρησιμοποιηθεί και να διευκολύνει τον αγράμματο λαό σε πρακτικής φύσης ζητήματα-, είναι ποια η σκοπιμότητα παρουσίασης του 13^{ου} κεφαλαίου, δηλαδή με τι τρόπο θα μπορούσε κάποιος να αξιοποιήσει μέσα από τις ανάγκες της καθημερινής του ζωής αυτού του είδους τους πολλαπλασιασμούς.

Η τέταρτη πράξη της αριθμητικής, ο μερισμός, ορίζεται σαν «ένα μέρος από τα τέσσερα μέρη της αριθμητικής με το οποίον μερίζεις κάθε μέτρος εις όσα μερτικά και αν θέλεις».

Με τρία προβλήματα που αναφέρονται στην πράξη της διαιρέσης και αφορούν χρηματικά ποσά τα οποία πρέπει να μοιραστούν σε ισόποσα «μερτικά», περιγράφεται λεπτομερώς η διαδικασία της διαιρέσης, με μονοψήφιο, διψήφιο και τριψήφιο διαιρέτη, που είναι παρόμοια με αυτήν που εφαρμόζεται σήμερα.

- «Θετέον λέγομεν άσπρα (νόμισμα της εποχής εκείνης) 48 να τα μοιράσουν άνθρωποι 4 πόσα εγγίζει καθ' ενός»
- «Θετέον αν έχεις να μοιράσεις άσπρα 23347 εις 35 μερτικά»
- «Ομοίως πάλιν θέλομεν να μερίσωμεν 87854 με 468»

Ο τρόπος με τον οποίο περιγράφεται η πράξη της διαιρέσης επιβεβαιώνει τον χαρακτηρισμό του βιβλίου «πρακτική αριθμητική άνευ διδασκάλου», και δείχνει για ακόμα μία φορά το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης του υπόδουλου λαού στον οποίο απευθύνεται.

Αρκεί να αναφέρουμε ότι η διαιρέση με την δοκιμή της που αφορά στο δεύτερο πρόβλημα, περιγράφεται μέσα από τρεις πυκνογραμμένες σελίδες!

Στην προσπάθειά του να γίνει κατανοητός ο συγγραφέας γράφει για το πρώτο παράδειγμα «Γράψε πρώτον τα ψηφία του μεριζόμενου ποσού ήγουν τα 48 και υποκάτω του πρώτου ψηφίου του ζερβού χεριού γράψε τον μεριστήν. ήγουν τα 4 έπειτα λέγε ούτως. τα 4 εις τα 4 το απάνω ψηφίον σεβένει μία φορά ήγουν, οι 4 άνθρωποι που είναι ο μεριστής. να μερίσονται 4 άσπρα πέρνη ο καθείς, ένα και το γράψε δεξιά εις την δίγραμμον ωσάν βλέπεις εδώ εις το πλάγιν. έπειτα άρχισον και πολλαπλασίασον ένα με τα 4 ήγουν εκείνο που ευγήκεν με τον μεριστήν, και λέγε μία φορά 4 γίνονται 4. εύγαλε 4 από τα 4 ήγουν από το άλλον ψηφίν που είναι απάνω του. δεν μένει τίποτα, και λυώσε τον μεριστήν, και το ψηφίν που είναι απάνω του, και γράψε μίαν νούλαν έσοντας και δεν έμεινε τίποτα. και πάλιν γράψε τον μεριστήν, ήγουν τα 4 υποκάτω εις το δεύτερον ψηφίν έπειτα λέγε, τα 4 εις τα οκτώ σεβένουν 2 φορές. ήγουν τα 8 να τα μιράσουν τέσσαρεις άνθρωποι παίρνει ο κάθε εις τα 2 και γράψε αυτά τα 2 έμπροσθεν του άλλου ψηφίου, ήγουν εις το 1 έπειτα πάλι πολλαπλασιάζεις τα δύο ψηφία. ήγουν τον μεριστήν τα 4 με τα 2 που ευγήκαν, και λέγε 2 φορές 4 γίνονται 8 εύγαλε 8 από τα 8 που είναι απάνω του δεν μένει τίποτα, και λυώσε πάλιν και εσύ τα δύο ψηφία ήγουν τον μεριστήν, και εκείνο που είναι επάνω του, και γράψε μίαν νούλαν. έσοντας και δεν έμεινε τίποτα ωσάν βλέπεις και εις τα ψηφία και ούτως κάμνε πάντα όταν θέλεις να μοιράσης με ένα ψηφίν και ποτέ

να μην σφάλης. ακόμη ήξευρε ότι μεριστής λέγεται εκείνα τα ψηφία. που μερίζεις με αυτά. δε σούμα οπού μοιράζεται, λέγεται ο μεριζόμενος ποσός, ειδέ εκείνο που εύγη, ήγουν το μερτικό λέγεται το μέρος.

Η δοκιμή της διαιρέσης δίνεται από τον συγγραφέα πρακτικά, χωρίς καμία δικαιολόγηση για την διαδικασία που εφαρμόζεται.

Συγκεκριμένα για την δοκιμή που ακολουθεί την διαίρεση του δευτέρου προβλήματος, με διαιρετέο το 23347 και διαιρέτη το 35 η οποία δίνει πηλίκο 667 και υπόλοιπο 2, ακολουθεί τα εξής βήματα.

Από το άθροισμα των ψηφίων του πηλίκου αφαιρεί το 9. από το υπόλοιπο αφαιρεί και πάλι το 9. Μένουν 1. Στη συνέχεια προσθέτει τα ψηφία του διαιρέτη και το άθροισμά τους το 8, το πολλαπλασιάζει με τον αριθμό 1 και στο γινόμενο προσθέτει το υπόλοιπο της διαιρέσης, το 2. Από το άθροισμα αφαιρεί το 9 και το υπόλοιπο τον αριθμό 1 τον ενδιαφέρει να συγκρατήσει από το πρώτο μέρος της διαδικασίας της δοκιμής, τον οποίο συγκρίνει με εκείνον που βρίσκει αν από το άθροισμα των ψηφίων του διαιρετέου αφαιρέσει το 9, $(2+3+3+4+7-9=1)$, δηλαδή τον αριθμό 1.

κάθε μίνι νύλα. κα' λύσει τα τρία κα' γράψι παρ'ο μίας νύλα ώσαδ
βλίπης κα' εις τα ψηφία ε' ύτως κάμης φαίντα κα' ποτ' ια' μίνι σφάλης.

	00		
	220		2
			—
	23347		1
άσπρα —————	23347	667	8 η δοκιμή.
μοίρασι μί —————	3333	—	—
	33		1
			1

Τα κεφάλαια 17^ο και 18^ο, αναφέρονται σε μετατροπές νομισμάτων σε νομίσματα μικρότερης αξίας

Στο 17^ο κεφάλαιο παρουσιάζεται «Ετερος μερισμός, ήγουν άσπρα να τα κάμης φλουρία και φλουρία να τα μερίσεις εις ανθρώπους».

Τα φλουρία, τα άσπρα και οι φόλες ήταν νομίσματα της εποχής εκείνης.

- Το ένα φλουρίο υποδιαιρείτο σε εξήντα άσπρα
- Το ένα άσπρο υποδιαιρείτο σε 40 φόλες.

Ένα πολύ απλό παράδειγμα δίνεται για την πρώτη μετατροπή. «Θετόν θέλεις να μερίσης άσπρα 25347 δια να τα κάμης φλουρία, ποιήσον ούτως, μέρισε με 60 και είτι εύγη τόσα φλουρία είναι.....». Μετά από την συνηθισμένη λεπτομερή περιγραφή της διαιρέσης καταλήγει «.....ότι έδιναν αι 25347 τα άσπρα. φλουρία 422 έμειναν και άσπρα

27».

Στο ίδιο κεφάλαιο περιγράφεται η διαδικασία μοιρασμού ενός ποσού σε ισόποσα μερίδια όταν η διαίρεση δεν είναι τέλεια. Το υπόλοιπο το μετατρέπει σε νομίσματα της αμέσως μικρότερης αξίας και στη συνέχεια εκτελεί τη διαίρεση του νέου ποσού με τον ίδιο διαφρέτη κ.ο.κ.

«Το λοιπόν θέλουμε να μερίσωμεν φλουριά 5676 εις 49 μερτικά, ήγουν εις 49 ανθρώπους, και μερίζομεν τας 5676 με τα 49 και βγαίνουν εις το κάθε μερτικόν φλουριά 115 και μένουσιν και φλουριά 41 και αυτά τα κόπτομεν εις άσπρα ήγουν πολυπλασιάζομεν τα 41 φλουριά που έμειναν με 60 άσπρα που είναι το κάθε φλουρίν, και γίνονται άσπρα 2460 και αυτά πάλιν τα μερίζομεν με τον μεριστήν ήγουν με τα 49 και βγαίνουν εις το κάθε μερτικόν άσπρα 50 και μένουσιν και άσπρα 10 και αυτά κόπτομεν εις φόλες, ήγουν πολυπλασιάζομεν τα 10 που έμειναν με 40 διατί 40 φόλες είναι ένα άσπρο, και γίνονται 400 και αυτά πάλιν τα μερίζομεν με τον μεριστήν, ήγουν τα 49 και βγαίνουν εις το κάθε μερτικόν φόλες 8 και μένουσιν και φόλες 8. ώστεεπήρην ο κάθε άνθρωπος δια το μερτικόν του φλουριά εις 115 άσπρα 50 φόλες 8 και έμειναν τους και 8 φόλες που παίρνει ο καθείς και $\frac{8}{49}$ της φόλας...»

ø					
2					
234					
4781	φλουριά	001	άσπρα	0	φόλες
φλουριά 5676	115	41	2460	50	10 088
4888		60	488		40 408
44	2460			400	49

Το 18^ο κεφάλαιο αναφέρεται στον «Σουμαρισμό και υφειλμό των φλουριών με άσπρα και με φόλες.»

Πριν αναφερθούν συγκεκριμένα παραδείγματα, περιγράφεται γενικά η διαδικασία της πρόσθεσης και αφαίρεσης νομισμάτων με διαφορετική αξία.

«Γίγνωσκε ότι το ένα φλουρίον είναι άσπρα 60 και το ένα άσπρον είναι φόλες 40 και όταν σουμάρης φλουριά, άσπρα και φόλες, εις τας κάθε 40 φόλες κράτιε ένα άσπρον ωςάν κρατείς εις τα δέκα μίαν δεκάδα. ομοίως όταν σουμάρης τα άσπρα εις τα κάθε 60 κράτιε ένα φλουρίν και ποτέ να μην σφάλης.»

«Θετέον αν έχης να υφείλῃς φλουριά και άσπρα και στάμνα. από φλουριά και άσπρα και στάμνα ποιήσον ούτως. ύφειλε τα στάμνα από τα στάμνα. και αν δεν φτάνουν δανείσου ένα άσπρον και τα ύφειλε, και πάλιν ύφειλε τα άσπρα, από τα άσπρα, και αν δεν φτάνουν δανείσου ένα φλουρίν και ύφειλετα. έπειτα ύφειλε και τα φλουριά κατά την τάξιν του υφειλμού.»

Το παράδειγμα που δίνεται στην αφαίρεση είναι: «το λοιπόν λέγομεν εις άνθρωπος εχρεώσται άλλον ανθρώπου φλουρία 6785, άσπρα 46 φόλες 25 και του έφερεν φλουρία 5896 άσπρα 48 φόλες 33 τι χρεωσται να του φέρει ακόμι. στρώνομεν τα ψηφία εις την τάξιν τους ωςάν βλέπεις εις το τέλος της ερμηνείας. έπειτα θέλομεν να βγάλομεν ταις 33 φόλες, από ταις 25 και δεν βολεί, το λοιπόν λέγομεν 33 έως ταις 40 που είναι ένα άσπρον θέλωμεν 7 και 25 τα απάνω ψηφία γίνονται 32 ήγουν 40 φόλες ου είναι το ένα άσπρον και 25 που γίνονται 65 βγάζομεν τα 33 από τα 65 μένουν 32 και κρατούμεν ένα ήγουν εκείνο που εδανειστήκαμεν δια να μην μας δίδει σύγχλησιν,.....»

Στο 19^ο κεφάλαιο δίνεται «με άλλον τρόπον» τη διαδικασία της διαίρεσης, όταν ο διαιρέτης είναι μονοψήφιος αριθμός.

Στο 20^ο κεφάλαιο αναφέρεται στις διαιρέσεις αριθμών με 10, 100 και 1000 και «όσα είναι με νούλες» (μηδενικά), και στις διαιρέσεις αριθμών των οποίων τα τελευταία ψηφία είναι, ένα, δύο ή περισσότερα μηδενικά.

Τα κεφάλαια 21 έως και 46 αναφέρονται στα τζακίσματα (κλάσματα). Συγκεκριμένα:

Στο κεφάλαιο 21 δίνεται ο ορισμός του τζακίσματος με τον ίδιο απλοϊκό τρόπο που δίνονται οι ορισμοί όλων των εννοιών του βιβλίου. «Λέγομεν ότι το τζακίσμα είναι ένα μέρος, ή μέρη του ακεραίου. ήγουν εάν κόψης ένα ακέραιον εις μέρη και απ' αυτά τα μέρη να πάρης τινάς αυτό λέγεται τζακίσμα. ήγουν μέρος.» Με πολλά παραδείγματα δοσμένα με τον γνωστό επεξηγηματικό τρόπο, βοηθάει τον αναγνώστη να καταλάβει την έννοια του κλάσματος.

Είναι προφανές ότι ο Γλυζώνιος, «εξ αιτίας της έλλειψης καθιερωμένης ελληνικής μαθηματικής ορολογίας, αναγκάζεται να αυτοσχεδιάζει για να αποδώσει ελληνικά τους ιταλικούς μαθηματικούς όρους»⁴³⁹

Γ' δὲ τὰ ἡγεῖται τζακισμάτων.

$\frac{1}{2}$ μισόν.	$\frac{1}{7}$ εἷς ἑβδομον.	$\frac{1}{9}$ εἷς ἑννατον.	$\frac{1}{2}$ μισόν.
$\frac{2}{3}$ εἷς τρίτον.	$\frac{2}{7}$ δύο ἑβδομα.	$\frac{2}{9}$ δύο εἷνατα.	$\frac{2}{3}$ καὶ αὐτὸ μισόν.
$\frac{3}{4}$ δύο τρίτα.	$\frac{3}{7}$ τρία ἑβδομα.	$\frac{3}{9}$ τρία εἷνατα.	$\frac{4}{4}$ καὶ αὐτὸ μισόν.
$\frac{1}{5}$ εἷς πένταρον.	$\frac{4}{7}$ πένταρον ἑβδομα.	$\frac{4}{9}$ πένταρον εἷνατα.	$\frac{5}{5}$ καὶ αὐτὸ μισόν.
$\frac{2}{5}$ δύο πένταρα.	$\frac{5}{7}$ πέντε ἑβδομα.	$\frac{5}{9}$ εἷς ἑννατα.	$\frac{1}{10}$ καὶ αὐτὸ μισόν.
$\frac{3}{4}$ τρία πένταρα.	$\frac{6}{7}$ ἕξι ἑβδομα.	$\frac{6}{9}$ ἑπτὰ εἷνατα.	
$\frac{1}{6}$ εἷς ἑξάκωμον.	$\frac{1}{8}$ εἷς ὀγδον.	$\frac{7}{9}$ ὀκτὼ ἑννατα.	$\frac{1}{2}$ εἷς τρίτον.
$\frac{2}{6}$ δύο ἑξάκωμα.	$\frac{2}{8}$ δύο ὀγδοα.		$\frac{2}{3}$ καὶ αὐτὸ εἷς τρίτον.
$\frac{3}{6}$ εἷς τρίτον.	$\frac{3}{8}$ τρία ὀγδοα.		$\frac{4}{4}$ καὶ αὐτὸ εἷς τρίτον.
$\frac{4}{6}$ δύο τρίτα.	$\frac{4}{8}$ πένταρον ὀγδοα.	$\frac{1}{10}$ εἷς δεκακώματον.	
$\frac{5}{6}$ πένταρον ἑξάκωμα.	$\frac{5}{8}$ πέντε ὀγδοα.	$\frac{2}{10}$ δύο δεκακώματα.	$\frac{1}{5}$ εἷς πένταρον.
$\frac{1}{7}$ εἷς ἑβδομον.	$\frac{6}{8}$ ἕξι ὀγδοα.	$\frac{3}{10}$ τρία δεκακώματα.	$\frac{2}{5}$ καὶ αὐτὸ εἷς πένταρον.
$\frac{2}{7}$ δύο ἑβδομα.	$\frac{7}{8}$ ἑπτὰ ὀγδοα.	$\frac{4}{10}$ πένταρον δεκακώματα.	
$\frac{3}{7}$ τρία ἑβδομα.		$\frac{5}{10}$ πέντε δεκακώματα.	$\frac{1}{4}$ εἷς τέταρτον.
$\frac{4}{7}$ τέσσαρα ἑβδομα.		$\frac{6}{10}$ ἕξι δεκακώματα.	$\frac{2}{4}$ καὶ αὐτὸ εἷς τέταρτον.
$\frac{5}{7}$ πέντε ἑβδομα.		$\frac{7}{10}$ ἑπτὰ δεκακώματα.	
$\frac{6}{7}$ ἕξι ἑβδομα.		$\frac{8}{10}$ ὀκτὼ δεκακώματα.	
$\frac{1}{8}$ εἷς ὀγδον.		$\frac{9}{10}$ ὅκτω δεκακώματα.	
$\frac{2}{8}$ δύο ὀγδοα.			
$\frac{3}{8}$ τρία ὀγδοα.			
$\frac{4}{8}$ τέσσαρα ὀγδοα.			
$\frac{5}{8}$ πέντε ὀγδοα.			
$\frac{6}{8}$ ἕξι ὀγδοα.			
$\frac{7}{8}$ ἑπτὰ ὀγδοα.			

Η εισαγωγή στους δεκαδικούς κλασματικούς αριθμούς γίνεται με τον πρακτικότερο δυνατό τρόπο ξεκινώντας από το γεγονός ότι στην Τουρκία μεταχειρίζονται σαν κλάσματα, αποκλειστικά σχεδόν τον 1)2, 1)4, 1)8, 1)400 που εύκολα παίρνουν την μορφή δεκαδικού:

$$1)2=0.5, 1)4=0.25, 1)8=0.125 \text{ κ.τ.λ.}$$

Όσο και αν μας φαίνεται πρωτόγονος και αφελής ο τρόπος αυτός εισαγωγής των δεκαδικών, πρέπει να δεχτούμε ότι για την εποχή που γράφει ο Γλυζώνιος (1518) βρισκόμαστε ιστορικά μπροστά σε μια αναμφισβήτητη πρόοδο. Πραγματικά τα δεκαδικά κλάσματα και η γραφή τους κατά το δεκαδικό θεσιακό σύστημα εισάγονται για πρώτη φορά από τον φλαμανδό SIMON STEVIN (1548-1620) και το σύστημα γραφής που προτείνει⁴⁴⁰ είναι πολύ δύσκολο, ενώ του Γλυζώνιου είναι το ίδιο το σημερινό, αν η εγκάρσια κεραία του Γλυτζούνη που χωρίζει το ακέραιο από το δεκαδικό μέρος αντικατασταθεί με την υποδιαστολή, το κοινό κόμμα. Φυσικά από όσα εκθέτει ο Γλυζώνιος θα ήταν τολμηρό να συμπεράνουμε ότι γνώριζε την θεωρία των δεκαδικών κλασμάτων.⁴⁴¹ Το λογικότερο είναι να δεχτούμε ότι οι Τούρκοι είχαν πάρει από τους Άραβες, κατά τρόπο τελείως πρακτικό, την χρήση των δεκαδικών στις υποδιαίρεσεις του ⁴⁴²μισού, του 1)4, του 1)8 και του 1)400.⁴⁴³

Τα κεφάλαια 22 και 23, αναφέρονται στον σουμαρισμό (πρόσθεση) και υφειλμό (αφαίρεση) τζακισμάτων.

«Ο σουμαρισμός των τζακισμάτων είναι μία μέθοδοςη οποία σουμάρει ήγουν ανταμώνει κάθε τζάκισμα»

«Υφειλμός των τζακισμάτων είναι μία μέθοδος, ...η οποία ξεχωρίζει κάθε τζάκισμα από άλλον. ήγουν ξεχώρισις των τζακισμάτων»

Οι αφαιρέσεις στα κεφάλαια αυτά αφορούν στους μικτούς αριθμούς (ακέραια και τα τζακίσματα), τους οποίους ο συγγραφέας συνιστά να μετατραπούν σε κλάσματα πριν από την εκτέλεση των πράξεων: «κάμε τα μίαν φύσιν, ήγουν κάμε όλα τα ακέραια και τα τζακίσματα, μιας φύσεως τζάκισμα».

Στο κεφάλαιο 22, δίνεται η διαδικασία της μετατροπής ενός μικτού σε ένα κλάσμα, τόσο αναλυτικά, όπως άλλωστε και κάθε διαδικασία του βιβλίου, ώστε να μας θυμίζει σε κάθε βήμα ότι πρόκειται για βιβλίο «άνευ διδασκάλου». Η προσπάθεια του Γλυζώνιου, να μεταδώσει με κάθε τρόπο τα πρακτικής φύσης θέματα που διαπραγματεύεται, είναι εμφανής, και, εάν κρίνει κανείς από τις πολλές επανεκδόσεις του βιβλίου, επιτυχής.

⁴⁴⁰ Βλ. S. Stevin, De Thiende (Η τέχνη των δεκάδων) 1585 καθώς και την αγγλική μετάφραση του Robert Norton το 1608. Το έργο αυτό του Stevin συμπεριλαμβάνεται στο δεύτερο τόμο που φέρει τον τίτλο: The Principal Works of Simon Stevin. Τα έργα του Stevin εξέδωσε ο γάλλος ιστορικός των Μαθηματικών Dirk J. Struik. Auestolan Swets and Zeitliuger 1958.

⁴⁴¹ Για μια εμπεριστατωμένη μελέτη για την ιστορία των κλασμάτων βλέπε, P. Benoit et autres. Histoire des fractions, fraction d' histoire. Birkhauser. Basel 1992.

⁴⁴² Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. F.J. Swetz, "Capitalism and Arithmetic: The new Math. of the 15th century" La Salle II, Open Court 1987.

⁴⁴³ Νίκου Δ. Σωτηράκη, «Μανουήλ Γλυζώνιος και Δωρόθεος Πρόιος» Αθήνα 1973, ανάτυπον εκ της «Χιακής Επιθεωρήσεως». Τεύχος 33^{ον} . Νοέμβριος 1973. σελ 188

Η κορυφή και η ρίζα του τζακίσματος, -εκφράσεις που συναντάμε στα κεφάλαια 22 και 23, είναι ο αριθμητής και ο παρνομαστής αντίστοιχα ενός κλάσματος.

Ο αριθμητής του κλάσματος συνήθως αναφέρεται και σαν «μεριζόμενος ποσός» και ο παρνομαστής σαν «μεριστής», που σημαίνει ότι ο συγγραφέας θεωρεί ότι κάθε κλάσμα παριστάνει μία διαίρεση, με διαιρετέο τον αριθμητή και διαιρέτη τον παρνομαστή του κλάσματος.

$$\begin{array}{r}
 \text{ο } 5'2 \\
 \text{χ' } 38 \mid 17\frac{1}{2} \\
 88 \qquad \frac{1}{4}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 9\frac{1}{2} \qquad 7\frac{1}{4} \text{ ή κορυφή} \\
 \hline
 \frac{19}{2} \quad \times \quad \frac{31}{4} \text{ ή ρίζα.} \\
 \hline
 66 \qquad 62 \\
 \hline
 138 \mid 8 \text{ ο μειζόμενος} \qquad \text{ο μειστής.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 17\frac{1}{4} \qquad 9\frac{1}{2} \qquad 06 \mid \\
 \hline
 69 \quad \times \quad 19 \qquad \text{χ' } 7\frac{6}{8} \text{ ή γυν } \frac{1}{4} \\
 \hline
 4 \qquad 2 \qquad 8 \\
 \hline
 138 \qquad 76 \qquad \text{τα μισά τ' } \frac{6}{8} \text{ είναι } \frac{3}{4} \\
 76 \qquad \text{τα μισά τ' } \frac{6}{8} \text{ είναι } \frac{3}{4}
 \end{array}$$

ο μειζόμενος 062 8 ο μειστής.

Το κεφάλαιο 24, διαπραγματεύεται τον σχισμό (απλοποίηση) των τζακισμάτων. Τον ορισμό, «Σχίσις των τζακισμάτων, είναι μία μέθοδος, η οποία φέρνει τα τζακίσματα από μεγάλην ονομασίαν εις μικρήν», ακολουθούν πέντε παραδείγματα.

Ενδεικτικά θα αναφέρουμε το απλούστερο: «το λοιπόν θέλομεν να φέρομεν τα $\frac{2}{8}$ εις το μικρότερον μέρος, που να εμπορούμεν, και αρχίζομεν και λέγομεν, τα μισά των 2 είναι ένα ήγουν 1 και το γράφομεν και πάλιν λέγομεν τα μισά των 8 είναι 4 και τα γράφομεν και αυτά υποκάτω εις το ένα ωσάν βλέπης $\frac{1}{4}$ και αυτό λέγεται ένα τέταρτον»

Στο 25^ο κεφάλαιο, δίνεται, «Ετέρα μέθοδος του σχισμού, και πλέον βεβαιωτέρα», στην οποία περιγράφεται μία γενική διαδικασία της απλοποίησης κλασμάτων: «Τούτη η άλλη μέθοδος του σχισμού είναι ο καθολικός τρόπος της τέχνης.»

Σαν γενική μέθοδο απλοποίησης, όταν ο Μ.Κ.Δ. των όρων δεν είναι φανερός όπως στο παράδειγμα του 4^{ου} κεφαλαίου, ακολουθεί τον αλγόριθμο του Ευκλείδη, δηλαδή την εύρεση του Μ.Κ.Δ με την μέθοδο των υπολοίπων από διαδοχικές διαιρέσεις

Στα κεφάλαια 26 και 27 περιγράφονται η πρόσθεση και η αφαίρεση μικτών αριθμών, με διαφορετική διαδικασία.

Το κεφάλαιο 28, «Έτερος σουμαρισμός δύο τζακισμάτων», αναφέρεται στην πρόσθεση κλασμάτων. Η περιγραφή της μετατροπής των κλασμάτων σε ομώνυμα και στη συνέχεια η πρόσθεσή τους δίνεται ως εξής: «...στρώσε τα τζακίσματα ωσάν βλέπεις εις το τέλος της ερμηνείας. έπειτα πολυπλασίασον του δεξιού χεριού του τζακίσματος την ρίζαν, με του ζερβού χεριού, την κορυφήν. ομοίως πάλιν πολυπλασίασε του ζερβού χεριού την ρίζαν, με του δεξιού χεριού την κορυφήν, και είτι εύγουν τα σουμάρισε. Έπειτα μέρισε. και ο μεριστής βγαίνει πολυπλασιάζοντας ταις δύο ρίζαις...»

Στο κεφάλαιο 29, περιγράφεται ένα παράδειγμα αφαίρεσης μικτών αριθμών και η δοκιμή του.

Στο κεφάλαιο 30 αναφέρεται η πρόσθεση τριών κλασμάτων, με δύο τρόπους.

Στο πρώτο παράδειγμα που δίνεται, προσθέτει πρώτα τα δύο κλάσματα και στο άθροισμά τους προσθέτει το τρίτο, ενώ στο δεύτερο, μετατρέπει πρώτα τα τρία κλάσματα σε ομώνυμα και στην συνέχεια τα προσθέτει.

Στο κεφάλαιο 31 δίνεται η πρόσθεση μικτών αριθμών, χωρίς να μετατρέπεται πρώτα ο μικτός σε κλάσμα, όπως γίνεται στο 22^ο κεφάλαιο.

Εδώ, περιέχεται ένας διάλογος, που θα μπορούσε να γίνει ανάμεσα σε μαθητή και στον δασκαλό του, μέσω του οποίου, δίνεται απάντηση σε ένα εύλογο ερώτημα του μαθητή:

Ερώτησις: «Και διατί έμπροσθεν εδιδάχθημεν ότι όλα να τα αναλύομεν, έπειτα να σουμάρωμεν. και τώρα λέγεις ότι δεν κάμνει χρεια να αναλύομεν ουδένα ακέριον μόνο να σουμάρωμεν τα τζακίσματα.

Απόκρισις: «Ηξευρε ότι εκείθεν το είπαμεν δια να καταλάβη ο κάθε εις την φύσιν της και ούτως διδάσκουσι και οι διδάσκαλοι τους μαθητάς, δια να λεπτύνεται ο νούς αυτών μα εις ευκολίαν είναι περίττου εύκολος τούτος. μα τόσον είναι ο εις ωσάν και τον άλλον.»

Με την απάντησή του, ο συγγραφέας, δίνει ένα μήνυμα στον αναγνώστη για τον ρόλο των μαθηματικών, «να λεπτύνεται ο νους», και ταυτόχρονα χρησιμοποιεί τον διάλογο τον οποίο αυτός επινόησε, σαν μέσο διδασκαλίας, για την καλύτερη κατανόηση μιας διαδικασίας

Στα κεφάλαια 33 έως και 46 περιγράφονται οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις μεταξύ δύο κλασμάτων, δύο μικτών, μικτού και κλάσματος, κλάσματος και ακεραίου, μικτού και ακεραίου, καθώς και οι δοκιμές των πράξεων αυτών.

Μετά τους ορισμούς και την περιγραφή της διαδικασίας, την κάθε περίπτωση ακολουθούν πολλά παραδείγματα και προβλήματα που αφορούν οικονομικές δοσοληψίες της καθημερινής ζωής.

- Θετέον λέγομεν ότι αγοράσαμεν πήχες πανί 245 προς 2/3 του άσπρου την κάθε πήχην τι χρεωστούμεν να δώσωμεν.
- Ομοίως λέγομεν, ότι αγοράσαμεν λίτρες κερί 18 ¼ προς άσπρα 5 την κάθε λίτρα, τι χρεωστούμεν να πληρώσωμεν.
- Θετέον λέγομεν ότι έχομεν άσπρα 367 και θέλομεν να αγοράσωμεν πανί προς άσπρα 6 ½ την κάθε πήχην, πόσες πήχες πανί θέλομεν πάρει.
- Έχομεν άσπρα 6578 ½ και θέλομεν να τα αλάξομεν εις τόσα φλουρία από άσπρα 56 1/8 ήγουν τρία κουκκία εις το κάθε φλουρίν, πόσα φλουρία θέλομεν πάρει.

Στο κεφάλαιο 43 μετά τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων, 1/4 και 3/8 σημειώνει για το αποτέλεσμα, το 1/32. «Είναι τινές οπου έχουν διστασιν εις τον πολλαπλασιασμόν των δύο τζακισμάτων έσοντας ότι όταν πολλαπλασιάζουσιν τζάκισμα με άλλο τζάκισμα ολιγοστεύει πολλά. και όσοι δεν ηξεύρουں την θεωρίαν της μεθόδου λέγουσι, ότι αυτή η μέθοδος δεν είναι σωστή».

Για να λύσει την αμφιβολία που γεννιέται από το γεγονός ότι το 1/32 είναι μικρότερο από το 1/4 και από το 3/8, μετά τον ισχυρισμό, « εάν δεν ήτον σωστή δεν ήθελαν την έχουν οι παλαιοί ουδέ οι διδάσκαλοι ημών», προσπαθεί εκτενώς, μέσα από ένα παράδειγμα, να δικαιολογήσει πώς γίνεται το γινόμενο δύο κλασμάτων να είναι μικρότερο από καθένα από τα κλάσματα αυτά.

Παρατηρείται δηλαδή, ίσως για πρώτη φορά στο βιβλίο, να δικαιολογείται, έστω και μέσα από παράδειγμα, η αμφιβολία του αναγνώστη.

Όπως συνηθίζεται από τον συγγραφέα, στα κεφάλαια 45 και 46 δίνεται η διαδικασία του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων, «με άλλον τρόπον»

Άλλος διάλογος, δίνεται στο κεφάλαιο 46.

Ερώτησις: Δύναται αυτή η μέθοδος να πολλαπλασιάσει κάθε τζάκισμα, και διατί δεν αναλύουσι τα ψηφία να τα κάμουν μιας φύσεως. αμή προσθένουν δια του μισού,....

Απόκρισις και λύσις της αυτής μεθόδου: Λέγομεν δε ούτως.....

Και πάλι δικαιολογείται εκτενώς μέσα από ένα παράδειγμα η ερώτηση. Ιδιαίτερα τονίζονται πράξεις μεταξύ μικτών αριθμών των οποίων τα κλάσματα είναι ½, ¼, 1/8 «επειδή εις τον τόπον της τουρκίας δεν πολιτεύονται άλλα τζακίσματα μόνον μισό, και τέταρτον, και όγδοον»

Τα κεφάλαια 47 έως και 56, αναφέρονται στην μέθοδο των τριών. Στην αρχή, πληροφορείται ο αναγνώστης, ότι «Η λεγομένη μέθοδος των τριών, είναι πρώτη μέθοδος και κυρία πάντων των μεθόδων», και στην συνέχεια, δίνονται οδηγίες για την κατάταξη των δεδομένων και για την διαδικασία που ακολουθείται κατά την εφαρμογή της μεθόδου.

Με πολλά προβλήματα, καλύπτονται, αρκετές δοσοληψίες της καθημερινής ζωής στις οποίες μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των τριών.

- Λέγομεν, εάν με 6 φλουρία αγόρασα 9 πήχες καμουχάν με τέσσερα φλουρία πόσον ήθελα αγοράσει
- Εις άνθρωπος επούλησε ένα πανί σκαρλάτον, και εβγήκαν πήχες 45 και είχασιν

σιασμόν ότι εις ταις κάθε 13 πήχες να του δίδη φλουρία 22 τι έχει να λάβη δια ταις 45 πήχες

- Εις άνθρωπος αγόρασεν ρούπια καμουχάν 5 ήγγουν πέντε όγδοα, προς 75 άσπρα, την κάθε πήχην, τι χρεωστεί να πληρώση
- Μία λίτρα ρεομπάρπαρον αξίζει φλουρία 2 άσπρα 15 τι ήθελον αξίζει λίτρες 13 ογγίαις 7
- Άνθρωπος επούλησεν κερι καντάρια 15 και λίτρες 84 προς άσπρα 326 το κάθεν καντάρι πόσον έχει να πάρη. πλήν να βγάλη δια τάρα 7 λίτρες εις ταις κάθε 100
- Λίτρες 2 δράμια 75, μας έδωσαν φλουρία 4 άσπρα 45 τι θέλουν μας δώσουν αι λίτραις 13 και δράμια 94
- Άνθρωπος επούλυσεν κερι καντάρια 15 και λίτρες 84 προς άσπρα 326 το κάθεν καντάρι πόσον έχει να πάρη. πλήν να βγάλη δια τάρα 7 λίτρες εν ταις κάθε 100
- Άνθρωπος τις αγόρασεν ελίας καντάρια 12 και λίτραις 70 προς άσπρα 87 το κάθεν καντάριν και θέλης να εύρης τι χρεωστεί να πληρώση.

Για τη δοκιμή της μεθόδου των τριών, η οποία ακολουθεί κάθε πρόβλημα, ο συγγραφέας γράφει: «Ηξευρε ότι η δοκιμή πάντοτε της μεθόδου των τριών γίνεται το ανάπαλι», ενώ μέσα από ένα διάλογο με ερώτηση και απάντηση, εξηγεί στο κεφάλαιο 47, απορία την οποία θα μπορούσε να έχει διατυπώσει ο αναγνώστης.

Το κεφάλαιο 54 αναφέρεται στην «Μέθοδο των τριών με τζακίσματα»

Πάλιν λέγουμν 17 πήχης παλι, έχουμν άσπρα 49 $\frac{1}{2}$ αμή πήχης 8 $\frac{1}{2}$ τί-
σα άσπρα ηθίλει έχει βάζομν καί πάλι εις τώ μίθοδον τήν τελών ωσαύ- Παράδειγ-
μα, β.
βλίπεις εις τή. Εαί αι 17 — 49 $\frac{1}{2}$ — 8 $\frac{1}{2}$ ο

ψήφια, καί άσπρα 24
φόλις, ο $\frac{116}{17}$
ήγουμν $\frac{1}{17}$ ώσαι
βλίπεις εις τή
ψήφια.

$$\begin{array}{r} 17 \times 99 = 33 \\ 1 \quad 2 \quad 4 \\ \hline 17 \quad 99 \\ 8 \quad 33 \\ \hline 136 \text{ ο μινεισής. } 297 \\ 297 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \alpha\sigma\beta \\ \alpha\sigma\beta\gamma \\ \beta\sigma\alpha\gamma \\ \alpha\beta\beta\sigma \\ \beta\beta \\ \hline 40 \quad 120 \\ 3 \quad 136 \end{array}$$

ο μινειζόμνος. 3267
Καί πάλιν ιαί αι 15 $\frac{1}{2}$ λίτρας μαζι δώσαι άσπρα 25 αι 9 $\frac{1}{2}$ λίτρας τι θά- Παράδειγ-
λυν μαζι δώσω. άγνηται εις τή ψήφια άσπρα 15 φόλις, 19 $\frac{1}{11}$ μα, γ.

λίτρας άσπρα λίτρας
ιαί αι 15 $\frac{1}{2}$ — 25 — 9 $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r} 31 \times 25 = 29 \\ 2 \quad 1 \quad 3 \\ \hline 31 \quad 29 \\ 3 \quad 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 93 \text{ ο μινεισής. } 145 \\ 58 \\ \hline 725 \\ 2 \\ \hline 1450 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 0\sigma\alpha\beta \\ \alpha\sigma\beta\gamma \\ \beta\sigma\alpha\gamma \\ \alpha\beta\beta\sigma \\ \beta\beta \\ \hline 15 \frac{1}{11} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ 8\sigma \\ 0\sigma\alpha\beta \\ \alpha\sigma\beta\gamma \\ \beta\sigma\alpha\gamma \\ \alpha\beta\beta\sigma \\ \beta\beta \\ \hline 45 \\ 40 \\ \hline 1800 \end{array}$$

Στα κεφάλαια 55 και 56 αναφέρεται η «Μέθοδος των τριών η λεγομένη ανάταλι» με ακεραίους και με κλάσματα. Σύμφωνα με τον συγγραφέα, η ονομασία της οφείλεται στο ότι ενώ «η μέθοδος των τριών πολυπλασιάζει τα δεύτερα ψηφία με τα τρίτα, και μερίζει με τα πρώτα. η αυτή δε έχει το ανάταλι, ήγουν πολυπλασιάζει τα πρώτα ψηφία με τα δεύτερα, και μερίζει με τα τρίτα.»

Τα προβλήματα τα οποία λύνονται για την κατανόηση της μεθόδου είναι:

- Όταν επουλείτον το σιτάριν ή το αλεύριν ασπρα 60 το κάθε φορτίον.ε εις το άσπρον 550 δράμια ψωμί τώρα πουλείται το φορτίον άσπρα 45 πόσα δραμία ψωμί τυχαίνει να έχη εις το κάθε άσπρο
- Πρώτα είχαν η λίτρα το κερί άσπρα 5 και δια τούτο επουλιέτον 18 δράμια εις το άσπρο. τώρα έχει η λίτρα το κερί άσπρα 3 πόσα δράμια τυχαίνει να πουλιέται εις το κάθε άσπρο
- Όταν επουλιέτο η ζάχαρη άσπρα $6\frac{1}{2}$ η κάθε λίτρα είχαν εις το κάθε άσπρον, δράμια $12\frac{1}{4}$ τώρα έχει άσπρα $5\frac{1}{3}$ πόσα δράμια τυχένει να έχει εις το κάθε άσπρο.

78

τὸν μειζόμενον, πὶ 1911 μὲ τ μειζώ ἤγη πὶ 128 κὶ δίνων 14 $\frac{1}{11}$

καὶ πόσα
δράμια
τυχαίνει
τὸ κάθε
άσπρον ὡ-
σὰ βλί-
πεις καὶ
εἰς τὰ ψη-
φία.

$$\begin{array}{r}
 6\frac{1}{2} \quad 12\frac{1}{4} \quad 5\frac{1}{2} \\
 \hline
 13 \quad 49 \quad 16 \\
 2 \quad 4 \quad 3 \\
 \hline
 13 \quad 16 \\
 49 \quad 8 \\
 117 \text{ ὁ μειζὸς } 128 \\
 52 \\
 637 \\
 3 \\
 \hline
 \text{ὁ μειζόμενος } 1911
 \end{array}$$

1
21
68
0789
2888
14 $\frac{1}{11}$

Στο κεφάλαιο 57, η «Μέθοδος των ε'» δίνεται μέσα από το παράδειγμα: «εις άνθρωπος με φλουρία 28 εις ημέρας 12 εκέρδησε φλουρία 8 άλλος με φλουρία 35 εις ημέρας 16 τι ήθελεν κερδίσει

Στο κεφάλαιο 58, «Μέθοδος των ς' με τζακίσματα» μετά την γενική περιγραφή της μεθόδου από τον συγγραφέα, ακολουθεί το πρόβλημα: «λέγομεν ότι 6 συντρόφοι εις μήνας $12\frac{1}{2}$ εκέρδισαν φλουρία $25\frac{1}{2}$, αμέ αν ήθελαν μαζοχθή συντρόφοι 10 τι ήθελαν κερδήση εις μήνες $15\frac{1}{2}$

Στα κεφάλαια 60 και 61 περιγράφεται «η μέθοδος των ζ΄» με ακεραίους και με κλάσματα. Τα προβλήματα που λύνονται για την κατανόηση της μεθόδου είναι:

- Άνθρωποι 8 με φλουρία 25 εις μήνας 40 εκέρδισαν φλουρία 12 αμή άνθρωποι 9 με φλουρία 50 εις μήνας 35 τί ήθελαν κερδήσει
- Θετέον λέγομεν άνθρωποι 6 εις μήνας $17 \frac{1}{2}$ με φλουρία $11 \frac{1}{3}$ εκέρδισαν φλουρία $8 \frac{1}{4}$ αμή άνθρωποι 4 εις μήνας $13 \frac{1}{2}$ με φλουρία $42 \frac{2}{3}$ τί ήθελαν κερδέσει

Τα κεφάλαια 62 έως και 75 αναφέρονται στις «συντροφίες». Κάθε κεφάλαιο αποτελείται από ένα πρόβλημα με την λύση του και την δοκιμή του. Για τις λύσεις των προβλημάτων αυτών εφαρμόζεται η μέθοδος των τριών.

Συγκεκριμένα, τα προβλήματα σε καθένα από τα κεφάλαια αυτά είναι:

Κεφάλαιο 62: «Αρχή των συντροφιών»

- Θετέον αν οι τρεις έκαμαν συντροφίαν, και ο πρώτος έβαλεν φλουρία 45 και ο
- δεύτερος 56 και ο τρίτος 48 και αυτά τα ένδυσαν εις πραγματείαν και εκέρδισαν
- φλουρία 78 ερωτώσι πόσον διάφορον εγγίζει του καθ' ενός δια το μερτικόν του

πρώτος	78	45	x	δύττος	78	56	x
Ε' αὐτὸ 149	78	45	x	Ε' αὐτὸ 149	78	56	x
	45		28		56		2
α. 45	390		03x		408		44
β. 56	312		27x3	πρώτος 390	23x		23x
γ. 48	3510		28x28	23x	4368		2887
ὁ μίρ. 149			24x28		0		4368
			2x		2		2x
Τρίτος. αὐτὸ 149	78	48		οὗτος			29x
	48				07x		25x
23	83		624	28x9			25x
29	47		312	27x4			25x
25	19		3744	28x28			25x
ἡ δοκιμή 78	149			2x			

Κεφάλαιο 63: «Έτερα συντροφία εις άλλον τρόπον»

- Τρεις έκαμαν συντροφίαν, εις την οποίαν συντροφίαν ο πρώτος έβαλεν άσπρα 356 και ο δεύτερος έβαλεν άσπρα 478 και ο τρίτος δεν ηξεύρω πόσα έβαλεν, εκέρδισαν δε άσπρα 578 και απ' αυτά τα άσπρα επήρην ο τρίτος τα 145. Ερώτησε

πόσα άσπρα έβαλεν και αυτός και τι εγγίζει του καθ' ενός του πρώτου, και του δεύτερου.

Κεφάλαιο 64: «Ετέρα συντροφία με μήνες»

- Άνθρωποι τρεις έκαμαν συντροφίαν, και ο πρώτος έβαλε φλουρία 20 και εστάθην μήνας 4 και ο δεύτερος έβαλεν φλουρία 40 και εστάθην μήνας 5 και ο τρίτος έβαλεν φλουρία 50 και εστάθην μήνας 6 και εις το τέλος της συντροφίας εκέρδησαν φλουρία 120 και θέλω να μάθω τι εγγίζει του καθ' ενός δια το μερικόν του.

Κεφάλαιο 65: «Ετέρα συντροφία και αυτή με μήνας»

- Τρεις έκαμαν συντροφίαν και ο πρώτος έβαλεν φλουρία 35 και εστάθην μήνας 8 και ο δεύτερος έβαλεν φλουρία 40 και εστάθην μήνας 9 και ο τρίτος έβαλεν φλουρία 50 και εστάθην μήνας 6 και εκάμαν συμφωνίαν ότι όσον καιρόν στάθην να πέρνη εις λογαριασμόν 10 εις τα κάθε 100 από την μέσην. και εις το τέλος της συντροφίας εκέρδισαν φλουρία 60. θέλω να μάθω τι τυχαίνει του καθ' ενός.

Κεφάλαιο 66: «Συντροφία των δουλευτάδων»

- Άνθρωποι πέντε έκαμαν συντροφίαν ήγουν δουλευτάδες. Και αυτοί επήγαν και έκαμαν σιασμόν με έναν άνθρωπο να δουλεύσουν έναν μύναν εις το αμτέλιν του και να τους δώση άσπρα 600 και ο μεν πρώτος εργάτης εδούλευσεν ημέρας 10 έπειτα εμίσειπεν. ο δεύτερος εδούλευσεν ημέρας 15 και ασθένησε και πλέον δεν εδούλευσεν. ο τρίτος εδούλευσεν ημέρας 20 έπειτα δεν εδούλευσε πλέον. Ο ο τέτερτος εδούλευσε ημέρας 25 και ο πέμπτος εδούλευσε και ταις 30 σωσταίς, θέλω να μάθω πόσα εγγίζει του καθ' ενός να πάρη δια ταις ημέραις που εδούλευσεν και να μην ευρεθή γελασμένος και ο αυθέντης του αμπελίου.

Κεφάλαιο 67: «Ετερα συντροφία και αυτή εργάτων»

- Άνθρωποι πέντε επήγαν και ιύραν έναν άνθρωπον και εσιάστηκαν να του δουλεύσουν ένα περιβόλιν. και να τους δώσει δια τον κόπον τους άσπρα 300 και ούτως ήρχησαν και εδούλευαν. και ο μεν πρώτος εδούλευσεν ημέρας 15 και ο δεύτερος εδούλευσεν ημέρας 20. και ο τρίτος εδούλευσεν ημέρας 23 και ο τέταρτος εδούλευσεν ημέρας 25. και ο πέμπτος εδούλευσεν ημέρας 27 ερωτώ σε πόσον εγγίζει του καθ' ενός

Κεφάλαιο 68: «Μοιρασία ζημίας»

- Τρεις άνθρωποι εδάνησαν ενός ανθρώπου στάμνα. Και ο πρώτος του έδωσεν φλουρία 137 και ο δεύτερος του έδωσεν φλ. 98 και ο τρίτος του έδωσεν 45 όμως εκείνος τα επήρε και επήγε εις πραγματίαν με καράβι και επνίγη και εκείνος, και το καράβιν. τότε οι δανεισταί θέλοντες να πληρωθούν επούλησαν τα τίποτες του οσπιτίου του, και εμάζοξαν μόνο φλωρία 142 ήγουν ολιγότερα παρά τα φλωρία που του εδάνεισαν. θέλω να μάθω πόσα τυχένει τον καθένα να πάρη από τα 142 φλ. Και τι τυχένει να χάση

Κεφάλαιο 69: «Ετέρα συντροφία δύο στρατιωτών»

- Θετέον λέγομεν ότι δύο στρατιώται ήγουν σπαχίδες έχουν ένα χωρίον, και ο ένας έχει σιτηρέσιον φλουρία 225 και ο άλλος έχει 175 εμαζώξαν γούν το σώδημα του χωρίου και βγήκαν φλουρία 425 θέλω να μάθω τι εγγίζει να πάρη ο καθ' ένας δια το μερδικόν του

Κεφάλαιο 70: «Συντροφία με τζακίσματα»

- Τρεις άνθρωποι έκαμαν συντροφίαν, και ο μεν πρώτος έβαλεν δουκάτα $25 \frac{1}{2}$ ο δε δεύτερος $32 \frac{2}{3}$ και ο τρίτος $45 \frac{1}{4}$ και εις το τέλος της αυτής συντροφίας εκέρδησαν δουκάτα $35 \frac{2}{5}$. θέλω να μάθω πόσα τυχαίνει του κάθε ανθρώπου, δια τα δουκάτα που έβαλεν.

Κεφάλαιο 71: «Ετέρα συντροφία με τζακίσματα»

- Τρεις έκαμαν συντροφίαν. και ο πρώτος έβαλεν φλουρία $15 \frac{1}{2}$ και ο δεύτερος έβαλεν φλουρία $24 \frac{2}{3}$ και ο τρίτος έβαλεν φλουρία $40 \frac{1}{4}$ και αυτοί εκέρδησαν φλουρία 35. θέλω να μάθω τι τυχαίνει του καθ' ενός να πάρη δια τα φλουρία που έβαλεν.

Κεφάλαιο 72: «Μοιρασία σταμνών εις συντρόφους»

- Τρεις άνθρωποι έχουν να μοιράσουν δουκάτα 100 και ο πρώτος ζητά τα ήμισυ, και ο δεύτερος ζητά το ένα τρίτον, και ο τρίτος το ένα τέταρτον. θέλω να μάθω τι εγγίζει του κάθε ανθρώπου.

Κεφάλαιο 73: «Ετερος μερισμός άλλης συντροφίας»

- Δύο έχουν να μοιράσουν φλουρία 100 και ο πρώτος ζητά τα $\frac{2}{3}$ και περισσότερα 6 ομοίως, και ο δεύτερος ζητά τα $\frac{3}{4}$ και περισσότερα 4 θέλω να μάθω τι εγγίζει του καθ' ενός.

Κεφάλαιο 74: «Ετερα ομοία της αυτής»

- Δύο άνθρωποι έχουν να μοιράσουν φλουρία 100 και ο πρώτος ζητεί τα $\frac{1}{2}$ και περισσότερα 4 ο δε δεύτερος ζητεί τα $\frac{2}{3}$ και ολιγότερα 6 θέλω να μάθω πόσα έχει να πάρη ο κάθε εις.

Κεφάλαιο 75: «Ετερα μοιρασία»

Είναι τρεις άνθρωποι και αυτοί εμοίρασαν στάμνα. δεν ηξεύρω πόσα ουδέ ξεύρω πόσα επήρην ο καθ' ένας. μόνον τούτο λέγουν ότι απ' ότι επήρην ο πρώτος, επήρην ο δεύτερος τα μισά και απ' όσα επήρην αντάμα ο πρώτος και ο δεύτερος επήρην ο τρίτος τα ήμισυ, και αυτουνού είναι το μερτικόν του 50. θέλω να μάθω, πόσα στάμνα εμοίρασαν, και πόσα επήρην ο πρώτος και πόσα ο δεύτερος.

Στο κεφάλαιο 76: «Περί που να προσθένης νούλες και που να κόπτης», εφαρμόζεται η μέθοδος των τριών σε κάποια προβλήματα που περιέχουν αριθμούς 10, 100, 1000, ... σαν εναλλακτική διαδικασία, της μεθόδου λύσης, η οποία προτείνεται από τον συγγραφέα για τα προβλήματα αυτά, στο κεφάλαιο 12. Ενδεικτικά αναφέρουμε κάποια από αυτά

- Άνθρωπος αγόρασεν 100 πήχες πανί από 20 άσπρα κάθε 7 πήχες, θέλω να μάθω τι χρεωστεί να δώση.

- Άνθρωπος αγόρασεν λεμόνια 1000 και αυτός έκαμεν σιασμόν ότι εις τα κάθε 45 λεμόνια να πληρώση άσπρα 6 τι χρεωστή να πληρώση
- Άνθρωπος πουύλιση λίτραις κερι 375 προς άσπρα 545 ταις 100 λίτρες πόσον χρεωστή να πάρη

Τα επόμενα δέκα κεφάλαια, 77 έως και 87, περιέχουν προβλήματα με τις λύσεις τους καθώς και τις δοκιμές των πράξεων που περιέχουν. Τα προβλήματα, λύνονται με την εφαρμογή της μεθόδου των τριών, και είναι εντυπωσιακό το εύρος των θεμάτων τα οποία διαπραγματεύονται, ώστε να γίνεται ακόμα μια φορά φανερή η πρόθεση του συγγραφέα, να βοηθήσει τον απλό λαό στις οικονομικές δοσοληψίες της καθημερινής του ζωής.

Ενδεικτικά θα αναφέρουμε ένα ή δύο παραδείγματα από κάθε κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 77: «Περί κουμερκίου» (ίσως ταρίφα)

- Ένας άνθρωπος είχεν μίαν σκάλαν της θαλάσσης, και έπερνεν άσπρα 5 τα κάθεν 100. ήλθεν ένα καράβιν και είχεν πραγματίαν πολλήν όσον ετιμήθημ άσπρα 277850. θέλω να μάθω τι έχει να πάρη δια κουμέρκιν
- Εάν αι 1000 λίτρες έχουν κουμέρκι άσπρα 45 η 5784 πόσον έχουν

Κεφάλαιο 78: «λογαριασμοί τινές δια το διάφορον της πραγματείας»

- Είς άνθρωπος αγόρασεν ένα πανί δια φλουριά 70 και το πανί ευγήκεν πήχες 54. πόσον ήθελεν πουλεί δια να κερδαίνη 20 τα κάθεν 100

78 60 4680	Ε'α'τ'α' 03 86 1/2 4680 844 8	100 — 120 3 300	86 1/2 260 120 5200 260 31200	0 840 31200 30800 308 3	
------------------------	---	-----------------------------	--	--	--

Πα

- Εάν τινάς πουύλιεν δια 15 εκέρδενεν 5 τα κάθεν 100 πάλιν ξαναπολή δια 14 θέλω να μάθω τι χάνη, ή τι κερδίζει

Κεφάλαιο 79: «Περί αλλαξιών» (ανταλλαγών). Με τα πολλά προβλήματα (δέκα συνολικά) που διαπραγματεύεται ο συγγραφέας στο κεφάλαιο αυτό, προσπαθεί να βοηθήσει τους υπόδουλους στις ανταλλαγές των προϊόντων, που όπως φαίνεται, ήταν πολύ συνηθισμένο φαινόμενο στα χρόνια της τουρκοκρατίας. Βήμα- βήμα, ο Γλυζώνιος, υποδεικνύει στον αναγνώστη πώς πρέπει να σκεφτεί, ώστε να μην χάσει από ανταλλαγή.

- Δύο άνθρωποι θέλουν να κάμουν αλλαξία και ο ένας έχει καμουχά πήχες 240 και ο άλλος έχει βαμπάκιν. Και του πρώτου ο καμουχάς αξίζει η κάθε πήχη άσπρα 50

και την βάζει εις την αλλαξίαν άσπρα 60. θέλει και το τρίτον της πραγματίας όλης εις μετριτόν, του δε δευτέρου το μπαμπάκι, αξίζει η 100 λίτρες, άσπρα 300. θέλω να μάθω τι εμπορή να βάλη και αυτός ταις 100 λίτρες εις την αλλαξίαν και πόσον μπαμπάκι έχει να δώση. Και πόσα μετρητά, δια το τρίτον να πάρη ταις 240 πήχες τον καμουχά.

- Δύο έχουν να κάμουν αλλαξία. Και ο πρώτος έχει σταφίδες, και ο δεύτερος αμπάδες. αι σταφίδες αξίζουν εις μετριτόν άσπρα 40 το καθέν καντάρι. και αυτός θέλει άσπρα 60. του δευτέρου οι αμπάδες αξίζουν άσπρα 14 εις μετριτόν, και αυτός θέλει να τον βάλη άσπρα 30 εις την αλλαξία, θέλω να μάθω τις απ' αυτούς τους δύο ήθελε κάμει καλύτερη πούλησιν, και τι είχε να ζητήσει μετριτόν εκείνος οπου χάνει δια να μην γελασθεί.

Κεφάλαιο 80: «Έτερος λογαριασμός και αυτός της πραγματίας»

- Εις άνθρωπος αγόρασεν σκαρλάτο πανί πήχες 24 δεν ηξεύρω δια πόσον. μόνο τούτο λέγει, ότι απ' αυταίς ταις 24 πήχες, επούλησεν το ήμισον και πήχες 4 περισσότερες. δια φλουρία 24 έπειτα έκαμεν λογαριασμόν και ευρίσκει ότι ουδέ εκέρδισεν ουδέ έχασεν. θέλω να μάθω πόσα φλουρία είχαν κεφάλαιο ναι 24 πήχες

Κεφάλαιο 81: «Περί διαφοράς πανίων»

- άνθρωπος αγόρασεν τζόχα πήχες 3 ½ δια να κάμη ένα ρούχον. Και αυτή η τζόχα είτον εις το πλάτος πήχες δύο και όγδοα δύο. θέλει γουν να πάρει και να το ενδύση, και ευρίσκει ένα πανί και είναι εις το πλάτος μία πήχυν και τρία όγδοα, ήγουν 3/8 πόσον πανί να πάρη εις αναλογίαν της άνωθεν τζόχας.
- Άλλος άνθρωπος θέλει να κάμη ένα φόρεμα και ελθών εις ένα εργαστήριον ευρήκεν δύο λογιών μεταξοτά ήγουν 'ράζον, και καμουχάν και το μεν 'ράζο είναι εις το πλάτος μία πήχυν και η κάθε πήχυν έχει άσπρα 40 ο δε καμουχάς είναι εις το πλάτος μία πήχυν και τρία όγδοα ήγουν 1 3/8 και έχει η τιμή της κάθε πήχους άσπρα 52. είπεν του δε και ο μάστορης ότι εάν πάρη από το 'ράζο του κάνει πήχες 10 δια το φόρεμα. τόρα ζητεί να μάθη πόσον καμουχάν χρειάζεται εις αναλογίαν των 10 πήχων του 'ράζου

Κεφάλαιο 82: «Περί των ταξιδίων»

- Εις άνθρωπος επήγεν εις το ταξίδι με στάμνα. και επραγματεύτη τα οποία στάμνα δεν λέγει πόσα ήσαν μόνον τούτο λέγει, ότι έκαμεν δύο ταξίδια, και εις το πρώτιν edίπλασεν τα στάμνα του. Εις δε το δεύτερον εκέρδησεν 20 εις τα καθέν 100 έπειτα τα εμέτρησεν όλα αντάμα και ευρέθησαν 2600. θέλω να μάθω με πόσα άσπρα ευγήκε.
- Άνθρωπος έκαμεν τρία ταξίδια, και εις το πρώτον edίπλασεν τα φλουρία που είχαν, και απ' αυτά εξόδευσεν φλουρία 8 εις δε το δεύτερον ταξίδιον τα edίπλασεν πάλιν και απ' αυτά εξόδευσεν 10 και εις το τρίτον εκέρδησεν εις κάθε τρία ένα, ήγουν τα 3 έκαμεν 4. έπειτα τα εμέτρησεν και ευρέθησαν φλουρία 12. θέλω να μάθω πόσα φλουρία είχαν εις την αρχήν

Κεφάλαιο 83: «Περί διαφοράς δρόμου καραβίων, και ολάκιδων και στρατοκόπων»

- Ένα καράβι εκίνησεν από τον λιμένα δια να υπάγῃ εἰς ἄλλον τόπον, καὶ ἔκαμε 9 μίλια τὴν ὥρα. Καὶ ὅταν ἔκαμε 45 μίλια εὐγήκεν ἄλλο καράβι καταπόδι τοῦ ἀπ' αὐτόν τὸν λιμένα, καὶ αὐτὸ ἔκαμνε 12 μίλια τὴν ὥρα. ζητῶ νὰ μάθω εἰς πόσας ὥραις, καὶ εἰς πόσα μίλια ἤθελε το φθάσει
- Ένας σολάκης υπάγει ἀπὸ τὴν πόλιν εἰς τὸν αὐλῶνα, δια ἡμέρας 17 καὶ ἄλλος σολάκης υπάγει ἀπὸ τὸν αὐλῶνα εἰς τὴν πόλιν δια ἡμέρας 20. το λοιπὸν αὐτοὶ οἱ δύο ἐμίσευσαν μίαν ἡμέραν καὶ μίαν ὥραν, ο εἰς ἀπὸ τὴν πόλιν καὶ υπάγει εἰς τὸν αὐλῶνα. Καὶ ὁ ἄλλος ἐμίσευσεν ἀπὸ τὸν αὐλῶνα καὶ υπάγει εἰς τὴν πόλιν. θέλω νὰ μάθω εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελαν ἀνταμωθεῖ, αὐτοὶ οἱ δύο.

Κεφάλαιο 84: «Ετέρα στρώσις τῶν ψηφίων τῆς μεθόδου τῶν 5 περὶ τῆς δοκιμῆς αὐτῆς δια τῆς μεθόδου τῶν τριῶν»

- Ἀνθρωποὶ 4 εἰς μῆνας 5 ἐκέρδησαν φλουρία 10. ἀμὴ ἄνθρωποι 6 εἰς μῆνας 8 τι εἶθελαν κερδήσει.
- Ὅταν εἶχεν το σιτάρι ἄσπρα 24 ἐβάρειν το ψωμί ογγίης 12 καὶ εἶχεν το κάθε ψωμί τορνέσια 6 τότε βαρεῖ το ψωμί ογγίης 9 καὶ ἔχει τορνέσια 3 πόσον ἀξίζειν το σιτάρι

Κεφάλαιο 85: «Εἰς πόσας ογγίης, ἢ ἐξάγια, ἢ κουκκία μερίζεται ἡ λίτρα, καὶ πόσα νομίσματα κόπτονται»

Στο κεφάλαιο 85 ἀναφέρονται οἱ υποδιαρέσεις τῆς «λίτρας», τῆς ὁποίας ὁ συγγραφεὺς χρησιμοποεῖ στο κεφάλαιο 86.

Ἡ μία λίτρα μερίζεται εἰς ογγίαις 12

Ἡ μία ογγία εἰς ἐξάγια 6

Το ἐξάγιον εἰς κουκία 24 ξύλινα

Το ξύλινον κουκίον εἰς 4 σίτινα

Κεφάλαιο 86: «Περὶ χωρίσεως σμίξεως, καὶ περὶ τιμῆς σμίξεως, καὶ διαφορᾶς αὐτῆς»

- Εἰς ἄνθρωπος ἔχει δέσιν δύο λογιῶν. Καὶ ἡ μία δέσις ἔχει εἰς τὴν κάθε λίτραν ἀσήμι καθάριον ογγίαις 15 καὶ ἡ ἄλλη ογγίαις 8 καὶ αὐτὸς ἐπῆρεν ἀπὸ τὴν δέσιν που ἔχει τῆς 8 ογγίης λίτρας 9 καὶ ἀπὸ τὴν δέσιν που ἔχει ογγίαις 11 λίτρας 10 καὶ ἔκαμεν μίαν δέσι, θέλω νὰ μάθω πόσαις ογγίαις ἔχει αὐτὴ ἡ δέσις ἀσήμι καθαρὸν.
- Εἰς ἄνθρωπος ἔκαμεν μίαν δέσιν ἀπὸ τεσσάρων λογιῶν μέταλλα. ἡγουν μάλαμα ογγίαις 15 ἀσήμι καθαρὸν ογγίαις 25 χάλκωμα ογγίαις 8 καὶ πάφιλον ογγίαις 12. καὶ το μὲν μάλαμα ἀξίζει ὅλον ἄσπρα 5500 καὶ το ἀσήμι ἄσπρα 800 καὶ το χάλκωμα ἄσπρα 9 καὶ ὁ πάφιλος ἄσπρα 6. θέλω νὰ μάθω τι ἀξίζει κάθε ογγία αὐτῆς τῆς δέσεως

Κεφάλαιο 87: «Περὶ τοῦ πῶς νὰ εὕρης ὕψος πύργου, ἢ καὶ ἄλλων τινὸς πράγματος»

Ἡ περιγραφή που γίνεται ἀπὸ τὸν συγγραφεὶα γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ ὕψους οἰποιοδῆποτε ψηλοῦ ἀντικειμένου μεταφέρεται ἀμέσως παρακάτω. Νομίζουμε ὅτι εἶναι περιττὸ οἰποιοδῆποτε σχόλιο.

Παράδει- παραδείγμα. Θίπτοι λίγους ὅτι θέλω ἰσῶν τὰ εὐρὰ ἐνὺ πύργῳ τοῦ ὕψος,
μα, α. ὅ πέρων εἰς τὸ χεῖμα αὐτὰ ξύλον εἰς τὸ μέγρος σπιθαμὰς 7 καὶ τὸ ἔμπιξα
εἰς τὴν γῆν μίαν πιθαμὴν. ἔμεινον καὶ ὅξω πιθαμὴς 6 καὶ αὐταὶ γυναι 6
4 6 — 36 πιθαμὰς ἕκαμαν ἴσκιον πιθαμὰς 4 τὰς ὁποῖαις τὰς γράφω καὶ ἰσῶν πᾶ-
6 λιν μίρῳ καὶ τὸν ἴσκιον τοῦ πύργου καὶ ὅσον πιθαμὰς 36 καὶ τὰ γράφω καὶ αὐτὰ.
— τὸρα τὰ βάζω εἰς τὴν μέθοδον τῆς τρεῖς καὶ λίγων αὐτὰ καὶ 4 πιθαμὰς ὁ
216 ἴσκιος ἐγγῆκεν ὅπου 6 πιθαμὰς ξύλον, καὶ 36 πιθαμὰς ὁ ἴσκιος ὅπου πῶ-
σον ὕψος πύργου ἀγῆται. καὶ πολυπλασιάζω τὰ 6 καὶ τὰ 36 καὶ γίνονται 216
ὁλ'ο καὶ αὐτὰ τὰ μιερίζω καὶ τὰ 4 καὶ ἀγῆται 54 καὶ πῶσον λίγων καὶ ἰσῶν ὅτι ἔστι
27 1/2 54 τοῦ ὕψος τοῦ πύργου.

Αἱ καὶ εἰς τὸν ἴσκιον ὅτι ὅταν τύχῃ τὰ ψηφία ἀπλῶς γίνονται ἡ μὲθοδος ὡς
ἀπῶδες. ὡς δὲ καὶ τὴν καὶ τὰς ἀκρίσματα γίνονται καὶ τὰ μὲθοδος τῆς τρεῖς
καὶ τὰς ἀκρίσματα ἦγον θίπτοι λίγους ὅτι τὸ μὲθ' ξύλον ἔστιν πιθαμὰς
6 καὶ ὁ ἴσκιος αὐτῆς ἀγῆκεν πιθαμὰς 3 καὶ ἀγῆκεν καὶ ὁ ἴσκιος τοῦ πύργου
πιθαμὰς 45 ÷ (ἦν δ' αὖτε 3 διότις ἡ καὶ ἡ πιθαμὴ ὅσα δ' αὖτε 12
12) τὸ λοιπὸν αὐτὰ τὰ βάζω εἰς τὴν μέθοδον τῆς τρεῖς καὶ λίγων
ἔπειτα ἰσῶν αὐτὰ καὶ 3 ÷ πιθαμὰς ὁ ἴσκιος, ἀγῆκεν ὅπου 6 πιθαμὰς ξύλον. καὶ
45 ÷ ὅπου πῶσον ὕψος πύργου ἥθιλον ἰσῶν καὶ πολυπλασιάζω καὶ μιερίζω
καὶ τὴν τὰ ξη τῶς μεθόδου τῆς ἀκρίσματα, ὡς καὶ ὡς ἰδιόδεξις ὅπου
ἔστιν εἰς τὴν ἱρμύειαν αὐτῆς καὶ ἀγῆται 77 ÷ καὶ πῶσον σπιθαμὰς λίγων ὅτι
ἵται ὁ πύργος, ὡς ἀν' βλῆταις καὶ ἀγῆκεν καὶ εἰς τὰ ψηφία.

$$\begin{array}{r}
 \text{Εἰ καὶ } 3 \div 6 = 45 \div \text{οἱ} \\
 \hline
 7 \quad 181 \quad 27 \\
 \hline
 4 \quad 6 \quad 0726 \\
 28 \quad 1086 \quad 277 \div 77 \div \\
 \hline
 2 \quad 288 \\
 \hline
 2172 \quad 2
 \end{array}$$

«Εάν θέλῃς να εὕρῃς ὕψος πύργου, ἢ καὶ ἄλλου τινός πράγματος που εἶναι ψυλά καὶ δεν ἡμπορεῖ να μετρηθῇ, ποίησον οὕτως. πρῶτον εἰδὲ εἰς τὸν ἴσκιον, καὶ αν εἶναι βολετόν να μετρηθῇ ὁ ἴσκιος του πράγματος. Ἦγουν να μηδὲν ἔχει οὐδὲνα ἐμπόδιον μέσα εἰς τὸν ἴσκιον, καὶ αν εἶναι βολετόν να μετρηθῇ ὁ ἴσκιος του πράγματος, ἔπαρε καὶ ἐσὶ ἓνα κομάτι ξύλον καὶ το μπῆξε εἰς τὴν γῆν, καὶ ὅσον ξύλο μένει ἀπάνω το μέτρησε, καὶ ὅσον εἶναι το γράφε ἔπειτα μέτρησε καὶ τὸν ἴσκιον του αὐτοῦ ξύλου, καὶ ὅσος εἶναι γράψε τὸν καὶ αὐτόν. Ομοίως μέτρησε καὶ τὸν ἴσκιον του πύργου ἀπὸ τῆς ρίζας του πύργου ἕως τὴν ἄκρην του ἴσκιου, καὶ ὅσος εὐγῆ γράψε τὸν καὶ αὐτόν, ἔπειτα εἰπέ δια τῆς μεθόδου των τριῶν, εἰάν ο τόσος ἴσκιος του ξύλου εὐγῆκεν ἀπὸ τόσας πιθαμὰς ξύλον ἄρα ο τόσος ἴσκιος του πύργου ἀπὸ πόσας πιθαμὰς πύργον βγαίνει;»

Ενδεικτικά, αναφέρουμε ἓνα πρόβλημα ἀπὸ το κεφάλαιο αὐτό:

- Θέλω ἐγὼ να εὕρω ἐνὺ πύργου το ὕψος καὶ παίρνω εἰς το χερί μου ἓνα ξύλον εἰς το μέγρος σπιθαμὰς 7 καὶ το ἔμπιξα εἰς τὴν γῆν μίαν πιθαμὴν. ἔμειναν καὶ ὅξω πιθαμὰς 6 καὶ αὐταὶ γουν αὶ 6 πιθαμαὶ ἕκαμαν ἴσκιον πιθαμὰς 4 τὰς ὁποῖαις τὰς γράφω καὶ ἐγὼ, πάλιν μετρώ καὶ τὸν ἴσκιον του πύργου καὶ εἶναι πιθαμὰς 36 καὶ τα γράφω καὶ αὐτά. Τώρα τα βάζω εἰς τὴν μέθοδον των τριῶν καὶ λέγω.....

Τα δέκα τελευταία κεφάλαια 88 έως και 98 περιέχουν προβλήματα τα οποία αναφέρονται σε ποικίλα θέματα της καθημερινής ζωής, αλλά και κάποια προβλήματα τα οποία παρατίθενται μάλλον για να εντυπωσιάσουν τον αναγνώστη και να κάνουν το βιβλίο ελκυστικό, όπως είναι τα προβλήματα των κεφαλαίων 95 και 97.

Περὶ μαρσσίας ἐσθλῶν ἁλθουκῆς τινὸς ἀνθρώπου. κίφ. πή
 Περὶ ἀρίστως μαθητῶν. κίφ. π θ'
 Περὶ δύο ἀνθρώπων πῦ ὁξάγκλισαν εἰς πηγὰδι. κίφ. υ'
 Περὶ τινὸς ἀνθρώπου πῦ ἐσύμφωνησεν ἑκτισσιν εἰς σπῆτι,
 ἑ εἰς τὸ τέλος ἑκαμὲν λογαριασμὸν καὶ διενέπωρωθη. κίφ. υ α'
 Περὶ ἀρίστως πηγῶν ἐκ τῆς ἁλθοραῖ. κίφ. υ β'
 Περὶ ἀρίστως ἀρεθμῶ ὁ ὁποῖος ἰμοιράσθη εἰς δύο μέρη, εἰς
 πόσα ἰμοιράσθη. κίφ. υ γ'
 Περὶ τῆ πῶς νὰ εὕρῃς ἀρεθμὸν ὑπὸ τῇ ἁλθοραῖ. κίφ. υ δ'
 Περὶ τῆ πῶς νὰ εὕρῃς πῖσιν ἑβαλῶν εἰς αὐθραιως εἰς τ' ἔντη. κίφ. υ ε'
 Περὶ τῆ πῶς νὰ εὕρῃς τελεῶν ἀνθρώπων ἐκ τῆς ἁλθοραῖ πόσα
 εἰσὶν ἔχῃ ὁ καθεὶς εἰς τὰ πηγίτι. κίφ. υ ς'
 Περὶ τῆ πῶς νὰ εὕρῃς εἰς δακτυλίδιον εἰς μίαν σωφορίαν ποῖος
 τὸ ἑπῆρσεν καὶ εἰς ποῖος χεῖρ, καὶ δακτυλον, καὶ ἀρμόν τὸ βαρῶ. κίφ. υ ζ'
 Περὶ τῆ πῶς νὰ εὕρῃς τινὰς ἀνθρώπους πῦ ἦσαν ἔξιν γηλαῖς
 πόσαι ἦσαν ὑποκῆθα γρεῖαν ἐκ τῆς ἁλθοραῖ. κίφ. υ η'
 Α Δ Περὶ

Με ένα ή δύο προβλήματα που θα αναφέρουμε για καθένα από τα επόμενα κεφάλαια, θα ολοκληρώσουμε την εικόνα για το εύρος των θεμάτων τα οποία ο συγγραφέας πραγματεύεται

Κεφάλαιο 88: «Μοιρασία διαθήκης τινος ανθρώπου»

- Ένας άνθρωπος είχεν τρεις υιούς και μίαν θυγατέρα και την γυναίκα του. και αυτός κάμνει διαθήκην ότι από είτι του ευρεθούν εις τον θάνατόν του να πάρη η γυναίκα του απ' τα οκτώ το ένα. και είτι μείνουν να τα μοιράσουν τα παιδιά του και τα μεν αρσενικά να πάρουν από δύο μερτικά, το δε θηλυκόν απ' ένα. Και εις τύχην απέθανεν ο πατέρας των και ευρέθησαν άσπρα 48000. θέλω να μάθω πώς να τα μοιράσουν.

Κεφάλαιο 89: «Έτερα μετά ευρέσεως μαθητών»

- «Εις άνθρωπος επήγεν εις ένα διδασκαλίον και εχαίρετισεν τον διδάσκαλον. ομοίως τον ερώτησεν και πόσα παιδιά έχει. απεκριθηκεν ο διδάσκαλος και του λέγει, εάν είχα άλλα τόσα παιδιά όσα έχω. Και τα ημίσιu απ' όσα έχω. Και το τέταρτον όσα έχω και να έφερες και εσύ το εδικό σου είθελα έχει 100. τόρα θέλω να μάθω πόσα παιδιά είχαν ο διδάσκαλος.

Σχόλιο: στο τέλος της λύσης, ο συγγραφέας, σε σημείωσή του, θέτει περιορισμό για το

αποτέλεσμα : « Σημείωσε ότι η μέθοδος αυτή δεν δύναται να εύρη, κάθε αριθμόν. εις δε τα παιδιά δεν δύναται διατί εάν έλθη τζάκισμα, ο άνθρωπος δεν μερίζεται»

Κεφάλαιο 90: «Περί δύο ανθρώπων που εξαγκλείσαν ένα πηγάδν»

- Εις άνθρωπος έκαμεν σιασμόν με άλλον άνθρωπον να του εξαγκλήση ένα πηγάδιν. δια άσπρα 400 και το πηγάδιν είτον βαθύ οργειαίς 15 και είχεν νερόν, οργειαίς 9 όμως αυτός ο άνθρωπος όταν εύγαλε ταις 5 οργειαίς το νερόν ασθένησε και άφησεν το πηγάδιον, και επήγεν άλλος άνθρωπος και το εξαγκλήσεν. τώρα ζητώ να μάθω πόσα εγγίζει του κάθε ανθρώπου δια το δικαίον του.

Κεφάλαιο 91: «Περί σιασμού ανθρώπου που έκτησεν ένα σπίτι και επληρώθη»

- Ένας μάστορας κτίζει ένα οσπήτιον με τοιούτον σιασμόν, ότι να το τελειώση δια ημέραις 40 και όταν κτίζη να πέρνη δια πληρωμήν άσπρα 35 την κάθε ημέραν. Και όταν δεν κτίζη να πληρώνη άσπρα 25 εις την κάθε ημέραν. Το λοιπόν όταν ετελείωσεν ο αυτός μάστορης το οσπήτιον έκαμαν λογαριασμόν με τον οικοκύριν, και ούτε έχει να πάρη ούτε να δώση. Θέλω να μάθω πόσας ημέρας εδούλευσεν και πόσας δεν εδούλευσεν

Κεφάλαιο 92: «Περί ευρέσεως πηχών εκ της διαφοράς»

- Εις άνθρωπος ηγώρασεν από δύο λογίων μεταξοτά πήχες 30 ήγουν καμουχάν και ατλάζιν. όμως λέγει το πώς επλήρωσεν τον καμουχάν από άσπρα 100 την κάθε πήχη το δε ατλάζη από 120. πλην τουτο λέγει ότι έδωσεν εις όλον τον καμουχάν άσπρα 140 περισσότερα παρά όλον το ατλάζιον. θέλω να μάθω πόσαις πήχες επήρην από το καθ' ένα

Κεφάλαιο 93: «Περί ευρέσεως αριθμού ο οποίος εμοιράσθη εις δύο μέρη, εις πόσα εμοιράσθη»

- Δύο άνθρωποι εμίρασαν φλουρία 12 και δεν λέγουν τι επήρην ο καθείς. Μόνον τουτο λέγουν, ότι τα επολυπλασίασεν ο καθείς το μερτικόν του αυτά κάθε αυτά. Έπειτα εύγαλεν ο πρώτος τον εαυτού πολυπλασιασμόν, από του δευτέρου τον πολυπλασιασμόν, και έμειναν 60. θέλω να μάθω πόσα επήρην ο καθείς

Κεφάλαιο 94: «Περί πώς να εύρης τινάν αριθμόν από την διαφοράν»

- Ένας άνθρωπος έστειλεν τον δούλον του εις την αγοράν με στάμνα, και του είπεν σύρε αγόρασε τόσον πανίν όσον είναι τα στάμνα. Ελθών δε ο δούλος εις την αγοράν, και ευρών δύο πανία, και το μεν ένα έχει η κάθε πήχυ άσπρα 6 το δε άλλον έχει άσπρα 8 αυτός γουν κάμνει λογαριασμόν και αν πάρη το πανίν που έχει άσπρα 6 του μένουν άσπρα 35 ειδέ και πάρη το πανίν που έχει άσπρα 8 η πήχυ, του λείπουνται άσπρα 55. αυτός γουν θέλοντας να κάμη το θέλημα του αυθεντός του δεν επήρην απ' αυτά τα πανία, μόνη ευρήκεν άλλον πανίν όσες πήχες του επαράγγειλεν ο αυθέντης του, και όσον είταν και τα άλλα πανία. και δεν του έμεινεν ουδένα άσπρο. τώρα ζητώ να μάθω πόσαις πήχαις ήτον το πανί, και πόσα άσπρα του έδωσεν ο αυθέντης του. και πόσον επλήρωσεν την κάθε

πήχην το πανίν.

Κεφάλαιο 95: «Περί του πώς να εύρης πόσα έβαλεν τις άνθρωπος εις τον νούν του»

Το κεφάλαιο αυτό περιέχει το πρόβλημα: Σκέψου έναν αριθμό από το 7 έως το 105. Διαίρεσέ τον με 3 και πες μου το υπόλοιπο. Διαίρεσέ τον με 5 και πες μου το υπόλοιπο. Διαίρεσέ τον με 7 και πες μου το υπόλοιπο. Με τα δεδομένα αυτά μπορώ να βρω τον αριθμό.

Κεφάλαιο 96: «Περί του πώς να εύρης τριών ανθρώπων πόσα στάμνα έχει, ο καθείς εις το πουγγί του»

Στο πρόβλημα του κεφαλαίου, ζητείται το χρηματικό ποσόν που έχει κάθε ένας από τρεις ανθρώπους, αν είναι γνωστά

τα αθροίσματα των ποσών: 1) του πρώτου και του δεύτερου, 2) του δεύτερου και του τρίτου και 3) του πρώτου και του τρίτου

Κεφάλαιο 97: «Περί του πώς να εύρης ένα δακτυλίδιον εις μίαν συντροφίαν ποίος το επήρεν, και εις ποίον χέρι, και δάκτυλον, και αρμόν το βαστά»

- Αν θέλεις να εύρης ένα δακτυλίδιον ανάμεσα εις ανθρώπους ποιος άνθρωπος το έχει, και εις ποίον χέρι το βαστά, και εις ποίον δάκτυλον το φορεί, και εις ποίον αρμόν στέκει, ποιήσον ούτως.....»

Κεφάλαιο 98: «Περί του πώς να εύρης ανθρώπους που ήσαν τρεις γενεαίς πόσοι ήσαν από κάθε γενεά εκ της διαφοράς»

- Εις ένα λουτρόν επήγαν 20 άνθρωποι και απ' αυτούς τους ανθρώπους οι μεν ήσαν Χριστιανοί, άλλοι δε ήσαν τούρκοι, και άλλοι εβραίοι. και οι μεν Χριστιανοί έδωσαν δια πληρωμήν ο καθ' ένας ένα άσπρον. οι δε τούρκοι έδωσαν από μισόν άσπρα ο καθ' ένας. οι δε εβραίοι έδωσαν ο καθ' ένας από άσπρα 3 και όταν εμίσεψαν ευρέθησαν και τα άσπρα 20 όσοι ήσαν και οι άνθρωποι. τώρα ζητώ να μάθω πόσοι Χριστιανοί ήσαν και πόσοι τούρκοι, και πόσοι εβραίοι.

«Τέλος της λογαριαστικής Επιστήμης εν συντομία.»

Μετά το τέλος της πρακτικής αριθμητικής, την οποία, όπως γράφει ο Γλυζώνιος «με Θεού βοήθειαν εδώσαμεν», στις 20 τελευταίες σελίδες του βιβλίου, «γράφωμεν και τινάς ερμηνείας ίνα ευρήσκει ο κάθε άνθρωπος το άγιον Πάσχα και πάντα τα ακόλουθα αυτού εν ευκολία. τα οποία δεν είναι αναγκαία εις τους ιερείς μόνον αμέ και εις όλους τους ανθρώπους.....»

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο ΤΟ ΕΡΓΟ «ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ» του Μεθόδιου Ανθρακίτη

Πριν ξεκινήσουμε την κριτική παρουσίαση του τρίτομου έργου του Ανθρακίτη θα προσπαθήσουμε να σκιαγραφήσουμε την προσωπικότητα του συγγραφέα μέσα στο συγκεκριμένο ιστορικό αλλά και κοινωνικό πλαίσιο.

3.1 ΜΕΘΟΔΙΟΣ ΑΝΘΡΑΚΙΤΗΣ

1. Καταγωγή- Σπουδές

Ο Μεθόδιος Ανθρακίτης γνωστός και ως Ανθράκης ή Ανθρακεύς, ήταν φιλόσοφος μαθηματικός και θεολόγος.

Γεννήθηκε στο χωριό Καμινιά ή Καμινιά του Ζαγορίου το οποίο το 1947 με βασιλικό διάταγμα μετονομάστηκε Ανθρακίτης προς τιμήν του Ηπειρώτη λόγιου.

Η ακριβής χρονολογία της γέννησής του δεν είναι γνωστή αλλά οι ιστορικές μαρτυρίες που αφορούν στην ζωή του, συγκλίνουν στο έτος 1660.

Φοίτησε στην Σχολή του «Γκιόνμα» των Ιωαννίνων με δάσκαλο τον Γεώργιο Σουγδουρή κοντά στον οποίο παρακολούθησε μαθήματα γραμματικής, εγκυκλοπαιδείας, φυσικής και μεταφυσικής⁴⁴⁴ και στην συνέχεια αφού έλαβε το μοναχικό σχήμα, «δι έρωτα της Λατινίδος» το 1697 έφυγε για την Βενετία.

Εκεί, σύμφωνα με τον μαθητή του Μπαλάνο Βασιλόπουλο,⁴⁴⁵ διδάχτηκε «παρά ανδράσι εις άκρον τη των Μαθηματικών εξησκημένους θεωρία», Γεωμετρία, Τριγωνομετρία, Γεωγραφία, Αστρονομική, Οπτική, Διοπτρική και Κατοπτρική, και Μηχανική.

Στην Βενετία παρέμεινε περισσότερο από δέκα χρόνια (1697- 1708), ενώ παράλληλα με τις σπουδές του εργάστηκε και σαν εφημέριος στον ιερό ναό των Ελλήνων, Αγίου Γεωργίου.

2. Το διδακτικό του έργο – το φιλοσοφικό του σύστημα

Μετά την επιστροφή του στην πατρίδα του η οποία τοποθετείται περίπου το έτος 1708⁴⁴⁶ ανέλαβε την διεύθυνση (1708- 1721) στο «Φροντιστήριο»⁴⁴⁷ της Καστοριάς και στην συνέχεια δίδαξε στην Σχολή της Σιάτιστας (1721-1723) και στις Σχολές των Ιωαννίνων του «Γκιόνμα» (1723-1725), και την «Επιφάνειο» (1725-1736).

Η συμβολή του στην αναγέννηση της παιδείας στην υπόδουλη Ελλάδα με τις μεταρρυθμίσεις που εισήγαγε ήταν πολύ σημαντική.

Ήταν ο πρώτος Έλληνας λόγιος στον οποίο οφείλεται η εισαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε σχολεία του ελληνικού χώρου την εποχή εκείνη,

⁴⁴⁴ Μπαλάνου Βασιλόπουλου, «Οδός Μαθηματικής», προίμιο XII τόμος Α΄

⁴⁴⁵ ο. α. προίμιο XII τόμος Α΄

⁴⁴⁶ Παναγιώτου Κ. Χρήστου, Ανθρακίτης Μεθόδιος, Εκδοσις «Ηπειρωτικής Εστίας», Ιωάννινα 1953, σελ. 9.

⁴⁴⁷ ο. α. σελ. 11

γεγονός που έχει μεγαλύτερη βαρύτητα ακόμα και από το επιστημονικό του έργο στα Μαθηματικά, το οποίο στο σύνολό του αποτελεί μεταφράσεις και διασκευές ευρωπαϊκών έργων.

Το φιλοσοφικό του σύστημα, – του οποίου το μεγαλύτερο μέρος καταστράφηκε-, απαλλαγμένο από την σχολαστική μορφή της Αριστοτελικής φιλοσοφίας η οποία κυριαρχούσε την εποχή εκείνη στα ελληνικά σχολεία, αλλά και στα πανεπιστήμια της Δύσης, καταρτίστηκε με βάση αυτά των φιλοσόφων R. Descartes (1596-1650), R. P. Malebranche (1638-1715) από τους οποίους είχε βαθύτατα επηρεαστεί και έγινε η αφορμή της διώξης του από την Εκκλησία.⁴⁴⁸

Σύμφωνα με τον Ηπειρώτη μαθητή του Γεώργιο Ζαβίρα, ο Ανθρακίτης, «διδάσκων εν Καστορία μετέφρασε τα του Νικολάου Μαλεβραχίου, Καρτεσιού και άλλων τινών συγγράμματα τα οποία και παρέδιδε τοις μαθηταίς αυτού».⁴⁴⁹

Από την Ιερά Σύνοδο του Πατριαρχείου καταδικάστηκε και ως οπαδός του Μολίνου αλλά από τα σωζόμενα τμήματα του φιλοσοφικού του συστήματος φαίνεται ότι η κατηγορία αυτή είναι αστήρικτη και οφείλεται μάλλον στην άγνοια των κατηγορών του για το περιεχόμενο των συγγραμμάτων του Ισπανού φιλοσόφου.⁴⁵⁰

Στον Καρτέσιο πρέπει να αποδώσουμε κυρίως την ενασχόληση του Ανθρακίτη με τα Μαθηματικά αλλά και την συνείδηση του θετικού ρόλου τους στην πνευματική αφύπνιση του Γένους.

Ο Malebranche (1638-1715), ο οποίος ήταν επίτιμο μέλος της Γαλλικής Ακαδημίας και διέπρεψε στην μελέτη των ανατολικών γλωσσών και της θεολογίας, ήταν φιλόσοφος, μαθηματικός και θεολόγος. Είχε βαθύτατα επηρεαστεί από το έργο του Descartes και ιδιαίτερα της πραγματείας του «Περί ανθρώπου» και ασχολήθηκε με την μαθηματική επιστήμη προκειμένου να κατανοήσει το φιλοσοφικό σύστημα του Καρτέσιου το οποίο σπηρίζονταν στα Μαθηματικά.

Ανέπτυξε το φιλοσοφικό- θεολογικό σύστημά του το οποίο ήταν απαλλαγμένο από την Αριστοτελική φιλοσοφία επηρεασμένος από τον Πλάτωνα, τον Αριστοτέλη και τον Καρτέσιο.

Πίστευε ότι η γνώση του θεού αποτελεί υπέρτατη σοφία, της οποίας συνέπεια είναι η ηθική διαπαιδαγώγηση. Έγραψε πολλά βιβλία θρησκευτικού και φιλοσοφικού περιεχομένου, το σπουδαιότερο από τα οποία, το «Πραγματεία περί Φύσεως και Χάριτος» κατεγράφη στον κατάλογο «Index» των απαγορευμένων βιβλίων της Καθολικής Εκκλησίας. Το φιλοσοφικό του σύστημα, παρά την καταδίκη των έργων του από την Καθολική Εκκλησία, είχε τεράστια απήχηση σε όλη την Ευρώπη και ήταν ευνόητο να προσελκύσει το ενδιαφέρον του Ανθρακίτη αφού σε αυτό θίγονται ζητήματα μεταφυσικά και θεολογικά.

Τέλος ο M. De Molinos, ο οποίος γεννήθηκε στην Αραγονία της Ισπανίας το 1640, ήταν θεολόγος με μεγάλη μόρφωση του οποίου το φιλοσοφικό σύστημα διακρίνεται από θρησκευτικό μυστικισμό και ονομάστηκε Quietismus (ησυχασμός). Η

⁴⁴⁸ Ο ίδιος απολογούμενος στην Ιερά Σύνοδο όταν κατηγορήθηκε για το περιεχόμενο των συγγραμμάτων του, όπως ο ίδιος γράφει σε επιστολή του προς τους τοπικούς άρχοντες των Ιωαννίνων, απάντησε: «κανένα δεν είναι εδικόν μου ποίημα, γνώμαις είναι φιλοσόφων διαφόρων, και πως, αν τας εδίδασκα, δεν τας εδίδασκα ως γνώμας Εκκλησίας, αλλά μόνον δια περιέργειαν και ευμάθειαν των μαθητών, καθώς συνηθίζουν εις τα σχολεία, και πως πρέπει να με εξετάσουν ως χριστιανόν, και όχι ως φιλόσοφον»

⁴⁴⁹ Το παράθεμα από το έργο του Παναγιώτου Κ. Χρήστου, Ανθρακίτης Μεθόδιος, Εκδόσεις «Ηπειρωτικής Εστίας», Ιωάννινα 1953, σελ. 23

⁴⁵⁰ ο. α. σελ.35

μεγάλη διάδοση της διδασκαλίας του προκάλεσε την αντίδραση των Ιησουϊτών, το έργο του «Πνευματικός οδηγός» χαρακτηρίστηκε αιρετικό, και ο Molinos, με διαταγή του Λουδοβίκου ΙΔ΄ της Γαλλίας συνελήφθη, φυλακίστηκε και πέθανε στην φυλακή χωρίς να δικαστεί

3. Οι κατηγορίες

Τα γεγονότα τα οποία αφορούν στην ζωή και το έργο του Ανθρακίτη, προβάλλουν την προδρομική μορφή του Ηπειρώτη λόγιου σαν την πιο τραγική μορφή όχι μόνον ανάμεσα στους προδρόμους του νεοελληνικού Διαφωτισμού αλλά στους κύριους φορείς του.

Φύση αγαθή,⁴⁵¹ ενέπνεε τον σεβασμό λόγω των επιστημονικών του προσόντων στους τοπικούς άρχοντες και τους κατοίκους της Καστοριάς στην οποία και διδάζε, (ανέλαβε την διεύθυνση του «Φροντιστηρίου»), μετά την επάνοδό του από την Βενετία.

Η εισαγωγή των νέων φιλοσοφικών συστημάτων και των επιστημών στην διδασκαλία του, με την οποία απέκτησε μεγάλη φήμη, συγκέντρωνε πλήθος μαθητών όχι μόνο από την Καστοριά αλλά και από άλλες περιοχές και έγινε η αιτία να προκαλέσει την ζήλια και τον φθόνο των συντηρητικών δασκάλων της περιοχής οι οποίοι τον κατηγορήσαν ότι φιλοσοφεί «διαφώρας προς τους Αριστοτελικούς» και τον κατήγγειλαν στο Πατριαρχείο με τον χαρακτηρισμό του αιρετικού.

Συγκεκριμένα, ο συντηρητικός δάσκαλος της Καστοριάς Ιερόθεος ο Ιβηρίτης, αφού πρώτα παρακολούθησε την διδασκαλία του Ανθρακίτη, στην συνέχεια τον κατήγγειλε στο Πατριαρχείο ότι διδάσκει τους μαθητές «φιλοσοφικά και θεολογικά μεστά ασεβείας».⁴⁵² Ως αποδεικτικά στοιχεία παρουσίασε τετράδια των παραδόσεων του Ηπειρώτη λόγιου, τα οποία εξετάστηκαν από την Ιερά Σύνοδο «παρουσία διδασκάλων εμπειρών, και ειδημόνων εν φιλοσοφία άμα τε και τη Ιερά θεολογία»⁴⁵³ κρίθηκαν καταδικαστέα, και ο Ανθρακίτης προσκλήθηκε να προσέλθει στην Κωνσταντινούπολη για να απολογηθεί.

Ο Ανθρακίτης, ίσως εξ αιτίας της έντασης η οποία δημιουργήθηκε, αναχώρησε το 1720 από την Καστοριά για την Σιάτιστα όπου και ανέλαβε για δύο χρόνια την σχολαρχία του εκεί ευρισκόμενου σχολείου.⁴⁵⁴ Η πρόσκληση του Πατριαρχείου τον βρήκε στην Σιάτιστα, φαίνεται όμως ότι ο ίδιος δεν είχε συνειδητοποιήσει την σοβαρότητα της κατάστασης και όχι μόνον δεν συμμορφώθηκε με την εντολή του Πατριαρχείου, αλλά αναχώρησε για τα Ιωάννινα το 1722 όπου και ανέλαβε την διεύθυνση της Σχολής του Γκιούμα.

⁴⁵¹ Αυτό είναι προφανές και από την στάση που πιστεύει ότι πρέπει να έχει ο ιερέας κατά την εξομολόγηση απέναντι στον πιστό που έχει αμαρτήσει που, κατά τον Ανθρακίτη σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να είναι σκληρή. Στο έργο του «Επίσκευσις πνευματική» το οποίο εκδόθηκε στην Βενετία το έτος 1780 γράφει ότι ο ιερέας οφείλει να απευθύνεται στον πιστό «με ολίγα λόγια ουσιώδη, με τρόπον ευάρεστον, ήμερον και γλυκύν και με φωνήν πραΐαν, οπου να διδῃ ευλάβειαν» και να προσπαθεί να πείσει τον πιστό να εξομολογηθεί τα αμαρτήματά του λέγοντάς του. «ο πνευματικός είναι ιατρός, ο αμαρτωλός είναι ασθενής. Αν κρῖναι ο ασθενής την πληγὴν πως ἡμπορεῖ να ιατρευθῇ; Εγὼ ἔχω εἰς χεῖρας το ἔμπλαστρον, δείξε μου τον πόνον σου, δια να το βάλω ἐκεῖ που πονεῖς...»

⁴⁵² Νίκου Ψημμένου, «Η ελληνική φιλοσοφία από το 1453 ως το 1821», Τόμος Β΄, Η επικράτηση της νεωτερικής φιλοσοφίας, εκδόσεις Γνώση, επιστολή του διδασκάλου Ιωάννη Ιωάννου προς τον Άρτης Νεόφυτο, σελ 425

⁴⁵³ ο. α. Η καταδικαστική απόφαση της Συνόδου του Οικουμενικού Πατριαρχείου, σελ. 442

⁴⁵⁴ Παναγιώτου Κ. Χρήστου, Ανθρακίτης Μεθόδιος, Εκδόσεις «Ηπειρωτικής Εστίας», Ιωάννινα 1953, σελ. 12

Για την ενέργειά του αυτή κατά την καταδικαστική απόφαση κατηγορήθηκε για απειθεία από τους Συνοδικούς: «...ουδόλως υπήκουσε, και του ημετέρου συνοδικού καταπεφρόνηκε γράμματος, και ήδη απάρας αυτόθεν απεδήμεσεν αλλαχόθι, απειθής, φανείς, και φευγόδικος...».

Ο ίδιος ο Ανθρακίτης αρκέστηκε να απολογηθεί για τις εναντίον του κατηγορίες στο μητροπολίτη Άρτας Νεόφυτο, με επιστολή την οποία του έστειλε το 1723, πριν από την καταδικαστική απόφαση. Στην επιστολή αυτή διαβεβαιώνει τον Ιεράρχη για την ορθόδοξη πίστη του και εκφράζει τον φόβο μήπως τα κλεμμένα τετράδιά του, τα οποία είναι «ακόμη αδιόρθωτα και μόνον απλά σημειώματα», συμπληρωθούν από τον κατήγορό του «ό,τι του φανεί εναντίον μου...μήπως και με καταδικάση η εκκλησία μου».

Εκδηλώνει ακόμα την προθυμία του, – όπως έγραψε και στον Πατριάρχη Ιεροσολύμων-, «...αν ήθελε τα υπάγη να τα θεωρήσωσιν ακριβώς και όποιον εύρωσιν υγιές και σύμφωνον τω δόγματι της αγίας μας εκκλησίας, καγώ μετά χαράς αποδέχομαι, όπερ δε αλλότριον καγώ ουκ αποδέχομαι»⁴⁵⁵

Κατά την παραμονή του Ανθρακίτη εις τα Ιωάννινα, έντεκα πρόκριτοι της πόλης ανέλαβαν την πρωτοβουλία και έστειλαν επιστολή στις 15 Αυγούστου 1723 στον επίσκοπο Νικομήδειας Παΐσιο, (ο οποίος διαδέχτηκε το 1726 στον πατριαρχικό θρόνο τον Πατριάρχη Ιερεμία Γ'), προκειμένου να μεσολαβήσει ώστε να γίνει ανάκληση της εντολής που έλαβε ο Ανθρακίτης από το Πατριαρχείο, να παρουσιαστεί ενώπιον της Ιεράς Συνόδου στην Κωνσταντινούπολη και να απολογηθεί «όχι δι' άλλο, ει μη ότι υπάρχει πενέστατος και ουκ' έχει τα προς οδοιπορίαν αναγκαιούντα και δεύτερον ότι υπάρχει ασθενής και αδύνατος και ουκ' ισχύουσιν αι γηραιαίαι σάρκες να αντιπαλαίωσιν εις τοιαύτην σκληρότητα οδοιπορίας τοσούτων ημερών».⁴⁵⁶

Στην επιστολή τους διαβεβαιώνουν τον μεγάλο κύρους Ιεράρχη για την αγαθή φύση, το άμεπτο ήθος καθώς και την ορθόδοξη πίστη του δασκάλου, την οποία ομολόγησε «εγγράφως και δια ζώσης φωνής ενώπιον των λογιωτάτων διδασκάλων της ημετέρας κοινότηταςόθεν και απεφασίσθη κοινώς διδάσκαλος της πρώτης σχολής της Πολιτείας μας». Τον διαβεβαιώνουν ακόμα ότι ο Ανθρακίτης έπεσε θύμα συκοφαντίας από κάποιους «ουχί δι άλλο, παρά δια να προξενήσῃσι ναύαγιον της αγαθής και καλής φήμης του ρηθέντος λογιωτάτου κυρ Μεθοδίου». Δεν έγινε γνωστό εάν η επιστολή των προκρίτων των Ιωαννίνων έφτασε εγκαίρως στον παραλήπτη ή εάν ο παραλήπτης μεσολάβησε χωρίς αποτέλεσμα.

4. Η καταδίκη του

Τον Αύγουστο του 1723 η Ιερά Σύνοδος του Οικουμενικού Πατριαρχείου καθάίρεσε τον Ανθρακίτη από το ιερατικό αξίωμα, καταδίκασε το διδασκαλικό του έργο, και του απαγόρευσε στο εξής να διδάσκει: «εγνωμοδοτήθη κοινώς αυτόν μέν καθαιρέσει παντελεί της Ιερωσύνης υποπεσείν, τα δε ρηθέντα κακοτετράδια αυτού αναθέματι καθυποβληθείναι.....και μηδεμίαν άδειαν έχη διδάσκειν, και παραδιδώναι όλως μαθήματα ούτε φιλοσοφικά, ούτε θεολογικά, ως εν αμφοτέροις κατεγνωσμένους, και ύποπτος του λοιπού γενόμενος».

⁴⁵⁵ Νίκου Ψημμένου, «Η ελληνική φιλοσοφία από το 1453 ως το 1821». Τόμος Β', Η επικράτηση της νεωτερικής φιλοσοφίας, εκδόσεις Γνώση, επιστολή του Ανθρακίτη προς τον Άρτης Νεόφυτο, σελ 427

⁴⁵⁶ ο. α. Επιστολή προκρίτων των Ιωαννίνων προς τον Νικομήδειας Παΐσιο, σελ. 437

Την απόφασή της η Ιερά Σύνοδος στήριξε στο ότι ο Ηπειρώτης δάσκαλος, «το αποφώλειον τέρας» και «ο τω όντι αναίσθητος, και φρενοβλαβεστάτος», με το πρόσχημα της διδασκαλίας συγκέντρωνε γύρω από αυτόν, νέους πρωτόπειρους και αδιδακτους και στην συνέχεια, «απαλαίς αυτών ταις ψυχαίς εγκατεφύτευσε τα ζιζάνια, και κατά μακρόν μετοχεύσας τα θολερά, και ακάθαρτα νάματα της ής απηγάγετο αιρέσεως διέφθειρεν ουκ ολίγους και ψυχικής αυτών απωλείας παραίτιος γέγονεν...».

Ακόμα, «θέλων εαυτόν νέον φιλόσοφον και θεολόγον», αυτά τα οποία σύμφωνα με την παράδοση διδάσκουν και διδάσκονται οι ευσεβείς του γένους, δηλαδή «τα της περιπατητικής φιλοσοφίας, εν δε τη θεολογία τας ιεράς βίβλους των θεοσόφων πατέρων τούτο πάντων την διδασκαλίαν και ανάγνωσιν παρητήσατο, και απεδοκίμασεντα δε Μολλίνου δυσεβή συγγράμματα ευρών.....μεταφράσας τε και τετράδια τινα συγκροτήσας, εν οίς νους μεν υγιής ουδαμού...».

Στα συμπεράσματα αυτά, όπως γράφει η καταδικαστική απόφαση, κατέληξαν τα μέλη της Ιεράς Συνόδου, μετά από την εξέταση των χειρογράφων του, «διδασκάλων εμπειρών, και ειδημόνων εν φιλοσοφία άμα τε και τη ιερά θεολογία».

Μετά τις νέες εξελίξεις, ο γέροντας ήδη και ασθενής Ηπειρώτης λόγιος αναγκάστηκε να ταξιδέψει στην Κωνσταντινούπολη, τον Νοέμβριο του 1723 και να παραστεί ενώπιον της Ιεράς Συνόδου για να απολογηθεί.

Η δοκιμασία ήταν σκληρή για τον Ανθρακίτη. «Τα μετά αυτά είναι αξιοδάκρυτα» γράφει σε επιστολή⁴⁵⁷ του μετά την «απολογία» του προς τους πρόκριτους των Ιωαννίνων, επιστολή, την οποία κλείνει με την φράση, «δεν ημπορώ να σας γράψω έτερα, ότι εβυθίσθην από την λύπην και από την στενοχωριάν όπου ευρίσκομαι» και δείχνει τον βαθύ πόνο του αγαθού γέροντα επιστήμονα ο οποίος αφοσιώθηκε στο διδασκαλικό έργο αγωνιζόμενος για την πνευματική ανάταση των συμπατριωτών του.

«Το όλον δια να με καταισχύουν και την καλήν μου πατρίδαν...» γράφει στην επιστολή του, καταισχύνη την οποία υπέστη και τόσο αδρά περιγράφει καθώς και την καταδική του «όχι ως κακός χριστιανός, όχι εις κανένα δόγμα της Εκκλησίας, αλλά πως φιλοσοφώ διαφόρως από τους Αριστοτελικούς».

Στις ερωτήσεις των συνοδικών για το περιεχόμενο των τετραδίων του αποκρίθηκε ότι, «κανένα δεν είναι ειδικόν μου ποίημα, γνώμαις είναι φιλοσόφων διαφορών, και πως, αν τας εδίδασκα, δεν τας εδίδασκα ως γνώμας Εκκλησίας, αλλά μόνον δια περιέργειαν και ευμάθειαν των μαθητών, καθώς συνηθίζουν εις τα σχολεία, και πως πρέπει να με εξετάσουν ως χριστιανόν, και όχι ως φιλόσοφον»

Τα «αξιοδάκρυτα», που επακολούθησαν περιγράφει ο ίδιος ο Ανθρακίτης: «Στοχασθήτε αν κινούνται από ζήλον πίστεως, και αν δια Πνεύματος Αγίου συναθροίζουν λογικάς και φυσικάς και Ευκλείδην και έτερα μαθηματικά και ανάπτουν φωτίαν εις την αυλήν της εκκλησίας εις τρία μέρη και τα έρριψαν μέσα ημέρα Κυριακή, και λαός άπειρος έξω, γεμιτζήδες, παπουτζήδες, ραφτάδες, και τα κάνουν ωσάν να ήτον Αρείου αιρέσεις ή πνευματομάχων, βιβλία όπου όλος ο κόσμος τα σπουδάξει, όπου δεν έχουν να κάμουν ολότελα με την πίστην».

Και συμπληρώνει: «Δεν είναι εντροπή τους να ακούεται πως έκαισαν λογικήν, φυσικήν Ευκλείδην και αριθμητικήν, βιβλία όπου τα διαβάσουν όλος ο κόσμος;»

Ο Ανθρακίτης, διατήρησε την σχολαρχία στην «Γκιούμειο Σχολή» των Ιωαννίνων

⁴⁵⁷ Πρβλ. Αλκης Αγγέλου, «Των Φώτων, Όψεις του νεοελληνικού Διαφωτισμού», Νεοελληνικά Μελετήματα, Ερμής, Αθήνα 2000, «Η δίκη του Μεθόδιου Ανθρακίτη», σελ25-28

μέχρι το 1725, αφού με ειδικό πατριαρχικό σιγίλιο, - σύμφωνα με την θέληση του ιδρυτή της-, είχε κατοχυρωθεί η ανεξαρτησία της από τις επεμβάσεις του Μητροπολίτη.

5. Η αποκατάστασή του

Η «αποκατάσταση» του Ανθρακίτη έγινε από την Ιερά Σύνοδο τον Ιούλιο του 1725, σύμφωνα με την οποία «άξιος συνώμης αναφανείς έτυχεν εκκλησιαστικής αθώωσης και επανέλαβε το ενεργούν της ιερατικής αυτού τάξεως», με εντολή και παραγγελία συνοδική, «μηκέτι αυτόν μετέρχεσθαι και παραδιδόναι ολοτελώς του λοιπού εν ουδενί καιρώ και τόπω τα κατ'άπτυστα εκείνα και κατεγνωσμένα τετράδια, ...και ωσει γάγγραιναν αποφυγάνειν όλως ποτέ την χρήσιν και διδασκαλίαν εκείνων».⁴⁵⁸ Στην εντολή της συνόδου πειθάρχησε ο Ανθρακίτης μέχρι το θάνατό του.

Πιθανολογείται ότι μετά την αποκατάστασή του, ο Ανθρακίτης, ανέλαβε την διεύθυνση της Σχολής του «Επιφάνειου» των Ιωαννίνων⁴⁵⁹ μέχρι το 1736.

Πέθανε λίγο αργότερα, λίγα χρόνια πριν από την έκδοση του έργου του «ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ», το 1749. Στο προίμιο του έργου,⁴⁶⁰ παρά «Του Κυρίου Ιγνατίου Μεταξοπούλου του Κρητός» αφιερώνεται προίμιο προς τον μεγάλο λόγιο διαφωτιστή.

Ως εθέλοντα δύνει από Εσπερης εις Εώαν
Καλά Μαθήματ' άγεις ως παλινουχέως.
Ω ντε οδηγός είης υίεσσι σοφών γενετείρων,
Τοίσιν έση θ' εζής, ως τε δίδωσι Θεός.
Τω θνητός περ εών, ως τετρακτύς Μεθόδιε,
Εύρες Αθανασίαν Λείμμασι της Σοφίης.

6. Συγγραφική δραστηριότητα

Η συγγραφική δραστηριότητα του Μεθόδιου Ανθρακίτη, είναι μεγάλη. Με τα κείμενά του τα οποία είναι ακριβή σαφή και περιεκτικά έχει την ικανότητα να απευθύνεται τόσο στα λόγια στρώματα όσο και στον απλό λαό. Στους πρώτους απευθύνεται με επιστημονικά έργα σε γλώσσα αρχαίζουσα, ενώ στους δεύτερους με έργα γραμμένα σε γλώσσα δημώδη. Σημαντικό μέρος του φιλοσοφικού του έργου περιείχαν τα τετράδιά των παραδόσεων του τα οποία καταστράφηκαν από την Ιερά Σύνοδο⁴⁶¹ και μόνο από ότι έχει σωθεί και από κάποιες μαρτυρίες μπορούμε να υποθέσουμε το περιεχόμενό τους.

Κάποια από τα συγγράμματά του –θρησκευτικού περιεχομένου- εκδόθηκαν κατά την παραμονή του στην Βενετία.

⁴⁵⁸ Πρβλ. Νίκου Ψημμένου, «Η ελληνική φιλοσοφία από το 1453 ως το 1821», Τόμος Β', Η επικράτηση της νεωτερικής φιλοσοφίας, εκδόσεις Γνώση, σελ. 451.

⁴⁵⁹ Παναγιώτου Κ. Χρήστου, Ανθρακίτης Μεθόδιος, Εκδόσεις «Ηπειρωτικής Εστίας», Ιωάννινα 1953, σελ.

39

⁴⁶⁰ Μπαλάνου Βασιλόπουλου, «Οδός Μαθηματικής», προίμιο XXII τόμος Α'

⁴⁶¹ Τα τετράδια των παραδόσεων του κήκαν παρουσία της Ιεράς Συνόδου η οποία απευθύνεται προς τους αρχιερείς των επαρχιών με την εντολή: «Υμείς δε οι προϊστάμενοι εν ταις επαρχίαις ταύταις αρχιερείς οφείλατε αγρύπνως επισκοπεΐν, και φροντίζειν επιμελώς του εξαλειφθῆναι τελείως εκ' μέσου τα προειρημένα βλάσφημα και τερατώδη τετράδια»

Η έκδοση του πρώτου έργου του «Θεωρία χριστιανικά και ψυχοφελείς νουθεσίαι» έγινε στην Βενετία το 1699 και ακολούθησαν επανεκδόσεις του στην Βενετία το 1780, στην Βιέννη το 1831 και στην Αθήνα το 1837.

Το έργο του «επίσκεψις πνευματική» εκδόθηκε το 1707 στην Βενετία όπου και επανεκδόθηκε το 1780.

Το έτος 1708, επίσης στην Βενετία εκδόθηκε «ο Βοσκός λογικών προβάτων». Τα επιστημονικά συγγράμματα του Ανθρακίτη έμειναν ανέκδοτα εκτός από το έργο «ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ» το οποίο αποτελεί μετάφραση και διασκευή ξένων συγγραμμάτων και εκδόθηκε στην Βενετία το 1749 από τον μαθητή του Μπαλάνο Βασιλόπουλο.

7. Η προσφορά του στην παιδεία

Εκτός από την σημαντική συμβολή με το συγγραφικό του έργο στην καλλιέργεια των γραμμάτων, ο Μεθόδιος Ανθρακίτης:

- Υπήρξε ο πρώτος εισηγητής της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε σχολεία του υπόδουλου Ελληνικού χώρου
- Υπήρξε ο πρώτος εισηγητής της διδασκαλίας της φιλοσοφίας πάνω σε νέες βάσεις
- Υπήρξε ένθερμος υποστηρικτής της εισαγωγής της καθομιλούμενης γλώσσας στην διδασκαλία και στην συγγραφή επιστημονικών έργων προκειμένου να αφομοιωθούν ευκολότερα οι νεοεισαχθείσες στην εκπαίδευση επιστήμες, αφού η αρχαίζουσα δυσκόλευε περισσότερο την ήδη δύσκολη φύση των επιστημών αυτών. Για τον σκοπό αυτό, τα συγγράμματά του ήταν γραμμένα στην «δημώδη» γλώσσα, γι αυτό και χαρακτηρίστηκαν κατά την καταδικαστική του απόφαση από την Ιερά Σύνοδο «ασύντακτα και σολοικίζοντα»
- Κατάργησε⁴⁶² την μέθοδο της «πολλαπλής ψυχαγωγίας»⁴⁶³ κατά την ερμηνεία των αρχαίων κειμένων και εισήγαγε την «μονολεκτική ψυχαγωγία», με σκοπό να αποφευχθεί η χρησιμοθηρία των κειμένων και να επικεντρωθεί το ενδιαφέρον των μαθητών στην ουσία των νοημάτων και λιγότερο στην γλωσσική τους μορφή.

Η συμβολή του μεγάλου δασκάλου του Γένους Μεθόδιου Ανθρακίτη στην πνευματική ανάταση των συμπατριωτών του, είναι ανεκτίμητη. Η διδασκαλία γι' αυτόν, είναι «αποστολή».

Η διδακτική του πορεία μέσα από πολλές περιπέτειες αλλά και μεγάλη θλίψη και το επιστημονικό του έργο, τον κατατάσσουν ανάμεσα στους σημαντικότερους προδρόμους του νεοελληνικού Διαφωτισμού.

⁴⁶² Τρύφωνας Ευαγγελίδης «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας» Εν Αθήναις 1936, τόμος 1^{ος}, σελ. XCIV

⁴⁶³ Η «πολλαπλή ψυχαγωγία» ήταν η συσσώρευση συνώνυμων λέξεων πάνω από κάθε λέξη του αρχαίου κειμένου το οποίο μελετούσαν οι μαθητές.

Για παράδειγμα

«Άκουσον, παιδί μου, την ιδιήν μου συμβουλήν

Ακροάσθητι, ώ τέκνον μου, την ιδιήν μου παραινεσιν

Ενωτίσθητι, ώ μαθητά μου, την ιδιήν μου ερμηνείαν

Άκουσον, ώ παί, της εμής συμβουλής»

Η προσφορά του στα εκπαιδευτικά δρώμενα της πατρίδας του δεν επικεντρώνεται μόνο στην εισαγωγή των νέων επιστημονικών μαθημάτων αλλά και στην εφαρμογή νέων μεθόδων διδασκαλίας για την κατανόηση και αφομοίωση των μαθημάτων αυτών.

Σχολάρχισε σε τέσσερα από τα σημαντικότερα πνευματικά ιδρύματα του υπόδουλου ελληνικού χώρου και πολλοί από τους μαθητές του όπως ήταν ο Ευγένιος Βούλγαρης, οι Μπαλάνος και Αναστάσιος Βασιλόπουλος αναδείχθηκαν σε λαμπρούς λογίους και εξέχουσες πνευματικές προσωπικότητες του ελληνισμού.

3.2 Το περιεχόμενο του έργου «Οδός Μαθηματικής».

Η «Οδός Μαθηματικής» αποτελείται από τρεις τόμους οι οποίοι -σύμφωνα με τον συγγραφέα- περιέχουν «των κατ' είδος κυριωτέρων της μαθήσεως πραγματειών»:

- Τα Στοιχεία του Ευκλείδη
- Τα σφαιρικά του Θεοδοσίου
- Γεωμετρία θεωρητική και πρακτική
- Τριγωνομετρία
- Των περί κρικωτής σφαίρας κατά Πρόκλον
- Των περί χρήσεως σφαιρών
- Αστρολαβία
- Γεωγραφία και οπτική

Ο πρώτος τόμος, ο οποίος αποτελείται από 424 σελίδες πραγματεύεται τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη και τα Σφαιρικά του Θεοδοσίου.

Ο δεύτερος τόμος ο οποίος αποτελείται από 572 σελίδες περιέχει την Γεωμετρία (θεωρητική και πρακτική) και την Τριγωνομετρία.

Ο τρίτος τόμος ο οποίος αποτελείται από 520 σελίδες περιέχει τα Σφαιρικά του Πρόκλου, τα περί χρήσεως σφαιρών του Γορδάτου, Αστρολαβία, Γεωγραφία και Οπτική.

Στο τρίτομο έργο του Ανθρακίτη προστέθηκε ένας ακόμα τόμος «Της Αριθμητικής», από τον πρώην μαθητή του και μετέπειτα σχολάρχη της «Μπαλαναίας» Σχολής των Ιωαννίνων, Μπαλάνο Βασιλόπουλο. Ο 4^{ος} τόμος -της Αριθμητικής- εκδόθηκε μετά τον θάνατο του Μπαλάνου, το 1803, από γιό και διάδοχο του στην σχολαρχία της «Μπαλαναίας Σχολής», Κοσμά Βασιλόπουλο.

Το κόστος της έκδοσης των βιβλίων την εποχή εκείνη ήταν πολύ υψηλό και αποτελούσε έναν από τους κυριότερους λόγους για τους οποίους σπάνιζαν τα βιβλία και κυρίως τα διδακτικά εγχειρίδια στα σχολεία στην τουρκοκρατούμενη Ελλάδα.

Ένας λόγιος- δάσκαλος με τις πενιχρές κατά κανόνα απολαβές, δεν ήταν δυνατόν να αναλάβει τις δαπάνες που απαιτούσε η έκδοση των χειρογράφων του, γι αυτό πολλά από τα έργα λογίων την εποχή της Τουρκοκρατίας, έμειναν ανέκδοτα.

Τα έργα στην πλειοψηφία τους, εκδίδονταν

- Με δαπάνη πλούσιων φιλομαθών και φίλογενών Ελλήνων, (κυρίως εμπόρων του εξωτερικού), οι οποίοι προσπαθούσαν με κάθε τρόπο να συμβάλλουν στην πνευματική ανύψωση του υπόδουλου Γένους,

- Με την μέθοδο των συνδρομητών. Οι συνδρομητές προπλήρωναν το έργο ενώ ήταν ακόμα χειρόγραφο και το αποκτούσαν μετά από την έκδοσή του. Με τον τρόπο αυτό, ο συγγραφέας συγκέντρωνε το ποσόν – ή τουλάχιστον το μεγαλύτερο μέρος του- το οποίο απαιτούσε η εκτύπωση του βιβλίου του.

Το έργο Ο. Μ., το οποίο τυπώθηκε στην Βενετία το έτος 1749, ήταν το πρώτο ελληνικό έργο το οποίο εκδόθηκε με την «μέθοδο των συνδρομητών».

Ανάμεσα στους συνδρομητές, τους οποίους παρουσίαζε ο συγγραφέας στην αρχή του έργου του, σε αρκετές περιπτώσεις περιέχονταν ονόματα δασκάλων του Γένους οι οποίοι αποκτούσαν τα βιβλία όχι μόνον για την επιστημονική τους κατάρτιση αλλά και για να τα χρησιμοποιήσουν ως διδακτικά εγχειρίδια. Γι αυτό και οι κατάλογοι των συνδρομητών αρκετές φορές – εκεί όπου δεν υπάρχουν γραπτές μαρτυρίες-, μας δίνουν πολύτιμες πληροφορίες και μας βοηθούν να κάνουμε βάσιμες υποθέσεις για την εισαγωγή και την διδασκαλία των Μαθηματικών σε σχολεία της εποχής εκείνης.

Όπως για παράδειγμα, στον κατάλογο των 38 συνδρομητών της Ο. Μ., συναντάμε το όνομα του «εν ιερέυσιν Αιδεσιμοτάτου και λογιωτάτου Κυρίου Γεωργίου Πατούσα του εξ' Αθηνών, Διδασκάλου τε του εν Ενετίησι Φλαγγιανού Ελληνομουσείου». Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Φλαγγιανό Κολλέγιο της Βενετίας διδάσκονταν τα Μαθηματικά από το βιβλίο του Μεθόδιου Ανθρακίτη.

3.2.1 Τα προοίμια της «Οδού Μαθηματικής» του Μεθόδιου Ανθρακίτη- Σχόλια.

Στις περισσότερες ευρωπαϊκές εκδόσεις του 16^{ου} και 17^{ου} αιώνα, όπως και στην έκδοση της «Οδού Μαθηματικής», οι συγγραφείς πριν αρχίσουν την ανάλυση των έργων τους, προτάσσουν ένα ή περισσότερα «προοίμια» τα οποία πληροφορούν τον αναγνώστη για το περιεχόμενο του έργου, για τον στόχο τον οποίο θέλει να επιτύχει με το συγκεκριμένο έργο και την διαδικασία μέσω της οποίας θα επιτευχθεί ο στόχος αυτός.

Το έργο Ο. Μ., περιέχει τρία προοίμια, τον κατάλογο των συνδρομητών και έξι επιγράμματα.

Το πρώτο προοίμιο το οποίο ο Μπαλάνος αφιερώνει στους απογόνους των Καραϊωάννου και Μαρούτζη, –ευεργετών του Γένους-, αρχίζει όπως γίνεται σε όλες τις εκδόσεις, με αναφορά στην υπόδουλη πατρίδα: «Μάχου υπέρ πατρίδος ευγενέστατοι απόγονοι ευγενεστάτων προγόνων, έφη τις των πάλαι φιλοσόφων το προς αυτόν εκάστου απαραίτητον χρέος δείξει βουλόμενος».

Σε πολλά σημεία του προοιμίου υπενθυμίζει το χρέος κάθε Έλληνα προς την πατρίδα του η οποία είναι τόσο «γλυκετέρα παντός άλλου», ώστε πολλοί «προαιρείσθαι τον εν πατρίδι θάνατον καν τις αυτοίς εν αλλοδαπεί και αθανασίαν που προεπιγγεῖται». Ο Μπαλάνος ενδυναμώνει το εθνικό φρόνημα: «τί δε τοις φιλοπάτρισι των εκ' της πατρίδος οικειότερον;» και αλλού: «ουδέν ούτως ως η πατρίς ποθητόν» και προσπαθεί να ανοίξει διαύλους οι οποίοι φτάνουν μέχρι την Αρχαία Ελλάδα ώστε να συνειδητοποιήσουν οι υπόδουλοι την ιστορική συνέχεια και τους δεσμούς τους με τους «ευγενέστατους προγόνους» τους.

Ο Μπαλάνος αναφέρειται επίσης στον δάσκαλό του, τον Μεθόδιο Ανθρακίτη, ο οποίος «πολλά τη πατρίδι θερμάς πονήσαντος» και «εν φιλοσοφία διαπρέψαντος», δίδασκε με μεγάλο αγώνα «τοις φιλομαθέσιν» μέχρι «και βαθυτάτου γήρωος».

Αποδεχόμενος δε σαν «φιλοσοφική παραίνεση» εκείνα τα οποία δίδασκε ο δάσκαλός του και βλέποντας ότι η φύλακτη πατρίδα παρά την «εντοσαύτη του Γένους ταπεινώσει», πλούτιζε από άλλα μαθήματα αλλά «αμοιρούσαν δ' όλως των της μαθηματικής επιστήμης», αποφάσισε να εκδώσει το έργο «ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ». Για τον σκοπό αυτό, «πολλούς και δια πολλού τους πόνους υπενεγκών, ουκ ολίγας ιδρώτας εκχέας, και μεγάλους οσημέραι του βίου παλαιάσας τοις δυστυχήμασιν»

Τα κείμενα του έργου, όπως ο ίδιος γράφει «θησαύρισε» από τις σπουδές του κοντά στον δάσκαλό του αλλά και «παρ' άλλων αρχαιοτέρων ερανιζόμενος» των οποίων τα συγγράμματα έτυχε να συναντήσει, και «πολλοίς αναπτυχθέντα τε και καλλωπισθέντα ιδρώσι εκδοθήναι του θεού ευδοκήσαντος».

Μετά το πρώτο προοίμιο ακολουθεί

**Ο ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ
ΤΩΝ ΥΠΟΓΡΑΦΑΝΤΩΝ ΧΑΡΙΝ ΣΥΝΔΡΟΜΗΣ ΤΙΝΟΣ
Και βοηθείας εις ανακουφισμόν του Εκδότου δια το
Δαπανηρόν περί την έκδοσιν των Μαθηματικών
Τούτων πραγματειών**

Μετά από τις θερμές ευχαριστίες, τις ευχές και τις εκδηλώσεις ευγνωμοσύνης προς τους «εις την παρ' αυτά βιβλίον της αντιμισθίας» αναφέρει τα ονόματα των 38 συνδρομητών «βαθμηδόν προϊόντα» και στην συνέχεια ακολουθεί το δεύτερο προοίμιο το οποίο απευθύνεται στους αναγνώστες.

**ΠΡΟΙΜΙΟΝ
Προς τους φιλομαθείς**

Στο προοίμιο το οποίο απευθύνεται προς τους αναγνώστες, ο Μπαλάνος, αναφέρεται στο «ακριβές και το αμετάπταιστον» των Μαθηματικών, επιχειρηματολογεί για την διευκόλυνση την οποία επιφέρει η μελέτη της Μαθηματικής επιστήμης στην κατανόηση και των άλλων επιστημών, και εκφράζει την απογοήτευσή του αφού «θαυμάσιος επιστήμη τοις πλείοσιν ήδη καταμέληται».

Με την φράση: «Ορθώς τω όντι γε φθάσας, Φιλομαθέστατοι, Πτολεμαίος ο Κλαύδιος, εν τοις Επιστήμοις είναι τοις ανθρώποις απεφήνατο Γένος, την Μαθηματικήν και μόνην», αρχίζει το προοίμιο ο Μπαλάνος, αποδεχόμενος την άποψη του Πτολεμαίου ότι μόνον η Μαθηματική αξιούται να έχει το όνομα της επιστήμης. («επιστήμοις ονόματι καλείσθαι αξιοί»).

Ο Πτολεμαίος δικαιολογεί και την αιτία του ισχυρισμού του, παραβάλλοντας μεταξύ τους το «Μαθηματικόν», με το «Φυσικόν» και το «Θεολογικόν».

Γιατί για μέν το Φυσικό «δια το της ύλης άστατον και άδηλον» για δε το Θεολογικό «δια το αφανές αυτού και ανεπίληπτον», και τα δύο «εικασίαν μάλλον, ή κατάληψιν επιστημονικήν καλείσθαι δειν οίεται».

Γιατί, η γνώση την οποία παρέχει η Μαθηματική για εκείνα με τα οποία ασχολείται, είναι «ακριβής και αμετάπταιστος», εκείνο το οποίο δηλαδή χαρακτηρίζεται

επιστημονική γνώση. Και αφού οι γνώσεις αυτές τεκμηριώνονται με αποδείξεις, «ουδεμία κατά τούτο τοις τε πάλαι και νυν διένεξις ευρίσκεται και διαφωνία».

Ποιος μπορεί ακόμα και αν είναι «διαβατικώτατος νους και διαλεκτικώτατος» να ανασκευάσει «το τας τρεις του τριγώνου γωνίας δυσίν ορθαίς ίσες είναι»; Ή ποιος μπορεί να μην δεχθεί «πεπεισμένως», «τας εν ταις παραλλήλοις δια της εις αυτάς εμπιστούσης γραμμής συνισταμένας εναλλάξ γωνίας ίσας είναι» ή και όσα άλλα, με γεωμετρικές αποδείξεις εμπεδώνονται;

Η Μαθηματική επιστήμη είναι «θαυμάσια συνεργός» και των άλλων θεωρητικών γιατί και προς την γνώσιν των αυτών «ημάς ποδηγετούσα» και προς την κατανόηση των ενύλων «τα μάλιστα συντελούσα». Γιατί εκείνος ο οποίος έχει προγυμναστεί στα μαθηματικά προβλήματα και θεωρήματα μπορεί απονώτερα και ευστοχώτερα «εις την των αυτών κατά το εφικτόν ανθρώποις ελθείν κατάληψιν, και τοις απορρήτοις των κατά φύσιν εμβατεύσαι».

Και ο Μπαλάνος διερωτάται: «ουκ οίδα δ' όπως, η τοσούτον εις γνώσιν τοις ανθρώποις συντελούσα, και ούτω θαυμάσιος επιστήμη τοις πλείοσιν ήδη κατημέληται»

Και ναι μεν οι περισσότεροι διδάσκουν φυσική θεωρία και μεταφυσική, Ρητορική, Διαλεκτική και Ποιητική αλλά για την Μαθηματική, άλλοι γιατί «προς τους πόνους αποδειλιώντες», άλλοι «μικρόν τι συμβαλλούσης τοις φιλομαθέσι» και άλλοι «ως τερατώδη τινα επαγγελομένης διδάσκειν», δεν κάνουν κανένα λόγο ή ελάχιστα ασχολούνται με αυτήν.

Η απογοήτευση του Μπαλάνου για την απουσία της διδασκαλίας και της σπουδής της Μαθηματικής επιστήμης είναι έκδηλη σε όλο το κείμενο.

Αιτία κατονομάζει την αιχμαλωσία. «Αλλά δεινόν γε και πάνυ δεινόν η αιχμαλωσία», διότι οι περισσότεροι των Ελλήνων ήταν κάποτε εραστές της Μαθηματικής και «τοις συνεχέσι πόνοις τε και ιδρώσιν» πολλά ανέδειξαν γεννήματα και των οποίων τα μέχρι τώρα σωζόμενα συγγράμματα θαυμάζονται από όλους, όπως είναι «του Ευκλείδου το στοιχειώδες, του Αρχιμήδους το περί τας μηχανάς και Πτολεμαίου το περί μεγάλης συντάξεως και άλλων άλλα, όσ' ακριβή, και τελειοτέραν την περί άλλων τινών υποθέσεων έχουσι την διδασκαλίαν».

Η μεγάλη ταραχή την οποία επέφερε η δεινή αιχμαλωσία και η παντελής ερήμωση των κάποτε θαυμασίων Ακαδημιών και των κοινών «μουσοτροφείων» καθώς και «των προς το ζην αναγκαίων την πάσαν αυτών καταβαλλομένην φροντίδα», έγιναν η αιτία, της Ποιητικής το κάλλος, της Ρητορικής η δεινότης, της Φυσικής και της Μεταφυσικής η ακριβής θεωρία «ημέληται πως και ελαττόνηται». Αλλά «Μαθηματικής δε χάρις εις το παντελές εξέλειπεν», σαν να μην ήκμαζε ποτέ εις το Ελληνικό Γένος.

Μεταδίδει όμως την αισιοδοξία στους αναγνώστες γιατί όπως γράφει επειδή «ουδέν όντως θαυμαστόν, είχε το Ελληνικόν γένος», παρά που έχει γυμνωθεί από την Μαθηματική επιστήμη, εν τούτοις, «εν ηρεμία των παθών, και γαλήνη της πολυταράχου ταύτης ζωής», ο νους θα μπορέσει να συλλέγει τις μαργαρίτες των επιστημών «και τον ποικίλον της μαθηματικής και ευμήχανον υφαίνειν κεστόν».

Στην συνέχεια του προοιμίου, ο Μπαλάνος, αναφέρεται με σεβασμό στον δάσκαλό του Μεθόδιο Ανθρακίτη, «ο εμός εις την μαθηματικήν οδηγός τε και ηγεμών», και στην μεγάλη συμβολή του στην πνευματική εξύψωση του υπόδουλου Γένους.

Όπως μας πληροφορεί, ο Ανθρακίτης, αφού διδάχτηκε στα Ιωάννινα Γραμματική, Κυκλοπαίδεια, Φυσική και Μεταφυσική από τον Γεώργιο Σουγδουρή στην συνέχεια «δι έρωτα της Λατινίδος» μετέβη στην Βενετία όπου και διδάχτηκε «δια μακρού χρόνου»,

Γεωμετρία, Τριγωνομετρία, Γεωγραφία, Αστρονομική, Οπτική, Διοπτρική και Κατοπτρική, Μηχανική και όσα «δια του Αναλογικού Διαβήτη πολυτρόπως άμα και ευμεθόδως θηρεύεται».

Επιστρέφοντας εις την πατρίδα του ανέλαβε την επιστασία του «Φροντιστηρίου» της Καστοριάς και εκεί διδάσκοντας τους μαθητές οι οποίοι έσπευδαν και από άλλου να ακούσουν την διδασκαλία του, σε πολλούς από αυτούς «τον εις την μαθηματικήν εξεύκασον έρωτα».

Και εξ αιτίας του κατεπείγοντος του καιρού και της μεγάλης έφησης των ακροατών του στην μαθηματική, θέλοντας να εκθέσει «τα πλείω της μαθηματικής είδη», προς χάριν των φιλομαθών, επεξεργάστηκε και παρουσίασε συνεπτυγμένη και συντετμημένη την ερμηνεία περί των μαθηματικών προβλημάτων και θεωρημάτων.

Και επειδή ήταν «ανεπιτήδεια εις παράδοσιν τα παρά του ανδρός τούτου εκδοθέντα, λύπης μάλλον ή ηδονής ήταν πρόξενα τοις φιλομαθέσιν». Εξ' αιτίας αυτού, για να μην μετατραπεί «ο πρότερον θερμότατος των φιλομαθών έρωσ , εις τοιούτον μίσος δια το ασαφές και δύσληπτον», και πριν «το λίαν πρόθυμον των νέων εις την άκραν μετατραπεί αμέλειαν», αυτός, ο Μπαλάνος, τα φιλοπονήματα εκείνου «πολλοίς τε πόνοις, και ιδρώσιν ουκ' ολίγοις» κατέστρωσε σε αυτήν την τάξη που ήδη βλέπετε και έδωσε την αρμόζουσα κατά την γνώμη του ερμηνεία, κάποια δε προβλήματα και θεωρήματα ακριβώς αναπτύχθηκαν, άλλα αναπληρώθηκαν και πολλά προστέθηκαν για να γίνουν τα κείμενα σαφέστερα. Και στην συνέχεια έγινε η έκδοσή τους «προς χάριν των φιλομαθών».

Τα τρία προοίμια ο Μπαλάνος κλείνει με την

ΠΡΟΪΜΙΑΚΗ

Ιστορία περί ευρέσεως, αρχαιότητας, αυξήσεως, και της κατά το τέλειον επιδόσεως της Μαθηματικής

Στο τρίτο προοίμιο του οποίου η συγγραφή αποδίδεται στον Ανθρακίτη, γίνεται μία σύντομη αλλά αξιόλογη παρουσίαση της ιστορίας των Μαθηματικών και των επιφανέστερων αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών «χάριν των πρωπείρων μαθητιόντων». Μέσα σε επτά πυκνογραμμένες σελίδες, ο Ανθρακίτης παρουσιάζει και εξαίρει το θαυμαστό έργο το οποίο οι πρόγονοι των υποδούλων Ελλήνων κληροδότησαν στην υφήλιο.

Η «προοιμιακή ιστορία» αρχίζει από τους απογόνους του Σηθ, οι οποίοι, όπως λέγεται, παρατήρησαν πρώτοι «την τάξιν των ουρανίων σφαιρών, την θέσιν, και δρόμον των αστερών».

Σύμφωνα με την παράδοση, αφού προείπε ο Αδάμ «την παγγενή φθοράν του παντός» η οποία θα γινόταν η μία με τον κατακλυσμό και η άλλη με τον εμπρησμό, οι απόγονοι του Σηθ, για να εξασφαλίσουν στους μεταγενέστερους «τα ευρεθέντα και συνεχθέντα δια των παρατηρήσεων», τα κατέγραψαν σε δύο στήλες. Η μεν μία ήταν πλίνθινη και η άλλη λίθινη, ώστε εάν τύχει να χαθεί η πλίνθινη με τον κατακλυσμό και σωζόμενη η λίθινη, «επαρκέσει τοις ανθρώποις εις εύρεσιν της επιστήμης».

Αλλά όπως χάθηκε η πλίνθινη με τον κατακλυσμό, έτσι χάθηκε και η λίθινη με τον εμπρησμό. Λέγεται όμως ότι σώζεται η λίθινη στην Ασυρία της οποίας οι κάτοικοι μαζί με τους Χαλδαίους ήταν οι πρώτοι μετά τον κατακλυσμό οι οποίοι σεβάστηκαν «τας Μαθήσεις».

Στην συνέχεια, στην Αίγυπτο, -μετά την κατάληψή της από τους Ασύριους και τους Χαλδαίους-, «ποσοῦτον προήεισαν της περί την μάθησιν επιδόσεως, ὥστε πιστεύεσθαι αὐτοὺς πατέρας μαθήσεως».

Ο Αριστοτέλης, στο α' κεφάλαιο, του α' τόμου στο έργο του *Μετά τα Φυσικά* αποφαινεται: «τας Μαθηματικὰς ἐπιστήμας πρῶτον ἐν τῇ Αἰγύπτῳ παρὰ τῶν ἱερέων εὐρεθεῖναι». Από εκεί η μάθησις έφτασε εις την Ελλάδα «και τοις εκεί φιλοσόφοις εσπεύσατο». Διότι πρῶτος ο Θαλής ο Μιλήσιος ο οποίος ήκμασε το έτος φθδ' π. Χ., πήγε στην Αίγυπτο και «εκδιδαχθεὶς ἐκείθε τὴν μάθησιν ἱκανῶς», αφού επέστρεψε στην Ελλάδα, άρχισε να δημοσιεύει την Γεωμετρία.

Στην συνέχεια ο Μπαλάνος αναφέρει εν συντομία τα πνευματικά επιτεύγματα των σημαντικότερων αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών, τους οποίους παρουσιάζει χρονολογικά αρχίζοντας από τον Θαλή τον Μιλήσιο και καταλήγοντας στον Πάππο (τω μεν χρόνω ὕστατος πάντων σχεδόν).

Τον Θαλή τον Μιλήσιο, ο οποίος πρῶτος ονομάστηκε «πατήρ και ευρετής της μαθηματικῆς ἐπιστήμης» και την σύντομη παρουσίαση του έργου του ακολουθεῖ χρονολογικά η περιληπτική αναφορά στα έργα των Μαθηματικῶν οι οποίοι είναι:

Πυθαγόρας ο Σάμιος, (ηύξησε και κατεκόσμισε ικανῶς τας μαθηματικὰς ἐπιστήμας), Αναξαγόρας ο Κλαζομένης, Οἰνοπίδης ο Χίος, Βρίσων ο Αττιφών, Ιπποκράτης ο Χίος, Δημόκριτος, Θεόδωρος ο Κυρναῖος (του Πλάτωνος απομνημονεύεται διδάσκαλος), Πλάτωνας (οὐδεὶς ἕτερος εἰς μείζον φῶς ἤγαγε τας Μαθηματικὰς ἐπιστήμας), Λεοδάμας ο Θάσιος, Αρχίτας ο Ταραντίνος, Θηαίτητος ο Αθηναῖος, Νεοκλείδης, Εὐδόξιος ο Κνίδιος, Αμύκλας ο Ηρακλειώτης, Μέναιχος, Δημόστρατος, Ελικών ο Κυζικηνός, Θαύδιος, Ερμότιμος ο Κολοφώνιος, Φύλιππος ο Μηδμαῖος, Αριστοτέλης, Εὐδήμος, Θεόφραστος, Αρισταῖος, Ισίδωρος, Υψικλής, Ερατοσθένης, Αρχιμήδης, Κώνων, Απολλώνιος ο Πηργαῖος, Ἴππαρχος, Μενέλαος, Θεοδόσιος ο Τριπολίτης, Πτολεμαῖος ο Κλαύδιος, Εὐτόκιος Ασχαλωνίτης, Φίλωνας, Διοκλής, Σπῆρος, Ἡρώνας, Κητσίβιος ο Αλεξανδρεὺς, Διόφαντος, Νικόμαχος, Πρόκλος ο Λύκιος, Θέων, Πρόκλος ἄλλος, Πάππος.

Στα έξι επιγράμματα τα οποία ακολουθούν, ένα από τα οποία αφιερώνεται στον Μεθόδιο Ανθρακίτη, εγκωμιάζεται το έργο και η προσφορά του Μπαλάνου προς το υπόδουλο Γένος.

Ειδικότερα πριν να αρχίσει την ανάλυση των «Στοιχείων» του Ευκλείδη προτάσσει προοίμιο το οποίο καταλαμβάνει πέντε (5) πυκνογραμμένες σελίδες και περιέχει:

- Λυρικές παραινέσεις και παρομοιώσεις: «Ὡςπερ τῷ βουλευμένῳ εἰσελθεῖν εἰς πολυανθὴ τινὰ λεῖμῶνα, και λαβυρινθώδη ταις πρασιαῖς, και τα ἐν αὐτῷ ποικίλα τῶν ανθῶν εἶδη ...και ἐκάστου τούτου το κάλλος, το μέγεθος τὴν χρεῖαν τὴν ποικιλίαν, τὴν οσμήν, και τα' ἄλλα, ὅσα τοις άνθεσι συμφύεται δη και επιφύεται,

διαγνώναι ζητούντι,.....ούτω τοι και τω ποθούντι της μαθηματικής ήδη επιστήμης μέχρι μυχών γενέσθαι, και τα άδυτα ταύτης οδεύσαι, και τα όργια μυθεΐναι....»

- Χαρακτηρισμούς για την Μαθηματική επιστήμη:

«Πολυσανθής μεν γαρ η Μαθηματική επιστήμη πέφυκεν ουχ' ήττον, η πολυειδής, άτε δη περι πολλών και παντοδαπών θεωρημάτων τε και προβλημάτων....»

«Λαβυρινθώδης δε τη πολυπλέκτω σειρά των ειδών, και τω τα πρότερα των εγγύς, προόδους τινάς, ή μάλλον εισόδους είναι»

- Χαρακτηρισμούς για το έργο «Στοιχεία»:

«Ταύτα Δαιδάλεον μηχανήν ειπών ουκ αν αμάρτης»

«Ταύτα θυγάτηρ πρώτη και περικαλής της αυτής (Μαθηματικής επιστήμης) καθέστηκε»

- Κατευθυντήριες γραμμές για «τω ποθούντι τα άδυτα της μαθηματικής επιστήμης οδεύσαι»:

«...μη δύνασθαι τον ταύτης εραστήν εντελώς γε του ποθουμένου τυχεΐν, ή όλως απροσκόπτως επί τα πρόσω χωρήσαι, ειμή γε πρότερον εν άλλοις προπαιδευθή»

«...τον απλάνεσι την μαθηματικήν επιστήμην περιπολεύσαι εθέλοντα, και ιθυπόροις πτέρυξι και ακμήτοις εις τον κολοφώνα ταύτης αναδραμείν, χρεών δικτυν Θησεώς τη Αριάδνη....»

- Σχόλια και σύντομη αναφορά στο έργο «Στοιχεία» του Ευκλείδη, τον οποίο χαρακτηρίζει «Δαιδάλου ευμηχανώτερο» γιατί «έκτισε» ένα μαθηματικό οικοδόμημα αφού πρώτα συνέλεξε «τας τοις πάλαι στοιχειώδεις ευρεθείσας προτάσεις» και στη συνέχεια τις ανέπτυξε, πρόσθεσε και ο ίδιος «ουκ' ολίγας», πρόταξε τις μαθηματικές αρχές και τα ρύθμισε έτσι ώστε «μιας μόνης αφαιρουμένης, ή γουν παρεωραμένης, άπαν το ύφασμα ατελές είναι τε και γινώσκεσθαι».

Το έργο των «Στοιχείων» δεν περιέχει μόνο «ταις περί τα ευθύγραμμα των σχημάτων ασχολουμέναις πραγματείαις, αλλά και ταις περί τους αριθμούς, και τα στερεά των σωμάτων στοιχειώδη καθέστηκε».

Όπως αναφέρει στο προοίμιο του ο συγγραφέας, τα «Στοιχεία» διαιρούνται σε δεκαπέντε βιβλία⁴⁶⁴.

Τα έξι από αυτά «των περί των εν επιπέδω σχημάτων διαλαμβάνειν». Το πέμπτο και μόνο από αυτά τα έξι, «τας των μεγεθών προς άλληλα σχέσεις και λόγους αναπτύσσειν». Τα υπόλοιπα «περί των τριπλεύρων, τετραπλεύρων τε, και άλλων τινών σχημάτων, και έτι περι κύκλων εφερμηνεύειν».

Μετά από τα έξι αυτά βιβλία τα τρία από τα υπόλοιπα «τας των αριθμών σχέσεις αποθησαυρίζειν». Στην συνέχεια, το δέκατο, «περί των σχέσεων των περιεχουσών τα σχήματα πλευρών, και μη, και των εκ' τούτων χωρίων, και άλλων τινών πολυπραγμονεί.», για τον λόγο αυτό είναι «και περιεργωδέστερον και υψηλοτέρου νοός δεόμενον».

Τα υπόλοιπα πέντε βιβλία «στερεών σωμάτων επιγράφεται, άτε δη τα ανήκοντα τοις στερεοίς ανιχνεύοντα σώμασιν»

- Την απαρίθμηση και την ερμηνεία των μερών από τα οποία αποτελούνται τα βιβλία των «Στοιχείων». Τα μέρη αυτά είναι οι ορισμοί, τα αξιώματα, τα

⁴⁶⁴ Τα βιβλία XIV και XV αποδίδονται στον Υψικλή.

αιτήματα και οι προτάσεις, τα οποία διακρίνει σε δύο κατηγορίες: εκείνα τα οποία είναι αναπόδεδικτα όπως είναι οι όροι, τα αιτήματα και τα αξιώματα και στις προτάσεις οι οποίες «αποδείξεως δέονται» Όπως και σε άλλες εκδόσεις της εποχής αυτής, ο συγγραφέας ορίζει τα παραπάνω «δομικά στοιχεία» ως εξής:

1) Όρος μεν ουν εστί γνώσις αναπόδεδικτος καθ' υπόθεσιν, μη καθ' αυτήν γνώριμος, εις αρχήν λαμβανομένη.

2) Αίτημα δε, γνώσις αναπόδεδικτος, ούτε καθ' αυτήν γνώριμος, ούτε μεν παρά του μαθητόντος δεχομένη, λαμβανομένη δε εις κατασκευήν τινός και αρχήν.

3) Αξίωμα δε, γνώσις αναπόδεδικτος, γνώριμος, και καθ' εαυτήν το πιστόν έχουσα, εις αρχήν λαμβανομένη. και ταύτα μεν ικανά περί των Αναποδεδίκτων.

4) Των δε Προτάσεων των αποδείξεως δεομένων, όσαι μεν αν τας γενέσεις των σχημάτων, τας τομάς τας αφαιρέσεις, ή προσθέσεις, και όλως τα τούτων παθήματα περιέχωσι, **Προβλήματα** λέγονται. Όσαι δε τα εν τοις σχήμασι συμβαίνοντα επιστημονικώς αποδεικνύουσι, **θεωρήματα** καλείται, ως οικειότεραι ταις θεωρητικαίς επιστήμαις.

Δηλαδή, ο Ανθρακίτης, χωρίζει τις προτάσεις σε προβλήματα και θεωρήματα. Και ενώ το πρόβλημα είναι η «γνώσις» η οποία ερευνά «δι αποδείξεως τα των σχημάτων παθήματα και το προσταττόμενον ποιούσα», το θεώρημα είναι η «γνώσις» η οποία αποδεικνύει επιστημονικώς «τα εν τοις σχήμασι συμβαίνοντα» και η οποία ζητά «τας προς άλλα τούτων λόγους».

Ο ορισμός των αιτημάτων, όπως γράφει ο συγγραφέας, δίνεται σύμφωνα με τον Πρόκλο αλλά και ο όρος «αξίωμα» τον οποίο χρησιμοποιεί, είναι του Αριστοτέλη και του Πρόκλου ενώ ο Ευκλείδης αντί για το «αξίωμα» χρησιμοποιεί τον όρο «κοινή έννοια».

- Την αναφορά και περιγραφή για τα: «τίνα και πόσα τα μέρη του προβλήματος και θεωρήματος». Συγκεκριμένα τα έξι στάδια μιας πλήρους απόδειξης όπως περιγράφονται από τον Ανθρακίτη είναι:

 - 1) **Η έκθεσις** δε αυτό καθ' αυτό το διδόμενον, και υποτιθέμενον τη ζητούσει προεντρεπίζει (;) και το συμπερανησόμενον προαγγέλλει.
 - 2) **Ο δε διορισμός** το ζητούμενον ή συμπερανησόμενον χωρίς ορίζει, και οιοτεί επιτάττει γενέσθαι.
 - 3) **Η δε κατασκευή** τα εις απόδειξιν του δεδομένου συμβάλλοντα προστάττει ποιείν, και οιά τις προπαρασκευή αποδείξεως έστι.
 - 4) **Η απόδειξις** δε επιστημονικώς και εξηκριβωμένως από των ομολογηθέντων ή γνωρίμων συνάγει το ζητούμενον, ή το προκείμενον.
 - 5) **Το δε συμπέρασμα** ως έσχατον, ήτοι επί την πρότασιν επαναστρέφων, ή το διερεθέν αναμνησκον, ββαιεί το συνταχθέν.

Από αυτά, τα αναγκαϊότερα, είναι η πρόταση, η απόδειξη και το συμπέρασμα, γι' αυτό χάριν συντομίας «τη μεν η έκθεσις τω διορισμώ ενούται», η δε κατασκευή «ως μη συμβάλλουσα παροράται».

- Τους ορισμούς των: λήμματος, πώσης, πορίσματος, ένστασης, επαγωγής και εις αδύνατον επαγωγής.

- 1) **Λήμμα** μεν οὖν ἐστὶ πρότασις προαποδεδειγμένη, ἢ μη, αποδείξεως δε και λόγου δεομένη, εις κατασκευήν, ἢ ἀποδείξιν ἄλλης τινός προτάσεως λαμβανομένη. Διεντύοχε (:) δε του Αξιώματος, ὅτι ἐκεῖνο μεν αναπόδεικτον, αὐτὴ δε αποδείξεως και λόγου δεομένη.
- 2) **Πτώσις** δε ἐστὶ διάφορος κατασκευῆς τρόπος, και εξαλλαγή θέσεως, η της των σημείων, ἢ των γραμμῶν, ἢ των επιπέδων, ἢ των στερεῶν, διό και πτώσις καλεῖται, οἷα μετάρσεις της κατασκευῆς.
- 3) **Πόρισμα** δε ἐστὶ θεώρημα εκ προβλήματός τινος, ἢ θεωρήματος αναφαινόμενον, ἢ και συναγόμενον, καλεῖται δε πόρισμα, ως τι κέρδος ὄν της επιστημονικῆς αποδείξεως πάρεργον.
- 4) **Ἑνστασις** δε διακοπή ἐστὶ του λόγου, και ἐπὶ τουναντίον μετάρσεις, ἢ προς την κατασκευήν, ἢ προς την ἀποδείξιν απαντώσα. δεῖ δε τον προθέμενον, ανελεῖν μεν την ἑνστασιν, δείξε δε τον χρώμενον αὐτὴ ψευδόμενον.
- 5) **Επαγωγή** δε ἐστὶ μετάρσεις ἀπ' ἄλλου προβλήματος, ἢ θεωρήματος ἐπ' ἄλλο ομοίως πρόβλημα, ἢ θεώρημα. ου γνωθέντος, ἢ πορευθέντος, και το προκείμενον ἐστὶ καταφανές.

Η δε εις αδύνατον Επαγωγή λήψις ἐστὶ του μαχομένου τῷ ζητούμενῳ. καταντώσα δε εις άτοπον ομολογούμενον, διαβεβαιεῖ το ζητούμενον.

Ο Ανθρακίτης διαίρει τις προτάσεις στις παραπάνω πέντε (5) κατηγορίες ὅπως ακριβῶς και ο Πρόκλος. Η παραπάνω ομαδοποίηση των προτάσεων ἦταν γνωστὴ και στους αρχαίους Ἑλληνες (π. χ. στον Πλάτωνα) ἀλλὰ συναντάται και σε εκδόσεις των «Στοιχείων».⁴⁶⁵

Γενικές παρατηρήσεις οι οποίες αφορούν στα προοίμια της «Οδοῦ Μαθηματικῆς»

α) Η σύντομη ἀλλὰ πολὺ περιεκτικὴ και αξιόλογη παρουσίαση των επιφανέστερων αρχαίων Ἑλλήνων μαθηματικῶν και του ἔργου τους,⁴⁶⁶ ἡ οποία γίνεται στην «Προοιμακὴ ιστορία της Μαθηματικῆς» ἀπὸ τον Μεθόδιο Ανθρακίτη, εἶναι πολὺ σημαντικὴ, ὅχι μόνον για την ενημέρωση των «πρωτῶν μαθητῶν», ἀλλὰ και για την ἐξύψωση του εθνικοῦ τους φρονήματος μέσα ἀπὸ την γνώση ὅτι εἶναι ἀπόγονοι προγόνων σοφῶν, των οποίων τα πνευματικὰ επιτεύγματα προκαλοῦν τον παγκόσμιο θαυμασμό.

Δεν εἶναι λοιπόν υπερβολικὸ το ὅτι οι διαφωτιστές λόγιοι και δάσκαλοι του Γένους διακήρυτταν πως ἡ παιδεία και ἡ γνώση θα αποτελούσε πηγὴ φωτισμοῦ του Γένους, ἡ οποία στην συνέχεια θα οδηγούσε στον ἐνοπλο ἀγῶνα.

Στην ομιλία του Κολοκοτρώνη, ἐξάλλου, προς τα παιδιά του γυμνασίου στην Αθήνα το Νοέμβριο του 1838, διαβάζουμε: «Εἰς αὐτὴν την δυστυχισμένην κατάστασιν μερικοῖ

⁴⁶⁵ Με τὴ δημιουργία της ἀριστοτελικῆς λογικῆς ο Εὐκλείδης εἶναι σε θέση να δώσει το λογικὸ οικοδόμημα των «Στοιχείων». Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. P. Mancosu. *Aristotelian logic and Euclidean Mathematics. Studies in the History and Philosophy of Science*, Vol 23, 1992, σελ. 242-65

⁴⁶⁶ Την προοιμακὴ ιστορία ἔγραψε ο Μεθόδιος Ανθρακίτης. Εὐ. Νικολαΐδης, «Η αναγέννηση των Αρχαίων Μαθηματικῶν στην Ελλάδα του 18^{ου} αἰῶνα», στον τόμο «Αρχαία Ἑλληνικά Μαθηματικά», επιμ. Δ.Α Αναπολιτάνου- Β. Καρασμάνη, εκδ. Τροχαλία, Αθήνα 1993, σ 137

από τους φυγάδες γραμματισμένους μετέφραζαν και έστελναν εις την Ελλάδα βιβλία. και εις αυτούς πρέπει να χρωστούμε ευγνωμοσύνη, διότι ευθύς όπου κανένας άνθρωπος από το λαό εμάνθαναν τα κοινά γράμματα, εδιάβαζεν αυτά τα βιβλία, και έβλεπε ποιους είχαμε προγόνους, τι έκαμεν ο Θεμιστοκλής, ο Αριστείδης, και οι άλλοι παλαιοί μας, και εβλέπαμε και εις ποίαν κατάστασιν ευρισκόμεθα τότε. Όθεν μας ήλθεν εις το νου να τους μιμηθούμε και να γίνωμε ευτυχέστεροι. Και έτσι έγινε και επροόδευσεν η Εταιρεία»⁴⁶⁷

β) Στο τρίτο προοίμιο, «Προοιμιακή ιστορία της Μαθηματικής», η σύντομη αναφορά στην ανάπτυξη των Μαθηματικών από τους λαούς της Μεσοποταμίας⁴⁶⁸ (Ασσυρίους, Χαλδαίους) και τους Αιγύπτιους, καθώς και τα αναφερόμενα στις πρώτες αστρονομικές παρατηρήσεις οι οποίες –σύμφωνα με την παράδοση- αποδίδονται στους απογόνους του Σήθ και τον τρόπο με τον οποίο αυτοί διαφύλαξαν τις γνώσεις τους προς χάριν των επόμενων γενεών, τον μύθο με την πλίνθινη και την λίθινη στήλη, περιέχονται στο ανέκδοτο έργο του Ανθρακίτη «Λογική ελάττων Μεθοδίου»⁴⁶⁹.

γ) Στο προοίμιο «Προς τους Φιλομαθείς», ο Μπαλάνος, αναφέρει ότι ο δάσκαλός του Μεθόδιος Ανθρακίτης, «δια το κατεπείγον του καιρού και την των ακροατών άπληστον εις τα τοιαύτα έφεσιν», θέλοντας να εκθέσει τα περισσότερα «της μαθηματικής ειδής» προς χάριν των φιλομαθών, παρουσίασε την ερμηνεία των μαθηματικών προβλημάτων και θεωρημάτων «συνεπτυγμένων πως και λίαν συντετμημένων».

Η παρουσίαση αυτή – σύμφωνα με τον Μπαλάνο- είχε σαν αποτέλεσμα να λείπει η τάξη και ο ρυθμός από τα κείμενα του Ανθρακίτη και «ανεπιτήδεια όντα εις παράδοσιν» να είναι «λύπη μάλλον ή ηδονή πρόξενα τοις φιλομαθέσιν».

Ο ίδιος, όπως γράφει, προκειμένου να μην μετατραπεί ο «θερμότατος των φιλομαθών έρως εις τοιούτον μίσος δια το ασαφές και δύσληπτον», καθώς και το «λίαν πρόθυμον των νέων» για την εκμάθηση της Μαθηματικής «εις την άκρην αμέλειαν», αποφάσισε, «πολλοίς τε πόνοις, και ιδρώσιν ουκ ολίγοις», να τα βάλει σε τάξη τα «φιλοπονήματα» του Ανθρακίτη, να τους δώσει την ερμηνεία που εκείνος έκρινε κατάλληλη, να συμπληρώσει τα προβλήματα και τα θεωρήματα, να προσθέσει περισσότερα κείμενα για να γίνουν τα ήδη υπάρχοντα σαφέστερα και να αναλύσει περισσότερο τους ορισμούς.

Τα όσα ισχυρίζεται ο Μπαλάνος προκαλούν απορία και μας γεννούν αμφιβολίες για τους παρακάτω λόγους:

- αφ' ενός μεν γιατί ο ίδιος αναφέρει στο προοίμιο «Προς τους φιλομαθείς» ότι ο Ανθρακίτης σε πολλούς από τους μαθητές του «τον εις την μαθηματικήν εξεύκασον έρωτα», πράγμα που δεν θα συνέβαινε εάν η διδασκαλία του ήταν δυσνόητη και ασαφής.
- Από τα σωζόμενα έργα του Ανθρακίτη βλέπουμε ότι τα κείμενά του είναι σαφή και πολύ κατανοητά. Ακόμα και τα έργα του τα οποία έχουν μορφή εκλαϊκευτική διακρίνονται από σαφήνεια και επιστημονική ακρίβεια. Στις επιστολές τις οποίες έστειλε πριν και μετά από την καταδικαστική του απόφαση, τα επιχειρήματά του

⁴⁶⁷ Το παράθεμα από το έργο του Δημήτρη Φωτιάδη, «Η επανάσταση του 21», τόμος Ι, σελ 169.

⁴⁶⁸ Βλέπε, Θεόδωρος Γ. Εξαρχάκος, «Ιστορία των Μαθηματικών. Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων», τόμος Α', Αθήνα 1997.

⁴⁶⁹ βλέπε Παναγιώτου Κ. Χρήστου, «Ανθρακίτης Μεθόδιος», έκδοσις Ηπειρωτικής Εστίας, Ιωάννινα 1953, σελ. 41

είναι καλά και με άριστο τρόπο τεκμηριωμένα. Δηλαδή, οι σπάνιες συγγραφικές του αρετές είναι εμφανείς σε όλα τα κείμενά του ανέκδοτα ή όχι. Είναι επομένως εύλογο να διερωτηθούμε, πώς είναι δυνατόν από το μαθηματικό του έργο να λείπει η τάξη και ο ρυθμός, όπως δηλώνει ο Μπαλάνος («εκάστη των ειρημένων πραγματειών...απελείπετο τάξεως και ρυθμού»)

- Η προσπάθεια του Ανθρακίτη να γίνεται όσο το δυνατόν περισσότερο κατανοητός από τους μαθητές του φαίνεται και από την μορφή της γλώσσας την οποία υιοθέτησε όχι μόνο για την διδασκαλία του, αλλά και για την συγγραφή των έργων του πριν από την καταδικαστική απόφαση. Συγκεκριμένα, ο Ανθρακίτης, για την πληρέστερη κατανόηση των κειμένων, ήταν υπέρμαχος της εισαγωγής της «δημώδους» γλώσσας για την διδασκαλία και την συγγραφή των διδακτικών βιβλίων και όχι της αρχαϊζουσας όπως γίνονταν μέχρι τότε. Πιθανόν ήταν ο πρώτος από τους δασκάλους που χρησιμοποίησε γλώσσα απλή κατά την διδασκαλία του.⁴⁷⁰ Ο συντηρητικός δάσκαλος Μπαλάνος, μετέτρεψε και παρουσίασε το μαθηματικό έργο του Ανθρακίτη στην αρχαϊζουσα, γλώσσα, την οποία χρησιμοποιούσαν όλοι οι συντηρητικοί δάσκαλοι την εποχή της τουρκοκρατίας.
- Όπως ισχυρίζεται ο Μπαλάνος, οι πραγματείες του Ανθρακίτη «την προσείκουνσαν, ως γ' εμοί δοκεί αυτοίς ερμηνεία ντε και διαίρεσιν εδέξαντο, τινών με των εν αυτοίς προβλημάτων τε και θεωρημάτων, ακριβώς αναπτυχθέντων, άλλων δε αναπληρωθέντων, και πολλών εις μείζονα των κειμένων σαφήνειαν προστεθέντων, των όρων εφ' εκάστου προεκτεθέντων». Χωρίς να υποτιμούμε τις γνώσεις του, εν τούτοις σε καμία περίπτωση δεν είχε την ευρυμάθεια του Ανθρακίτη ο οποίος σπούδασε για δωδεκαετία στην Βενετία («ανδράσιν εις άκρον τη των μαθηματικών εξησκημένοις θεωρία... δια μακρού εκδιδασθείς χρόνου...»)⁴⁷¹ και υπήρξε ένας εξαιρετος επιστήμονας της εποχής του. Και πάλι εύλογα γεννάται η απορία: εάν τα μαθηματικά κείμενα του Ανθρακίτη χρειάζονταν να αναλυθούν περισσότερο και να συμπληρωθούν με νέες προτάσεις, πώς αυτό δεν έγινε από τον ίδιο τον Ανθρακίτη ο οποίος διέθετε και τις γνώσεις και το συγγραφικό ταλέντο αλλά -όπως όλα δείχνουν- και την πρόθεση να είναι όσο το δυνατόν περισσότερο κατανοητός;

Κάποιες γενικές παρατηρήσεις οι οποίες προκύπτουν από την μελέτη του προοιμίου το οποίο αναφέρεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη είναι ότι ο Ανθρακίτης:

- Περιλαμβάνει στην παρουσίαση των βιβλίων των «Στοιχείων» – όπως και πολλές άλλες εκδόσεις- δεκαπέντε (15) βιβλία, από τα οποία όπως είναι γνωστό, τα δύο, (το 14^ο και 15^ο) αποδίδονται στον Ύψικλη.
- Χρησιμοποιεί την ορολογία του Πρόκλου (π. χ. και ταύτα μεν κατά Πρόκλον καλούνται αιτήματα), διαιρεί τις προτάσεις σε πέντε κατηγορίες όπως ακριβώς και ο Πρόκλος και σχολιάζει τους ορισμούς και τις έννοιες σύμφωνα με αυτόν. Ο ίδιος ο συγγραφέας στο τέλος του προοιμίου γράφει: «ώρα δε της των όρων ερμηνείας κατά Πρόκλον άρξασθαι». Παρ' όλα αυτά, τα σχόλια στην Ο. Μ. δεν

⁴⁷⁰ Παναγιώτου Κ. Χρήστου, «Ανθρακίτης Μεθόδιος», έκδοσις Ηπειρωτικής Εστίας, Ιωάννινα 1953, σελ.

19

⁴⁷¹ Μπαλάνου Βασιλόπουλου, «Οδός Μαθηματικής», προοίμιο XII τόμος Α '

έχουν την έκταση και το «βάθος» που έχουν τα σχόλια του Πρόκλου, γιατί προφανώς ο συγγραφέας προόριζε το βιβλίο για διδακτικό εγχειρίδιο και απευθύνονταν σε αναγνώστες με περιορισμένες μαθηματικές γνώσεις. Μελετώντας τα κείμενα της Ο. Μ., σε κάποιες περιπτώσεις μας δημιουργείται η αμφιβολία αν ο συγγραφέας κατανοεί την σημασία και την αναγκαιότητα για τα σχόλια του Πρόκλου τα οποία χρησιμοποιεί.

- Δεν αναφέρει πουθενά ότι τόσο οι ορισμοί όσο και τα αξιώματα, τα αιτήματα και οι προτάσεις είναι λειτουργικά μέρη μιας ευρύτερης δομής, του «αξιωματικού συστήματος», πράγμα που φαίνεται να αγνοεί, όπως και οι μαθηματικοί της εποχής του.

3.3 ΤΟΜΟΣ 1^{ος}

3.3.1 ΕΚΘΕΣΙΣ ΑΚΡΙΒΕΣΤΕΡΑ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Συντομωτέρα ερμηνεία των όρων του πρώτου βιβλίου Ευκλείδου.

Στην επικεφαλίδα του κεφαλαίου διαβάζουμε για «Συντομωτέρα ερμηνεία των όρων του πρώτου βιβλίου». Πράγματι, η ερμηνείες των ορισμών του βιβλίου «Οδός Μαθηματικής», σε σχέση με αυτές του Πρόκλου, είναι όχι μόνον συντομότερες αλλά και απλοποιημένες. Στο βιβλίο «Οδός μαθηματικής», υπάρχουν 33 «όροι», ενώ στις περισσότερες εκδόσεις του βιβλίου των «Στοιχείων», όπως και σε αυτή του Heiberg, οι «όροι» είναι 23. Συγκεκριμένα, οι διαφορές που υπάρχουν στους ορισμούς της Ο. Μ., σε σχέση με τους ορισμούς της έκδοσης Heiberg των «Στοιχείων», είναι:

- Ο ορισμός ιε' της Ο. Μ., αποτελείται από τους ορισμούς ιε' και ιστ', του κύκλου και του κέντρου του κύκλου αντίστοιχα, των «Στοιχείων».
- Ο ορισμός ιζ' της Ο. Μ., ο οποίος αναφέρεται στο ημικύκλιο δεν περιέχει και τον ορισμό του κέντρου του ημικυκλίου, όπως γίνεται στον ορισμό ιη' των «Στοιχείων».
- Ο ορισμός ιη' της Ο. Μ., «Τμήμα κύκλου εστί το περιεχόμενον υπό τε ευθείας και κύκλου περιφερείας» δεν συμπεριλαμβάνεται στους ορισμούς των «Στοιχείων».
- Οι ορισμοί ιθ', κ', κα', κβ' της Ο. Μ., αποτελούν τον ορισμό ιθ' των «Στοιχείων».
- Οι ορισμοί κγ', κδ', κε' της Ο. Μ., αποτελούν τον ορισμό κ' των «Στοιχείων».
- Οι ορισμοί κς', κζ', κη' της Ο. Μ., αποτελούν τον ορισμό κα' των «Στοιχείων».
- Οι ορισμοί κθ', λ', λα', λβ' της Ο. Μ., αποτελούν τον ορισμό κβ' των «Στοιχείων».
- Ο ορισμός λγ', της Ο. Μ., ταυτίζεται με τον ορισμό κγ' των «Στοιχείων».

Οι ορισμοί των δύο βιβλίων ταυτίζονται γλωσσικά όταν αναφέρονται στο ίδιο αντικείμενο. Η διαφορά ως προς τον αριθμό των ορισμών οφείλεται πιθανότατα στην προσπάθεια του συγγραφέα να παρουσιάσει με απλούστερο τρόπο τους ορισμούς των «Στοιχείων».

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, τα σχόλια της Ο. Μ. που αφορούν στους ορισμούς, δεν έχουν την ευρύτητα των σχολίων του Πρόκλου, όμως τα σχόλια του Ανθρακίτη σε πολλούς ορισμούς χαρακτηρίζονται για τον πρακτικό τους χαρακτήρα. Για παράδειγμα

στον δ' ορισμό (τον ορισμό της ευθείας), ο συγγραφέας προκειμένου να ερμηνεύσει τον Ευκλείδειο ορισμό, και όπως ο ίδιος γράφει «ίνα δε τουτί σαφέστερον γένηται», παρουσιάζει διάφορες γραμμές με τα τα σχήματά τους, όπως είναι οι κυρτές, οι μικτές, οι ελικοειδείς, αναλύει τις ιδιότητές τους και αποδεικνύει ότι δεν ικανοποιούν τον ορισμό της ευθείας.

Στα σχόλια του ορισμού η' (της επιπέδου γωνίας), ο συγγραφέας ακολουθεί την ίδια τακτική. Δηλαδή αναφερόμενος σε διάφορα είδη γωνιών των οποίων οι πλευρές δεν είναι ημιευθείες αλλά καμπύλες γραμμές, προσπαθεί να ερμηνεύσει τον ορισμό της επιπέδου γωνίας.

Ο συγγραφέας για την διαίρεση των γραμμών σε ευθείες, περιφέρεις, μικτές, απλές, ελικοειδείς γράφει ότι «μέμνηται ο Πρόκλος τώ τε Πλάτωνι και Αριστοτέλει επόμενος».

Τα αιτήματα και οι κοινές έννοιες της «Οδού Μαθηματικής»

Στην σελίδα 19 της Ο. Μ., ο Ανθρακίτης, παρουσιάζει τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες (αξιώματα) αρκετά διαφοροποιημένα από τα αντίστοιχα των «Στοιχείων». Τα αιτήματα και οι κοινές έννοιες των δύο βιβλίων δεν διαφέρουν μόνο ως προς τον αριθμό τους αλλά και σε κάποιες περιπτώσεις ως προς το περιεχόμενό τους.

Συγκεκριμένα: Ο Ευκλείδης αναφέρει πέντε (5) αιτήματα και εννέα (9) κοινές έννοιες, ενώ ο Ανθρακίτης στην Ο. Μ., αναφέρει τρία (3) αιτήματα και δεκατέσσερις (14) κοινές έννοιες.

Τα τρία αιτήματα της Ο. Μ., συμπίπτουν με τα τρία πρώτα αιτήματα από τα πέντε των «Στοιχείων», ενώ τα υπόλοιπα δύο των «Στοιχείων» συμπεριλαμβάνονται από τον Ανθρακίτη στις κοινές έννοιες.

Η σχέση που έχουν τα αιτήματα και οι κοινές έννοιες των δύο βιβλίων είναι:

Αιτήματα

Το α' αίτημα της Ο. Μ. είναι το α' Αίτημα των «Στοιχείων».

Το β' αίτημα της Ο. Μ. είναι το β' Αίτημα των «Στοιχείων».

Το γ' αίτημα της Ο. Μ. είναι το γ' Αίτημα των «Στοιχείων».

Κοινές έννοιες

Η α' κοινή έννοια της Ο. Μ. είναι η α' Κοινή έννοια των «Στοιχείων».

Η β' κοινή έννοια της Ο. Μ. είναι η β' Κοινή έννοια των «Στοιχείων».

Η γ' κοινή έννοια της Ο. Μ. είναι η γ' Κοινή έννοια των «Στοιχείων».

Η δ' κοινή έννοια της Ο. Μ. είναι η δ' Κοινή έννοια των «Στοιχείων».

Η ϵ' κοινή έννοια είναι η πρόταση : « *Και εάν από ανίσων ίσο αφαιρεθεί τα λοιπά εστίν άνισα* ».

Η $\sigma\tau'$ κοινή έννοια της Ο. Μ. είναι η ϵ' κοινή έννοια των «Στοιχείων».

Η ζ'' κοινή έννοια της Ο. Μ. είναι η $\sigma\tau'$ κοινή έννοια των «Στοιχείων».

Η η' κοινή έννοια της Ο. Μ. είναι η ζ' κοινή έννοια των «Στοιχείων».

Η θ' κοινή έννοια της Ο. Μ. είναι η η' κοινή έννοια των «Στοιχείων».

Η ι' κοινή έννοια της Ο. Μ. είναι το δ' αίτημα των «Στοιχείων».

Η $\acute{\iota}\alpha$ κοινή έννοια της Ο. Μ. είναι το ϵ' αίτημα των «Στοιχείων».

Η θ κοινή έννοια της Ο. Μ. είναι η θ κοινή έννοια των «Στοιχείων».

Η $\iota\gamma'$ κοινή έννοια της Ο. Μ. είναι η πρόταση : « *Και δύο ευθείαι κοινόν τμήμα οὐκ ἔχουσιν* », η οποία δεν περιέχεται ούτε στα αιτήματα ούτε στις κοινές έννοιες των «Στοιχείων». Η πρόταση αυτή είναι ισοδύναμη με την εξής: « Δυο (διαφορετικές) ευθείες έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο » και χρησιμοποιείται χωρίς κάθε φορά να αναφέρεται (σιωπηρά) σε πολλές προτάσεις των «Στοιχείων», κυρίως του 1^{ου} βιβλίου.

Δεν γνωρίζουμε αν η πρόταση αυτή έχει διατυπωθεί από τον Ανθρακίτη, πάντως δεν υπάρχει στα σχόλια του Πρόκλου.

Η $\iota\delta'$ Κοινή έννοια είναι η πρόταση : « *Και το όλον ίσον τοις ιδίοις μέρεσι* ». Η πρόταση αυτή είναι η γνωστή ιδιότητα της διατήρησης του μέτρου η οποία ισχύει για τμήματα, εμβαδά σχημάτων καθώς και για ευκλείδειες γωνίες, δηλαδή γωνίες μικρότερες από 180° .

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι η διαφοροποίηση του Ανθρακίτη που αφορά στα αιτήματα, στους ορισμούς και στα σχόλια τους, οφείλεται μάλλον σε διδακτικούς λόγους, δηλαδή στην προσπάθειά του να γίνει όσον το δυνατόν περισσότερο κατανοητός. Όμως, ακόμα και με τις επεμβάσεις του συγγραφέα στα κείμενα των «Στοιχείων», η διαφοροποίηση δεν είναι τόσο καθοριστική ώστε να διαφοροποιείται και το πνεύμα της Ο. Μ., σε σχέση με το αντίστοιχο των «Στοιχείων».

Στο τέλος της εισαγωγής Ο.Μ., ο συγγραφέας, παραθέτει και μια σύντομη περίληψη του περιεχομένου του 1^{ου} βιβλίου.

Γράφει ότι, με την βοήθεια των όρων, « *πραγματούται περί των γραμμών, και την έκ τούτων ποικίλως πως αλλήλαις συντρεχουσών, αναφυσμένων γωνιωδών, και μη σχημάτων. Τούτοις επιφέρει τα αιτήματα και αξιώματα* ».

Αναφέρει ακόμα ότι στο τέλος του πρώτου βιβλίου ο Ευκλείδης «επιτίθησε τω λόγῳ, τῷ πολυθρυλλήτῳ Πυθαγορίῳ θεωρήματι τῆς εκατόμβης ακηκοίας (;) προτάσεως, παρά το εκατόν θύσαι βόας ἐπὶ τῇ ταύτης εὐρέσει».

Την περίληψη κλείνει με μια πρακτική και παιδαγωγικά ορθή παρατήρηση που έχει σχέση με την αξιολόγηση των προτάσεων του 1^{ου} βιβλίου.: « *Αἰ χρησιμότεραν δέ ταις ἐπιστήμαις προτάσεις, ὑπὲρ ὧν ὁ ἅπας γίνεται λόγος, εἰσὶν αὗται, ἡ $\lambda\beta'$, $\lambda\epsilon'$, $\lambda\zeta'$, $\mu\alpha'$, $\mu\delta'$, $\mu\epsilon'$ καὶ $\mu\zeta'$* ».

Η αξιολόγηση αυτή των προτάσεων από τον συγγραφέα μας επιβεβαιώνει για τον πρακτικό χαρακτήρα του βιβλίου, αφού οι προτάσεις αυτές δεν έχουν θεωρητικές εφαρμογές. Εξαιρέση αποτελούν οι προτάσεις $\lambda\beta'$ (Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου) και $\mu\zeta'$ (Πυθαγόρειο θεώρημα) οι οποίες έχουν περισσότερο θεωρητικό παρά πρακτικό χαρακτήρα.

Ωστε και εδώ ο συγγραφέας της «Οδού Μαθηματικής» διαφοροποιείται από τον Ευκλείδη.

I

Το πρώτο βιβλίο των «Στοιχείων» έτσι όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο «Οδός Μαθηματικής»

Στην σελίδα 21 του βιβλίου «Οδός Μαθηματικής» (Ο.Μ.) ο συγγραφέας ξεκινά την παρουσίαση του 1^{ου} βιβλίου των «Στοιχείων» με τον χαρακτηριστικό τίτλο «*Ερμηνεία Συντομωτέρα των του πρώτου βιβλίου του Ευκλείδου Προτάσεων*».

Από τον τίτλο γίνεται σαφές ότι ο συγγραφέας δεν κάνει απλώς μια μεταγλώττιση των «Στοιχείων», αλλά δίνει μία συντομότερη και απλούστερη παρουσίαση του έργου. Η τάση του συγγραφέα για απλούστευση των ορισμών και των αποδείξεων είναι κυρίαρχη σε όλο το βιβλίο της Ο. Μ.

Για να το πετύχει αυτό ο συγγραφέας :

α) Στις περισσότερες περιπτώσεις, στην αρχή της απόδειξης μιας πρότασης, δεν επαναλαμβάνει την διατύπωση της πρότασης, όπως συμβαίνει στα «Στοιχεία».

β) Στο τέλος της απόδειξης κάθε πρότασης δεν αναφέρει το συμπέρασμα όπως γίνεται στα «Στοιχεία», με το οποίο ουσιαστικά επαναλαμβάνεται η διατύπωση της πρότασης.

γ) Επεμβαίνει στην διαδικασία των αποδείξεων με στόχο να καταστήσει το κείμενο απλούστερο για την διδασκαλία. Αυτό το επιχειρεί κυρίως με δύο τρόπους:

- Είτε ακολουθεί διαφορετική διαδικασία απόδειξης από αυτήν των «Στοιχείων», πράγμα που γίνεται σε μικρό αριθμό προτάσεων
- Είτε, στις περισσότερες περιπτώσεις ενώ τα βήματα που ακολουθεί για την απόδειξη μιας πρότασης δεν διαφέρουν από αυτά των «Στοιχείων», οι αποδείξεις διατυπώνονται με διαφορετικό τρόπο και φράσεις όπως π. χ. «όπερ έδει δείξαν» ή το «έστω» παραλείπονται.

Για παράδειγμα, στην απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος, (πρόταση μθ'), το κείμενο των «Στοιχείων»: «Εστω τριγώνον ορθογώνιον το ΑΒΓ ορθήν έχον την υπό ΒΑΓ γωνίαν. λέγω, ότι το από της ΒΓ τετράγωνον ίσον εστί τοις από των ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. Αναγεγράφω γαρ από μεν της ΒΓ τετράγωνον το ΒΔΕΓ, από δε των ΒΑ, ΑΓ τα ΗΒ, ΘΓ...», έχει αντικατασταθεί στην Ο.Μ. από το: « Του αβγ, ήδη τριγώνου της προς τώ α, γωνίας ορθής ούσης, και από των αυτού πλευρών τετραγώνων γραφομένων βη, βε, γθ.»

δ) Προσθέτει νέα σχήματα για την ερμηνεία των όρων ή των πορισμάτων εκεί όπου ο ίδιος κρίνει απαραίτητο, ή σε ήδη υπάρχοντα σχήματα φέρει επί πλέον βοηθητικές γραμμές προσπαθώντας να ερμηνεύσει όσο το δυνατόν απλούστερα τα μαθηματικά κείμενα.

ε) Ο συγγραφέας της Ο. Μ, στις αποδείξεις των θεωρημάτων, για την ονομασία ευθειών και σημείων, χρησιμοποιεί μικρά γράμματα, ενώ στις αποδείξεις των «Στοιχείων» η ονομασία των σημείων γίνεται με κεφαλαία.

Σε αρκετές περιπτώσεις, ο Ανθρακίτης χρησιμοποιεί περισσότερα γράμματα στις αποδείξεις από αυτά που υπάρχουν στα «Στοιχεία», προκειμένου να καταστήσει το κείμενο απλούστερο.

Πάντως οι εκφωνήσεις των θεωρημάτων και προβλημάτων της Ο. Μ., είναι –με ελάχιστες εξαιρέσεις– ακριβώς οι ίδιες με τις αντίστοιχες των «Στοιχείων».

Ο τρόπος με τον οποίο ο συγγραφέας της Ο. Μ. επεμβαίνει σε όλες τις αποδείξεις των προτάσεων του 1^{ου} βιβλίου, συχνά γίνεται σε βάρος της αυστηρότητας των αποδείξεων,

έτσι όπως αυτές παρουσιάζονται από τον Ευκλείδη. Σε αυτό συντελεί και το γεγονός ότι ο Ανθρακίτης παραλείπει το συμπέρασμα της πρότασης μετά την ολοκλήρωση της απόδειξης. **Πιθανόν αυτός είναι και ο στόχος του Ανθρακίτη. Να καταστήσει το βιβλίο λιγότερο ανστηρό ώστε να είναι κατάλληλο για διδακτικό εγχειρίδιο.** Έτσι δικαιολογείται και η διαφοροποίηση της Ο. Μ. από το 1^ο βιβλίο των «Στοιχείων», όχι μόνον ως προς την δομή και το πλήθος των πορισμάτων, αλλά σε κάποιες περιπτώσεις και ως προς το περιεχόμενό τους.

Στο βιβλίο Ι της Ο.Μ. υπάρχουν δεκαεννέα (19) πορίσματα τα οποία είναι κατανεμημένα ως εξής :

Το 1^ο πόρισμα της πρότασης **στ'** αναφέρει ότι: Κάθε τρίγωνο ισόπλευρο είναι και ισογώνιο και κάθε ισογώνιο τρίγωνο είναι και ισόπλευρο Το πόρισμα αυτό αποτελείται από τα πορίσματα των προτάσεων **ε'** και **στ'** των «Στοιχείων»

Το 2^ο πόρισμα στην πρόταση **η'** αναφέρει ότι: Δυο τρίγωνα ίσα, τα οποία είναι ισόπλευρα ή ισοσκελή, έχουν κοινή βάση και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της βάσης, θα ταυτίζονται.

Το 3^ο πόρισμα στην πρόταση **ιε'** αναφέρει ότι: αν δύο ευθείες τέμνονται, τότε οι τέσσερις γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα δύο ορθές. (Είναι το πόρισμα της πρότασης **ιε'** των «Στοιχείων»)

Το 4^ο πόρισμα στην πρόταση **ιστ'** αναφέρει ότι: με άκρο σημείο μιας ευθείας, μπορώ να φέρω μόνο δύο ευθύγραμμα τμήματα τα οποία να ανήκουν στην ευθεία και να είναι ίσα μεταξύ τους. Το 5^ο πόρισμα στην πρόταση **ιζ'** αναφέρει ότι :Δεν είναι δυνατόν από σημείο να φέρουμε δυο κάθετες στην ίδια ευθεία.

Το 6^ο πόρισμα στην πρόταση **ιζ''** αναφέρει ότι: Αν σε τρίγωνο μια γωνία είναι αμβλεία ή ορθή τότε οι άλλες γωνίες του τριγώνου είναι οξείες (είναι ισοδύναμο με το πόρισμα της πρότασης **ιζ'** των «Στοιχείων»)

Το 7^ο Πόρισμα στην Πρόταση **ιζ''** αναφέρει ότι :Αν δεδομένη ευθεία τέμνεται από άλλη και σχηματίζει με αυτήν άνισες γωνίες, τότε, η κάθετη σε οποιοδήποτε σημείο της ευθείας αυτής βρίσκεται προς το μέρος της οξείας γωνίας.

Το 8^ο πόρισμα της πρότασης **ιζ''** αναφέρει ότι: Οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι οξείες, όπως και οι παρά την βάση γωνίες κάθε ισοσκελούς τριγώνου. Ωστε στην πρόταση **ιζ''** αντιστοιχούν τέσσερα (4) πορίσματα.

Το 9^ο πόρισμα της πρότασης **ιη'** αναφέρει ότι: Του σκαληνού τριγώνου οι γωνίες είναι άνισες και του ισοπλεύρου ίσες.

Το 10^ο πόρισμα της πρότασης **ιθ'** αναφέρει ότι: Από τα τμήματα που έχουν άκρα δοθέν σημείο και τα σημεία μιας ευθείας, μικρότερο είναι το κάθετο από το σημείο προς την ευθεία, και ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο άλλα, μεγαλύτερο είναι, εκείνο του οποίου το ίχνος απέχει μεγαλύτερη απόσταση από το ίχνος του καθέτου.

Το πόρισμα αυτό αποτελείται από δύο πορίσματα έτσι όπως αυτά παρουσιάζονται στα σημερινά εγχειρίδια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Το 11^ο πόρισμα της πρότασης **ιθ'** αναφέρει ότι: Στα ορθογώνια τρίγωνα η πλευρά η οποία βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία είναι η μεγαλύτερη, ενώ στα αμβλυγώνια μεγαλύτερη είναι η πλευρά η οποία βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία.

Με το πόρισμα αυτό, ο συγγραφέας, αναφέρεται μόνο σε ορθογώνια και αμβλυγώνια τρίγωνα και με τον τρόπο αυτό προϋδεάζει τον αναγνώστη με τρόπο παιδαγωγικά άψογο για την γενική περίπτωση, (σε κάθε τρίγωνο απέναντι από την μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά), την οποία χρησιμοποιεί για την απόδειξη της πρότασης κ' που ακολουθεί.

Το 12^ο πόρισμα της πρότασης κ' αναφέρει ότι: Η διαγώνιος κάθε τετραπλεύρου είναι μικρότερη από το άθροισμα των πλευρών του τετραπλεύρου οι οποίες βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής.

Το 13^ο πόρισμα της πρότασης κα' αναφέρει ότι: Δεν υπάρχουν δύο ίσα τρίγωνα με κοινή βάση, τα οποία βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της βάσης.

Το 14^ο πόρισμα της πρότασης λ' αναφέρει ότι: Αν φέρουμε παράλληλη σε μια πλευρά ενός παραλληλόγραμμου, τότε αυτή θα είναι παράλληλη και στην απέναντι πλευρά του παραλληλογράμμου.

Στην πρόταση λβ' η οποία αναφέρεται στο άθροισμα των γωνιών τριγώνου αντιστοιχούν τα τέσσερα πορίσματα:

15^ο πόρισμα: Κάθε μία από τις ίσες γωνίες ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου είναι ίση με το μισό της ορθής, του αμβλυγωνίου και ισοσκελούς μικρότερη της ορθής, και του οξυγωνίου και ισοσκελούς, μεγαλύτερη.

16^ο πόρισμα: Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι ίση με τα δυο τρίτα της ορθής γωνίας.

17^ο πόρισμα: Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των γωνιών κάθε άλλου τριγώνου.

18^ο πόρισμα: Το άθροισμα των γωνιών κάθε τετράπλευρου είναι ίσο με τέσσερις ορθές.

Το 19^ο πόρισμα της πρότασης με': Για να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο ισοδύναμο με το άθροισμα δύο δοσμένων ορθογωνίων παραλληλογράμμων, ο Ανθρακίτης ανάγει την κατασκευή στην πρόταση με', ενώ σύμφωνα με τον Ευκλείδη θα μπορούσε να γίνει και με την κατασκευή τετάρτης αναλόγου.

II

Το δεύτερο βιβλίο των «Στοιχείων» έτσι όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο «Οδός Μαθηματικής»

Στην σελίδα 47 του 1^{ου} τόμου της Ο.Μ. ο συγγραφέας αρχίζει (χωρίς προοίμιο) την ερμηνεία των όρων του β' βιβλίου των «Στοιχείων».

Στο βιβλίο υπάρχουν δυο ορισμοί, αυτοί των «Στοιχείων»:

- 1) «Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο λέμε ότι περιέχεται στις πλευρές οι οποίες σχηματίζουν την ορθή γωνία.

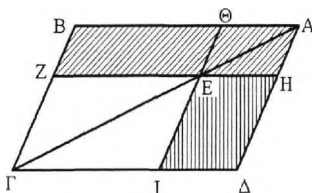
Στα σχόλια που αναφέρονται στον ορισμό, ο συγγραφέας υπενθυμίζει, ότι τα παραλληλόγραμμα διαιρούνται σε δυο είδη. Τα ορθογώνια και τα μη ορθογώνια. «(Είρεται ἐν τοῖς ἐμπροσθεν, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα εἰς δύο διαιρεῖται εἶδη τὰ καθολικώτερα, εἰς ορθογώνια καὶ μὴ ορθογώνια)»

Στη συνέχεια διαχωρίζει λεπτομερώς τα είδη των παραλληλογράμμων, όπως κάνουν ο Πρόκλος και άλλοι σχολιαστές, καταλήγοντας στα συμπεράσματα:

- Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ορίζεται από τις πλευρές του.

- Κάθε τετράγωνο ορίζεται από την πλευρά του.

Ο δεύτερος ορισμός αφορά στον γνῶμονα.



(Σχ.1)

- 2) Κάθε παραλληλογράμμου, ένα οποιοδήποτε από τα περί την διαγώνιον παραλληλόγραμμα, μαζί με τα δύο παραπληρώματα ονομάζεται γνῶμων. Δηλαδή, αν από σημείο E της διαγωνίου ΑΓ, παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ φέρουμε τις παράλληλες ΕΖ, ΕΙ προς τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, το γραμμοσκιασμένο χωρίο ΒΖΕΙΔΑ (σχ.1) ονομάζεται γνῶμονας.

Στα σχόλια που αναφέρονται στον ορισμό, ο συγγραφέας εξηγεί λεπτομερώς και με την βοήθεια σχήματος, τι είναι ο γνῶμονας.

Στην σελίδα 51 της Ο. Μ., αναφέρεται το μοναδικό πόρισμα του 2^{ου} βιβλίου, το οποίο αφορά στην πρόταση δ', όπως και στα «Στοιχεία».

Το πόρισμα αυτό είναι: Στα τετράγωνα, τα περί την διαγώνιον παραλληλόγραμμα, είναι τετράγωνα.

Λίγα είναι τα σχόλια τα οποία αναφέρονται στους ορισμούς του 2^{ου} βιβλίου, όμως ο συγγραφέας συνδέει το βιβλίο αυτό με την πρώτη απόπειρα δημιουργίας μιας «Γεωμετρικής Άλγεβρας».

Συγκεκριμένα στην «Προοιμακή περιύληψη του Δευτέρου των του Ευκλείδου Στοιχείων» ο συγγραφέας γράφει «Τό μέρος τούτο τών Στοιχείων λυσιτελέστατον πάντως γε, μάλιστα δ' όντως θεμέλιο των χρεωδεστέρων Άλγεβρικών πράξεων. Αί μέν τρείς πρώται προτάσεις αποδεικτείται καί πολλαπλασιασμό. Η δέ τετάρτη τη εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζης τας αρχάς παρέχει».

Επομένως ο Ανθρακίτης έχει κατανοήσει τον αλγεβρικό χαρακτήρα του 2^{ου} βιβλίου και μάλιστα παρατηρεί ότι οι τρεις πρώτες προτάσεις είναι ισοδύναμες με τις αλγεβρικές ταυτότητες:

- 1) $\alpha(\beta + \gamma + \dots + 1) = \alpha\beta + \alpha\gamma + \dots + \alpha$ (προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση).
- 2) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
- 3) $\beta(\beta + \gamma) = \beta\gamma + \beta^2$ ή $(\alpha + \beta)\alpha + (\alpha + \beta)\beta = (\alpha + \beta)^2$

Η τέταρτη πρόταση είναι ισοδύναμη με την αλγεβρική ταυτότητα:

4) $(\beta + \gamma)^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma$ και προφανώς μας δίνει ένα μηχανισμό για την εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας.

Για τις επόμενες προτάσεις, πέμπτη, έκτη, έβδομη και όγδοη, ο Ανθρακίτης, στην ίδια περιήληψη γράφει ότι έχουν σχέση με «*ταις τής αναλυτικής μεθόδου πράξεσι*», δηλαδή με αλγεβρικές ταυτότητες αποδεδειγμένες με την αναλυτική μέθοδο.

Τέλος ο Ανθρακίτης αναφέρει ότι «*Τά δέ λοιπά θεωρήματα τριγωνομετρικούς μάλλον λυσιτελή*».

Αυτό κατά τη γνώμη μας είναι εν μέρει αληθές, αφού οι προτάσεις εννέα και δέκα οι οποίες έχουν την αλγεβρική μορφή,

$$9) (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$10) (2\alpha + \beta)^2 + \beta^2 = 2[(\alpha^2 + \beta)] \text{ δεν έχουν τριγωνομετρικό περιεχόμενο όπως και η πρόταση 11, η οποία είναι ουσιαστικά η γεωμετρική μέθοδος επίλυσης της}$$

εξίσωσης $\alpha(\alpha - \chi) = \chi^2$.

Ο ισχυρισμός του Ανθρακίτη ισχύει μόνο για τις προτάσεις δώδεκα και δεκατρία, οι οποίες είναι τα θεωρήματα «πλευράς ευρισκόμενης απέναντι οξείας γωνίας» και «πλευράς ευρισκόμενης απέναντι αμβλείας γωνίας», δηλαδή, για τις επεκτάσεις του Πυθαγορείου θεωρήματος, οι οποίες προφανώς έχουν τριγωνομετρικό περιεχόμενο, αφού είναι ισοδύναμες με το θεώρημα του συνημιτόνου.

Δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε αν η άποψη για το τριγωνομετρικό περιεχόμενο «των λοιπών θεωρημάτων», όπως γράφει ο Ανθρακίτης, είναι του ίδιου ή κάποιου άλλου. Εκείνο το οποίο γνωρίζουμε είναι ότι η άποψη αυτή άρχισε να διατυπώνεται το 1882, όταν ο Γάλλος ιστορικός Paul Tannery (1843 – 1904), δημοσίευσε την εργασία του «*De la solution geometriques des problemes de second degre avant Euclide*» (περί γεωμετρικής επίλυσης των δευτεροβάθμιων προβλημάτων πριν τον Ευκλείδη).

Ο αλγεβρικός χαρακτήρας του 2^{ου} βιβλίου των «Στοιχείων» είναι φανερός και όπως σημειώνει ο καθηγητής Θ. Εξαρχάκος⁴⁷² «Το βιβλίο II είναι το μικρότερο βιβλίο των *Στοιχείων* αλλά είναι πολύ σημαντικό γιατί εισάγει την γεωμετρική Άλγεβρα των Ελλήνων...». Όμως, την εποχή της έκδοσης της Ο.Μ., δεν είχε συζητηθεί και δεν ήταν γνωστή η άποψη για τον αλγεβρικό χαρακτήρα του 2^{ου} βιβλίου.

Επομένως αν ο χαρακτηρισμός «*θεμέλιο των χρεωδεστέρων αλγεβρικών πράξεων*» που απέδωσε ο Ανθρακίτης στο 2^ο βιβλίο δεν προέρχεται από τον ίδιο, θα πρέπει να τον αναζητήσουμε σε παλαιότερες πηγές οι οποίες κατά τη γνώμη μας είναι τρεις.

α) Το βιβλίο «Λογιστική» του μοναχού Βαρλαάμ τον Καλαβρού το οποίο εκδόθηκε ανάμεσα στο 1333 και 1337, και στο οποίο εμφανίζεται για πρώτη φορά η γεωμετρική μέθοδος αλγεβρικών σχέσεων.

β) Το βιβλίο «*Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*» (Διάλογοι σχετικά με δυο νέες επιστήμες) του Γαλιλαίου (1564 – 1642), στο οποίο ο συγγραφέας του επισημαίνει τον αλγεβρικό χαρακτήρα του 2^{ου} βιβλίου.

Όπως είδη αναφέραμε τα έργα του Γαλιλαίου ήταν αυτά που πρώτα έδειξαν στην επιστημονική σκέψη τον δρόμο της μαθηματικής και πειραματικής εξέτασης των φυσικών φαινομένων. Πίστευε ότι το μεγάλο βιβλίο της Φύσης, δεν έχει γραφτεί με

⁴⁷² Κ.Ε.Ε.Π.Ε.Κ., Ευκλείδη «Στοιχεία», τομος Ι, σελ. 25, Αθήνα 2001

λέξεις, αλλά με μαθηματικά σύμβολα και σχήματα, επομένως γίνεται κατανοητό μόνο με την ποσοτική μέτρηση συνδυασμένη με την θεωρητική απόδειξη.

Το έργο του Γαλιλαίου ήταν ένα από εκείνα τα οποία συνετέλεσαν στην γέννηση του Ευρωπαϊκού Διαφωτισμού και αφού ο Ανθρακίτης, όπως είναι γνωστό ήταν θαυμαστής του έργου του Γαλιλαίου, θα πρέπει να γνώριζε τις απόψεις του για το 2^ο βιβλίο των «Στοιχείων».

γ) Το έργο «Ars Magna»⁴⁷³ του Ιταλού G. Cardano (1501 – 1576) το οποίο γράφηκε το 1545 και ήταν από τα πρώτα αλγεβρικά βιβλία του ευρωπαϊκού χώρου. Στο βιβλίο αυτό ο Cardano επισημαίνει επίσης τον αλγεβρικό χαρακτήρα του 2^{ου} βιβλίου των «Στοιχείων» και χρησιμοποιεί ορισμένες προτάσεις του για την λύση εξισώσεων.

Έναι πιθανόν, ο Ανθρακίτης να γνώριζε και τα τρία παραπάνω έργα, όμως πιστεύουμε ότι περισσότερο θα έχει επηρεαστεί από το έργο του Γαλιλαίου, με τον οποίο άλλωστε τον συνέδεαν και ιδεολογικές συγγένειες.

Είναι πιθανόν, η έλλειψη πορισμάτων στο 2^ο βιβλίο της Ο.Μ., να οφείλεται στον Αλγεβρικό χαρακτήρα του βιβλίου, τον οποίο ο Ανθρακίτης είχε κατανοήσει καλά και πριν αυτός γίνει ευρύτερα γνωστός.

III

Το τρίτο βιβλίο των «Στοιχείων» έτσι όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο «Οδός Μαθηματικής»

Μετά το τέλος του βιβλίου II των Στοιχείων, έτσι όπως αυτό παρουσιάζεται στην Ο.Μ. από τον Ανθρακίτη, ακολουθεί, όπως συνηθίζεται από τον συγγραφέα, η «Προοιμιακή περιήλπις» του επόμενου βιβλίου.

Μέσα από την σύντομη περιήλπιση η οποία αφορά στο 3^ο βιβλίο των «Στοιχείων», γίνεται ακόμα μια φορά φανερό ότι το έργο «Οδός Μαθηματικής» προορίζονταν από τον συγγραφέα για διδακτικό κυρίως εγχειρίδιο.

Ο Ανθρακίτης, αναφερόμενος γενικά στο περιεχόμενο του 3^{ου} βιβλίου γράφει, ότι «τα πλείστα περί κύκλου πραγματεύεται» και τονίζει την συμβολή των εννοιών του βιβλίου για τα «της πρακτικής Γεωμετρίας Στοιχεία», δηλαδή τις πρακτικές γεωμετρικές εφαρμογές.

Σε ό,τι αφορά στην δύναμη σημείου ως προς κύκλο, έννοια την οποία θεωρεί αναγκαία για την ανάπτυξη της γεωμετρίας, αναφέρεται με δύο μόνο προτάσεις και όπως ο ίδιος χαρακτηριστικά γράφει, «δια βραχέων παραδίδουσιν».

Όπως έγινε και στην περιήλπιση που αφορούσε στο 2^ο βιβλίο, ο συγγραφέας αναφέρει «Τα χρησιμότερα ταις επιστήμαις θεωρήματα», τα οποία (πράγματι) για το 3^ο βιβλίο είναι: *ιστ', κ', κα', κβ', λα', λβ', λε', και λστ''*.

Παρατηρούμε ότι οι προτάσεις αυτές αναφέρονται.

⁴⁷³ Ars Magna, sive de Regulis Algebraicis (η μεγάλη τέχνη, ή για τους κανόνες της Άλγεβρας). Βλέπε επίσης την αγγλική μετάφραση και έκδοση T.R.Witmer, The Great Art, or the Rules of Algebra, Cambridge MIT Press 1968.

- Σε σχέσεις μεταξύ χορδών και εφαπτόμενων (πρόταση **ιστ'**). Η χρησιμότητα της πρότασης **ιστ'** είναι φανερή, αφού εφαρμόζεται στις αποδείξεις των προτάσεων, **ιζ'**, **λδ'**, **λζ'**.
- Σε σχέσεις μεταξύ επίκεντρων και εγγεγραμμένων γωνιών (προτάσεις **κ'**, **κα'**, **κβ'**). Η πρόταση **κ'** συνδέεται άμεσα με τις **κα'**, **κστ'**, **κζ'**, αφού εφαρμόζεται στις αποδείξεις των προτάσεων αυτών.
- Σε σχέσεις μεταξύ γωνιών και κυκλικών τμημάτων (προτάσεις **λα'**, **λβ'**). Η πρόταση **λβ'**, συνδέεται άμεσα με τις προτάσεις **λα'**, **λγ'**, **ιθ'**, **κα'**, **κβ'**, **λδ'**. Είναι δηλαδή μία κομβική πρόταση.
- Στην δύναμη σημείου ως προς κύκλο (προτάσεις **λε'**, **λστ'**).

Στο τρίτο βιβλίο της «Οδοῦ μαθηματικῆς», ο Ανθρακίτης ξεκινά με την «Ερμηνεία των ὥρων του τρίτου βιβλίου των του Ευκλείδους Στοιχείων». Οι ορισμοί της Ο.Μ. είναι δέκα (10), ενώ των «Στοιχείων» σύμφωνα με την έκδοση Heiberg, ένδεκα (11). Αυτό συμβαίνει διότι τους ορισμούς **δ'**, **ε'** ο Ανθρακίτης τους παρουσιάζει μαζί (ορισμός **δ'**).

Οι ερμηνείες και τα σχόλια των ορισμών στην Ο. Μ. καταλαμβάνουν πέντε σελίδες πράγμα που κάνει ολοφάνερο όχι μόνο τις μαθηματικές γνώσεις του Ανθρακίτη αλλά κυρίως τις παιδαγωγικές. Εξ' ἄλλου ο τρόπος παρουσίασης και ερμηνείας των μαθηματικών κειμένων σε όλο το έργο της Ο.Μ., δείχνουν ότι ο Ανθρακίτης ήταν εξαιρετικός παιδαγωγός και καλός δάσκαλος.

Από τα ερμηνευτικά σχόλια των ορισμών, θα αναφερθούμε σε εκείνα των ορισμών **β'**, **γ'**, και **δ'**

- Στα σχόλια του ορισμού **β'** στην σελίδα 61 ο συγγραφέας, με την βοήθεια σχήματος δίνει τον ορισμό της εφαπτόμενης, και στη συνέχεια, για να γίνει περισσότερο κατανοητός, ερμηνεύει την έννοια της εφαπτόμενης κύκλου, σε σχέση με αυτήν της τέμνουσας κύκλου. Συγκεκριμένα γράφει ότι επειδή το «τέμνειν» είναι ευκρινέστερο του «άπτεσθαι», για το λόγο αυτό τούτο «το άπτεσθαι» διασαφηνίζεται «δια του μη τέμνειν». Η διαδικασία αυτή, με την οποία ερμηνεύει μία έννοια συγκρίνοντας την με μία άλλη, φανερώνει ακόμα μια φορά τις παιδαγωγικές γνώσεις και τις διδακτικές ικανότητες του συγγραφέα.
- Στα σχόλια του ορισμού **γ'**, ο Ανθρακίτης, με άκρως παιδαγωγικό τρόπο, ανάγει την έννοια των εφαπτόμενων κύκλων στην έννοια της εφαπτόμενης κύκλου. Συγκεκριμένα γράφει ότι όπως η ευθεία «διττήν πως κέκτηται προς τον κύκλον σχέσιν, ή γαρ άπτεται τούτου, ή τέμνει αυτόν» έτσι και «κύκλος προς κύκλον διττήν έχει την σχέσιν, ή γαρ αλλήλων άπτονται οι κύκλοι, ή τέμνουσιν αλλήλους». Και πάλι όπως έγινε και στον προηγούμενο ορισμό, διασαφηνίζει το «άπτεσθαι κύκλων» μέσω του «μη τέμνουσιν αλλήλους» ως εξής: επειδή «το μη τέμνειν την γραμμήν τον κύκλον γνώρισμα του άπτεσθαι αυτού πεποίηκεν, οὕτω κανταῦθα δια του μη τέμνειν αλλήλους τους κύκλους, ως γνωριμωτέρου, το άπτεσθαι αλλήλων δεδήλωκεν». Ενώ ο Ευκλείδης δεν διακρίνει περιπτώσεις για την θέση που μπορεί να έχουν δύο εφαπτόμενοι κύκλοι, ο Ανθρακίτης, αναφέρει ότι οι κύκλοι μπορεί να εφάπτονται ή εντός ή εκτός και συνοδεύει την ερμηνεία του ορισμού με δύο σχήματα ένα για την κάθε περίπτωση.
- Στα σχόλια του ορισμού **ε'**, ο συγγραφέας, περιγράφει πρώτα πια είναι τα μέρη στα οποία ένας κύκλος χωρίζεται από μία χορδή του, και στην συνέχεια,

διατυπώνει τον ορισμό. Αρχικά αναφέρει ότι ο κύκλος διαιρείται από μία χορδή του σε δύο ειδών μέρη, «η δε του κύκλου διαιρέσεις διχώς ενδέχεται γενέσθαι», ή ως προς την περιφέρειά του ή ως προς το εμβαδόν του, στη συνέχεια ονομάζει τα μέρη αυτά, κατά μεν την πρώτη περίπτωση «εις μοίρας λέγεται διαιρείσθαι» και κατά την δεύτερη «εις μέρη» και ακολούθως ερμηνεύει και διατυπώνει τον ορισμό. Με σχήματα, όπως κάθε φορά, ο συγγραφέας συνοδεύει τις ερμηνείες των εννοιών. Η διαδικασία την οποία ακολουθεί ο Ανθρακίτης μέχρι να καταλήξει στον ορισμό του κυκλικού τμήματος και ο τρόπος παρουσίασης αυτής της διαδικασίας, δείχνει, όπως και πολλά άλλα κείμενα του έργου, τις διδακτικές του ικανότητες και τις παιδαγωγικές του γνώσεις.

- Στα σχόλια του ορισμού **στ'**, ο Ανθρακίτης αναφέρεται στην γωνία κυκλικού τμήματος. Αφού ονομάζει τα είδη της περιεχόμενης σε κυκλικό τμήμα γωνίας, «δύο δε ταύτα, η μεν γαρ λέγεται τμήματος γωνία, η δε εν τμήματι», ορίζει στην συνέχεια κάθε ένα από τα είδη των γωνιών αυτών. Με την βοήθεια τριών σχημάτων τα οποία αναφέρονται σε κυκλικά τμήματα, δηλαδή σε «ημικύκλιον, μείζον τμήμα και έλλαιον» εξηγεί γιατί «η του τμήματος γωνία του μικτού έστιν είδους» και ακόμα την διαφορά της του «τμήματος γωνίας» από την «εν τμήματι γωνία» του ορισμού **ζ'**.

Από όλα τα παραπάνω βλέπουμε ότι οι ορισμοί του βιβλίου, δίνονται από τον συγγραφέα με όσο το δυνατόν επεξηγηματικότερο τρόπο και ότι παρ' όλο τον απλό τρόπο παρουσίασης των εννοιών, εν τούτοις, οι ερμηνευτικοί σχολιασμοί της Ο. Μ., είναι υψηλού μαθηματικού επιπέδου.

Στο 3^ο βιβλίο των «Στοιχείων» της Ο. Μ., υπάρχουν δώδεκα (12) πορίσματα ενώ στα «Στοιχεία» της έκδοσης Heiberg μόνο τρία (3).

Συγκεκριμένα, τα πορίσματα του έργου «Οδός Μαθηματικής» αναφέρονται:

- (ι) Το 1^ο στην πρόταση **α'** των "Στοιχείων". Το πόρισμα αυτό υπάρχει και στον Ευκλείδη, αλλά ο Ανθρακίτης εκτός από την γενική περίπτωση ευθείας η οποία είναι κάθετη στο μέσον μιας χορδής, αναφέρεται και στην ειδική περίπτωση κατά την οποία αν οι δύο χορδές τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται τότε το σημείο τομής τους είναι το κέντρο του κύκλου.
- Το 2^ο στην πρόταση **β'** των "Στοιχείων".
- Το 3^ο και 4^ο στην πρόταση **γ'** των "Στοιχείων".
- Το 5^ο στην πρόταση **ια'** των "Στοιχείων".
- Το 6^ο στην πρόταση **ιε'** των "Στοιχείων".
- Το 7^ο στην πρόταση **ιστ'** των "Στοιχείων". Το 7^ο πόρισμα της Ο. Μ., υπάρχει και στον Ευκλείδη αλλά ο Ανθρακίτης προσθέτει και τον αντίστροφο ισχυρισμό, δηλαδή ότι «η αποτομένη του κύκλου προς ορθάς έστι τη διαμέτρω»
- Το 8^ο και 9^ο στην πρόταση **κ'** των "Στοιχείων".
- Το 10^ο στην πρόταση **κδ'** των "Στοιχείων".
- Το 11^ο στην πρόταση **λα'** των «Στοιχείων», και είναι το τρίτο και τελευταίο πόρισμα του 3^{ου} βιβλίου της έκδοσης Heiberg.

και τέλος

- Το 12^ο πόρισμα στην πρόταση λστ' των «Στοιχείων».

Τέλος, από την μελέτη των αποδείξεων των προτάσεων του βιβλίου του Ανθρακίτη, παρατηρούμε ότι σε αρκετές περιπτώσεις οι αποδείξεις της Ο. Μ., διαφοροποιούνται σε σχέση με τις αποδείξεις των «Στοιχείων».

Οι σημαντικότερες διαφοροποιήσεις στις αποδείξεις των προτάσεων εντοπίζονται κυρίως:

- Στην πρόταση ιγ', στην οποία εκτός από την απόδειξη των «Στοιχείων», ο Ανθρακίτης παραθέτει και δεύτερη απόδειξη της πρότασης, με την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.
- Στην πρόταση ιβ', για την απόδειξη της οποίας, ο συγγραφέας, με την βοήθεια ενός δεύτερου σχήματος εξετάζει ακόμα μία περίπτωση, δηλαδή μία νέα θέση της διακέντρου.
- Στη πρόταση ιγ', στην οποία ο Ανθρακίτης για μεν την περίπτωση κατά την οποία οι κύκλοι εφάπτονται εντός εξετάζει ακόμα μία πιθανή θέση που μπορεί να έχουν, ενώ για την περίπτωση κατά την οποία οι κύκλοι εφάπτονται εκτός, παραθέτει και μία δεύτερη απόδειξη. Τέσσερα είναι τα σχήματα τα οποία χρησιμοποιεί ο συγγραφέας για την απόδειξη της πρότασης ιγ', έναντι ενός σχήματος των «Στοιχείων» για την απόδειξη της πρότασης αυτής. Και εδώ γίνεται φανερό η πρόθεση του συγγραφέα να γίνει όσο το δυνατόν περισσότερο επεξηγηματικός, ώστε να βοηθήσει τον αναγνώστη για την καλύτερη κατανόηση του κειμένου.
- Στην πρόταση κα', της οποίας η απόδειξη είναι λίγο διαφοροποιημένη από αυτή των «Στοιχείων» αφού για την εξαγωγή του συμπεράσματος ο Ανθρακίτης χρησιμοποιεί το 8^ο πόρισμα της πρότασης κ', το οποίο δεν υπάρχει στα «Στοιχεία».
- Στην πρόταση λζ', την οποία ο Ανθρακίτης αποδεικνύει και με δεύτερο τρόπο με την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.

Εκτός από τις διαφοροποιήσεις οι οποίες αφορούν σε αποδείξεις προτάσεων, διαφορές υπάρχουν και στα σχήματα της Ο. Μ., εκεί όπου ο συγγραφέας κρίνει ότι είναι απαραίτητες για την αιτιολόγηση της απόδειξης. Συγκεκριμένα, ο Ανθρακίτης σε κάποιες περιπτώσεις προσθέτει γραμμές σε σχήματα των «Στοιχείων», ή κατασκευάζει διαφορετικά από τα υπάρχοντα ή και προσθέτει νέα σχήματα στα ήδη υπάρχοντα των «Στοιχείων».

Οι κυριότερες διαφορές στα σχήματα, τα οποία συνοδεύουν τις αποδείξεις των προτάσεων της Ο. Μ. εντοπίζονται:

- Στην πρόταση ιβ', για την απόδειξη της οποίας προσθέτει ακόμα ένα σχήμα.
- Στην πρόταση ιγ', στις οποίας την απόδειξη προσθέτει τρία σχήματα ακόμα.
- Στην πρόταση ιδ', της οποίας το σχήμα είναι ελαφρά διαφοροποιημένο από το αντίστοιχο των «Στοιχείων»
- Στην απόδειξη της πρότασης λζ', που προσθέτει ένα ακόμα σχήμα το οποίο αφορά στον δεύτερο τρόπο απόδειξης της πρότασης.

Οι διαφοροποιήσεις οι οποίες γίνονται σε αποδείξεις και σε σχήματα της Ο.Μ. σε σχέση με τα αντίστοιχα των «Στοιχείων», όπως έχει ήδη αναφερθεί, έχουν στόχο την απλοποίηση των αποδείξεων των προτάσεων, για την καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών κειμένων του βιβλίου γι αυτό και η έκταση του βιβλίου, (περιλαμβάνει 31 σελίδες), είναι αρκετά μεγαλύτερη από αυτήν των «Στοιχείων».

IV

Το τέταρτο βιβλίο των «Στοιχείων» έτσι όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο «Οδός Μαθηματικής»

Το πολύ σημαντικό αυτό βιβλίο των «Στοιχείων» έχει χαρακτηριστεί από ανώνυμους σχολιαστές στον κώδικα της Βενετίας, ενώ όπως παρατηρούν οι ιστορικοί C.Michel, Von Fritz, Neugebauer και Artmann, το βιβλίο IV έχει μια συμπαγή και αυστηρή δομή πράγμα που σημαίνει ότι αυτό είναι έργο ενός μόνο ατόμου, πιθανότατα του Ευκλείδη.

Όπως και στα υπόλοιπα βιβλία, έτσι και στο βιβλίο αυτό, ο συγγραφέας, προτάσσει μια σύντομη «προοιμιακή περίληψη» στην οποία χαρακτηρίζει «*τὸ ἀνὰ χειρὰς βιβλίον προβληματικόν...*» αφού διδάσκει «*τὶνι μεθόδῳ εγγραπτὰ τὰ κύκλῳ, ἢ περιγραπτὰ τὰ πολύγωνα καὶ τακτικά σχήματα*».

Δηλαδή το βιβλίο αναφέρεται κυρίως σε κατασκευές πολυγώνων κανονικών ή όχι.

Ο συγγραφέας τονίζει την χρησιμότητα του βιβλίου στην τριγωνομετρία, «*καὶ τὴ Τριγωνομετρίαν τὰ μάλιστα χρήσιμον*», γιατί όπως γράφει, μέσω της διαδικασίας της εγγραφής και περιγραφής στον κύκλο πολυγώνων μαθαίνουμε να κατασκευάζουμε «*τα των υποτεινουσών, αποτμένων τεμνουσών τε καὶ ημιτόνων Κανόνια*», με την βοήθεια των οποίων μπορούμε να υπολογίσουμε τα μεγέθη οποιονδήποτε σωμάτων και τους μεταξύ τους λόγους.

Με όλα τα παραπάνω, συνεχίζει ο συγγραφέας είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τις φάσεις των αστέρων «*αἰτίνες τῆς των πολυγώνων ὅλως ἐν κύκλῳ εγγραφῆς εξαρτώνται*».

Κλείνοντας την περίληψη ο Ανθρακίτης, αναφέρεται στον «*πολυθρύλητο τετραγωνισμό του κύκλου*» καθώς και στο εμβαδόν του κύκλου το οποίο υπολογίζεται «*δια του τετραγωνισμού του εμβαδού των εγγραφομένων τῶ κύκλῳ καὶ περιγραφομένων πολυγώνων*».

Το 4^ο βιβλίο της Ο. Μ., αρχίζει με την «Ερμηνεία των όρων» οι οποίοι είναι επτά (7), οι ίδιοι ακριβώς με εκείνους τους οποίους παραθέτει ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» του.⁴⁷⁴

Σε καθένα από τους ορισμούς γίνονται εκτενείς σχολιασμοί, οι οποίοι, στο σύνολό τους, συνοδεύονται με έξι (6) σχήματα για την πληρέστερη κατανόηση τους.

⁴⁷⁴Βλ. και Χρ. Φίλη, Τα Στοιχεία του Ευκλείδη, οι πραγματείες του Αρχιμήδη, τα Κωνικά του Απολλωνίου και οι πρώτες μεταφράσεις στη Βενετία. Οι απόηχοι. Διεθνές Συνέδριο Βυζάντιο, Βενετία και νεότερος πολιτισμός. Ε.Ι.Ε., Αθήνα 2004 σελ. 295-320.

Αρχίζοντας με τα σχόλια του 1^{ου} ορισμού, ο συγγραφέας, αναφέρει τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσεται μία μαθηματική θεωρία, ο οποίος είναι έκδηλος και στην διαδικασία με την οποία ο Ευκλείδης παρουσιάζει το έργο του.

Συγκεκριμένα, ο Ανθρακίτης γράφει, ότι επειδή ο τρόπος μιας επιστημονικής θεωρίας είναι «από των απλουστέρων αρχομένου επί τα τελειώτερα μεταβαίνειν και συνθετώτερον», γι αυτό και ο Ευκλείδης, αφού δίδαξε στο προηγούμενο βιβλίο «περί των ευθειών τε και γωνιών των εν τοις κύκλοις και τοις των κύκλων τμήμασιν», αρχίζει στο παρόν βιβλίο να ερμηνεύει τις εγγραφές και περιγραφές ευθυγράμμων σχημάτων σε και περί σχήματα, καθώς και ευθ. σχημάτων σε και περί κύκλον.

Όπως σήμερα είναι γνωστό, η διαδικασία του «από των απλουστέρων αρχόμενος επί τα τελειώτερα μεταβαίνειν» είναι ο τρόπος ανάπτυξης μιας αξιωματικοποιημένης μαθηματικής θεωρίας.

Με την κατασκευή σχημάτων, τα οποία δεν υπάρχουν στα «Στοιχεία», συνοδεύει τα ερμηνευτικά σχόλια τα οποία αφορούν στους ορισμούς του βιβλίου.

Ενδιαφέρον από παιδαγωγική άποψη παρουσιάζει ο σχολιασμός του ζ' ορισμού ο οποίος αφορά ευθεία «εις κύκλον εναρμόζεσθαι».

Στα σχόλια του ορισμού αυτού, αρχικά ο συγγραφέας αναφέρει πόσες και ποιες θέσεις μπορεί να έχει μια ευθεία σε σχέση με ένα κύκλο, «εν δε τω κύκλω τριχώς ενδέχεται θεωρείσθαι την ευθείαν. ή γαρ άπτεται του κύκλου, ή τέμνει αυτόν ή εναρμόζεται εις τον κύκλον». Στη συνέχεια γράφει ότι οι μεν δύο πρώτες περιπτώσεις, της εφαπτόμενης και της τέμνουσας, έχουν ήδη εξεταστεί στο προηγούμενο βιβλίο ενώ, για την περίπτωση ευθείας που «εναρμόζεται σε κύκλο», σε κανένα από τα προηγούμενα βιβλία δεν έγινε μνεία «ως μη χρειώδους τότε». Αλλά τώρα στο παρόν βιβλίο «ως αναγκαίας ούσης και της ταύτης γνώσεως» θα γίνει η ερμηνεία αυτής. Δηλαδή με μία αλληλουχία συλλογισμών (όπως ακριβώς γίνεται και στις αποδείξεις των προτάσεων) οδηγεί τον μαθητή να καταλάβει τον λόγο για τον οποίο δίνεται στο παρόν βιβλίο ο συγκεκριμένος ορισμός.

Από την μελέτη των κειμένων της Ο. Μ., γνωρίζουμε ότι ο Ανθρακίτης, εισάγει σχήματα, εκεί όπου κρίνει ότι αυτά είναι απαραίτητα προκειμένου να αποφασηγίνει κάποια σημεία των ορισμών και των πορισμάτων.

Πιστεύουμε ότι ο ρόλος των σχημάτων ήταν και εξακολουθεί να είναι σημαντικός για νεαρούς μαθητές, οι οποίοι όχι μόνο δεν έχουν την απαραίτητη εξοικείωση και εμπειρία που θα απαιτούσε η απουσία σχήματος για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών, αλλά ιδιαίτερα την εποχή που κυκλοφόρησε το έργο του Ανθρακίτη, δεν τους ήταν οικεία ούτε και η γλώσσα στην οποία ήταν γραμμένο το έργο, αφού δεν ήταν η καθομιλούμενη.

Ακόμα θα πρέπει να τονίσουμε ιδιαίτερα την αρτιότητα και την ακρίβεια η οποία χαρακτηρίζει τα σχήματα του βιβλίου της Ο. Μ., τα οποία είναι κατασκευασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να αναδεικνύουν τα χαρακτηριστικά στοιχεία των γεωμετρικών αντικείμενων, δηλαδή όπως θα λέγαμε σήμερα είναι φορείς των ιδιοτήτων των αντικειμένων αυτών.

Στο βιβλίο IV της Ο. Μ., αναφέρονται και οι δεκαέξι (16) προτάσεις των «Στοιχείων» ακριβώς με την ίδια διατύπωση. Το βιβλίο κλείνει με την πρόταση 1στ', η οποία αναφέρεται στην κατασκευή κανονικού δεκαπενταγώνου. Οι προτάσεις του 4^{ου} βιβλίου όπως ήδη έχουμε αναφέρει είναι όλες προβλήματα κατασκευών.

Το μέρος αυτό της Γεωμετρίας έχει καθαρά Ελληνική προέλευση, αφού δεν έχουν βρεθεί κείμενα παλαιότερων λαών οι οποίοι να ασχολήθηκαν με τα προβλήματα του 4^{ου} βιβλίου, για τα οποία απαιτούνται σοβαρές θεωρητικές γεωμετρικές γνώσεις, τις οποίες οι λαοί αυτοί δεν διέθεταν.

Ανάμεσα στις προτάσεις του IV βιβλίου ξεχωριστή θέση έχει η πρόταση *ια'* (κατασκευή κανονικού 5-γωνου εγγεγραμμένου σε δοθέντα κύκλο), ένα πρόβλημα βασικό, τόσο για την επίπεδη, όσο και για την Γεωμετρία χώρου.

Όσον αφορά στις κατασκευές που αφορούν στις προτάσεις της Ο. Μ., υπάρχουν κάποιες διαφορές σε σχέση με τις αντίστοιχες των «Στοιχείων», οι οποίες εντοπίζονται κυρίως:

- Στην κατασκευή της πρότασης ι', η οποία είναι λίγο διαφοροποιημένη σε σχέση με την αντίστοιχη των «Στοιχείων».
- Στην κατασκευή της πρότασης ιγ', η οποία δίδεται απλούστερα από αυτήν των «Στοιχείων», αφού ο Ανθρακίτης χρησιμοποιεί το πόρισμα της πρότασης ιβ' το οποίο δεν υπάρχει στα «Στοιχεία».
- Στην κατασκευή της πρότασης ιδ' στην οποία ο Ανθρακίτης ακολουθεί διαφορετική διαδικασία από αυτή των «Στοιχείων». Συγκεκριμένα ο Ανθρακίτης αρχίζει την κατασκευή φέροντας τις μεσοκαθέτους δύο διαδοχικών πλευρών του κανονικού πενταγώνου, ενώ ο Ευκλείδης φέροντας τις διχοτόμους δύο διαδοχικών γωνιών του, με αποτέλεσμα στην συνέχεια να διαφοροποιούνται και οι διαδικασίες των αποδείξεων.
- Στην κατασκευή της πρότασης ιε', δηλαδή στην εγγραφή κανονικού δεκαγώνου σε κύκλο, ο Ανθρακίτης, αποδεικνύει ισότητα συγκεκριμένων γωνιών με συγκρίσεις τριγώνων, ενώ ο Ευκλείδης, για τις ίδιες γωνίες, χρησιμοποιεί την ιδιότητα του ισοπλεύρου τριγώνου περί της ισότητας των γωνιών του.

Όπως συμβαίνει σε όλα τα βιβλία της Ο. Μ., που έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα, έτσι και στο βιβλίο IV της Ο. Μ., τα πορίσματα είναι περισσότερα από αυτά των «Στοιχείων». Συγκεκριμένα στο 4^ο βιβλίο της Ο. Μ., αναφέρονται τέσσερα (4) πορίσματα ενώ στα "Στοιχεία" μόνο δυο (2). Τα πορίσματα αναφέρονται στις προτάσεις:

- Το 1^ο στην πρόταση (πρόβλημα) *ε'*. Το ίδιο πόρισμα υπάρχει και στα «Στοιχεία».
- Το 2^ο στην πρόταση (πρόβλημα) *ι'*
- Το 3^ο στην πρόταση (πρόβλημα) *ιβ'*
- Το 4^ο στην πρόταση (πρόβλημα) *ιε'*. Το ίδιο πόρισμα υπάρχει και στα Στοιχεία.

Όπως παρατηρούμε τα πορίσματα του 4^{ου} βιβλίου δεν είναι κατασκευές (προβλήματα), αλλά προτάσεις, οι οποίες αναφέρονται σε σχέσεις ανάμεσα σε στοιχεία των αντίστοιχων σχημάτων.

V

Το πέμπτο βιβλίο των «Στοιχείων» έτσι όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο «Οδός Μαθηματικής»

Στο τέλος του βιβλίου IV, ο συγγραφέας, παραθέτει το προοίμιο του 5^{ου} βιβλίου των «Στοιχείων».

Στην αρχή του προοιμίου, ο συγγραφέας αναφέρει ότι παρ' όλο που, το 5^ο βιβλίο συμπεριλαμβάνεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, εν τούτοις κάποιοι αποδίδουν το περιεχόμενο του βιβλίου αυτού στον Εύδοξο⁴⁷⁵, τον οποίο παρουσιάζει σαν δάσκαλο του Πλάτωνα: «σι δε τινες ευρετήν τούτου είναι, Εύδοξόν τινα του Πλάτωνος διδάσκαλον». Όμως, -συνεχίζει ο συγγραφέας-, εκείνα τα οποία άφησε ο Εύδοξος, ο Ευκλείδης όχι μόνον τα συμπλήρωσε αλλά και έβαλε σε τάξη τους ορισμούς και τις προτάσεις. Και παρ' όλο που «παρ' Ευδόξου τας αφορμάς λαβών Ευκλείδης» εν τούτοις «ευμεθοδέστερον εκείνου κατέστρωσέ τε αυτό και ερρυθμίσατο».

Για το ίδιο το βιβλίο V, ο Ανθρακίτης γράφει ότι είναι το βιβλίο των αναλογιών, «Σκοπός δε του όλου Βιβλίου περί Αναλογιών διαλαβείν», και στην συνέχεια δίνει τους ορισμούς της αναλογίας και του λόγου.

Την αναλογία ορίζει σαν ισότητα λόγων με τρεις τουλάχιστον όρους «Εστι δε Αναλογία σύγκρισις, ήτοι σχέσις, λόγων τινών καθ' ομοιότητα, εν τρισίν όροις τουλάχιστον θεωρουμένη».

Στην συνέχεια αναφέρεται στα είδη του λόγου τα οποία είναι πέντε, τρία απλά και δύο σύνθετα ενώ από την μελέτη του κειμένου αντιλαμβανόμαστε ότι ο συγγραφέας αναφέρεται σε λόγους των οποίων τα μέτρα είναι ρητοί αριθμοί.

Τις αναλογίες διακρίνει σε συνεχείς ή δηξευγμένες, και δίνει τον ορισμό σε κάθε περίπτωση. Αναφέρει ακόμα ότι οι βασικές αναλογίες είναι τρεις: Γεωμετρική, Αριθμητική και Αρμονική.

Εδώ προφανώς εννοεί τις γνωστές από τους Πυθαγορείους αναλογίες.

Στο τέλος του προοιμίου ο Ανθρακίτης τονίζει την χρησιμότητα των αναλογιών, όχι μόνο στην γεωμετρία αλλά και στην αριθμητική, στη μουσική καθώς και σε άλλες επιστήμες.

Για πρώτη φορά στο βιβλίο του Ανθρακίτη, συναντούμε μετά το προοίμιο και ένα μικρό κείμενο με την επιγραφή «Αποσημείωσης», στο οποίο διευκρινίζονται με αριθμητικά παραδείγματα κάποιοι από τους ορισμούς του προοιμίου. Για παράδειγμα, προκειμένου να γίνει κατανοητός ο ορισμός της συνεχούς αναλογίας οι γενικοί αριθμοί γ και $\sigma\tau$ προς τον $\sigma\tau$ και $\iota\beta$ του ορισμού, αντικαθίστανται από τους 3 και 6 προς τους 6 και 12, ενώ για την διαξευγμένη αναλογία οι β , δ , $\sigma\tau$, $\iota\beta$ από τους 2, 4, 8, 16.

Στο 5^ο βιβλίο της Ο. Μ., ο Ανθρακίτης αναφέρει είκοσι (20) ορισμούς ενώ ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» του δεκαοκτώ (18).

Συγκεκριμένα, ο 8^{ος} ορισμός της Ο. Μ., «Αναλογία δε έστιν η των λόγων ομοιότης», δεν υπάρχει στα «Στοιχεία» καθώς και ο ορισμός ιθ' της Ο. Μ., ο οποίος αναφέρεται στην «τεταγμένη αναλογία».

⁴⁷⁵ Βλ. και Ch. Phili, About the Theory of Proportions exsosed ih the V Book of Euclidis Elements. Proceedihgs of the Intlernational Congress of the History and Philosophy of Siences. Unesko. Islamabad 1979 p. 165-175.

Σε καθέναν από τους ορισμούς του 5^{ου} βιβλίου της Ο. Μ., αναφέρονται εκτενή ερμηνευτικά σχόλια, και οι περισσότεροι από αυτούς (οι δεκαέξι) συνοδεύονται με σχήματα τα οποία ο Ανθρακίτης θεωρεί απαραίτητα για την ερμηνεία τους.

Το βιβλίο V της Ο.Μ. όπως και το 5^ο βιβλίο των «Στοιχείων» περιέχει εικοσιπέντε (25) προτάσεις οι οποίες αναφέρονται στους λόγους και τις αναλογίες.

Και στο παρόν βιβλίο, ο Ανθρακίτης ακολουθεί την ίδια διαδικασία απλούστευσης των αποδείξεων των προτάσεων, και όπως έχουμε ήδη αναφέρει δεν χρησιμοποιεί ούτε ειδικά μαθηματικά σύμβολα, ούτε το ινδικό αριθμητικό σύστημα.

Ακόμα προσθέτει νέα σχήματα είτε συμπληρώνει τα ήδη υπάρχοντα των «Στοιχείων», ενώ στις περισσότερες αποδείξεις αποφεύγει να γράφει τον Διορισμό και το Συμπέρασμα με στόχο την απλούστευση των κειμένων.

Τρία (3) πορίσματα περιέχει το 5^ο βιβλίο της Ο. Μ., ενώ το αντίστοιχο των «Στοιχείων» δύο (2). Συγκεκριμένα τα πορίσματα της Ο. Μ., αναφέρονται:

- Το 1^ο στον ορισμό ε΄
- Το 2^ο στην πρόταση δ΄
- Το 3^ο στην πρόταση ιθ΄ (Είναι το ίδιο με το πόρισμα της πρότασης ιθ΄ των «Στοιχείων»)

Το πόρισμα της πρότασης ζ΄ των «Στοιχείων», δεν περιλαμβάνεται στην Ο. Μ. Για πρώτη φορά κάποιο πόρισμα των «Στοιχείων» δεν αναφέρεται από τον Ανθρακίτη. Είναι πιθανόν το περιεχόμενο του ο συγγραφέας της Ο. Μ., να το θεώρησε προφανές και για τον λόγο αυτό δεν έκρινε απαραίτητο να το αναφέρει. Το πόρισμα της πρότασης ζ΄ των «Στοιχείων» είναι: «Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι εἰ μὲν μέγεθος τινὰ ἀνάλογον ἢ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται». Δηλαδή εάν κάποια μεγέθη έχουν ίσους λόγους, τότε και οι αντίστροφοι λόγοι τους θα είναι ίσοι.

Μία ιδιαιτερότητα η οποία αφορά στα πορίσματα του 5^{ου} βιβλίου, είναι ότι για πρώτη φορά ο Ανθρακίτης δίνει πόρισμα το οποίο αναφέρεται σε ορισμό. Συγκεκριμένα στο πόρισμα του ορισμού ε΄, γράφει, ότι μπορούμε να συμπεράνουμε και το αντίστροφο του ορισμού ε΄: «δυνάμεθα συναγαγεῖν καὶ ἀνάπαλιν».

Η πρόταση δ΄ των «Στοιχείων» με σύγχρονη ορολογία θα μπορούσε να αποδοθεί ως εξής:

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και τα μεγέθη ε,τ,η,θ είναι τέτοια ώστε ε=ρα, τ=ργ, η=σβ και θ=σδ

Τότε:

1. ε/η = τ/θ
2. αν ε > η τότε και τ > θ
3. αν ε < η τότε και τ < θ
4. αν ε = η τότε και τ = θ

Το 2^ο πόρισμα της πρότασης δ' της Ο.Μ., αναφέρει ότι ισχύουν και τα:

1. $\eta/\epsilon = \theta/\tau$
2. αν $\eta > \epsilon$ τότε και $\theta > \tau$
3. αν $\eta < \epsilon$ τότε και $\theta < \tau$
4. αν $\eta = \epsilon$ τότε και $\theta = \tau$

Προφανώς οι παραπάνω σχέσεις αναφέρονται σε θετικούς αριθμούς.

Το 3^ο πόρισμα της πρότασης ιθ', της Ο. Μ., το οποίο υπάρχει και στα «Στοιχεία», με σύγχρονη ορολογία αποδίδεται ως εξής: Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ είναι μεγέθη για τα οποία ισχύει $\alpha/\beta = \gamma/\delta$, τότε $\alpha/(\alpha-\beta) = \gamma/(\gamma-\delta)$.

VI

Το έκτο βιβλίο των «Στοιχείων» έτσι όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο «Οδός Μαθηματικής»

Είδαμε ότι μέχρι τώρα ο Ανθρακίτης πριν από κάθε βιβλίο πρότασε ένα «προοίμιο» σχετικά με το περιεχόμενο του βιβλίου καθώς και τους στόχους και τη σημασία του για την ανάπτυξη του μαθηματικού οικοδομήματος. Μετά το τέλος του 5^{ου} βιβλίου, χωρίς να προηγηθεί προοίμιο όπως έγινε στα προηγούμενα βιβλία αλλά μία πολύ σύντομη περίληψη, ο συγγραφέας αρχίζει την ερμηνεία των όρων του βιβλίου VI.

Ο Ανθρακίτης γράφει ότι οι σχέσεις και οι αναλογίες μεταξύ των μεγεθών τις οποίες ανέπτυξε ο Ευκλείδης στο 5^ο βιβλίο, καθώς και τα προβλήματα και θεωρήματα του βιβλίου αυτού, συμβάλλουν στην δόμηση του 6^{ου} βιβλίου, στο οποίο «εκ της των σχημάτων σχέσεως τον λόγον συνάγων, ὅν αι αὐτῶν πλευράς προς ἀλλήλας ἔχουσι παραβαλλόμεναι, και ἀνάπαλιν».

Δηλαδή το 6^ο βιβλίο εφαρμόζει την θεωρία των αναλογιών στα ευθύγραμμα τμήματα και επιπλέον εισάγει μία βασική γεωμετρική έννοια, αυτήν της ομοιότητας των πολυγώνων.

Όπως παρατηρεί ο συγγραφέας, ο Ευκλείδης, παρουσιάζει το βιβλίο VI, «την φυσικὴν τε ἅμα και διδασκαλικὴν κανταύθα τηρῶν τάξιν». Δηλαδή, πριν από τις προτάσεις, προτάσσει τους ορισμούς, «τους ὁρους των εν αὐτῇ προτάττει προτάσεων», για να μπορέσουν οι διδασκόμενοι να κατανοήσουν ευκολότερα και καλύτερα τις αποδείξεις: «απλούστεροι γαρ οι ὅροι, και δι αὐτῶν ράον μανθάνει ο διδασκόμενος.»

Στο βιβλίο VI, ο Ανθρακίτης αναφέρει πέντε (5) ορισμούς και τριάντα τρεις (33) προτάσεις όπως και ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία». Με εκτενή σχόλια και με την βοήθεια σχημάτων, όπως και στα βιβλία που προηγήθηκαν, ο συγγραφέας ερμηνεύει τους ορισμούς.

Η άποψη του Ανθρακίτη για την σημαντική συμβολή των σχημάτων στην κατανόηση μιας έννοιας ή μιας διαδικασίας είναι προφανής. Σε όλους σχεδόν τους ορισμούς και τα πορίσματα, εισάγει ένα ή περισσότερα σχήματα ενώ σε αρκετές περιπτώσεις συμπληρώνει ή και προσθέτει νέα στα ήδη υπάρχοντα των «Στοιχείων». Όχι μόνον ο μεγάλος αριθμός των σχημάτων αλλά και η αρτιότητα και η ακρίβεια με την

οποία είναι κατασκευασμένα φανερώνει την αντίληψη του συγγραφέα για τον καθοριστικό ρόλο των σχημάτων στην κατανόηση των μαθηματικών κειμένων.

Για παράδειγμα για την ερμηνεία του 4^{ου} ορισμού του βιβλίου VI, ο Ανθρακίτης μαζί με τα εκτενή σχόλια χρησιμοποιεί έξι (6) σχήματα ενώ για τον 5^ο ορισμό δεκατρία (13).

Μετά το τέλος του 4^{ου} ορισμού, ο συγγραφέας εισάγει μία «αποσημείωση» στην οποία αναφέρει ότι για την πληρέστερη κατανόηση του 5^{ου} ορισμού, θα χρησιμοποιήσει και το ινδικό σύστημα αρίθμησης «...ενταυθί παρασημειούνται τοις κοινοίς Ινδικοίς Αριθμοίς, χάριν πληρεστέρας γνώσεως». Στην συνέχεια ακολουθεί ο σχολιασμός του 5^{ου} ορισμού ο οποίος καταλαμβάνει πέντε (5) σελίδες και περιλαμβάνει δεκατρία (13) σχήματα και είναι ο πλέον μακροσκελής ολοκλήρου του έργου.

Στις αποδείξεις των προτάσεων του βιβλίου VI της Ο. Μ., υπάρχουν μικρές διαφοροποιήσεις σε σχέση με αυτές των «Στοιχείων» οι οποίες σε γενικές γραμμές περιορίζονται σε απλουστεύσεις στην διατύπωση των κειμένων και σε μικρές αλλαγές στην διαδικασία κάποιων αποδείξεων. Η κυριότερη διαφορά εντοπίζεται κυρίως στην απόδειξη της πρότασης κζ', στην οποία ο συγγραφέας εξετάζει και μία δεύτερη περίπτωση με την βοήθεια σχήματος το οποίο δεν υπάρχει στα «Στοιχεία».

Το βιβλίο VI της Ο. Μ., περιλαμβάνει εννέα (9) πορίσματα τα οποία αναφέρονται στις προτάσεις:

- Το 1^ο πόρισμα στην πρόταση α'.
- Το 2^ο πόρισμα στην πρόταση γ'.
- Το 3^ο πόρισμα στην πρόταση δ'.
- Το 4^ο και το 5^ο πόρισμα στην πρόταση η'. Τα δύο αυτά πορίσματα αποτελούν το πόρισμά της πρότασης η' των «Στοιχείων».
- Το 6^ο και το 7^ο πόρισμα στην πρόταση κ'. Τα ίδια πορίσματα υπάρχουν και στα «Στοιχεία».
- Το 8^ο πόρισμα στην πρόταση κβ'. Το πόρισμα αυτό είναι το λήμμα της πρότασης κβ' των «Στοιχείων» του οποίου δίνεται και η απόδειξη.
- Το 9^ο πόρισμα στην πρόταση λγ'.

Το πόρισμα της πρότασης ιθ' των «Στοιχείων» δεν αναφέρεται στην Ο. Μ. Είναι το δεύτερο πόρισμα των «Στοιχείων» το οποίο δεν περιλαμβάνει ο Ανθρακίτης στο έργο του. Είναι πιθανόν εξ αιτίας της δυσκολίας που παρουσιάζει το πόρισμα αυτό ο συγγραφέας να έκρινε ότι δεν ήταν κατάλληλο για να διδαχθεί και για τον λόγο αυτό δεν το συμπεριέλαβε στο βιβλίο του, το οποίο όπως ήδη έχουμε αναφέρει προορίζονταν κυρίως για διδακτικό εγχειρίδιο.

Το πόρισμα της πρότασης ιθ' των «Στοιχείων» είναι: «...εάν τρεις ευθείαι ανάλογον ώσιν, έστιν ως η πρώτη προς την τρίτην, ούτως το από της πρώτης είδος προς το από της δευτέρας το όμοιον και ομοίως αναγραφόμενον.» Δηλαδή: αν τρία ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα, ο λόγος του πρώτου προς το τρίτο ισούται με το

λόγο των εμβადών των όμοιων πολυγώνων τα οποία γράφονται με πλευρές το πρώτο και το δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα.

Το 9^ο πόρισμα της τελευταίας πρότασης λγ' του βιβλίου VI της Ο. Μ., αποδίδεται στον Αλεξανδρινό Μαθηματικό Θέωνα, τον πατέρα της Υπατίας. Το πόρισμα αυτό είναι: «Εκ δὴ τούτου φανερόν ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, οὕτω καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν» δηλαδή ὅτι οἱ ἐπικεντρες γωνίες εἶναι ἀνάλογες πρὸς τοὺς ἀντίστοιχους τομεῖς.

Το γεγονός ὅτι σε ὅλα τα βιβλία της Ο. Μ. τα πορίσματα εἶναι περισσότερα ἀπὸ αὐτὰ τῶν «Στοιχείων» της ἐκδόσης Heiberg, σημαίνει ὅτι ὁ Ἀνθρακίτης θὰ πρέπει νὰ εἶχε ὑπόψη τοῦ περισσότερους ἀπὸ ἓναν κώδικες τῶν «Στοιχείων» καὶ πιθανόν ἀνάμεσα σὲ αὐτοὺς νὰ ὑπῆρχαν καὶ κάποιοι τοῦ Θέωνα τοῦ Αλεξανδρέα.

Ὅσον ἀφορὰ τα σχήματα τοῦ 6^{ου} βιβλίου της Ο. Μ., ὁ Ἀνθρακίτης

- Εισάγει δύο νέα σχήματα γιὰ τὴν ἀπόδειξη τῆς πρότασης ιζ'
- Εισάγει ἓνα ἀκόμα σχῆμα γιὰ τὴν ἀπόδειξη τῆς πρότασης κζ'

Διαφοροποιεῖ τα σχήματά του σὲ σχέση με τα «Στοιχεῖα» ὡς εξής:

- Στὸ σχῆμα τῆς πρότασης δ' κατασκευάζει ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμα στὴν θέση ἐνὸς τυχαίου που ἀπαιτεῖ τὴν ἀπόδειξη, χωρὶς αὐτὸ νὰ ἐπηρεάζει τὴν διαδικασία τῆς ἀπόδειξης (αφοῦ ὁ συγγραφέας δὲν χρησιμοποιεῖ τὶς ιδιότητες τοῦ ὀρθογώνιου).
- Στὰ σχήματα τῶν προτάσεων ιδ' καὶ κγ', κατασκευάζει ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, ἐνῶ οἱ προτάσεις ἀναφέρονται σὲ τυχαία. Καὶ στὴν περίπτωση αὕτὴ δὲν ἐπηρεάζεται ἡ διαδικασία τῆς ἀπόδειξης γιὰ τὸν λόγο που ἀναφέραμε καὶ στὴν πρόταση δ'.
- Στὰ σχήματα τῆς πρότασης κε' κατασκευάζει ἰσόπλευρο τρίγωνο καὶ πλάγιο παραλληλόγραμμα στὴν θέση τυχαίου τριγώνου καὶ τετραπλεύρου ἀντίστοιχα που ἀπαιτεῖ ἡ πρόταση, ἐνῶ ἀντὶ γιὰ πλάγιο παραλληλόγραμμα κατασκευάζει ὀρθογώνιο. Αφοῦ ὁ συγγραφέας δὲν χρησιμοποιεῖ τὶς ιδιότητες τῶν ἐιδικῶν περιπτώσεων σχημάτων ἡ διαδικασία τῆς ἀπόδειξης δὲν διαφέρει ἀπὸ αὐτὴν τῶν «Στοιχείων» ὅπως καὶ στὶς προηγούμενες περιπτώσεις.
- Στὰ σχήματα τῆς πρότασης κη' στὴν θέση τυχαίου ευθυγράμμου σχήματος κατασκευάζει ἰσόπλευρο τρίγωνο ἐνῶ ὅπου ἡ πρόταση ἀναφέρει παραλληλόγραμμα κατασκευάζει ὀρθογώνια. Ἡ διαδικασία τῆς ἀπόδειξης ὅπως καὶ στὶς προηγούμενες περιπτώσεις δὲν διαφέρει ἀπὸ αὐτὴν τῶν «Στοιχείων».

Οἱ διαφοροποιήσεις αὐτὲς τῶν σχημάτων δὲν ἐπηρεάζουν τὴν αὐστηρότητα τῶν ἀποδείξεων ἀλλὰ οφείλονται πιθανόν στὴν προσπάθεια τοῦ συγγραφέα νὰ δώσει ὅσο τὸ δυνατόν ἀπλούστερη μορφή (εἰκόνα) στὰ μαθηματικὰ κείμενα τοῦ βιβλίου.

VII

Το έβδομο βιβλίο των «Στοιχείων» έτσι όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο «Οδός Μαθηματικής»

Μετά το τέλος του 6^{ου} βιβλίου, χωρίς να προηγηθεί προοίμιο, ο συγγραφέας αρχίζει την ερμηνεία των όρων του βιβλίου VII.

Οι ορισμοί οι οποίοι αναφέρονται από τον Ανθρακίτη στο παρόν βιβλίο είναι είκοσι δύο (22), ενώ στα «Στοιχεία» είναι είκοσι τρεις (23). Αυτό συμβαίνει γιατί στην Ο.Μ. δεν υπάρχει ο δέκατος ορισμός: «Περισσάκις άρτιος είναι ο υπό περιττού αριθμού μετρούμενος κατά άρτιον αριθμόν».

Είναι η πρώτη φορά που ο συγγραφέας της Ο.Μ. δεν αναφέρει όλους τους ορισμούς των «Στοιχείων» και δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε, αν αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο Ανθρακίτης μεταγλώτισσε κώδικα με είκοσι δύο (22) ορισμούς ή αν σκόπιμα παρέλειψε τον 10^ο ορισμό θεωρώντας τον πλεονάζοντα αφού είναι ανάλογος του 10^{ου} ορισμού.

Την παρατήρηση ότι ο 10^{ος} ορισμός είναι πλεονάζων γιατί είναι ανάλογος του 9^{ου} ορισμού έχουν κάνει και αρκετοί σχολιαστές.⁴⁷⁶

Τα σχόλια του Ανθρακίτη τα οποία αναφέρονται στους ορισμούς του βιβλίου VII και καταλαμβάνουν πέντε σελίδες είναι ποικίλα και ενδιαφέροντα. Για πρώτη φορά λόγω της αριθμητικής φύσης του βιβλίου, στις ερμηνείες των ορισμών δεν υπάρχουν σχήματα, αλλά την θέση των σχημάτων έχουν καταλάβει αριθμητικά παραδείγματα, τα οποία εισάγονται από τον 2^ο ορισμό. Ενδεικτικά θα αναφέρουμε κάποια σχόλια από τους ορισμούς α', β', γ', ια', των οποίων οι σχολιασμοί παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ο ορισμός α', αναφέρεται στην έννοια της μονάδας, και είναι ο πρώτος ορισμός των «Στοιχείων»: *Μονάς είναι καθ' ην έκαστον των όντων έν λέγεται*.

Η μονάδα, όπως γράφει στα σχόλιά του ο Ανθρακίτης είναι «το αμερές και απλούν», ενώ κάθε τι το οποίο εννοείται ως αδιαίρετο «έν» λέγεται. Και ενώ αυτό το «έν» μπορεί να είναι μέρος κάποιου άλλου, εν τούτοις το ίδιο δεν αποτελείται από μέρη.

Αναφερόμενος σε κάποιες πρακτικές γεωμετρικές μονάδες της εποχής εκείνης, προσπαθεί να αποδιασαφηνίσει το «έν», να δώσει μία διαισθητική ερμηνεία της μονάδας.

Γράφει ο Ανθρακίτης: «παραδείγματος χάριν μέτρων, μονάς λέγεται ο δάκτυλος» γιατί ο δάκτυλος μετρά το πόδι, το βήμα, το στάδιο και τα υπόλοιπα γεωμετρικά μέτρα. Με τον ίδιο τρόπο «και ο Πούς, εις λέγεται, και το Βήμα έν, και πάν έτερον» αλλά όλα αυτά «την μονάδα ακριβώς ου παρίστησι». Γιατί για παράδειγμα ο «πούς» μπορεί να διαιρεθεί επ' άπειρον και να υποπέσει στις αισθήσεις μας, ενώ «η μονάς αδιαίρετος όλως» και γίνεται καταληπτή μόνο με τον νου, «ως και το σημείον, αρχή γαρ πρώτη παρά τοις Αριθμητικοίς υποτίθεται». Δηλαδή την μονάδα, ο συγγραφέας συμπεριλαμβάνει στις αρχικές έννοιες.

Τα σχόλια του ορισμού β' είναι εξαιρετικά ενδιαφέροντα. **Αριθμός**, σύμφωνα με τον Ανθρακίτη «έστιν η πολλών μονάδων σύναψις». Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η

⁴⁷⁶ Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ, «Ευκλείδη Στοιχεία», τόμος 2^{ος}, Αθήνα 2001, σελ. 18

άποψη του συγγραφέα και στην συνέχεια η δικαιολόγηση για το τι είναι «κυρίως αριθμός».

Συγκεκριμένα, σύμφωνα με την ερμηνεία που δίνει ο Ανθρακίτης στην έννοια του αριθμού, «επει ο 2, πλήθος μονάδων ου παραμφαίνει (το γαρ πλήθος από του 3 άρχεται) κυρίως αριθμός ου λέγεται». Δηλαδή ο αριθμός 2 δεν μπορεί να χαρακτηριστεί κυρίως αριθμός. Την άποψη του αυτή ενισχύει με το επιχείρημα ότι «ουδέν των σχημάτων δια του 2 παρίστανται» γι' αυτό και ο 2 «αριθμός κυρίως ουκ ονομάζεσθαι δέον, αλλά καταχρηστικώς». Επομένως οι αριθμοί αρχίζουν από το 3.

Οι απόψεις αυτές του συγγραφέα της Ο. Μ., παρ' όλο που μας κάνουν να διερωτόμαστε ποιες ήταν οι γνώσεις του για την έννοια του φυσικού αριθμού, δεν μας ξενίζουν ιδιαίτερα γιατί όπως είναι γνωστό ανάλογες απόψεις είχαν διατυπώσει και άλλοι μαθηματικοί στην Ευρώπη εκείνη την εποχή.

Ο ορισμός γ' της Ο. Μ., αναφέρεται στο «μέρος» και είναι ο εξής: «Μέρος είναι αριθμός αριθμού ο μικρότερος του μεγαλύτερου, όταν καταμετρεί τον μεγαλύτερον».

Για να γίνει κατανοητός ο ορισμός γ' ο συγγραφέας δίνει αριθμητικό παράδειγμα. Συγκεκριμένα, στο περιθώριο του βιβλίου, δίπλα στα σχόλια του ορισμού γράφει τους αριθμούς:

3	6	9	12
δ	ε	ζ	η
	2	3	4
	θ	κ	λ

και παρατηρεί ότι ο δ είναι μέρος των αριθμών ε, ζ, η γιατί τους καταμετρεί. Στην συνέχεια εξηγεί τότε λέμε ότι ένας αριθμός είναι **μέρος ομώνυμο** ενός άλλου. Αναφερόμενος στους παραπάνω αριθμούς γράφει:

Επειδή ο δ «μετρεί» τον ε κατά θ μονάδες, ο αριθμός θ λέγεται μέρος ομώνυμο του ε κατά τον δ.

Επειδή ο δ «μετρεί» και τους ζ και η κατά κ και λ μονάδες αντίστοιχα,

ο κ λέγεται μέρος ομώνυμο του ζ κατά τον δ και

ο λ λέγεται μέρος ομώνυμο του η κατά τον δ

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο ορισμός ια' του πρώτου αριθμού. Σύμφωνα με τον Ευκλείδη «Πρώτος αριθμός είναι ο μετρούμενος μόνον υπό της μονάδος». Τον ίδιο ορισμό παραθέτει και ο Ανθρακίτης στην Ο. Μ.

Ο ορισμός του πρώτου αριθμού όπως δίνεται σήμερα είναι: Πρώτος ονομάζεται ο φυσικός αριθμός ο οποίος έχει δύο ακριβώς θετικούς διαιρέτες, τον εαυτό του και την μονάδα.

Δηλαδή ο Ευκλείδης αναφέρεται μόνο στους γνήσιους διαιρέτες του αριθμού. Παρ' όλο που την εποχή την οποία γράφτηκε η Ο. Μ. ο ορισμός του πρώτου αριθμού στα διάφορα βιβλία αριθμητικής δίνονταν όπως και σήμερα, εν τούτοις, ο Ανθρακίτης ακολουθεί τον Ευκλείδη στον ορισμό των εννοιών. Ο τρόπος με τον οποίο ορίζεται ο

πρώτος αριθμός από τον Ευκλείδη απλουστεύει την έννοια του τέλειου αριθμού (ορισμός κβ')

Μετά «την ερμηνεία των όρων», ο Ανθρακίτης, επανέρχεται στην συνηθισμένη τακτική του δηλαδή αφήνει τα αριθμητικά παραδείγματα και χρησιμοποιεί σχήματα σε όλες σχεδόν τις αποδείξεις των προτάσεων.

Το βιβλίο VII της Ο. Μ., περιέχει 41 προτάσεις ενώ στο βιβλίο των «Στοιχείων» περιέχονται 39. Ο Ανθρακίτης προσθέτει δύο ακόμα προτάσεις τις κ' και κβ' οι οποίες με σύγχρονο συμβολισμό αποδίδονται ως εξής:

- Πρόταση κ': Εάν τρεις αριθμοί είναι ανάλογοι τότε το γινόμενο των άκρων ισούται με το τετράγωνο του μέσου. Με σύγχρονο συμβολισμό η πρόταση αποδίδεται ως εξής: αν $\alpha/\beta = \beta/\gamma$ τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta^2$
- Πρόταση κβ': Εάν α , β , γ και A , B , Γ είναι αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha/\beta = B/\Gamma$ και $\beta/\gamma = A/B$ τότε ο «δι' ίσου λόγος» σε «τεταραγμένη» αναλογία είναι η σχέση $\alpha/\gamma = A/\Gamma$

Στις αποδείξεις των προτάσεων του βιβλίου VII της Ο. Μ., υπάρχουν μικρές διαφοροποιήσεις σε σχέση με αυτές των «Στοιχείων» οι οποίες σε γενικές γραμμές περιορίζονται σε απλουστεύσεις στην διατύπωση των κειμένων.

Στο 7^ο βιβλίο της Ο. Μ., υπάρχουν πέντε (5) πορίσματα, ενώ στα «Στοιχεία» ένα (1) μόνο πόρισμα στην πρόταση β'.

Συγκεκριμένα τα πορίσματα της Ο. Μ. αναφέρονται:

- Το 1^ο στην πρόταση β'. Είναι το πόρισμα της πρότασης β', των «Στοιχείων»
- Το 2^ο στην πρόταση θ'
- Το 3^ο στην πρόταση ιδ'
- Το 4^ο και το 5^ο στην πρόταση ιστ'

VIII

Το όγδοο βιβλίο των «Στοιχείων» έτσι όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο «Οδός Μαθηματικής»

Στο βιβλίο VIII των «Στοιχείων» ο Ευκλείδης αναφέρεται σε σειρές αριθμών, συνεχείς αναλογίες και στην Γεωμετρία των αριθμών.

Ο συγγραφέας χωρίς προοίμιο όπως και στα δύο προηγούμενα βιβλία αρχίζει με την μελέτη των προτάσεων αφού στο 8^ο βιβλίο δεν υπάρχουν ορισμοί.

Το βιβλίο VIII της Ο.Μ. περιλαμβάνει είκοσι επτά (27) προτάσεις ακριβώς αυτές οι οποίες περιέχονται και στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη.

Οι αποδείξεις των προτάσεων του βιβλίου VIII της Ο. Μ., διαφοροποιούνται ελάχιστα από αυτές των «Στοιχείων» και οι διαφοροποιήσεις αυτές περιορίζονται κυρίως σε απλουστεύσεις στην διατύπωση των κειμένων.

Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι η απόδειξη της πρότασης α' της Ο.Μ. γίνεται μέσα σε εννέα (9) γραμμές ενώ η αντίστοιχη των «Στοιχείων» καταλαμβάνει δεκαεπτά (17) γραμμές. Ενώ η διαδικασία των αποδείξεων ανάμεσα στα δύο βιβλία δεν διαφέρει, ο Ανθρακίτης, επιτυγχάνει την συντόμευση αυτή γιατί στο κείμενο της απόδειξης δεν επαναλαμβάνει την διατύπωση της πρότασης ούτε και αναφέρει το συμπέρασμα, όπως επίσης παραλείπει τις επαναλήψεις κάποιων εκφράσεων μερικές φορές και σε βάρος της αυστηρότητας του κειμένου.

Ο τρόπος αυτός της παρουσίασης των αποδείξεων των προτάσεων οφείλεται στον στόχο του συγγραφέα να δώσει ένα βιβλίο το οποίο προορίζονταν κυρίως για να διδαχθεί. Ο στόχος αυτός γίνεται φανερός όπως ήδη έχουμε αναφέρει και από τον τρόπο ερμηνείας των ορισμών αλλά και από τον αριθμό των πορισμάτων των βιβλίων.

Στο βιβλίο VIII της Ο. Μ., υπάρχουν έξι (6) πορίσματα και ένα (1) λήμμα ενώ στο αντίστοιχο βιβλίο των «Στοιχείων» ένα (1) πόρισμα στην πρόταση β'.

Το πόρισμα των «Στοιχείων» είναι: Εάν τρεις αριθμοί σε συνεχή αναλογία είναι οι ελάχιστοι από όλους όσους έχουν ίσο λόγο με αυτούς, τότε οι άκροι τους είναι τέλεια τετράγωνα, ενώ αν οι αριθμοί είναι τέσσερις τότε οι άκροι τους είναι κύβοι.

Το λήμμα της Ο. Μ. αφορά στην απόδειξη της πρότασης ε' και με σύγχρονους συμβολισμούς αποδίδεται ως εξής:

- Αν α, β, γ φυσικοί αριθμοί και ισχύει $\alpha/\beta=\delta$ και $\beta/\gamma=\epsilon$ τότε θα ισχύει ότι $\alpha/\gamma=\delta\epsilon$
- Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ φυσικοί αριθμοί και ισχύει $\alpha/\beta=\epsilon$, $\beta/\gamma=\zeta$, $\gamma/\delta=\eta$ τότε θα ισχύει ότι $\alpha/\delta=\epsilon\zeta\eta$

Τα πορίσματα της Ο.Μ. αναφέρονται στις προτάσεις :

- Το 1^ο το 2^ο και το 3^ο στην πρόταση β'. Το 1^ο πόρισμα της Ο. Μ., είναι το πόρισμα της πρότασης β' των «Στοιχείων»
- Το 4^ο στην πρόταση ια'
- Το 5^ο στην πρόταση ιβ'
- Το 6^ο στην πρόταση ιγ'

IX

Το ένατο βιβλίο των «Στοιχείων» έτσι όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο «Οδός Μαθηματικής»

Το βιβλίο IX των «Στοιχείων», όπως και το προηγούμενο, αναφέρεται στην Γεωμετρία των Αριθμών καθώς και σε αριθμούς οι οποίοι βρίσκονται σε συνεχή αναλογία με πρώτο αριθμό την μονάδα. Περιέχει επίσης κάποιες θεμελιώδεις προτάσεις όπως είναι η πρόταση ιδ' η οποία προσεγγίζει το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής.

Ο Ανθρακίτης αρχίζει χωρίς προοίμιο την ερμηνεία των προτάσεων του 9^{ου} βιβλίου αφού το βιβλίο αυτό δεν περιέχει ορισμούς.

Το βιβλίο IX της Ο. Μ. περιλαμβάνει τριάντα έξι (36) προτάσεις ακριβώς αυτές τις οποίες περιέχει και στο αντίστοιχο βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Οι αποδείξεις των προτάσεων της Ο. Μ., σύμφωνα πάντα με την τακτική του συγγραφέα παρουσιάζονται με όσο το δυνατόν απλούστερο τρόπο (ή με ελάχιστες διαφοροποιήσεις ως προς την διαδικασία...) χωρίς να διαφοροποιούνται ιδιαίτερα ως προς την διαδικασία από τις αντίστοιχες προτάσεις των «Στοιχείων».

Το μοναδικό πόρισμα των «Στοιχείων» το οποίο αναφέρεται στην πρόταση ια' δεν υπάρχει στην Ο. Μ. Είναι μία από τις ελάχιστες περιπτώσεις που κάποια μαθηματική έννοια των «Στοιχείων» δεν περιέχεται στην Ο. Μ. Στην πλειοψηφία τους τα βιβλία της Ο. Μ. περιέχουν περισσότερους ορισμούς και πορίσματα από εκείνα των «Στοιχείων», κάποια δε από τα βιβλία αυτά περιέχουν και περισσότερες προτάσεις.

Το πόρισμα της πρότασης ια' των «Στοιχείων» με σύγχρονους συμβολισμούς αποδίδεται ως εξής:

Αν έχουμε πεπερασμένο πλήθος όρων γεωμετρικής προόδου της μορφής: $1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^v$, τότε $\lambda^k \cdot \lambda^{(v-k)} = \lambda^v$

XI

Το ενδέκατο βιβλίο των «Στοιχείων» έτσι όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο «Οδός Μαθηματικής»

Μετά το βιβλίο IX των «Στοιχείων» ο Ανθρακίτης συνεχίζει με την παρουσίαση του βιβλίου XI, του πρώτου από τα βιβλία τα οποία αναφέρονται στην Γεωμετρία του χώρου δηλαδή στην Στερεομετρία.

Το ερώτημα που γεννάται είναι, γιατί ο συγγραφέας της Ο. Μ. δεν συμπεριέλαβε στο έργο του το 10^ο βιβλίο των «Στοιχείων» αλλά το παρέκαμψε;

Την απάντηση θα μπορούσαμε να δώσουμε εξετάζοντας την φύση και το περιεχόμενο του 10^{ου} βιβλίου των «Στοιχείων» σε συνδυασμό με τον σκοπό για τον οποίο γράφτηκε και εκδόθηκε το έργο του Ανθρακίτη.

Το 10^ο βιβλίο είναι το εκτενέστερο από τα δεκατρία βιβλία των «Στοιχείων» το οποίο μέσα από εκατόν δέκα πέντε (115) θεωρήματα παρουσιάζει την θεωρία των ασύμμετρων μεγεθών.

Θεωρείται το τελειότερο από όλα τα βιβλία των «Στοιχείων» αλλά και το δυσκολότερο γι αυτό χαρακτηρίστηκε στους νεότερους χρόνους ως «σταυρός των Μαθηματικών» (Simon Stevin)⁴⁷⁷. Αναφέρεται σε ένα θέμα εξαιρετικά δύσκολο και σε γενικές γραμμές άγνωστο στους μαθηματικούς μέχρι τον 19^ο αιώνα, στην θεωρία των ασύμμετρων μεγεθών και μάλιστα δοσμένη με γεωμετρικό τρόπο.

Ο συγγραφέας, ο οποίος προόριζε το έργο του —όπως έχει δείξει η μέχρι τώρα μελέτη του— κυρίως για διδακτικό εγχειρίδιο, δεν θεώρησε σκόπιμο να συμπεριλάβει τα

⁴⁷⁷ Η δυσκολία του 10^{ου} βιβλίου ... έγινε για πολλούς ο τρόμος, μάλιστα έφθασαν να το ονομάσουν «ο σταυρός των Μαθηματικών», C.M. Taisbak Coloured Quadraugles, A guide to the Tenth Book of Euclid's Elements. Museum Tusculanum Press. Copenhagen. 1982 sel. 65.

δύσκολα μαθηματικά κείμενα του 10^{ου} βιβλίου στην Ο. Μ. Στο προοίμιο των «Στοιχείων» ο Ανθρακίτης γράφει ότι το δέκατο βιβλίο, «περί των σχέσεων των περιεχουσών τα σχήματα πλευρών, και μη, και των εκ' τούτων χωρίων, και άλλων τινών πολυπραγμονει.», για τον λόγο αυτό είναι «και περιεργωδέστερον και υψηλότερου νοός δεόμενον». Εφ' όσον λοιπόν για την κατανόηση του βιβλίου Χ, απαιτείται σύμφωνα με τον Ανθρακίτη υψηλότερο επίπεδο σκέψης, το βιβλίο δεν θεωρήθηκε κατάλληλο για να διδαχθεί και δεν το παρουσίασε στο έργο του.

Σε αυτό τον βοήθησε και ο «ανεξάρτητος» χαρακτήρας του βιβλίου σε σχέση με τα υπόλοιπα. Δηλαδή αν και οι έννοιες τις οποίες διαπραγματεύεται περιέχονται στα προηγούμενα βιβλία, λόγω της γεωμετρικής φύσης των «Στοιχείων», το βιβλίο αυτό έχει «χαλαρούς» δεσμούς με τα υπόλοιπα. Επομένως η παράλειψή του δεν «αναστατώνει» το Ευκλείδειο οικοδόμημα τουλάχιστον σε ένα πρώτο στοιχειώδες επίπεδο.

Την εποχή που ο Ανθρακίτης επέστρεψε από την Ιταλία και ανέλαβε την σχολαρχία της σχολής στην Καστοριά (1708) η μαθηματική παιδεία στον ελληνικό χώρο ήταν σχεδόν ανύπαρκτη. Στις ελάχιστες ανώτερες σχολές της εποχής εκείνης δεν διδασκόνταν τα μαθηματικά και η επιστροφή του Ανθρακίτη στην Ελλάδα ταυτίστηκε με την εισαγωγή της διδασκαλίας των μαθηματικών στα σχολεία του υπόδουλου ελληνισμού. Αυτή η εμβρυακή κατάσταση της μαθηματικής παιδείας την εποχή εκείνη, την οποία γνώριζε ο Ανθρακίτης πιθανότατα τον απέτρεψε να συμπεριλάβει στα διδασκόμενα κείμενα ένα βιβλίο τόσο «υψηλού επιπέδου» όπως είναι το 10^ο βιβλίο των «Στοιχείων».

Την μελέτη του 11^{ου} βιβλίου των «Στοιχείων» και «πρώτου βιβλίου των στερεών», ο συγγραφέας αρχίζει χωρίς προοίμιο με την ερμηνεία των δεκαοκτώ (18) ορισμών οι οποίοι είναι ίδιοι ακριβώς με αυτούς που υπάρχουν στα «Στοιχεία».

Ο Ανθρακίτης ερμηνεύει τους ορισμούς χωρίς να χρησιμοποιεί σχήματα όπως συνηθίζει μέχρι τώρα αλλά με εκτενή σχόλια εκεί που κρίνει ότι είναι απαραίτητα.

Προκειμένου να γίνει κατανοητός ο πρώτος ορισμός, «Στερεόν έστι το μήκος, πλάτος και βάθος έχον», αρχικά κάνει διάκριση των εννοιών σώματος και στερεού. Παρ' όλο που κάθε στερεό είναι και σώμα εν' τούτοις η έννοια του σώματος είναι γενικότερη.

Διότι σώματα δεν είναι μόνον τα στερεά αλλά και τα «φρέωδη, και αυτά τα ουράνια καλούμενα σώματα». Και τα μεν πρώτα, τα ρευστά, «ανεπίδεκτα όλως φαίνεται σχημάτων» τα δε ουράνια είναι άλλης φύσης σώματα και δεν συμπεριλαμβάνονται στα «περί των δεκτικών καθ' αυτά των οιονδήποτε σχημάτων διαλαβείν» που είναι το αντικείμενο μελέτης του παρόντος βιβλίου. Επομένως το 11^ο βιβλίο δεν μελετά τα σώματα αλλά τα στερεά.

Σύμφωνα με τον συγγραφέα:

Το στερεό έχει μήκος κάτι που το διακρίνει από το αμερές, «ίνα με αμερές υποληφθῇ»

Στο στερεό προστέθηκε και το πλάτος για να το εξαιρέσει από τις γραμμές, «ώπως αν των γραμμών εξάρη»

Τέλος προστέθηκε και το βάθος για να το εξαιρέσει και από τις επιφάνειες, «το δε βάθος, ίνα και των επιφανειών διάφορον αποδείξη».

Στην συνέχεια περιγράφει τις τρεις διαστάσεις:

- Μήκος είναι «το επί τα έμπροσθεν ή όπισθεν προχωρούν»
- Πλάτος είναι «το επί τα δεξιά ή αριστερά εκτεινόμενον»
- Βάθος είναι «το από των κάτω επί τα άνω ανιστάμενον»

Η περιγραφή των τριών διαστάσεων με τον παραπάνω τρόπο δείχνει ότι ο Ανθρακίτης γνώριζε τα σχετικά με το τρισδιάστατο καρτεσιανό επίπεδο αφού ορίζει τρεις διευθύνσεις στο χώρο (έμπροσθεν ή όπισθεν, δεξιά ή αριστερά, πάνω ή κάτω) και κατά συνέπεια και ένα σταθερό σημείο με την βοήθεια των οποίων προσδιορίζει το στερεό.

Στο βιβλίο XI της Ο. Μ. περιέχονται σαράντα (40) προτάσεις ενώ στα «Στοιχεία» τριάντα εννέα (39) γιατί δεν περιέχουν την πρόταση λη' της Ο.Μ.

Η πρόταση αυτή είναι: Αν δύο επίπεδα είναι κάθετα και από σημείο του ενός επιπέδου φέρουμε ευθεία κάθετη προς το άλλο επίπεδο, τότε το ίχνος της καθέτου αυτής θα είναι σημείο της τομής των δύο επιπέδων.

Οι υπόλοιπες προτάσεις της Ο. Μ. είναι ακριβώς ίδιες με τις αντίστοιχες των «Στοιχείων», με εξαίρεση την πρόταση λθ' της Ο. Μ., η οποία αναφέρεται γενικά σε παραλληλεπίπεδο ενώ η αντίστοιχη των «Στοιχείων» αναφέρεται ειδικότερα στο κύβο.

Οι διαφορές στις αποδείξεις των προτάσεων της Ο. Μ., έχουν σχέση κυρίως με απλουστεύσεις στην διατύπωση των μαθηματικών κειμένων χωρίς ουσιαστικά να διαφοροποιούνται οι διαδικασίες των αποδείξεων αυτών.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η απόδειξη της πρότασης στ' της Ο. Μ., η οποία δίνεται με δύο διαφορετικούς τρόπους. Μετά την πρώτη απόδειξη η οποία είναι διαφορετική και απλούστερη από αυτήν των «Στοιχείων», ο συγγραφέας για τον δεύτερο τρόπο απόδειξης γράφει: «άλλως κατ' Ευκλείδην» και στη συνέχεια δίνει την απόδειξη των «Στοιχείων».

Δηλαδή ο Ανθρακίτης, δεν «απομακρύνεται» από το κείμενο των «Στοιχείων», το οποίο έχει σαν κεντρικό άξονα του έργου του παρά τις όποιες διαφοροποιήσεις τις οποίες έχουμε συναντήσει μέχρι τώρα στα κείμενα της Ο. Μ.

Το βιβλίο XI της Ο. Μ. περιέχει ένα λήμμα το οποίο αναφέρεται στην πρόταση κγ', ίδιο με εκείνο της αντίστοιχης πρότασης των «Στοιχείων».

Το λήμμα της πρότασης κδ' του Ευκλείδη δεν περιέχεται στο βιβλίο του Ανθρακίτη και αποτελεί μία από τις ελάχιστες προτάσεις των «Στοιχείων» οι οποίες δεν αναφέρονται στην Ο. Μ.

Στο 11^ο βιβλίο της Ο. Μ. υπάρχουν δύο πορίσματα όσα και στο αντίστοιχο βιβλίο των «Στοιχείων», τα οποία αναφέρονται:

- Το 1^ο πόρισμα στην πρόταση λγ'. Το ίδιο πόρισμα υπάρχει και στα «Στοιχεία»
- Το 2^ο πόρισμα στην πρόταση λε'. Το ίδιο πόρισμα υπάρχει και στα «Στοιχεία»

Τα σχήματα τα οποία χρησιμοποιεί στις αποδείξεις των προτάσεων είναι σε πολλές περιπτώσεις – όπως και στα προηγούμενα βιβλία- περισσότερα από εκείνα των αποδείξεων στα «Στοιχεία». Ενδεικτικά:

- στην απόδειξη της ιε' προσθέτει ένα ακόμα σχήμα
- στην απόδειξη της κβ' προσθέτει δύο σχήματα
- Στην απόδειξη της κγ' της Ο. Μ. υπάρχουν δεκαπέντε (15) σχήματα ενώ

στα «Στοιχεία» τέσσερα (4)

- Σε κάθε μία από τις προτάσεις λγ' και λδ' προσθέτει δύο σχήματα.

Ακόμα, αρκετές φορές, για τις αποδείξεις προτάσεων, κατασκευάζει κύβους στην θέση ορθογωνίων παραλληλεπιδών χωρίς να χρησιμοποιεί τις ιδιότητες του κύβου, αλλά όπως έχουμε ήδη αναφέρει και σε άλλες περιπτώσεις, για να δώσει όσο το δυνατόν απλούστερη «εικόνα» στα μαθηματικά κείμενα.

XII

Το δωδέκατο βιβλίο των «Στοιχείων» έτσι όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο «Οδός Μαθηματικής»

Μετά το τέλος του 11^{ου} βιβλίου της Ο. Μ., ο Ανθρακίτης, χωρίς προοίμιο αρχίζει την ερμηνεία των προτάσεων του βιβλίου XII

Το 12^ο βιβλίο των «Στοιχείων» της Ο. Μ. δεν περιέχει ορισμούς και αποτελείται από δεκαοχτώ (18) προτάσεις, δύο (2) λήμματα και τρία (3) πορίσματα όπως ακριβώς και στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη.

Διαφορές στις αποδείξεις των προτάσεων του συγκεκριμένου βιβλίου σε σχέση με αυτές των «Στοιχείων» δεν υπάρχουν.

Στο βιβλίο του Ανθρακίτη περιέχονται δύο λήμματα τα οποία αναφέρονται στις προτάσεις:

- Το 1^ο στην πρόταση β'. Είναι το λήμμα της πρότασης β' των «Στοιχείων»
- Το 2^ο στην πρόταση δ'. Είναι το λήμμα της πρότασης δ' των «Στοιχείων»

Τα πορίσματα της Ο. Μ., αφορούν στις προτάσεις:

- Το 1^ο στην πρόταση ζ'. Είναι το πόρισμα της πρότασης ζ' των «Στοιχείων»
- Το 2^ο στην πρόταση θ'. Είναι το πόρισμα της πρότασης θ' των «Στοιχείων»
- Το 3^ο στην πρόταση ιζ'. Είναι το πόρισμα της πρότασης ιζ' των «Στοιχείων»

Όσον αφορά στα σχήματα του βιβλίου XII της Ο. Μ., δεν υπάρχουν αξιολογες διαφορές σε σχέση με αυτά των «Στοιχείων».

Στο συγκεκριμένο βιβλίο, επειδή οι αποδείξεις των προτάσεων ι', ια', ιβ' κ. ά. είναι μακροσκελείς και καταλαμβάνουν δύο, τρεις ή και περισσότερες σελίδες, ο Ανθρακίτης

επαναλαμβάνει το σχήμα σε κάθε σελίδα ώστε να διευκολύνεται ο αναγνώστης στην κατανόηση των κειμένων.

Στο σχήμα της πρότασης Θ', κατασκευάζει πυραμίδα με βάση ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο και όχι με βάση τυχαίο τρίγωνο, όπως απαιτεί η πρόταση. Όπως ήδη έχουμε συναντήσει και σε προηγούμενα βιβλία σε αρκετές περιπτώσεις ο Ανθρακίτης κατασκευάζει ειδικών περιπτώσεων σχήματα χωρίς να χρησιμοποιεί τις ιδιότητές τους αλλά μόνον για να δώσει απλούστερη «εικόνα» στα κείμενά του.

Για την απόδειξη της πρότασης ιζ' προσθέτει ένα ακόμα σχήμα σε αυτά των «Στοιχείων».

XIII

Το δέκατο τρίτο βιβλίο των «Στοιχείων» έτσι όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο «Οδός Μαθηματικής»

Μετά το τέλος του βιβλίου XII, ο Ανθρακίτης, συνεχίζει χωρίς προοίμιο με τις αποδείξεις των προτάσεων του 13^{ου} βιβλίου των «Στοιχείων», αφού και το βιβλίο αυτό δεν περιέχει ορισμούς.

Το 13^ο βιβλίο των «Στοιχείων», περιλαμβάνει την κατασκευή πέντε κανονικών στερεών: του τετράεδρου, του κύβου, του οκταέδρου, του εικοσαέδρου και του δωδεκαέδρου.⁴⁷⁸

Περιέχει επίσης προτάσεις οι οποίες αναφέρονται στη διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε άκρο και μέσο λόγο, στο κανονικό πεντάγωνο και στο ισόπλευρο τρίγωνο καθώς και τις προτάσεις στ' και ια' στις οποίες αναφέρεται «η αποτομή» και η «ελλάσων» αντίστοιχα.

Το βιβλίο XIII της Ο. Μ., περιέχει 18 προτάσεις, ακριβώς τις ίδιες με το αντίστοιχες προτάσεις των «Στοιχείων».

Την πρόταση α', ο Ανθρακίτης, αποδεικνύει όπως ακριβώς και στα «Στοιχεία» και στην συνέχεια δίνει μία δεύτερη απόδειξη εφαρμόζοντας την «αναλυτικοσυνθετική μέθοδο»

Πριν την εφαρμογή της μεθόδου, διαβάζουμε: «Σχόλιον, Ανάλυσις και Σύνθεσις τι;» και ακολουθούν οι ορισμοί της ανάλυσης και της σύνθεσης:

«Ανάλυσις, ἐστὶ λήψις τοῦ ζητουμένου δια τῶν ἀκολουθῶν, ὡς ὁμολογουμένου, ἐπὶ τὴν ἀληθὲς ὁμολογούμενον». Δηλαδή στην ανάλυση λαμβάνουμε το ζητούμενο ως ισχύον και οδηγούμαστε σε κάτι αληθές, σε αντίθεση με την σύνθεση στην οποία από το αληθές οδηγούμαστε στο ισχύον: «Σύνθεσις ἐστὶ λήψις τοῦ ὁμολογουμένου δια τῶν ἀκολουθῶν, ἐπὶ τῶν τοῦ ζητουμένου κατάληπτιν».

Τις ίδιες διαδικασίες απόδειξης ακολουθεί και στις προτάσεις β', γ', δ' και ε'. Δηλαδή για την κάθε μία από τις προτάσεις αυτές δίνει δύο αποδείξεις: την πρώτη, αυτή των «Στοιχείων» και την δεύτερη εφαρμόζοντας την μέθοδο της «ανάλυσης» και της «σύνθεσης»

⁴⁷⁸ Των λεγόμενων πλατωνικών στερεών (βλ. Τίμαιο)

Όλες οι υπόλοιπες προτάσεις της Ο. Μ., αποδεικνύονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με τις αντίστοιχες των «Στοιχείων».

Στο βιβλίο του Ανθρακίτη περιέχονται τρία λήμματα, τα οποία αφορούν στις προτάσεις:

- Το 1^ο λήμμα στην πρόταση β´
- Το 2^ο λήμμα στην πρόταση ιγ´
- Το 3^ο λήμμα στην πρόταση ιη´

Τα λήμματα αυτά περιέχονται και στις αντίστοιχες προτάσεις των «Στοιχείων».

Τα πορίσματα της Ο. Μ., είναι τα ίδια με αυτά των «Στοιχείων» και αναφέρονται στις προτάσεις:

- Το 1^ο πόρισμα στην πρόταση ιστ´. Το ίδιο υπάρχει και στα «Στοιχεία»
- Το 2^ο πόρισμα στην πρόταση ιζ´. Το ίδιο υπάρχει και στα «Στοιχεία»

Τα σχήματα του 13^{ου} βιβλίου της Ο. Μ., δεν διαφοροποιούνται από αυτά του αντίστοιχου βιβλίου των «Στοιχείων», ούτε ως προς την μορφή αλλά ούτε και ως προς τον αριθμό τους, όπως γίνονταν μέχρι τώρα στα βιβλία που προηγήθηκαν.

XIV

Το δέκατο τέταρτο βιβλίο των «Στοιχείων» έτσι όπως παρουσιάζεται στο έργο «Οδός Μαθηματικής»

Με ένα σύντομο προοίμιο ο συγγραφέας της Ο. Μ. αρχίζει την παρουσίαση των δύο επόμενων βιβλίων, τα οποία αν και συχνά στην βιβλιογραφία αναφέρονται ως το 14^ο και το 15^ο βιβλίο των «Στοιχείων» εν τούτοις αποδίδονται στον Υψικλή⁴⁷⁹ και μερικώς σ' έναν μαθητή του Ισιδώρου του Μιλήσιου.

Αυτό είναι γνωστό στον Ανθρακίτη ο οποίος στην παρουσίαση του 14^{ου} βιβλίου γράφει ότι κάποιοι θεωρούν πως το βιβλίο αυτό είναι το τέταρτο βιβλίο των στερεών των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, ενώ κάποιοι άλλοι το αποδίδουν στον Υψικλή τον Αλεξανδρέα. (περίπου 150 π.Χ.)⁴⁸⁰ Το βιβλίο αυτό περιέχει δώδεκα (12) προτάσεις.⁴⁸¹

Το 14^ο βιβλίο της «Οδού» αποτελείται από τέσσερις προτάσεις, τρία πορίσματα και ένα λήμμα. Το πρώτο πόρισμα αναφέρεται στην πρόταση Γ´ και τα δύο επόμενα καθώς και το λήμμα αναφέρονται στην πρόταση Δ´.

⁴⁷⁹ Ο Heath στο έργο του «Euclid the Elements» αποδίδει το 14^ο βιβλίο στον Υψικλή και το 15^ο στον Ανθέμιο». Ο συγγραφέας του 15^{ου} βιβλίου, αναφερόμενος στις γωνίες οι οποίες σχηματίζονται από επίπεδα τα οποία διέρχονται από τις ακμές των κανονικών στερεών, λέει ότι αυτές βρήκε ο δάσκαλός του, Ισιδώρος ο Τύρος.

⁴⁸⁰ Ο Υψικλής, έγραψε αστρονομική πραγματεία η οποία σώζεται και άλλα έργα, όπως περί αρμονίας, περί σφαιρών και περί πολυγωνικών αριθμών, τα οποία έχουν χαθεί. Ε. Σ. Σταμάτης, Ευκλείδου Γεωμετρία, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα 1975, τόμος Ι, σελ 25

⁴⁸¹ Ε. Σ. Σταμάτης, Ευκλείδου Γεωμετρία, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα 1975, τόμος Ι, σελ 26

Τα μαθηματικά κείμενα του βιβλίου (αποδείξεις προτάσεων και πορίσμάτων) παρουσιάζονται με το γνωστό μέχρι τώρα «ύφος» των κειμένων της Ο. Μ., το οποίο καθορίζεται από τον σκοπό συγγραφής του βιβλίου. Δηλαδή παρ' όλο που διακρίνονται από μαθηματική αυστηρότητα εν τούτοις γίνεται φανερό ότι απευθύνεται σε αναγνωστικό κοινό του οποίου οι μαθηματικές γνώσεις είναι περιορισμένες. Στους μαθητές των σχολείων των τουρκοκρατούμενων ελληνικών χωρών ή και του παροικιακού ελληνισμού.

Σε κάθε απόδειξη πρότασης ή πορίσματος χρησιμοποιούνται -ανάλογα με τις ανάγκες της απόδειξης- ένα η περισσότερα σχήματα τα οποία είναι κατασκευασμένα με μεγάλη ακρίβεια και αρτιότητα γεγονός που φανερώνει ακόμα μία φορά την αντίληψη του συγγραφέα για τον σημαντικό ρόλο των σχημάτων στην κατανόηση των αποδείξεων και τη πρόθεσή του να είναι όσο το δυνατόν επεξηγηματικότερος.

Για την απόδειξη της πρότασης Β' ο Ανθρακίτης χρησιμοποιεί τρία σχήματα και για την απόδειξη της πρότασης Δ' τέσσερα.

Από τα τρία πορίσματα αποδεικνύει μόνο το τρίτο ενώ ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η απόδειξη του λήμματος.

Πρόταση Α'

Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το κέντρο ενός κύκλου προς την πλευρά κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο αυτό, (το απόστημα του κανονικού πενταγώνου), ισούται με το ημιάθροισμα της πλευράς κανονικού εξαγώνου και κανονικού δεκαγώνου τα οποία είναι εγγεγραμμένα εις τον κύκλο αυτό.

Πρόταση Β'

Ο αυτός κύκλος περιλαμβάνει το, τε του δωδεκαέδρου πεντάγωνον, και το του εικοσαέδρου τρίγωνον των εις την αυτήν σφαίραν εγγεγραφομένων.

Πρόταση Γ'

Το τριακονταπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου με κάθετες πλευρές την πλευρά κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο και το απόστημα του πενταγώνου αυτού ισούται με την επιφάνεια του κανονικού δωδεκαέδρου με έδρα το κανονικό αυτό πεντάγωνο.

Πόρισμα: Ο λόγος της επιφάνειας ενός κανονικού δωδεκαέδρου προς την επιφάνεια ενός κανονικού εικοσαέδρου τα οποία είναι εγγεγραμμένα στην ίδια σφαίρα, ισούται με τον λόγο του γινομένου της πλευράς του κανονικού πενταγώνου επί το απόστημα του προς το γινόμενο της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου επί το απόστημά του τα οποία (πεντάγωνο και τρίγωνο) αποτελούν έδρες του δωδεκαέδρου και του εικοσαέδρου αντίστοιχα και είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο.

Πρόταση Δ'

Έστω κύκλος περιέχων (περιγεγραμμένος περί) το πεντάγωνο και το τρίγωνο των κανονικών δωδεκαέδρου και εικοσαέδρου (αντίστοιχα) τα οποία είναι εγγεγραμμένα στην ίδια σφαίρα και κύβος με ακμή το ευθ. τμήμα με άκρα δύο κορυφές του πενταγώνου οι οποίες δεν είναι διαδοχικές. Τότε ο λόγος της επιφάνειας του κανονικού

δωδεκαέδρου προς την επιφάνεια του κανονικού εικοσαέδρου ισούται με τον λόγο της ακμής του κύβου προς την ακμή του εικοσαέδρου.

Σημείωση: η απόδειξη της πρότασης Δ', δίνεται με δύο τρόπους και καταλαμβάνει τέσσερις πυκνογραμμένες σελίδες. Για την πληρέστερη κατανόηση της απόδειξης, ο συγγραφέας χρησιμοποιεί τέσσερα σχήματα. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην πρόταση αυτή αναφέρονται δύο πορίσματα και το μοναδικό λήμμα του βιβλίου.

Το έργο του Ευκλείδη κλείνει με την
ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ
ΤΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
του και στερεού πέμπτου
ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Ως τισι δοκεί, ως δ' άλλοις, Υψικλέους Αλεξανδρέως περί των πέντε σωμάτων δεύτερον.

Το 15^ο και τελευταίο βιβλίο των «Στοιχείων» της Ο.Μ., είναι το δεύτερο βιβλίο το οποίο αφορά στα πέντε στερεά σώματα, (κύβος, κανονικό τετράεδρο, οκτάεδρο, δωδεκαέδρο και εικοσαέδρο). Το 15^ο βιβλίο θεωρείται ότι έχει λιγότερο ενδιαφέρον από το 14^ο⁴⁸². Το συγκεκριμένο βιβλίο περιέχει κατασκευές στερεών εκ' των οποίων τις πέντε πρώτες⁴⁸³ παρουσιάζει ο Ανθρακίτης στο έργο του με τα πέντε παρακάτω προβλήματα:

Πρόταση Α': Πρόβλημα

Σε δοθέντα κύβο, να εγγραφεί πυραμίδα.

Πρόταση Β': Πρόβλημα

Σε δοθείσα πυραμίδα, να εγγραφεί οκτάεδρο.

Πρόταση Γ': Πρόβλημα

Σε δοθέντα κύβο να εγγραφεί οκτάεδρο

Πρόταση Δ': Πρόβλημα

Σε δοθέν οκτάεδρο να εγγραφεί κύβος.

Πρόταση Ε': Πρόβλημα

Σε δοθέν εικοσαέδρο να εγγραφεί δωδεκαέδρο.

⁴⁸² Ε. Σ. Σταμάτη, «Ευκλείδου Γεωμετρία», Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα 1975, τόμος Ι, σελ 25

⁴⁸³ Μετά την τελευταία κατασκευή, ο συγγραφέας του βιβλίου αυτού αναφερόμενος στις γωνίες οι οποίες σχηματίζονται από επίπεδα τα οποία διέρχονται από τις ακμές των κανονικών στερεών, λέει ότι αυτές βρήκε ο μεγάλος δάσκαλός του, Ισίδωρος ο Τύρος. Αυτό και μόνο δείχνει ότι το 15^ο βιβλίο δεν είναι έργο του Ευκλείδη. ⁴⁸³ ο. α σελ 25

Σημείωση: Η κατασκευή αυτή καταλαμβάνει πέντε σελίδες και περιγράφεται με την βοήθεια έξι άψογα κατασκευασμένων σχημάτων.

3.3.2 Τα περί «Σφαιρικών» κατά Θεοδόσιον τον Τριπολίτην.

Μετά την ολοκλήρωση των «Στοιχείων», στον πρώτο τόμο της Ο. Μ., ακολουθεί,

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΡΜΗΝΕΙΑ
ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ
ΚΑΤΑ ΘΕΟΔΟΣΙΟΝ ΤΟΝ ΤΡΙΠΟΛΙΤΗΝ.
ΒΙΒΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ
ΠΡΟΪΜΙΟΝ

Στο προοίμιο το οποίο αναφέρεται στα τρία βιβλία των «ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ» του Θεοδοσίου, ο εκδότης του έργου, Μπαλάνος Βασιλόπουλος, εξηγεί την σκοπιμότητα της σύντομης ερμηνείας και παρουσίασης του έργου αυτού.

Συγκεκριμένα, αναφέρει ότι τα είδη της επιφάνειας είναι δύο, η επίπεδη και η σφαιρική. και η μεν επίπεδη είναι βάση και «υποκείμενον» όλων των επιπέδων σχημάτων και χωρίς αυτή «ουδέν των τοιούτων υφίσταται δύναται, και τη αισθήσει υποπίπτειν» και η σφαιρική, των σφαιρικών.

Και για την γνώση των προβλημάτων και θεωρημάτων τα οποία αφορούν στα επίπεδα, είναι αρκετά τα έξι βιβλία των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. για την κατανόηση των σφαιρικών πολλοί από τους αρχαίους Έλληνες εξέθεσαν «ευμεθόδως» κάποια στοιχειώδη θεωρήματα και προβλήματα και έδωσαν γι' αυτά πληρέστατη ερμηνεία. Ένας από αυτούς ήταν και ο Θεοδόσιος ο φιλόσοφος. Αλλά το μακρύ διάστημα και οι μεγάλες μεταβολές των πραγμάτων και αυτή η τέτοια κατάπτωση του Γένους «κατηναλώσαντό τε και εξηφάνισαν» σαν να μην είχαν γίνει ποτέ όλα αυτά.

Αλλά κάποιος από τους λόγιους, ο δάσκαλός του ο Μεθόδιος Ανθρακίτης, «εις Ενετίας παρεγένετο» και εκεί «δια της λατινίδος» διδάχτηκε την μαθηματική επιστήμη, και εκτός από τα άλλα φιλοπονήματά του, έφερε εις την Ελλάδα τα τρία βιβλία του Θεοδοσίου περί σφαιρικών προβλημάτων και θεωρημάτων «εξ' αλλοτρίων τα οικεία ερανισάμενος».

Ο Μπαλάνος, όπως ο ίδιος ισχυρίζεται, εξ αιτίας της μεγάλης ασάφειας των κειμένων, τα έφερε εις το φως με σαφήνεια όπως έκανε και με τα άλλα κείμενα του Ανθρακίτη, προς χάριν των φιλομαθών και των «γνησίων εραστών» της μαθηματικής επιστήμης.

Κλείνοντας το προοίμιο, ο Μπαλάνος τονίζει την χρησιμότητα των βιβλίων του Θεοδοσίου στην Αστρονομία και σε εκείνους οι οποίοι καταγίνονται με την ουράνιο και επίγειο σφαίρα «η τούτων προθεωρία ουχ' ήττον αναγκαία, ή τοις άλλοις τα του Ευκλείδου στοιχεία».

Ενδεικτικά, θα αναφέρουμε τους ορισμούς, τις προτάσεις και τα πορίσματα του πρώτου από τα τρία βιβλία των «ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ» του Θεοδοσίου, έτσι όπως αυτό παρουσιάζεται στο έργο του Ανθρακίτη.

Το βιβλίο αυτό αποτελείται από εννέα (9) ορισμούς, δεκαοχτώ προτάσεις από τις οποίες οι πέντε είναι προβλήματα (κατασκευές) και δεκατρία πορίσματα.

Οι ορισμοί

Α': Σφαίρα είναι σχήμα στερεό το οποίο περιέχεται από μία επιφάνεια προς την οποία όλες οι προσπίπτουσες ευθείες, από ένα σημείο, οι οποίες κείνται εντός της σφαίρας είναι ίσες.

Β': Κέντρο δε της σφαίρας είναι το σημείο αυτό.

Γ': Άξονας⁴⁸⁴ της σφαίρας είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο άγεται δια του κέντρου της σφαίρας και περατούται και στα δύο μέρη της επιφανείας της, γύρω από το οποίο (αν διατηρείται σταθερό), η σφαίρα μπορεί να περιφέρεται.

Δ': Πόλοι της σφαίρας ονομάζονται τα άκρα του άξονα της σφαίρας.

Ε': Πόλος κύκλου ο οποίος είναι εγγεγραμμένος σε σφαίρα είναι σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας από το οποίο όλα τα ευθύγραμμα τμήματα προς την περιφέρεια του κύκλου είναι ίσα.

ΣΤ': Κύκλοι εγγεγραμμένοι σε σφαίρα **απέχουν εξ ίσου από το κέντρο**, όταν τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία άγονται από το κέντρο της σφαίρας προς τα επίπεδα των κύκλων είναι ίσα.

Ζ': Κύκλοι μέγιστοι είναι της σφαίρας, εκείνοι οι οποίοι διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας και διχοτομούν την σφαίρα.

Η': Κύκλοι ελάσσονες είναι εκείνοι οι οποίοι δεν διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας και χωρίζουν την σφαίρα σε δύο άνισα μέρη

Θ: Ίσοι κύκλοι σφαίρας είναι εκείνοι οι οποίοι απέχουν εξ ίσου από τους πόλους των, και των οποίων τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία άγονται από τους πόλους προς την περιφέρειά τους είναι ίσα, μεγαλύτερος δε εκείνος ο οποίος απέχει περισσότερο από τον πόλο του.

Οι προτάσεις και τα πορίσματα:

Πρόταση Α': Θεώρημα

Αν σφαίρα τμηθεί από επίπεδο το οποίο δεν διέρχεται από το κέντρο της, τότε το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το κέντρο της σφαίρας προς το επίπεδο, θα ανήκει στο εσωτερικό της σφαίρας.

Πρόταση Β': Θεώρημα

Εάν σφαίρα τμηθεί από οποιοδήποτε επίπεδο, η κοινή τομή της σφαίρας και του επιπέδου είναι κύκλος.

⁴⁸⁴ Είναι η διάμετρος της σφαίρας

- **Πόρισμα:** το κέντρο της σφαίρας είναι και κέντρο του κύκλου ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της.
- **Πόρισμα:** Το ίχνος του καθέτου ευθυγράμμου τμήματος το οποίο άγεται από το κέντρο της σφαίρας προς το επίπεδο του κύκλου ο οποίος δεν διέρχεται από το κέντρο της, είναι το κέντρο του κύκλου.

Πρόταση Γ': Πρόβλημα

Να βρεθεί το κέντρο δοθείσας σφαίρας

- **Πόρισμα:** Το κέντρο της σφαίρας ανήκει στην ευθεία η οποία είναι κάθετη στο επίπεδο του ελάσσονος κύκλου και διέρχεται από το κέντρο του.
- **Εάν η τομή της δια του κέντρου του κύκλου, δος ειπείν της αγ, συμπίση τω κέντρω του κύκλου, το αυτό έσται κέντρον της τε σφαίρας και του κύκλου**

Πρόταση Δ': Θεώρημα

Σφαίρα άπτεται σε επίπεδο μόνο σε ένα σημείο.

- **Πόρισμα:** από τούτο είναι φανερό ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δύο οποιαδήποτε σημεία της σφαίρας ανήκει στην σφαίρα.

Πρόταση Ε': Θεώρημα

Εάν ένα επίπεδο εφάπτεται σε σφαίρα, τότε το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από το κέντρο της σφαίρας μέχρι το σημείο επαφής, είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο.

- **Πόρισμα:** από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε και το αντίστροφο, ότι εάν από το σημείο επαφής ενός εφαπτόμενου επιπέδου σε σφαίρα, φέρουμε κάθετο ευθύγραμμο τμήμα προς το επίπεδο το οποίο να ανήκει στο εσωτερικό της σφαίρας, τότε το κέντρο της σφαίρας θα είναι σημείο του τμήματος αυτού

Πρόταση ΣΤ': Θεώρημα

Το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από το κέντρο σφαίρας μέχρι το κέντρο ενός ελάσσονος στην σφαίρα κύκλου είναι κάθετο στο επίπεδο του κύκλου.

- **Πόρισμα:** από αυτό γίνεται φανερό ότι, εάν από το κέντρο σφαίρας φέρουμε ευθεία κάθετη προς το επίπεδο ενός ελάσσονος στην σφαίρα κύκλου, τότε αυτή διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

Πρόταση Ζ': Θεώρημα

Από τους κύκλους οι οποίοι είναι εγγεγραμμένοι σε σφαίρα, εκείνοι οι οποίοι διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας είναι μέγιστοι και αντίστροφα οι μέγιστοι κύκλοι σφαίρας διέρχονται από το κέντρο της, οι δε κύκλοι οι οποίοι απέχουν εξ' ίσου από το κέντρο της σφαίρας είναι ίσοι και αντίστροφα οι ίσοι κύκλοι απέχουν εξ' ίσου από το κέντρο της σφαίρας και επί πλέον εκείνοι (οι κύκλοι) οι οποίοι απέχουν μεγαλύτερη απόσταση από το κέντρο της σφαίρας είναι μικρότεροι από αυτούς οι οποίοι βρίσκονται πλησιέστερα του κέντρου.

- **Πόρισμα:** Από αυτό συνάγεται ότι όλοι οι μέγιστοι κύκλοι σφαίρας είναι ίσοι διότι όπως έχει δειχθεί η ημιδιάμετρος των μεγίστων κύκλων σε σφαίρα είναι ίση με την ημιδιάμετρο της σφαίρας.

- **Πόρισμα:** συνάγεται ακόμα ότι, εκατέρωθεν ενός μέγιστου κύκλου σφαίρας, υπάρχουν δύο μόνο ελάχιστονες κύκλοι οι οποίοι να είναι ίσοι μεταξύ τους.

Πρόταση Η': Θεώρημα

Η κάθετη που άγεται από το κέντρο σφαίρας προς το επίπεδο κύκλου της σφαίρας, διέρχεται από τους πόλους του κύκλου και αντίστροφα εάν από πόλο κύκλου σφαίρας αχθεί κάθετος στο επίπεδο του κύκλου, τότε αυτή διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας και από τον απέναντι πόλο του κύκλου.

Πρόταση Θ': Θεώρημα

Το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει άκρα τους πόλους κύκλου μιας σφαίρας, είναι κάθετο στο επίπεδο του κύκλου και διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.

- **Πόρισμα:** από αυτό γίνεται φανερό ότι η κάθετη που άγεται από πόλο κύκλου σφαίρας προς το επίπεδό του, διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και αντίστροφα.

Πρόταση Ι': Θεώρημα

Οι μέγιστοι κύκλοι σφαίρας διχοτομούνται και αντίστροφα εάν κύκλοι σφαίρας τεμνόμενοι διχοτομούνται, τότε είναι μέγιστοι.

Πρόταση ΙΑ': Θεώρημα

Εάν το επίπεδο μέγιστου κύκλου σφαίρας τέμνει κάθετα το επίπεδο ελάχιστονος κύκλου της σφαίρας αυτής, τότε διχοτομεί τον ελάχιστο κύκλο και διέρχεται από τους πόλους του και αντίστροφα, εάν τον διχοτομεί τότε το επίπεδό του είναι κάθετο στο επίπεδο του ελάχιστου κύκλου.

Πρόταση ΙΒ': Θεώρημα

Εάν μέγιστος κύκλος σφαίρας διέρχεται από τους πόλους άλλου κύκλου της σφαίρας αυτής, τότε (το επίπεδό του) τον διχοτομεί κάθετα.

- **Πόρισμα:** από αυτό γίνεται φανερό ότι εάν μέγιστος κύκλος σφαίρας διέρχεται από τους πόλους άλλου μέγιστου κύκλου της σφαίρας αυτής, τότε και αυτός (ο δεύτερος) από τους πόλους αυτού διέρχεται και τα επίπεδά τους είναι κάθετα.
- **Πόρισμα:** ακόμα ότι, αν κύκλος σφαίρας ο οποίος διέρχεται από καθένα από τους πόλους άλλου κύκλου, είναι μέγιστος και τον διχοτομεί κάθετα, τότε διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.

Πρόταση ΙΓ': Θεώρημα

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα ένα πόλο ενός μέγιστου κύκλου σφαίρας και σημείο της περιφέρειας του κύκλου αυτού, είναι ίσο με την πλευρά του τετραγώνου το οποίο είναι εγγεγραμμένο εις τον κύκλο αυτό και εάν το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα ένα πόλο κύκλου μιας σφαίρας και σημείου της περιφέρειας του κύκλου είναι ίσο με την πλευρά του τετραγώνου το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε μέγιστο κύκλο σφαίρας, τότε ο κύκλος αυτός είναι μέγιστος.

- **Πόρισμα:** Από αυτό γίνεται φανερό ότι οι μέγιστοι κύκλοι τεταρτημορίω αφίστανται των ιδίων πόλων, και οι τεταρτημορίω αφιστάμενοι των ιδίων πόλων, μέγιστοι εισίν

Πρόταση ΙΔ': Πρόβλημα

Να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα ίσο με την διάμετρο δοθέντος κύκλου μιας σφαίρας.

Πρόταση ΙΕ': Πρόβλημα

Να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα ίσο με την διάμετρο δοθείσας σφαίρας.

Πρόταση ΙΣΤ': Πρόβλημα

Να κατασκευαστεί ο μέγιστος κύκλος σφαίρας ο οποίος διέρχεται από δύο δοθέντα σημεία της επιφάνειας της σφαίρας.

Πρόταση ΙΖ': Πρόβλημα

Να βρεθούν οι πόλοι δοθέντος κύκλου μιας σφαίρας.

Πρόταση ΙΗ': Θεώρημα

Εάν ευθύγραμμο τμήμα το οποίο διέρχεται από το κέντρο σφαίρας, διχοτομεί ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει άκρα σημεία της επιφάνειας της σφαίρας και δεν διέρχεται από το κέντρο της, τότε το διχοτομεί κάθετα και αντίστροφα εάν το διχοτομεί κάθετα τότε διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.

Μετά την ερμηνεία των «σφαιρικών ζητημάτων» του πρώτου Βιβλίου του Θεοδοσίου, ακολουθεί η παρουσίαση του δεύτερου βιβλίου των «Σφαιρικών», το οποίο αποτελείται από πέντε (5) ορισμούς, εικοσιτέσσερις προτάσεις, έξι πορίσματα και ένα λήμμα.

Το τρίτο βιβλίο των «Σφαιρικών», αποτελείται από δέκα τρεις προτάσεις και τέσσερα λήμματα.

3.4 ΤΟΜΟΣ 2^{ος}

ΟΔΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

Εν ώ πραγματεύεται περί τε του ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ της ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ, διηρημένου εις Επίπεδον και Στερεόν, και περί του πρακτικού αυτής,

διηρημένου εις το περί κατασκευής και χρήσεως των ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ, εις Μηκομετρίαν, Υψομετρίαν, Επιπεδομετρίαν, Γεωδαισίαν, Εικονογραφίαν, Χωρογραφίαν, Στερομετρίαν, και Κυκλομετρίαν.

Προς τούτοις τε περι

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ, ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΕ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ

ΕΚΘΕΣΙΣ

ΑΚΡΙΒΕΣΤΑΤΗ ΤΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΝ ΑΝΗΚΟΝΤΩΝ

ΕΠΙΣΤΗΜΗΝ

ΠΡΟΪΜΙΟΝ

Στο μακροσκελές⁴⁸⁵ προοίμιο του δεύτερου τόμου, ο Μπαλάνος, περιγράφει το αντικείμενο της Γεωμετρίας, τα μέρη στα οποία αυτή υποδιαιρείται και την συμβολή της στην μαθηματική επιστήμη. κάνει επίσης μία σύντομη αναφορά στην εύρεσή της και στην συμβολή των Αρχαίων Ελλήνων στην ανάπτυξη και τελειοποίησή της.

Ο ορισμός της Γεωμετρίας δίνεται με δύο τρόπους, γράφει στο προοίμιο του έργου ο Μπαλάνος: «Γεωμετρία εστίν επιστήμη γνωστική μεγεθών και σχημάτων, και των εν τούτοις περάτων, λόγων τε και παθών θεωρητική». για άλλους «Γεωμετρία εστίν επιστήμη περί ποσόν καταγινομένη συνεχές, ακίνητον, συλλογιστικάς μεθόδους δι αξιωματικών αρχών, μήκους πλάτους και βάθους μέτρον ευρίσκουσα»

Η εύρεση της Γεωμετρίας έγινε από τους Αιγύπτιους, όπως μαρτυρεί ο Πρόκλος και γεννήθηκε από την ανάγκη μέτρησης των χωρίων, «εκ της των χωρίων αναμετρήσεως λαβούσα την γένεσιν», όπως ακριβώς και από τους Φοίνικες «η των αριθμών ακριβής γνώσις έλαβε την αρχήν».

Η Γεωμετρία ήταν αναγκαία στους Αιγύπτιους «δια την του Νείλου άνοδον, αφανίζοντος τους προσήκοντας εκάστους όρους» ενώ στους Φοίνικες η Αριθμητική ήταν αναγκαία «δια τας πραγματείας, και τα παρ' αυτοίς συναλλάγματα».

Ο Θαλής μετέβη στην Αίγυπτο και «ταύτην εκεί εκδιδασχθείς την επιστήμην, εις την Ελλάδα μετήγαγε, πολλά μεν αυτός ευράν, πολλών δε τας αρχάς τοις μετ αυτόν υφηγησάμενος, μετ' αυτόν δε άλλοι τε ουκ ολίγοι χρηματίσαντες, μέγα επί Γεωμετρία κεκτημένοι όνομα επί το εντελέστερον ταύτην ήγαγον, ών εις και Ευκλείδης, ο την Γεωμετρικήν άρίστως συνταξάμενος στοιχειώσιν, ως έστιν ιδείν εν τω αυτώ του Πρόκλου υπομνήματι.»

3.4.1 Περί του «Στοιχειώδους της Γεωμετρίας»

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΙΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

⁴⁸⁵ Αποτελείται από εννέα πυκνογραμμένες σελίδες

Το πρώτο μέρος του δεύτερου τόμου περιέχει την στοιχειώδη θεωρητική γεωμετρία, επιπεδομετρία και στερεομετρία.

Από τα δέκα (10) βιβλία του πρώτου μέρους, τα οκτώ αφορούν στην γεωμετρία του επιπέδου και τα δύο στην γεωμετρία του χώρου.

Α). Τα βιβλία της επιπεδομετρίας

Το 1^ο βιβλίο περιέχει τριάντα πέντε (35) απλές γεωμετρικές κατασκευές. Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρότασις Δ΄: Την δοθείσαν πεπερασμένην ευθείαν δίχα τεμείν.

Πρότασις ΚΑ΄: Δύο δοθεισών ανίσων ευθειών την μείζονα τεμείν, ώστε τα από των τμημάτων αυτής τετράγωνα, ίσα είναι ομού λαμβανόμενα τω από της ελάττονος τετραγώνω.

Πρότασις ΚΕ΄: Την δοθείσαν ευθύγραμμον γωνίαν εις οσαδηποτούν μέρη ίσα αλλήλοις τεμείν.

Πρότασις ΛΒ΄: Επί της δοθείσης ευθείας ρόμβον συστήσασθαι.

Το 2^ο βιβλίο περιέχει είκοσι οκτώ (28) απλές γεωμετρικές κατασκευές που αφορούν στον κύκλο.

Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρότασις Α΄: Κύκλου δοθέντος το κέντρο αυτού ευρείν.

Πρότασις Ζ΄: Κύκλου δοθέντος δύο ευθείας αποτόμενας αυτού αγαγείν από του δοθέντος σημείου εκτός του κύκλου.

Πρότασις ΙΑ΄: Κύκλου δοθέντος απότομον αυτού καταγράψαι προς τω δοθέντι σημείω.

Πρότασις ΙΗ΄: Εις τον δοθέντα κύκλον τρίγωνον εγγράψαι ισογώνιον τω δοθέντι

Πρότασις ΚΘ΄: Περί το δοθέν πεντάγωνον ισόπλευρόν τε και ισογώνιον κύκλον περιγράψαι.

Το 3^ο βιβλίο περιέχει είκοσι οκτώ (28) προτάσεις που αφορούν στις σχέσεις εμβαδών πολυγώνων κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, ιδιότητες εγγεγραμμένων σε κύκλο τετραπλεύρων, εμβαδον ορθογωνίου,

Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρότασις Ε΄: Παντός ορθογωνίου τριγώνου της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς δίχα τμηθείσης, ο από του σημείου της τομής περί την αυτήν πλευράν γραφόμενος κύκλος διελεύσεται και δια της ορθής γωνίας.

Πρότασις ΙΑ΄: Τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα τα επί ίσων βάσεων όντα προς άλλα έστιν ως τα ύψη, και ανάπαλιν, τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα τα προς άλλα έχοντα ως τα ύψη, επί ίσων βάσεων έστιν.

Πρότασις ΙΕ΄: Εάν εν τραπεζίω τας δύο απεναντίον αυτού πλευράς παραλλήλους έχοντι τρίγωνον συσταθή έχον μεν βάσιν την μίαν των λουπών δύο του τραπεζίου πλευρών, την δε κορυφήν εν μέσω της απεναντίον της αυτού βάσεως, το τραπέζιον διπλάσιον έσται του τριγώνου.

Πρότασις ΙΗ΄: Παντός τετραπλεύρου εν κύκλω εγγεγραμμένου μιας των πλευρών προσεκβληθείσης, η εκτός γωνία ίση εστί τη εντός και απεναντίον.

Πρότασις Κ΄: Παντός παραλληλογράμμου των περί την διάμετρον παραλληλογράμμων τα παραπληρώματα ίσα αλλήλοις εστί.

Πρότασις ΚΣΤ΄: Παντός πολυγώνου ισοπλεύρου τε και ισογωνίου το εμβαδόν ίσον εστίν ορθογωνίω, το υπό τε της ημισείας της αυτού περιμέτρου και της από του κέντρου του αυτού επί μιας των πλευρών αυτού πιπτούσης καθέτου περιεχομένου.

Πρότασις ΚΘ΄: Των ισοπεριμέτρων ευθυγράμμων των τας πλευράς ισοπληθείς έχόντων το μέγιστον ισόπλευρόν τε εστί και ισογώνιον.

Το 4^ο βιβλίο περιέχει δέκα τέσσερις (14) προτάσεις που αφορούν σε σχέσεις χορδών κύκλου καθώς και σε εμβαδά εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων κύκλου.

Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρότασις ΣΤ΄: Εάν εν κύκλω δύο ευθείαι τέμνοσιν αλλήλας τα της μιας τμήματα αντιπεπονθόντως έχει προς τα της ετέρας.

Πρότασις ΙΑ΄: Εάν εις κύκλον τετράπλευρον εγγραφή το υπό των διαγωνίων αυτού περιεχόμενον ορθογώνιον ίσον εστί συναμφοτέροις τοις υπό των απεναντίων του αυτού πλευρών περιεχομένοις ορθογωνίοις.

Πρότασις ΙΒ΄: Εάν εν κύκλω δύο άνισοι διαχθώσιν ευθείαι, η μείζων προς την ελάττονα, ελάττονα λόγον έχει, ήπερ η επί της μείζονος ευθείας περιφέρεια προς την επί την ελάττονος.

Το 5^ο βιβλίο περιέχει δώδεκα (12) κατασκευές: τις κατασκευές των κανονικών πενταγώνου, εξαγώνου, επταγώνου, οκταγώνου, εννεαγώνου, δεκαγώνου, ενδεκάγώνου, δωδεκάγώνου, δεκατριάγώνου, δεκατετράγώνου, δεκαπεντάγώνου και γενικά κανονικού πολυγώνου του οποίου το πλήθος των πλευρών αυξάνεται απεριόριστα, με πλευρά δοθέν ευθύγραμμο τμήμα.

Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρότασις Η΄: Επί της δοθείσης ευθείας δωδεκάγώνον ισόπλευρόν τε και ισογώνιον συστήσασθαι.

Πρότασις ΙΒ΄: Επί της δοθείσης ευθείας πολύγωνα ισόπλευρά τε και ισογώνια συστήσασθαι, αρχόμενα μεν από του εξαγώνου, προϊόντα δε επ' άπειρον κατά την των αριθμών φυσικήν αυξανόμενα πρόοδον.

Το 6^ο βιβλίο περιέχει σαράντα μία (41) κατασκευές: τριγώνων, πολυγώνων ισοδυνάμων με δοθέντα πολύγωνα, καθώς και κατασκευές πολυγώνων ομοίων προς άλλα πολύγωνα όταν δίνεται η σχέση των εμβαδών τους.

Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρότασις Γ΄: Βάσεως τριγώνου δοθείσης, και της των λοιπών δύο αυτού πλευρών διαφοράς, έτι δε και της κατά κορυφήν αυτού γωνίας, τας λοιπάς του τριγώνου πλευράς ευρείν, και το τρίγωνον συστήσασθαι.

Πρότασις Β΄: Υποτείνουσας ορθογώνιου τριγώνου δοθείσης, και της εκ των λοιπών δύο αυτού πλευρών συγκειμένης, τας αυτάς διακρίνειν πλευράς, και το τρίγωνον συστήσασθαι.

Πρότασις ΙΔ΄: Δύο ανίσων τετραγώνων δοθέντων δύο ίσα ευρείν, ώστε ομού λαμβανόμενα ίσα είναι τοις δοθείσιν ομού λαμβανομένους.

Πρότασις ΙΗ΄: Δυσίν ή τρισίν, ή οσοισδηποτούν δοθείσι τριγώνοις ίσον τρίγωνον ευρείν.

Πρότασις ΚΒ΄: Τω δοθέντι ισοπλεύρω ευθυγράμμω ίσον ορθογώνιον συστήσασθαι.

Πρότασις ΚΘ΄: Τω δοθέντι ευθυγράμμω όμοιον και ομοίως κείμενον εθύγραμμον συστήσασθαι κατά τον δοθέντα λόγον των εμβαδών.

Πρότασις Μ΄: Δύο δοθέντων ισογωνίων παραλληλογράμμων ανίσων τε και ανομοίων, από του μείζονος τω ελάττονι όμοιον αφελείν παραλληλόγραμμον.

Το 7^ο βιβλίο περιέχει σαράντα τρεις (43) κατασκευές. Από αυτές, οι έξι πρώτες αφορούν στην εγγραφή σε κύκλο του κανονικού εξαγώνου, επταγώνου, οκταγώνου, εννεαγώνου, δεκαγώνου και ενδεκαγώνου. Περιέχει επίσης κατασκευές κανονικών πολυγώνων περιγεγραμμένων σε κύκλο ομοίων με κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα στον κύκλο αυτό, κατασκευή έλικας, εύρεση εμβαδών έλλειψης, εμβαδού χωρίου περιεχόμενου από έλικοειδή γραμμή, σχέσεις εμβαδών έλλειψης και κύκλου όταν δίνεται η σχέση των διαμέτρων τους, κ.ά

Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρότασις Θ΄: Της διαμέτρου του κύκλου τον λόγον ευρείν, όν προς την αυτού περιφέρειαν έχει εγγύτερον της αληθείας.

Πρότασις ΙΕ΄: Το δοθέν τόξον εις τα δοθέντα μέρη, ή γουν κατά τη δοθείσαν αναλογίαν διελείν.

Πρότασις ΙΗ΄: Τη δοθείση ευθεία ίσην περιφέρειαν κύκλου ευρείν.

Πρότασις Α΄: Σχημάτων φακοειδών, μηκοειδών, και των εκ διαφόρων του κύκλου συγκειμένων τμημάτων το εμβαδόν ευρείν.

Πρότασις ΑΓ΄: Εάν περί την ελάττονα διάμετρον της ελλείψεως κύκλος περιγραφή, τη δε μείζονι της ελλείψεως διάμετρω παράλληλοι οποσαιούν αχθώσι, περατούμεναι υπό της περιφερείας της ελλείψεως, τμηθήσεται εκάστη τω παραλλήλων υπό της του κύκλου περιφερείας τω λόγω της ελάττονος διαμέτρου της ελλείψεως προς την μείζονα.

Πρότασις ΛΕ΄: Εις την δοθείσαν έλλειψιν πολύγωνον εγγράψαι.

Πρότασις ΛΗ΄: Η έλλειψις ίση εστί κύκλω, ού η ημιδιάμετρος μέση εστίν ανάλογος των της αυτής ημιδιαμέτρων.

Πρότασις Μ΄: Το της έλλειψεως εμβαδόν ευρείν.

Πρότασις ΜΒ΄: Το υπό της ελικοειδούς γραμμής περιεχόμενον εμβαδόν ευρείν.

Πρότασις ΜΓ΄: Περί την δοθείσαν πεπερασμένην ευθείαν έλικά περιγράψαι.

Το 8^ο βιβλίο περιέχει είκοσι εννέα (29) προτάσεις: οι πέντε (5) από αυτές αφορούν στους υπολογισμούς των εμβαδών τριγώνου, παραλληλογράμμου, τραπεζίου, τετραπλεύρου και οποιουδήποτε πολυγώνου και οι υπόλοιπες είκοσι τέσσερις (24) σε κατασκευές που αφορούν στην διαίρεση τριγώνου, παραλληλογράμμου, τραπεζίου σε ισοδύναμα χωρία ή σε χωρία των οποίων οι επιφάνειες να έχουν δοθέντα λόγο.

Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρότασις Η΄: Το δοθέν τρίγωνον εις δύο ίσα διελείν από του δοθέντος επί μιας των αυτού πλευρών σημείου.

Πρότασις ΙΘ΄: Το δοθέν παραλληλόγραμμον εις οσαδηποτούν μέρη διελείν κατά τον δοθέντα λόγον.

Πρότασις ΚΒ΄: Το δοθέν τραπέζιον, ου αι απεναντίον δύο πλευραι παράλληλοι, εις τρία μέρη ίσα διελείν.

Β). Τα βιβλία της στερεομετρίας

Το 1^ο βιβλίο αναφέρεται:

- Σε σχέσεις επιφανειών και όγκων στερεών τα οποία είναι εγγεγραμμένα σε σφαίρα.
- Σε υπολογισμούς των επιφανειών πρίσματος και ορθού κυλίνδρου όταν ο κύλινδρος είναι εγγεγραμμένος στο πρίσμα ή το πρίσμα εγγεγραμμένο στον κύλινδρο.
- Σε προτάσεις που αφορούν στην επιφάνεια και στον όγκο κυλίνδρου, πρίσματος, πυραμίδας, κώνου, κολοβού κώνου, σφαίρας, σφαιρικού τομέα και σφαιρικού τμήματος, σφαιροειδούς έλλειψης, πυραμίδας εγγεγραμμένης και περιγεγραμμένης ορθού κώνου, κυλίνδρου και κώνου περιγεγραμμένων περί ημισφαίριο και εγγεγραμμένων σε ημισφαίριο κ.ά.

Το 2^ο βιβλίο της στερεομετρίας αφορά στην εύρεση της επιφάνειας και του όγκου των πέντε στερεών των εγγραφόμενων σε σφαίρα όταν δίνεται η διάμετρος της σφαίρας. Στο ίδιο κεφάλαιο υπολογίζονται επίσης οι όγκοι πρίσματος, πυραμίδας και σφαίρας.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
ΠΕΡΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

Το δεύτερο μέρος της Γεωμετρίας περιέχει το πρακτικό μέρος αυτής και χωρίζεται στην Μηκομετρία, Υψομετρία, Επιπεδομετρία, Εικονογραφία, Χωρογραφία, Στερεομετρία και Κουλογραφία.

Αρχικά δίνονται οι ορισμοί οι οποίοι αναφέρονται στο δεύτερο μέρος της Γεωμετρίας.

Από τους ορισμούς αυτούς θα αναφέρουμε τους δύο πρώτους και τους υπόλοιπους θα τους αναφέρουμε όταν παρουσιάζουμε τα βιβλία στα οποία αντιστοιχούν.

Στο παρόν βιβλίο, ορίζονται επίσης **οι μονάδες μέτρησης**: ο Δάκτυλος, ο Παλαιστής, ο Πους, το Βήμα, το Στάδιον, το Μίλιον, η Λέγα, η Ουγγία, η Διχάς, η Σπιθαμή, ο Πήχυς, η Οργυά και ο Κάλαμος.

Α΄: Πράξις Γεωμετρική, εστί μέθοδος αποδεικτική προς εύρεσιν μήκους, πλάτους και βάθους δ' οργάνων Γεωμετρικών συμβάλλουσα.

Β΄: Τα της Γεωμετρικής πράξεως μέρη ἐξ εισί, **Μηκομετρία, Επιπεδομετρία, Γεωδαισία, Εικονογραφία, Στερεομετρία, και Κουλοδεσία.**

Στις δέκα (10) πρώτες από τις είκοσι (20) προτάσεις του τρίτου βιβλίου περιγράφεται η κατασκευή αναλογικού διαβήτη, κλίμακας, τεταρτημόριου, ημικυκλίου (μοιρογνωμονίου), γνώμονα, σταυρού, τετραγώνου γεωμετρικού, κανόνα, ράβδου για μέτρηση χωρητικότητας των «αγγείων», και στις υπόλοιπες δέκα, αντίστοιχα, η χρήση των παραπάνω γεωμετρικών οργάνων στις διάφορες μετρήσεις. όπως π. χ. στην πρόταση ΙΘ΄: «Την υπό τοίχων περιεχομένην γωνίαν ευρεῖν»

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ
ΠΕΡΙ ΜΗΚΟΜΕΤΡΙΑΣ

Μηκομετρία ἐστὶν εὐρέσις τοῦ δοθέντος ὀρισμένου μήκου, ἢ γεωμετρικῶ τίνι απλῶ μέτρῳ μετρητὸν γίνεται. ταύτης δὲ δύο τὰ μέρη Μηκομετρία καὶ υπομετρία, ἐν ἡ καὶ ἡ τοῦ βάθους διαμέτρησις.

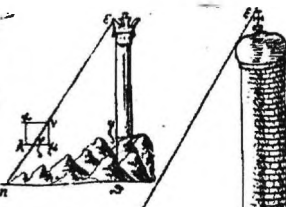
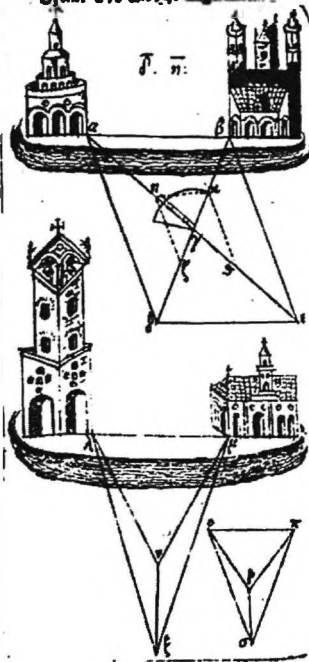
Το τέταρτο βιβλίο, περιέχει δέκα πέντε (15) προτάσεις στις οποίες περιγράφεται η μέτρηση αποστάσεων και επιφανειών επιπέδων σχημάτων.

Πρότασις Β': Γραμμήν οριζοντικήν καθ' ἑκάτερον των ἄκρων ἀπρόσιτον ἀριθμήσαι.

Ζητηθέντων ἡ α β, ἀπόστοιςτος ἐκἀφώρων . Ἀ'πό τῆ γ, ποῖωυ τυχόντος ση-
 μέιυ διοπτρῶδῆτως πᾶ α, ἡ β, σημεία, καὶ πᾶ α γ, β γ, καὶ τὸ συνηχίς
 ἐξαγομένωυ ἐπὶ πᾶ δ, ἡ ε, σημεία, διοπτρῶδῆτω ἀπὸ μὲν τῷ δ, σημείῳ τὸ α,
 ἀπὸ δὲ τῷ ε, τὸ β, ἡ μίσηθῆτω αὐτὸ ὑπὸ γ δ α, γ β, γωνίαι . εἴτα ληρ-
 θήτω τὸ γ ζ, πλητεῖν μέρῳ πῶς γ δ, δὸς
 ἐκπῶν τῷ δ, ἡ συνηχῆσθω ἡ ὑπὸ γ ζ α,
 γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γ δ α, ληρθῆτω δὲ ἡ τὸ
 πᾶ γ δ, ὁμοιωτ μέρῳ τῆς γ ε, ἡ γνήσθω
 ἡ ὑπὸ γ δ α, ἴση τῇ ὑπὸ γ ε β, ἡ μίση-
 θήτω ἡ η κ, ἐπιζῶχθῆσθω, εἴτα τῆ α-
 πλησῆσθῆτω, ἡ ὁ γνόμενος δευδμός,
 τῷ α β, ζημιέντω γραμμῷ παραστήσει .
 ἐπὶ γὰρ αὐτὸ ὑπὸ α δ γ, ἡ ζ γ, γωνίαι γι-
 γόσασιν ἴσαι, παύτως γὰρ ἡ ζ α, παράλλη-
 λός ἐστι τῇ δ α, καὶ τῷ α ζ' τῷ δ' τοῦ
 Στοιχειωτῶ, καὶ δὲ τῷ β' τῷ ε' τοῦ
 αὐτοῦ, ὡς ἡ γ ζ, ἀρὸς πᾶ γ δ, ἔστι ἡ α
 γ η, ἀρὸς τῷ γ α . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ
 ὡς ἡ γ δ, ἀρὸς τῷ γ ε, ἡ γ κ, ἀρὸς τῷ
 γ β . ἀλλ' ἥτι γ ζ, τῆς γ δ, ἡ ἡ γ δ, ἀρὸς
 τῷ γ ε, τέταρτος ἐστὶ μέρῳ καὶ τῷ ὑπό-
 θέθουσιν . Ἄρα ἡ ἡ μὲν γ η, τῆς γ α, ἡ
 δὲ γ α, τῆς γ β, ὁμοιωθῆ' μέρῳ ἐστίν,
 ὥστ' ὡς ἡ γ η, ἀρὸς τῷ γ α, ἡ γ κ, ἀρὸς
 τῷ γ β, ἡ ἐπομένους ἡ η κ, παράλληλός
 ἐστὶ τῇ α β, καὶ τῷ β' τῷ ε' τοῦ Στοι-
 χειωτῶ, καὶ δὲ τὸ πόρι τῆς δ' τοῦ αὐτοῦ, ὡς
 ἡ γ η, ἀρὸς τῷ γ α, ἡ ἡ γ α, ἀρὸς τῷ
 γ β, ἔστι ἡ η κ, ἀρὸς τῷ α β, ἀλλ' ἥτι
 γ η, τῆς γ α, ἡ ἡ γ κ, τῆς γ β, δ' μί-
 ρος ἐστίν, ὡς δέδεικται, πῶς ἀπλησασθῆ-
 σης ἄρα τῆς η κ, γνήσεται ἡ α β .

$\Lambda^2 \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Omega \quad \Sigma,$

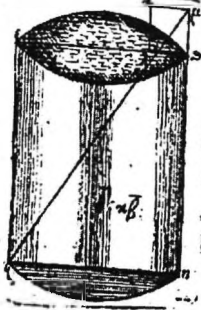
Εἶπω δὴ μιῖσσαι τὸ ζ, ὅπως ἀποσπῶν
μὲν τὸ ζ, σημεῖοι· κείμενοι δὲ ἐπὶ τῷ
ζ, ἐγκλινομένη ἐκπέδου. Ζητήσῃσαι πάλ-
ιν αἱ ὅτι δια τὸ γράψαι τὸ ζ, ἐγκλινο-
μένη ἐκπέδου δεξιαντὴν γραμμὴν, οἷον
Ζ, ζ ζ Ζ, καὶ ἐπὶ ὁμοίας ἀποσπείναι τὴν



Πρότασις Θ': Του δοθέντος φρέατος το βάθος εὑρεῖν.

Ζητηθέντω τὸ πθ, βάθος τῆς ζηθ, φρέατος. Μιξήνθῃτω δὴ ἡ εθ, καὶ πθ. πω ἐπ' αὐτῆς τὸ πλ. θμ, Τίξαι·, ὥστε τὴν μω θμ, αὐτὴ πλάρῃ ἐπ' εθ, θείας κείσθαι τῇ θη, τὴν δὲ λθ, συμπίσπειν τῇ εθ, καὶ ἀπὸ τῆς μ, σημείου διοπτρῶνται διὰ τῆς αὐτῆς δρομίας τὸ ζ, σημεῖον, καὶ σημειωθῆτω τὸ ν, δι' ὃ δρομὸς διέρχεται. Εἴπα γυνώσκω ὡς ἡ εθ, ἀρὸς τὴν θμ, ἡ εθ, ἀρὸς ἀλλω τινα, καὶ γνωθῆσεται ἡ θη. πὺ γὰρ νθμ, ζημ, τείγ· ὁμοιάεισιν, ὥστε καὶ πὺς πλάρῃς εθ, θμ, ζη, ημ, ἀτάλα γον ἴχουσιν. ἀλλ' ἡ ζη, ἴση ἴσιν τῇ εθ, ἰσισμύτων ἀρα τῇ τειών εθ, θμ, εθ, ἔσων, γνωθῆσεται ἡ αὐτῶς καὶ δ δ', ἡ ημ, δηλοῖται διάστασις, ἀφαιρέσεως δὲ πὺς θμ, τὸ ὄργανον πλάρῃς, ἀποπολεφθῆσεται γινώσκῃ θη, ζημύτη.

Geom. Tr. Lib. 4. Fig. 12.

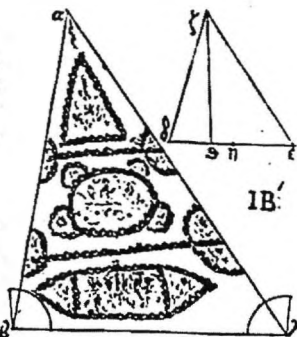


Πρότασις IB': Το δοθέν τριγωνοειδές επίπεδον μετρήσαι

Τὸ δοθὲν τριγωνοειδές ἐπίπεδον μετρήσαι.

Εἴςω ἐπίπεδοι τριγωνοειδῆς τὸ αβγ, καὶ ζητηθέντω τὸ αὐτῶ ἐμβαδόν. Μιξήνθῃτω δὴ ἡ βγ, φεῖ εἰπὲν πλάρῃ τῶ αὐτῶ Γεωμέτρικῳ τινὶ μέρει. διὰ δὲ πὺς εδ': πὺ γ': τὸ παρόντος ὀριθῆτω ἥτις ὑπὸ αβγ, καὶ αγγ, γωνία. καὶ εἰλήφθω ἀπὸ πὺς Κλίμακος ἡ δε, ἀτάλαγος τῇ βγ, πύσι ποσῶν μορίων, οἷα τὰ πὺς Κλίμακος, ὅσων ποδῶν, ἡ βημάτων ἔσιν ἡ βγ. καὶ ἀρὸς μω τῇ δ, σημείω συνησάθω διὰ πὺς αὐτῆς ἡ ὑπὸ εδ', γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γβα' ἀρὸς δὲ τῇ ε, ἡ ὑπὸ δεζ, ἴση τῇ ὑπὸ βγα. τμηθείσης δὲ πὺς δε, δίχα καὶ τὸ η, πιπύτω καθεῖτος ἀπὸ τῇ ζ, ἡ ζθ. καὶ πολλαπλασιασθέντω ἡ η, ἡμίσηα πὺς δε, ἐπὶ τὴν ζθ, καθίστην, καὶ ὅσων αὐ μοιᾶδων περιμετρικὸς εἴη ὁ γυρόμετρος ἀεζμὸς, ποσῶν ποδῶν ἡ βημάτων περὶ γωνίων ἴσαι περιμετρικὸν τὸ ἐμβαδὸν τῶ αβγ, ἐπιπίδω. Ὁ λόγος σαφὲς διὰ πὺς α: τὸ η: τὸ δ: τὸ παρόντος. πὺ γὰρ ζδε, αβγ, τρίγωνον ὁμοιάεισιν.

Geom. Tr. Lib. 4. Fig. 16.



Ἡ αὐτὴ δὲ πράξις ἀληθῶς ἐπὶ παντὶ εἶδους τρίγωνον. Εἰ δὲ τὸ ἐπίπεδον ἀφρόσιον εἴη, μιξήνθῃτωσαν αἱ τρεῖς αὐτῶ πλάρῃ αβ, βγ, γα. καὶ εἰ λήφθωσαν ἀπὸ πὺς Κλίμακος τρεῖς δίδεται ἀνολογοὶ ταῖς αὐταῖς, καὶ συνησῆναι δὲ αὐτῶν τρίγωνον. πὺ δὲ λοιπὰ γυνώσκω ὡς ἀπορρημῆσθαι, καὶ ἴσαι τὸ αὐτό.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ
ΠΕΡΙ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΙΑΣ, Η' ΓΟΥΝ ΙΧΝΟΓΡΑΦΙΑΣ

Εικονογραφία, καταγραφὴ ἐστὶν ἐπὶ χάρτου, ἢ ἄλλου τινός ευκατεργάστου σώματος, των επιπέδων. ταύτης δε δύο τα μέρη, **Ιχνογραφία**, καὶ **Χωρογραφία**. Χωρογραφία δε, ἣτις καὶ τοπογραφία λέγεται, καταγραφὴ ἐστὶ χωρίων ενδιαφόροις τόποις κειμένων, λειμώνος φερ' εὐτείν, κήπου, ἀστεος, καὶ ἄλλων ὁμοίων.

Στερεομετρία ἐστὶν εὗρεσις των στερεῶν σωμάτων, ἢ γεωμετρικῶν τινὶ καταλλήλῳ μέτρῳ μετρητά γίνεται.

Κοιλομετρία ἐστὶν εὗρεσις της κοιλότητος των καμπυλοειδῶν, καὶ καμπυλεπιπέδων στερεῶν σωμάτων, ἢ χωρητικὰ εἰσιν υγρῶν, καὶ ἄλλων τινῶν σωμάτων.

Το πέμπτο βιβλίον του πρακτικοῦ μέρους της Γεωμετρίας, περιέχει τριάντα (30) προτάσεις.

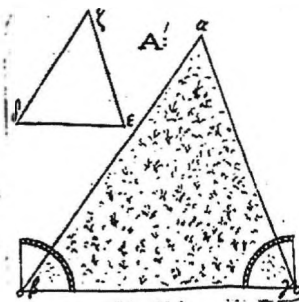
Οἱ τρεῖς ἀπὸ αὐτῆς ἀφοροῦν στην εικονογραφία, μία στην Τοπογραφία, εἴκοσι δύο στην Στερεομετρία καὶ οἱ υπόλοιπες τέσσερις στην Κοιλομετρία.

Ενδεικτικὰ θα αναφέρουμε μία πρόταση σε κάθε περίπτωση.

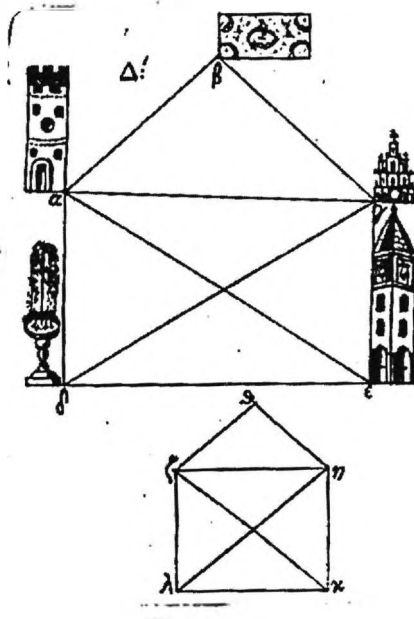
Για την εικονογραφία: Τῷ δοθέντι τριγωνοειδεῖ επιπέδῳ ὅμοιον ἐν χάρτι, ἢ ἄλλῳ τινὶ καταγράψαι.

Τῷ δοθέντι τριγωνοειδεῖ επιπέδῳ ὅμοιον ἐν χάρτι, ἢ ἄλλῳ τινὶ καταγράψαι.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 1.



Εἶτω τριγωνοειδὲς ἐπίπεδον, φέρει
πέντε ἄγρους, ἢ κῆπον, ἢ λειμῶν, ἢ ἑ-
πρόντι ὁμοιον, τὸ αβγ, καὶ ζητήσω κα-
ταγραφῆναι ἐν χάρτι ἡῶμα ὁμοιον τῷ αβγ.
Μετρήσω δὲ μία τῶν αβγ, πλὴν
τῶν δὲ εἰσὶν ἢ βγ καὶ ὁρίζω ἑκα-
τέρα τῶν ὑπὸ αβγ, αγγ, γωνιῶν Γεω-
μετρικῶς τοῖς ὀργάνοις, ὡς ἀπορμήνεται ἐν
τοῖς ἀστρονόμοις. ἔπειτα εἰλήψω ἀπὸ τῆς Κλί-
μακος ἢ δι, ποσὴν μορίων, ὅσων ποδῶν,
ἢ βηματῶν ἔσονται ἢ βγ καὶ ἀρὸς μετ' τῆς
δ, συναρτάσθω γωνία ἢ ὑπὸ εδζ, ἴση τῇ
ἀρὸς τῶν β, ἀρὸς δὲ τῶν ε, ἢ ὑπὸ δεζ,
ἴση τῇ ἀρὸς τῶν γ. καὶ τὸ ζ δι, ὁμοιον ἔσται τῷ αβγ, δοθέντι. ἔχει γὰρ καὶ
τὸ ὑπὸ δεζ, γωνίαν ἴσην τῇ ἀρὸς τῶν α.



Για την Στερεομετρία:

- Πρίσματος οιοδήποτε το στερεόν (όγκον) ευρείν.
- Της τυχούσης πυραμίδος το στερεόν ευρείν.
- Κολοβού κάνου δοθέντος το του ολοκλήρου ύψος ευρείν.
- Το του τομέως της σφαίρας στερεόν ευρείν.

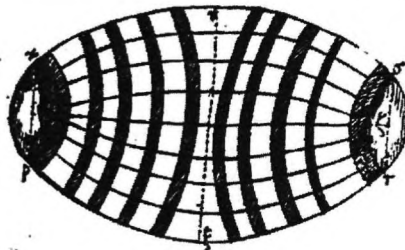
Για την Κυλόμετρία:

- Το δοθέν κυλινδρικών αγγείων μετρήσαι.

Εἴς τιν' ἀγγεῖον κυλινδρικόν, ὃ αἰ ἀπαρατίστον βάσεις ἴσαι, πρὸς αβγδ, καὶ ζηθῆτω τὸ πρὸς χωρητικόν. Ληφθήτω δὴ ἡ ζη, βάβδος ἡ ἀπὸς τῶν τοιαύτων χρησιμώτατα, ἥς ἡ κατασκευὴ ἐν τῇ γ': πρὸς παρόντος δεικνύεται σφραγίσαι: καὶ παραβληθῆτω ἡ μὲν βγ, διαμέτρος πρὸς αὐτῶν βάσεων καὶ ἐπὶ τῇ ζμ, μέτρος πρὸς βάβδου διαιρήσει, ἥτοι καὶ τῇ διαμέτρῳ, καὶ εἴσω ἴσῃ καὶ ζζ, διαμέτρῳ. ἡ δὲ αβ, παραβληθῆτω καὶ ἐπὶ τῇ ιη, μέτρος πρὸς αὐτῶν βάβδου διαιρήσει, ἥτοι καὶ τῇ ὕψει, καὶ εἴσω ἴσῃ καὶ ιθ. Εἴτα πολλαπλασιασθήτω ὁ γ, ἐπὶ τὸν δ, καὶ ὁ γεόμετρος ἱβ, παρτίσιν σοι τὸ *Geom. Pr. Lib. 5, Fig. 19.*
αβγδ, κυλινδρικόν ἀγγεῖον, χωρητικόν εἶναι θέλων φέρει εἰπεῖν, ἡ ἄλλου τινὸς μέτρος τῇ ὕψει, καὶ ὁ ζη ἡ βάβδος δεικνύεται, δυσκαίδικα. ὁ λόγος σαφής. κατὰ γὰρ τὸν πρὸς διαιρήσειν λόγον πρὸς ἐπὶ πρὸς ζμ, πλάτους πρὸς βάβδου, ἡ πρὸς αβγδ, ἀγγεῖον βάσεις, ἑτεροπλάσια εἶναι πρὸς τὸ δαγβι, κυλινδρικῷ μέτρῳ βάσεως, τὸ δὲ ὕψος πρὸς αὐτῇ αβγδ, ἀγγεῖον ἑτεροπλάσιοι πρὸς ὕψους πρὸς δαγβι, κυλινδρικῷ μέτρῳ. ὥστε τὸ αβγδ, ἀγγεῖον μέλει μὲν πρὸς βι, ὕψους χωρὶς εἴσας εἶς, μέλει δὲ πρὸς βζ, εἴς, μέλει δὲ πρὸς βη, ὅντα, καὶ μέλει πρὸς βα, δυσκαίδικα.



- Του δοθέντος αγγείου σχῆμα ωοειδούς φέροντος το χωρητικόν ευρεῖν κατὰ το κοινόν ἔθος.



3.4.2 Περί Τριγωνομετρίας.

ΠΕΡΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

ΠΡΟΙΜΙΟΝ

«Εἰς δύο τῆς Γεωμετρίας τα ὀλοσχερέστερα αὐτῆς μέρη, ὡς ἐν τῷ περὶ ἐκείνης εἰρηται φιλοπονήματι, διαιρουμένης, τὸ Στοιχειώδες φημί, εἴτ' οὖν Θεωρητικόν, καὶ τὸ ταύτης Πρακτικόν. Ὅτι γὰρ ἡ τριγωνομετρία τῷ μὲν οφείλει ἐπεσθαι, τοῦ δὲ προηγεῖσθαι, καὶ μέσῃ τινὰ τούτων ἐσχέκε χώραν, ἐντεῦθεν δῆλον».

Με τὴν ἀναφορὰ στὴν σχέση τῆς Γεωμετρίας καὶ τῆς Τριγωνομετρίας ἀρχίζει τὸ παρὸν προοίμιον, τὸ ὁποῖο, ὅπως συνηθίζεται, ὁ Μπαλάνος Βασιλόπουλος ἐκθέτει πρὶν ἀπὸ τὴν ἐρμηνεία τῆς κάθε ἐνότητος.

Ἡ τριγωνομετρία, ὅπως γράφει παραπάνω, οφείλει νὰ ἀκολουθεῖ τὸ θεωρητικὸ μέρος τῆς Γεωμετρίας ἀλλὰ νὰ προηγείται τοῦ πρακτικοῦ μέρους αὐτῆς. Ἀκόμα, ἡ τριγωνομετρία «... τῶν παρ' αὐτῇ θεωρημάτων τε καὶ προβλημάτων τὰς ἀρχὰς παρὰ τοῦ Στοιχειώδους τῆς Γεωμετρίας ἐρανίζεται μέρους, καὶ πολλὰ μᾶλλον τῶν τοῦ Εὐκλείδους Στοιχείων, δι' ὧν καὶ τὰς ἀποδείξεις γεωμετρικῶς κατασκευάζουσα ἐμπεδοῦται».

Επομένως, κατὰ κάποιον τρόπο, ἡ Τριγωνομετρία, συγκαταλέγεται στὰ μέρη τῆς Γεωμετρίας: «περὶ γὰρ τὸ συνεχές ποσόν καὶ αὕτη, ὥσπερ καὶ ἐκείνη, καταγίνεται».

Ἀλλὰ ἡ μὲν Γεωμετρία «περὶ παντός εἶδους σχημάτων, ἐπιπέδων τε καὶ στερεῶν πολυπραγμονεῖ», ἐνῶ ἡ Τριγωνομετρία, «περὶ μόνον τῶν τριγώνων τὴν διάσκεψιν ποιεῖται». Καὶ παρ' ὅλο που ἡ Τριγωνομετρία «μερικόν μὲν ἔχουσα τὸ ὑποκείμενον ὑπὸ τοῦ στοιχειώδους τῆς Γεωμετρίας», ἐν τούτοις, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνο εἶναι τὸ «πρώτιστον τῶν σχημάτων» καὶ «πρωτεύει τῶν ἄλλων ἀπάντων», διότι, «ἐκεῖνα ὡς ἐκ τριγώνων πως συνίσταται, καὶ εἰς τρίγωνα αὐθὺς ἀναλύεται», γιὰ τὸν λόγο αὐτό, προηγείται τοῦ πρακτικοῦ μέρους τῆς Γεωμετρίας.

Εἶναι δὲ Τριγωνομετρία, «ἐξίς τις διανοητικὴ δι' ἀποδεικτικῆς μεθόδου πρὸς τὴν τῶν τριγώνων συμβάλλουσα γνώσιν, καὶ τὴν τῶν ἐμβადῶν αὐτῶν εὗρεσιν, καθ' ὧν τινῶν ἐγνωσμένων, ἢ γοῦν ὑποτιθεμένων τὰ λοιπὰ ζητεῖται».

Ὡς γνωστόν σὲ κάθε τρίγωνο ἐξί εἶναι τὰ στοιχεῖα. τρεῖς δηλαδὴ πλευρὲς καὶ τρεῖς γωνίαι. Ἀπὸ τὰ στοιχεῖα αὐτά, στὶς περισσότερες περιπτώσεις, δίνονται τὰ τρία καὶ ζητοῦνται τὰ υπόλοιπα. Δύο εἰδῶν δὲ εἶναι τὰ τρίγωνα, τὰ εὐθύγραμμα καὶ τὰ σφαιρικά. τὰ εὐθύγραμμα εἶναι ἐπίπεδα σχήματα τὰ ὁποῖα περιέχονται ἀπὸ εὐθείας γραμμῆς. τὰ σφαιρικά δὲ, «ἀπὸ καμπύλων γραμμῶν περιεχόμενα, καὶ ἐν σφαίρᾳ καταγραφόμενα, ὧν αἱ πλευραὶ τόξα εἰσὶ μεγίστων κύκλων».

Διαιρεῖται δὲ καὶ ἡ Τριγωνομετρία, ὅπως καὶ ἡ Γεωμετρία, σὲ δύο μέρη: τὸ Στοιχειώδες μέρος καὶ τὸ Πρακτικόν, καὶ,

1). Σε μεν το στοιχειώδες μέρος περιέχονται σε δύο βιβλία «η των Ημιτόνων, Απτομένων, και Τέμνουσών Ερμηνεία, έτι δε και η περί των Λογαρίθμων διδασκαλία, και άλλα τινά προς το β' αυτής μέρος ότι μάλιστα συμβαλλόμενα»

2). Το δε πρακτικό μέρος διαιρείται σε δύο. το μεν α' ενασχολείται «εις την των ευθυγράμμων τε και επιπέδων τριγώνων διάλυσιν», το οποίο επιγράφεται και «Τριγωνομετρία επίπεδος» το δε β', «εις την των σφαιρικών τριγώνων Ερμηνείαν τε και διάλυσιν» το οποίο επιγράφεται και Σφαιρική Τριγωνομετρία.

Η ενασχόληση με την Σφαιρική Τριγωνομετρία προϋποθέτει την μελέτη των δύο βιβλίων των Σφαιρικών του Θεοδοσίου και το πρακτικό της Αριθμητικής μέρος, ενώ για την επίπεδη τριγωνομετρία, «συμβάλλει ες τα μάλιστα τα έξ του Ευκλείδου επίπεδα βιβλία, το Πρακτικόν της Αριθμητικής μέρος, και Στοιχειώδες της Γεωμετρίας».

Για τον λόγο αυτό, «τω βουλομένω εγκρατεί των εν εκατέρω μέρει της Τριγωνομετρίας γενέσθαι, εν εκείνοις ακριβώς προγεγυμνάσθαι».

Εκείνο δε, το οποίο πρέπει να παρακινήσει τους «της Μαθηματικής γησίους εραστάς» για την μελέτη της τριγωνομετρίας, είναι ότι «των άλλων έκαστον σχημάτων εις Τρίγωνα αναλυθείναι δύναται, ώστε εγνωσμένων των τριγώνων, γνωσθήσεται πάντως και οτιούν άλλο σχήμα»

ο

Η τριγωνομετρία παρουσιάζεται σε δύο μέρη.

Το πρώτο μέρος ενασχολείται με:

- τα ημίτονα, τις εφαπτόμενες και τις τέμνουσες κάθε τόξου καθώς και με την ⁴⁸⁶ κατασκευή των αντίστοιχων πινάκων.
- Την φύση των λογαρίθμων και την εφαρμογή τους
- Την επίλυση των ευθυγράμμων τριγώνων

Το δεύτερο μέρος ενασχολείται με:

- Την περί των σφαιρικών τριγώνων θεωρία ⁴⁸⁷
- Την επίλυση των σφαιρικών τριγώνων

⁴⁸⁶ Ο πρώτος που χρησιμοποίησε τους όρους «εφαπτομένη» και «τέμνουσα» ήταν ο Δανός αστρονόμος και μαθηματικός Thomas Finck (1561-1656) στο έργο του *Geometria rotundi libra XIV* 1583.

⁴⁸⁷ Στο βιβλίο του *Trigonometria sive, ole dimensione triangulis*, Liber (Βιβλίο της τριγωνομετρίας, η μέτρηση των τριγώνων) (1595), ο Bartholommaus Pitiscus (1561-1613), μαθηματικός και θεολόγος, παρουσιάζει πολλά αριθμητικά παραδείγματα για να δώσει μεθόδους επίλυσης επιπέδων και σφαιρικών τριγώνων, ενώ είναι ο πρώτος που χρησιμοποιεί τον όρο τριγωνομετρία. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. I. Grattan-Guinness. "The age of trigonometry: Europe, 1540-1660. in the Rainbow of Mathematics. A History of Mathematical Sciences. W. W Northon & Comrany. New York. London 1997, p. 174-233.

ΒΙΒΛΙΟ ΠΡΩΤΟ ΠΕΡΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Στο πρώτο βιβλίο της τριγωνομετρίας⁴⁸⁸, περιέχονται οι ορισμοί και τριάντα προτάσεις οι οποίες αφορούν σε σχέσεις και υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών τόξων.

Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρόταση Δ': Θεώρημα

Το ημίτονον του ημίσεως τόξου τινός μέσον ἐστίν ἀνάλογον του τε ημίσεως του ολικού ημιτόνου και πλαγίου ημιτόνου του όλου τόξου.

Πρόταση ΙΓ':

Ὡς το ολικόν ημίτονον προς την τέμνουσαν του παραπληρώματος τόξου τινός, οὕτως η απτομένη του τόξου προς την τέμνουσαν αυτού.

Πρόταση ΚΗ':

Πλαγίου ημιτόνου δοθέντος τόξου τινός, ή γωνίας, το τόξον ή την γωνίαν ευρείν.

Το δεύτερο βιβλίο πραγματεύεται τα «των καλουμένων λογαριθμῶν»

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΑΛΟΥΜΕΝΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Στο προοίμιο του κεφαλαίου, ο συγγραφέας, τονίζει την αναγκαιότητα της χρήσης των λογαριθμῶν στην Τριγωνομετρία εξ αιτίας της συμβολής τους στην διευκόλυνση⁴⁸⁹ υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών των τόξων και γωνιών.

Συγκεκριμένα, γράφει, ότι ανάμεσα στις μεθόδους οι οποίες επινοήθηκαν από τους ενασχολούμενους με την απόδειξη θεωρημάτων και τη λύση μαθηματικών προβλημάτων ώστε «δι' αυτών ευχερέστερον τα οιαδηποτούν μαθηματικά προβλήματα διαλύειν, και την των θεωρημάτων γνώσιν εντελή πορίζεσθαι», είναι η εύρεση των ημιτόνων, εφαπτομένων και τεμνουσών κάθε τόξου, «ως εις διάλυσιν τριγώνων ευθυγράμμων τε και σφαιρικών, ότι μάλιστα της αυτών συντελοούσης χρήσεως».

Σε κάποιες όμως περιπτώσεις, επειδή «και η τούτων χρήσις δυσχερής ἐστί και επίπονος», οι ενασχολούμενοι με την μαθηματική επιστήμη, και κάποια άλλη επινόησαν μέθοδο,

⁴⁸⁸ Για την ιστορία της τριγωνομετρίας βλ. M.C.Zeller, the Development of Trigonometry from Regiomontanus to Paticus Dissertation. University of Michigan 1944. Καθώς και J.D. Bond, "The Development of Trigonometric methods down to the close of the XV century", Isis 1921. p. 295-323.

⁴⁸⁹ Ο σκώτος John Napier (1550-1617) και ο ελβετός Jobst Burgi (1552-1632), ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο δίδουν τους πρώτους πίνακες. Βλ. J. Napier Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio (1614) (περιγραφή του υπέροχου κανόνα των Λογαριθμῶν) και Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio (1619) (Κατασκευή του υπέροχου κανόνα των Λογαριθμῶν).

ευχερέστερη και συντομότερη συγχρόνως, «την των Λογαρίθμων φημί σύνταξιν και ρυθμόν».

«Εισί δε Λογάριθμοι και λέγονται αριθμοί τινες αριθμητικώς ανάλογοι, τοις Γεωμετρικῇ αναλογίᾳ τηρουσί παρατιθέμενοι, ὧν η χρήση πολλῶ της των ημιτόνων, απομένων τε και τεμνουσῶν ευχερεστέρα».

Στην συνέχεια, περιγράφεται η διαδικασία με την χρήση των Λογαρίθμων,

- Της εύρεσης του τρίτου αριθμού σε γεωμετρική αναλογία, δοθέντων των δύο άλλων αριθμών της αναλογίας αυτής.
- Της εύρεσης του τέταρτου αριθμού σε γεωμετρική αναλογία, δοθέντων των τριών άλλων αριθμών της αναλογίας αυτής.

Δύο ειδών δε είναι οι λογάριθμοι. οι κοινοί και οι τριγωνομετρικοί.

Κοινοί μεν είναι οι λογάριθμοι «οι τοις κατά φυσικήν πρόοδον στοιχειούντες αριθμοίς» τριγωνομετρικοί δε, «οι των ημιτόνων, απομένων και τεμνουσῶν καλούμενοι Λογάριθμοι, περί ὧν ενταῦθα ο λόγος»

Επειδή για την εύρεση των ημιτόνων, εφαπτομένων και τεμνουσῶν τόξων θα γίνει χρήση τριγωνομετρικών και λογαριθμικών πινάκων, για την κατασκευή των πινάκων αυτών είναι αναγκαία η ανάπτυξη του τρόπου εύρεσεως, όχι μόνον των ημιτόνων, εφαπτομένων και τεμνουσῶν, αλλά και των λογαρίθμων αυτών.

Ανάμεσα στους ορισμούς του παρόντος βιβλίου είναι και αυτοί των **Γεωμετρικῶς και Αριθμητικῶς αναλόγων αριθμῶν**, δηλαδή των αριθμῶν οι οποίοι αποτελούν διαδοχικούς ὁρους γεωμετρικῆς και αριθμητικῆς προόδου αντίστοιχα.

Ανάμεσα στις τριάντα τρεις (33) προτάσεις του βιβλίου, περιλαμβάνονται:

- 1). προτάσεις οι οποίες αφορούν στις σχέσεις διαδοχικῶν ὁρων αριθητικῶν και γεωμετρικῶν προόδων
- 2). προτάσεις στις οποίες αποδεικνύονται οι ιδιότητες των λογαρίθμων
- 3). προτάσεις στις οποίες περιγράφεται η εφαρμογή των λογαρίθμων στην εύρεση τριγωνομετρικῶν αριθμῶν τόξων, καθώς και η διαδικασία της χρήσης των λογαριθμικῶν πινάκων των ημιτόνων, εφαπτομένων και τεμνουσῶν τόξων για την εύρεση των τριγωνομετρικῶν αριθμῶν των τόξων αυτών.

Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρόταση Β΄: Εάν τρεις αριθμοί αριθμητικῶς ἀνάλογον ὣσιν, ο εκ των ἄκρων γενόμενος διπλάσιος ἐστί του μέσου. (αριθμητικός μέσος)

Πρόταση Ε΄: Εάν μεν τέσσαρες αριθμοί γεωμετρικῶς ἀνάλογον ὣσιν, οι των λογαρίθμων αυτών ἄκροι ἀλλήλοις συναπτόμενοι ἴσοι εἰσὶ τοις μέσοις ἀλλήλοις και αυτοῖς συναπτομένοις. εἰ δὲ τρεῖς διπλάσιοι του μέσου

Πρόταση Θ΄: Εάν οποιοσὺν αριθμὸν ἀλλήλους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσι τινα, οι των πολλαπλασιαζόντων λογάριθμοι ὁμοῦ λαμβανόμενοι ἴσοι εἰσὶ τῷ του ἐσχάτως ἐξ' αὐτῶν εξαγομένου. $[\log(\alpha.\beta.\gamma.\delta) = \log\alpha + \log\beta + \log\gamma + \log\delta]$

Πρότασις ΙΣΤ΄: Των λογαρίθμων των ημιτόνων δοθέντων, τους των απομένων λογαρίθμους ευρείν.

Πρότασις ΚΑ΄: Λογαρίθμου ημιτόνου τινός τόξου ή γωνίας δοθέντος, το τόξον ή την γωνίαν εν τοις κανονίοις (λογαριθμικούς πίνακες) ευρείν.

Πρότασις ΚΗ΄: Τριών αριθμών δοθέντων τέταρτον γεωμετρικώς ανάλογον ευρείν.

Πρόταση ΚΑ΄: Λογαρίθμου ημιτόνου τινός τόξου ή γωνίας δοθέντος, το τόξον ή την γωνίαν εν τοις κανονίοις ευρείν.

Καὶ τὸν αὐτὸν Λογαριθμὸν. Si deve frapponere tra la pagina 448.e 449.

δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 30	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 31	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 32	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 33	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 34	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 35	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 36	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 37	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 38	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 39	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 40	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 41	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 42	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 43	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 44	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 45	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 46	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 47	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 48	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 49	δεξι- μοί	λογαρίθμ. τῶν δυνάμ. 50																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
0	0	30	147712.13 1424.04	60	177815.13 717.8	90	193424.23 470.89	120	207918.13 360.42	150	217609.13 228.56	180	228.36	210	217897.69 286.67	240	218184.36 284.78	270	218469.14 262.93	300	218752.07 281.10	330	219033.17 279.29	360	219312.46 277.51	390	21959.97 219865.74	420	219865.74 274.00	450	220139.78 272.29	480	220412.14 270.46	510	220683.91 268.72	540	220955.09 267.00	570	221225.68 265.28	600	221495.68 263.56	630	221765.09 261.84	660	222033.91 260.12	690	222302.14 258.40	720	222570.78 256.68	750	222838.83 254.96	780	223106.29 253.24	810	223374.16 251.52	840	223641.44 249.80	870	223908.13 248.08	900	224174.23 246.36	930	224439.74 244.64	960	224704.66 242.92	990	224969.00 241.20	1020	225232.75 239.48	1050	225495.91 237.76	1080	225758.48 236.04	1110	226020.46 234.32	1140	226281.85 232.60	1170	226542.65 230.88	1200	226802.86 229.16	1230	227062.48 227.44	1260	227321.51 225.72	1290	227580.05 224.00	1320	227838.10 222.28	1350	228095.66 220.56	1380	228352.73 218.84	1410	228609.31 217.12	1440	228865.40 215.40	1470	229120.99 213.68	1500	229376.09 211.96	1530	229630.70 210.24	1560	229884.82 208.52	1590	230138.45 206.80	1620	230391.59 205.08	1650	230644.24 203.36	1680	230896.40 201.64	1710	231148.07 199.92	1740	231399.25 198.20	1770	231649.94 196.48	1800	231900.14 194.76	1830	232149.85 193.04	1860	232398.46 191.32	1890	232647.07 189.60	1920	232895.68 187.88	1950	233144.29 186.16	1980	233392.90 184.44	2010	233641.51 182.72	2040	233890.12 181.00	2070	234138.73 179.28	2100	234387.34 177.56	2130	234635.95 175.84	2160	234884.56 174.12	2190	235133.17 172.40	2220	235381.78 170.68	2250	235630.39 168.96	2280	235879.00 167.24	2310	236127.61 165.52	2340	236376.22 163.80	2370	236624.83 162.08	2400	236873.44 160.36	2430	237122.05 158.64	2460	237370.66 156.92	2490	237619.27 155.20	2520	237867.88 153.48	2550	238116.49 151.76	2580	238365.10 150.04	2610	238613.71 148.32	2640	238862.32 146.60	2670	239110.93 144.88	2700	239359.54 143.16	2730	239608.15 141.44	2760	239856.76 139.72	2790	240105.37 138.00	2820	240353.98 136.28	2850	240602.59 134.56	2880	240851.20 132.84	2910	241099.81 131.12	2940	241348.42 129.40	2970	241597.03 127.68	3000	241845.64 125.96	3030	242094.25 124.24	3060	242342.86 122.52	3090	242591.47 120.80	3120	242840.08 119.08	3150	243088.69 117.36	3180	243337.30 115.64	3210	243585.91 113.92	3240	243834.52 112.20	3270	244083.13 110.48	3300	244331.74 108.76	3330	244580.35 107.04	3360	244828.96 105.32	3390	245077.57 103.60	3420	245326.18 101.88	3450	245574.79 100.16	3480	245823.40 98.44	3510	246072.01 96.72	3540	246320.62 95.00	3570	246569.23 93.28	3600	246817.84 91.56	3630	247066.45 89.84	3660	247315.06 88.12	3690	247563.67 86.40	3720	247812.28 84.68	3750	248060.89 82.96	3780	248309.50 81.24	3810	248558.11 79.52	3840	248806.72 77.80	3870	249055.33 76.08	3900	249303.94 74.36	3930	249552.55 72.64	3960	249801.16 70.92	3990	250049.77 69.20	4020	250298.38 67.48	4050	250546.99 65.76	4080	250795.60 64.04	4110	251044.21 62.32	4140	251292.82 60.60	4170	251541.43 58.88	4200	251790.04 57.16	4230	252038.65 55.44	4260	252287.26 53.72	4290	252535.87 52.00	4320	252784.48 50.28	4350	253033.09 48.56	4380	253281.70 46.84	4410	253530.31 45.12	4440	253778.92 43.40	4470	254027.53 41.68	4500	254276.14 39.96	4530	254524.75 38.24	4560	254773.36 36.52	4590	255021.97 34.80	4620	255270.58 33.08	4650	255519.19 31.36	4680	255767.80 29.64	4710	256016.41 27.92	4740	256265.02 26.20	4770	256513.63 24.48	4800	256762.24 22.76	4830	257010.85 21.04	4860	257259.46 19.32	4890	257508.07 17.60	4920	257756.68 15.88	4950	258005.29 14.16	4980	258253.90 12.44	5010	258502.51 10.72	5040	258751.12 9.00	5070	259000.73 7.28	5100	259249.34 5.56	5130	259497.95 3.84	5160	259746.56 2.12	5190	259995.17 0.40	5220	260243.78 -1.32	5250	260492.39 -3.04	5280	260741.00 -4.76	5310	260989.61 -6.48	5340	261238.22 -8.20	5370	261486.83 -9.92	5400	261735.44 -11.64	5430	261984.05 -13.36	5460	262232.66 -15.08	5490	262481.27 -16.80	5520	262729.88 -18.52	5550	262978.49 -20.24	5580	263227.10 -21.96	5610	263475.71 -23.68	5640	263724.32 -25.40	5670	263972.93 -27.12	5700	264221.54 -28.84	5730	264470.15 -30.56	5760	264718.76 -32.28	5790	264967.37 -34.00	5820	265215.98 -35.72	5850	265464.59 -37.44	5880	265713.20 -39.16	5910	265961.81 -40.88	5940	266210.42 -42.60	5970	266459.03 -44.32	6000	266707.64 -46.04	6030	266956.25 -47.76	6060	267204.86 -49.48	6090	267453.47 -51.20	6120	267702.08 -52.92	6150	267950.69 -54.64	6180	268199.30 -56.36	6210	268447.91 -58.08	6240	268696.52 -59.80	6270	268945.13 -61.52	6300	269193.74 -63.24	6330	269442.35 -64.96	6360	269690.96 -66.68	6390	269939.57 -68.40	6420	270188.18 -70.12	6450	270436.79 -71.84	6480	270685.40 -73.56	6510	270934.01 -75.28	6540	271182.62 -77.00	6570	271431.23 -78.72	6600	271679.84 -80.44	6630	271928.45 -82.16	6660	272177.06 -83.88	6690	272425.67 -85.60	6720	272674.28 -87.32	6750	272922.89 -89.04	6780	273171.50 -90.76	6810	273420.11 -92.48	6840	273668.72 -94.20	6870	273917.33 -95.92	6900	274165.94 -97.64	6930	274414.55 -99.36	6960	274663.16 -101.08	6990	274911.77 -102.80	7020	275160.38 -104.52	7050	275408.99 -106.24	7080	275657.60 -107.96	7110	275906.21 -109.68	7140	276154.82 -111.40	7170	276403.43 -113.12	7200	276652.04 -114.84	7230	276900.65 -116.56	7260	277149.26 -118.28	7290	277397.87 -120.00	7320	277646.48 -121.72	7350	277895.09 -123.44	7380	278143.70 -125.16	7410	278392.31 -126.88	7440	278640.92 -128.60	7470	278889.53 -130.32	7500	279138.14 -132.04	7530	279386.75 -133.76	7560	279635.36 -135.48	7590	279883.97 -137.20	7620	280132.58 -138.92	7650	280381.19 -140.64	7680	280629.80 -142.36	7710	280878.41 -144.08	7740	281127.02 -145.80	7770	281375.63 -147.52	7800	281624.24 -149.24	7830	281872.85 -150.96	7860	282121.46 -152.68	7890	282370.07 -154.40	7920	282618.68 -156.12	7950	282867.29 -157.84	7980	283115.90 -159.56	8010	283364.51 -161.28	8040	283613.12 -163.00	8070	283861.73 -164.72	8100	284110.34 -166.44	8130	284358.95 -168.16	8160	284607.56 -169.88	8190	284856.17 -171.60	8220	285104.78 -173.32	8250	285353.39 -175.04	8280	285602.00 -176.76	8310	285850.61 -178.48	8340	286099.22 -180.20	8370	286347.83 -181.92	8400	286596.44 -183.64	8430	286845.05 -185.36	8460	287093.66 -187.08	8490	287342.27 -188.80	8520	287590.88 -190.52	8550	287839.49 -192.24	8580	288088.10 -193.96	8610	288336.71 -195.68	8640	288585.32 -197.40	8670	288833.93 -199.12	8700	289082.54 -200.84	8730	289331.15 -202.56	8760	289579.76 -204.28	8790	289828.37 -206.00	8820	290076.98 -207.72	8850	290325.59 -209.44	8880	290574.20 -211.16	8910	290822.81 -212.88	8940	291071.42 -214.60	8970	291320.03 -216.32	9000	291568.64 -218.04	9030	291817.25 -219.76	9060	292065.86 -221.48	9090	292314.47 -223.20	9120	292563.08 -224.92	9150	292811.69 -226.64	9180	293060.30 -228.36	9210	293308.91 -230.08	9240	293557.52 -231.80	9270	293806.13 -233.52	9300	294054.74 -235.24	9330	294303.35 -236.96	9360	294551.96 -238.68	9390	294800.57 -240.40	9420	295049.18 -242.12	9450	295297.79 -243.84	9480	295546.40 -245.56	9510	295795.01 -247.28	9540	296043.62 -249.00	9570	296292.23 -250.72	9600	296540.84 -252.44	9630	296789.45 -254.16	9660	297038.06 -255.88	9690	297286.67 -257.60	9720	297535.28 -259.32	9750	297783.89 -261.04	9780	298032.50 -262.76	9810	298281.11 -264.48	9840	298529.72 -266.20	9870	298778.33 -267.92	9900	299026.94 -269.64	9930	299275.55 -271.36	9960	299524.16 -273.08	9990	299772.77 -274.80	10020	300021.38 -276.52	10050	300270.00 -278.24	10080	300518.61 -279.96	10110	300767.22 -281.68	10140	301015.83 -283.40	10170	301264.44 -285.12	10200	301513.05 -286.84	10230	301761.66 -288.56	10260	302010.27 -290.28	10290	302258.88 -292.00	10320	302507.49 -293.72	10350	302756.10 -295.44	10380	303004.71 -297.16	10410	303253.32 -298.88	10440	303501.93 -300.60	10470	303750.54 -302.32	10500	304000.15 -304.04	10530	304248.76 -305.76	10560	304497.37 -307.48	10590	304745.98 -309.20	10620	304994.59 -310.92	10650	305243.20 -312.64	10680	305491.81 -314.36	10710	305740.42 -316.08	10740	305989.03 -317.80	10770	306237.64 -319.52	10800	306486.25 -321.24	10830	306734.86 -322.96	10860	306983.47 -324.68	10890	307232.08 -326.40	10920	30740

Ο πρώτος από τους έξι (6) ορισμούς του παρόντος βιβλίου, είναι ο ορισμός της διάλυσης (επίλυσης) τριγώνου: «**Διάλυσις τριγώνου** ἐστίν ἐφοδος αποδεικτική προς εὑρεσιν ὅτι μάλιστα συντελούσα των πλευρῶν παντός τριγώνου και γωνιών, και αυτού ἐτι του εμβαδού δια τινων εγνωσμένων, ἢ γουν δεδομένων εν αυτοίς προς γνώσιν των λοιπῶν ημάς άγουσα».

Το παρόν βιβλίο περιέχει είκοσι εννέα (29) προτάσεις από τις οποίες αναφέρουμε ενδεικτικά:

Πρότασις Α΄: Παντός ευθυγράμμου τριγώνου αι πλευραί ανάλογον εἰσὶ τοῖς των απεναντίων γωνιῶν ημιτόνοις (νόμος των ημιτόνων).

Πρότασις ΒΒ΄: Το εμβαδόν παντός τριγώνου μέσον ἐστίν ανάλογον του περιεχομένου ορθογωνίου υπό τε της ημιπεριμέτρου του τριγώνου, και της υπεροχής της ημιπεριμέτρου προς μίαν των πλευρῶν, και του περιεχομένου υπό των λοιπῶν υπεροχῶν της ημιπεριμέτρου προς τας άλλας του τριγώνου πλευράς.

Πρότασις ΒΖ΄: Παντός ορθογωνίου τριγώνου μιας των περί την ορθήν γωνίαν πλευρῶν δοθείσης, και μιας οξείας γωνίας τας λοιπὰς ευρεῖν του τριγώνου πλευράς.

Πρότασις ΚΑ΄: Παντός τριγώνου δύο δοθεισῶν πλευρῶν, και μιας γωνίας των υπό των δοθεισῶν υποτεινομένων πλευρῶν, τας λοιπὰς δύο γωνίας αυτού ευρεῖν.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ
ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
ΠΕΡΙ ΤΩΝ
ΕΝ ΤΗ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
ΑΝΗΚΟΝΤΩΝ

Το βιβλίο αρχίζει με τους ορισμούς: της γωνίας δύο μεγίστων κύκλων σφαίρας και του μέτρου αυτής, του σφαιρικού τριγώνου, του ισοπλεύρου, ισοσκελούς και σκαληνού σφαιρικού τριγώνου.

Στο παρόν βιβλίο περιέχονται είκοσι πέντε (25) προτάσεις οι οποίες αφορούν στις ιδιότητες των σφαιρικών τριγώνων. Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρότασις Ε΄: Παντός σφαιρικού τριγώνου αι τρεις πλευραί ελάττονες εἰσὶ της του κύκλου περιφερείας.

Πρότασις ΙΣΤ΄: Παντός σφαιρικού τριγώνου αι τρεῖς γωνίαι των δύο μεν ορθῶν μεῖζονες εἰσὶ, των ἐξ δε ελάττονες.

Πρότασις ΙΖ΄: Εάν δύο τρίγωνα σφαιρικά τας δύο γωνίας ταις δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχη εκατέρα εκατέραν, και μίαν πλευράν μια πλευρά την προς ταις ἴσαις γωνίαις, ἴσα ἐσονται τα τρίγωνα.

Πρόταση ΚΔ΄: Δύναται δύο σφαιρικά τρίγωνα τας δύο γωνίας τας δυσί γωνίαις εκατέραν εκατέρα ίσας έχειν, και μίαν πλευράν μια πλευρά, την τας ίσας υποτείνουσαν γωνίας, και μη ίσα είναι.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ
ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ
ΠΕΡΙ ΔΙΑΛΥΣΕΩΣ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Το παρόν βιβλίο περιέχει δέκα πέντε (15) προτάσεις επίλυσης σφαιρικών τριγώνων.

Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρόταση Β΄: Παντός σφαιρικού ορθογωνίου τριγώνου μιας των παρά την ορθήν γωνίαν δοθείσης και της απεναντίον πλευράς, την λοιπήν γωνίαν ευρείν

Πρόταση Δ΄: Των πλευρών δοθεισών σφαιρικού ορθογωνίου τριγώνου, τας παρά την ορθήν αυτού γωνίας ευρείν.

Πρόταση ΙΓ΄: Των γωνιών σφαιρικού ορθογωνίου τριγώνου δοθεισών, την βάσιν αυτού ευρείν.

3.5 ΤΟΜΟΣ 3^{ος}

Ο τρίτος τόμος του έργου «Οδός Μαθηματικής», περιέχει Γεωγραφία και Οπτική.

**ΟΔΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ
ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ**

Εν ώ περιέχονται αι πραγματεΐαι αὗται

Η κατά Πρόκλον Σφαίρα. Το περί χρήσεως Σφαιρών
Κωνσταντίνου Γορδάτου. Αστρολάβιον, Γεωγραφία
Θεωρητική, και η Οπτική.

3.6 Γενικά συμπεράσματα για το περιεχόμενο του έργου

1) Από την μελέτη του έργου γίνεται σαφές ότι η «Οδός Μαθηματικής» προορίζονταν κυρίως για διδακτικό εγχειρίδιο. Τον ισχυρισμό μας τεκμηριώσαμε σταδιακά, με επιχειρήματα τα οποία παραθέσαμε κατά την διάρκεια της μελέτης των κειμένων.

Στις αποδείξεις των προτάσεων και των πορισμάτων, στις ερμηνείες των ορισμών, στις κατασκευές των σχημάτων, γίνεται φανερή η προσπάθεια του συγγραφέα να παρουσιάσει με όσο το δυνατόν απλούστερο τρόπο τα μαθηματικά κείμενα, για την πληρέστερη κατανόησή τους.

Εν τούτοις, το κείμενο της Ο. Μ. εξ αιτίας της απουσίας μαθηματικού συμβολισμού οδηγεί σε γλωσσικούς πλατειασμούς και αποτελείται από μακροσκελείς περιγραφές μαθηματικών διαδικασιών οι οποίες –στις περισσότερες περιπτώσεις- θα μπορούσαν να αποφευχθούν και να περιοριστούν, με την χρήση των κατάλληλων συμβόλων.

Η απουσία των συμβόλων από τα μαθηματικά κείμενα έχει ως συνέπεια την μακρηγορία στις αποδείξεις των προτάσεων και πορισμάτων, με αποτέλεσμα να δυσχεραίνεται η σκέψη και να κουράζεται ο νους στην παρακολούθηση των συλλογισμών κατά την διαδικασία των αποδείξεων ή στις ερμηνείες των εννοιών. αποτελεί δηλαδή παράγοντα ανασταλτικό στην ευελιξία της μαθηματικής σκέψης.

Όπως είναι γνωστό, την εποχή που εκδόθηκε η «Οδός Μαθηματικής» (1749), είχε ήδη καθιερωθεί στις Ευρωπαϊκές χώρες ο μαθηματικός συμβολισμός με το βιβλίο «Liber Abacci» (1202, 1228) του Leonardo de Piza (Fibonacci) (από τον 11^ο αιώνα)⁴⁹⁰.

Ακόμα, παρ' όλο που ο Μάξιμος Πλανούδης (1255-1305) από τον 13^ο αιώνα εισάγει και χρησιμοποιεί για πρώτη φορά στο Βυζάντιο τα αραβικά αριθμητικά ψηφία, με το έργο του «Ψηφοφορία κατ' Ινδούς», εν τούτοις όπως παρατηρεί και ο Α. Allard,⁴⁹¹ έναν αιώνα αργότερα, δηλαδή τον 14^ο αιώνα, μεγάλοι Βυζαντινοί μαθηματικοί τις περιόδου αυτής όπως οι Μοσχόπουλος, Ι. Πεστάσιμος, Ι. Αργυρός καθώς και ο Βαρλαάμ ο Καλαβρός, δεν είχαν χρησιμοποιήσει το συμβολισμό του Πλανούδη, αλλά ούτε και το ινδικό σύστημα αρίθμησης.

Πιστεύουμε ότι για το ανεξήγητο αυτό γεγονός υπεύθυνη είναι η Εκκλησία κατά παράδοξο τρόπο. Πράγματι η ορθόδοξη Εκκλησία επέβαλλε τη χρήση του συστήματος αρίθμησης των αρχαίων Ελλήνων, η δε καθολική, τη χρήση του Λατινικού ακόμα και ως τις μέρες μας.

Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό πως όταν ο συγγραφέας της Ο.Μ. θέλει να απασαφηνίσει κάποια δύσκολα κείμενα των «Στοιχειών», χρησιμοποιεί το ινδικό σύστημα αρίθμησης: «παρασημειούνται τοῖς κοινοῖς Ἰνδικοῦ Ἀριθμοῖς, χάριν πληρεστέρας γνώσεως», όπως ο ίδιος αναφέρει (τόμος πρώτος, σελ 13).

⁴⁹⁰ Βλ. B. Boncomraghi ed. *Scritti di Leonardo Pisano* (Roma Tirografia aelle scienze mate-matiche e fisiche 1857-1862.

⁴⁹¹ A. Allard Maxime Planude, *le Grand Calcul selon les Indiens*, Louvain-la Neuve 1981

2) Η επιλογή και η παρουσίαση της ύλης από τον συγγραφέα (ή τον εκδότη) της «Οδού Μαθηματικής».

Με το μνημειώδες ευκλείδειο σύγγραμμα των «Στοιχείων», (με εξαίρεση το βιβλίο Χ), ο Ανθρακίτης, αρχίζει την παρουσίαση του αξιολογού έργου του «Οδός Μαθηματικής».

Βέβαια, τα «Στοιχεία», δεν επαρκούν να καλύψουν όλο το φάσμα των μαθηματικών γνώσεων των στοιχειωδών Μαθηματικών, το οποίο ας σημειωθεί ότι ελάχιστα διευρύνθηκε κυρίως στην αλγεβρική και τριγωνομετρική του διάσταση. Για τον λόγο αυτό, ο Ευκλείδης, εκτός από τα «Στοιχεία» είχε συγγράψει και άλλα συγγράμματα όπως τα 1) «Κωνικά», τέσσερα βιβλία, 2) «Τόποι προς επιφανεία», δύο βιβλία, 3) «Πορίσματα», τρία βιβλία, 4) το «περί Διαίρεσεων», βιβλίο το οποίο σώζεται στην Αραβική γλώσσα, 5) «Ψευδάρια». Όλα τα προαναφερθέντα έργα του Ευκλείδη δεν διασώθηκαν.⁴⁹²

Τα έργα του Ευκλείδη τα οποία έχουν σωθεί είναι: 1) «Δεδομένα», 2) «Οπτικά», 3) «Κατοπτρικά», 4) «Φαινόμενα», 5) «Κατανομή κανόνος», 6) «Εισαγωγή αρμονική»⁴⁹³

Επειδή πιθανότατα ένας από τους στόχους του Ανθρακίτη ήταν να εφοδιάσει τους δασκάλους των Μαθηματικών της εποχής του με όλα τα απαραίτητα συγγράμματα για την Ευκλείδεια Γεωμετρία αρχικά, μετά το 13^ο βιβλίο των «Στοιχείων» εκθέτει:

- Τα βιβλία XIV και XV του Υψικλή
- Το έργο «Περί Σφαίρας» του μεγάλου Βυζαντινού σχολιαστή και τελευταίου διευθυντή της Πλατωνικής Ακαδημίας Πρόκλου του Διαδόχου.
- Το έργο «Σφαιρικά» του Θεοδοσίου του Τριπολίτη, βιβλία τρία.
- Εφαρμοσμένη Γεωμετρία και Τριγωνομετρία
- «Περί κατασκευής και χρήσεως αστρολαβίου» του Βυζαντινού Γορδάτου.

Ο πρώτος τόμος της Ο.Μ. περιέχει στις πρώτες 352 σελίδες τα δεκατρία βιβλία των «Στοιχείων» του Ευκλείδη και τα δύο βιβλία (14^ο και 15^ο) του Υψικλή.

Στην συνέχεια του πρώτου τόμου ακολουθεί το έργο «Σφαιρικά» του Θεοδοσίου το οποίο επιγράφεται «Σύντομος ερμηνεία περί σφαιρικών ζητημάτων κατά Θεοδόσιον τον Τριπολίτην». Τα τρία βιβλία του Θεοδοσίου, αναφέρονται στην γεωμετρία της σφαίρας, χωρίς όμως την χρήση των σφαιρικών τριγώνων.

Ο δεύτερος τόμος της Ο.Μ., περιέχει στοιχειώδη Γεωμετρία (θεωρητική και πρακτική) και Τριγωνομετρία. Οι γεωμετρικές κατασκευές τις οποίες περιέχει θεμελιώνονται θεωρητικά και με συχνές παραπομπές στις προτάσεις των «Στοιχείων».

Ο τρίτος τόμος της Ο. Μ. αρχίζει με το κεφάλαιο που επιγράφεται «Πρόκλου σφαίρα, ήτοι προδιόκησις εις την κρικωτήν σφαίραν» και «κλείνει» με Γεωγραφία και Οπτική.

⁴⁹² Ε. Σ. Σταμάτη, «Ευκλείδου Γεωμετρία», Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα 1975, τόμος Ι, σελ 23

⁴⁹³ ο. α. σελ 23

3) Σχολιασμός της επιλεγόμενης ύλης

Η επιλογή των καταξιωμένων έργων τα οποία συμπεριλαμβάνονται στην «Οδό Μαθηματικής» δείχνει ακόμα μία φορά τις παιδαγωγικές προθέσεις του Ανθρακίτη και τις κατευθυντήριες γραμμές για την διδασκαλία των Μαθηματικών, τις οποίες πρώτος αυτός χαράσσει στο «παρθένο» από τις επιστήμες έδαφος της παιδείας.

Βέβαια δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε ποιο ακριβώς θα ήταν το περιεχόμενο της «Οδού Μαθηματικής» και τι ακριβώς θα είχε πρόθεση να παρουσιάσει ο Μεθόδιος Ανθρακίτης εάν το έργο εκδίδονταν από τον ίδιο.

Ή, για να γίνουμε σαφέστεροι δεν γνωρίζουμε εάν θα περιοριζόνταν στην παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών τις οποίες περιέχει το έργο ή εάν θα υπήρχε μεγαλύτερη ευρύτητα στην επιλογή τους.

Ο προβληματισμός μας πηγάζει από το γεγονός ότι από το έργο του (περιορίζεται μόνο στην παρουσίαση των κλασικών μαθηματικών) απουσιάζουν οι νεότεροι κλάδοι των Μαθηματικών (η Αναλυτική Γεωμετρία του Καρτέσιου, ο Απειροστικός Λογισμός⁴⁹⁴) τα οποία εισάγονται αργότερα στον ελλαδικό χώρο από τον Ν. Θεοτόκη (1798) με το έργο του «Στοιχεία Μαθηματικών».

Πρέπει να θεωρήσουμε βέβαιο ότι ο Ανθρακίτης γνώριζε τους κλάδους αυτούς των νεότερων Μαθηματικών εξ αιτίας των πολύχρονων σπουδών του στην Ιταλία και επομένως η «παράληψη» τους από το έργο της «Οδού Μαθηματικής», εύλογα δημιουργεί ερωτηματικά.

Δύο είναι κατά την γνώμη μας οι πιθανοί λόγοι οι οποίοι μπορούν να δικαιολογήσουν την «παράληψη» αυτή.

- Ο Ανθρακίτης γνωρίζοντας το χαμηλό επίπεδο της μαθηματικής παιδείας στα σχολεία του υπόδουλου ελλαδικού χώρου πιθανόν να έκρινε ότι δεν είχε ακόμα δημιουργηθεί το κατάλληλο μαθηματικό εκπαιδευτικό υπόστρωμα για την εισαγωγή της διδασκαλίας των σύγχρονων κλάδων των Μαθηματικών.
- Ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος δεν είχε σπουδάσει στην Δύση και ούτε γνώριζε καμία ευρωπαϊκή γλώσσα. Τα μαθηματικά, τα είχε διδαχθεί από τον Ανθρακίτη και – όπως ο ίδιος αναφέρει⁴⁹⁵ στον πρόλογο του έργου- εμπλούτισε τις γνώσεις του με κάποια μαθηματικά έργα τα οποία ο ίδιος μελέτησε. Επομένως είναι πολύ πιθανόν να μην γνώριζε κανέναν από τους νεότερους κλάδους των Μαθηματικών και για τον λόγο αυτό δεν τους συμπεριέλαβε ανάμεσα στα κείμενα της «Οδού».

Ερωτηματικά ακόμα δημιουργεί η απουσία της Αριθμητικής από το έργο, σοβαρή παράλειψη, την οποία καλύπτει αργότερα ο Μπαλάνος με συμπληρωματική έκδοση. Η Αριθμητική γράφτηκε από τον Μπαλάνο Βασιλόπουλο το 1743 και εκδόθηκε μετά από 60 χρόνια, το 1803, από τον γιό του Κοσμά

⁴⁹⁴ Ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός είχε αρχίσει την εποχή εκείνη να αποτελεί αντικείμενο έρευνας στους ευρύτερους επιστημονικούς κύκλους της Ευρώπης. Βλ. D.T. White side, Patterns of Mathematical Thought in the later seventeenth Century. Archive for History of Exact Sciences (1960-62) σελ 179-388.

⁴⁹⁵ ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ, τόμος Α', προοίμιο, «.....άλλα δε παρ' άλλων αρχαιότερων ερανιζόμενος, ών και τοις συγγράμασιν ενέτυχον,...», σελ VI

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο ΤΟ ΕΡΓΟ «ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Το τρίτο και τελευταίο έργο που θα μελετήσουμε, είναι τα «Στοιχεία Μαθηματικών» του Νικηφόρου Θεοτόκη το οποίο εκδόθηκε στην Μόσχα το 1798 με δαπάνη των φιλογενών αδερφών Ζωσιμά και αποτελείται από τρεις τόμους που περιέχουν:

Ο Α΄ τόμος: Γεωμετρία και Αριθμητική.

Ο Β΄ τόμος: Τα Αρχιμήδεια θεωρήματα, την επίπεδον τριγωνομετρίαν και τας του κώνου τομάς.

Ο Γ΄ τόμος: Τα περί την Άλγεβραν.

Πριν αρχίσουμε την ανάλυση και παρουσίαση του αξιόλογου έργου του Κερκυραίου λόγιου και την συγκριτική του παρουσίαση με την «Οδό Μαθηματικής», θα παραθέσουμε σύντομα βιογραφικά στοιχεία για τον συγγραφέα του.

4.1 Νικηφόρος Θεοτόκης

Ο Νικηφόρος Θεοτόκης ο οποίος κατάγονταν από την ευγενή οικογένεια των Θεοτόκηδων γεννήθηκε στην Κέρκυρα το 1731.

Όπως ο Βούλγαρης ήταν δάσκαλος και κληρικός. Η ζωή του, με μία χρονική απόσταση δεκαπέντε ετών, ακολούθησε παράλληλη πορεία με την ζωή του Ευγένιου: σύντομη διδακτική δραστηριότητα και σταδιοδρομία ως τα ανώτατα ιερατικά αξιώματα στα χνάρια του Βούλγαρη.

Τις βασικές σπουδές, - της εγκυκλίου παιδείας- παρακολούθησε στην Κέρκυρα κοντά στον δάσκαλό του Ιερεμία Καββαδία, έναν από τους επιφανέστερους λόγιους της εποχής του.

Τις σπουδές του, ολοκλήρωσε στην Ιταλία από το 1749 έως το 1754 στα πανεπιστήμια της Μπολόνιας και της Πάδοβας⁴⁹⁶. σπούδασε Φιλοσοφία, Ιατρική, Φυσική και Μαθηματικά.

Η διδακτική του δραστηριότητα ήταν περιορισμένη. Μετά την ολοκλήρωση των σπουδών του στην Ιταλία, επέστρεψε στην ιδιαίτερη πατρίδα του την Κέρκυρα, και δίδαξε στο «Κοινό Φροντιστήριο» -εκπαιδευτήριο το οποίο ίδρυσε με δικά του έξοδα⁴⁹⁷- Φιλοσοφία, Φυσική και Μαθηματικά.

Δίδαξε ακόμα, για μικρά χρονικά διαστήματα στην Πατριαρχική Ακαδημία της Κωνσταντινούπολης (1765- 1767) και στην αυθεντική Ακαδημία του Ιασίου (1764-1765) απ' όπου και αναγκάστηκε να φύγει «δια νυκτός ως δραπετής»⁴⁹⁸, καταδιωγμένος από τους οπαδούς της σχολαστικής διδασκαλίας.

⁴⁹⁶ Ν. Κ. Ψημμένου, «Η Ελληνική Φιλοσοφία από το 1453 έως το 1821», τόμος Β΄, εκδόσεις Γνώση, Αθήνα 1989, σελ. 33

⁴⁹⁷ Γ. Ν. Βλαχάκης, «η Φυσική του Νικηφόρου Θεοτόκη σταθμός στην επιστημονική σκέψη τον 18^ο αιώνα», διδακτορική διατριβή, Αθήνα 1990.

⁴⁹⁸ Κ. Θ. Δημαράς, «Νεοελληνικός Διαφωτισμός», 2, Νεοελληνικά μελετήματα, Αθήνα 1993, σελ. 159.

Το 1776, μετά από πρόσκληση του φίλου και συμπατριώτη του Ευγένιου Βούλγαρη, αναχώρησε για την Λειψία, όπου και τον διαδέχτηκε στον επισκοπικό θρόνο Σλαβωνίου και Χερσώνος στις 6 Αυγούστου του 1779⁴⁹⁹.

Πέθανε τον Μάιο του 1800 στην μονή του Αγίου Δανιήλ στην Μόσχα όπου είχε αποσυρθεί μετά την παραίτησή του (1792) από τον αρχιεπισκοπικό θρόνο της επαρχίας Αστραχανίου.

Αν και η διδακτική του δραστηριότητα είναι περιορισμένη, η συμβολή του στην πνευματική αφύπνιση του ελληνισμού με το πλούσιο συγγραφικό του έργο, είναι σημαντική.

Ο Θεοτόκης, εκτός από έργα θρησκευτικού περιεχομένου όπως το γνωστό «Κυριακοδρόμιό» του, διαβλέποντας την σημασία της ανάπτυξης και καλλιέργειας των θετικών επιστημών στην πνευματική ανέλιξη του Γένους, έγραψε ακόμα δύο σημαντικά έργα επιστημονικού περιεχομένου. τα «Στοιχεία Φυσικής» και τα «Στοιχεία Μαθηματικών».

Τα «Στοιχεία Φυσικής», ένα πρωτοποριακό για την εποχή του επιστημονικό σύγγραμμα με το οποίο εισάγει στον ελληνικό χώρο τις αρχές της νευτωνικής φυσικής σκέψης⁵⁰⁰ εκδόθηκαν για πρώτη φορά στην Λειψία το 1766 και αποτέλεσαν ένα από τα βασικά διδακτικά εγχειρίδια στο μάθημα της Φυσικής των ανώτερων Σχολών του ελληνισμού στα χρόνια της τουρκοκρατίας.

Τα «Στοιχεία Μαθηματικών», εκδόθηκαν στην Μόσχα το 1798 τριάντα δύο χρόνια μετά την έκδοση της Φυσικής. Με το αξιόλογο αυτό έργο ο Θεοτόκης εισάγει στα σχολεία του ελληνισμού, νέους, σύγχρονους –για την εποχή– κλάδους των Μαθηματικών όπως είναι η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Απειροστικός Λογισμός. Όπως και η «Φυσική» του Θεοτόκη έτσι και τα «Μαθηματικά» του, διδάχθηκαν ευρέως όπως πληροφορούμαστε από πολλές γραπτές μαρτυρίες λογίων της εποχής εκείνης.

Ο Θεοτόκης, ένας ακόμα σημαντικός λόγιος της περιόδου του νεοελληνικού διαφωτισμού, με το επιστημονικό του κύρος, συνέβαλε τα μέγιστα όχι μόνο στην εισαγωγή επιτευγμάτων της δυτικής επιστήμης στον ελληνικό πνευματικό ορίζοντα αλλά και στην διάδοση και αφομοίωσή τους από την νεοελληνική σκέψη της εποχής εκείνης.

⁴⁹⁹ G. P. Henderson, «Η αναβίωση του ελληνικού στοχασμού 1620-1830» μετάφραση, Φ. Κ. Βώρου, Αθήνα 1994, σελ 111

⁵⁰⁰ Βλέπε, Γ. Ν. Βλαχάκης, «η Φυσική του Νικηφόρου Θεοτόκη σταθμός στην επιστημονική σκέψη τον 18^ο αιώνα», διδακτορική διατριβή, Αθήνα 1990.

4.2 ΤΟΜΟΣ 1^{ος}

Στο εξώφυλλο του Α' τόμου εκτός από τον τίτλο του έργου ακολουθεί επισημείωση που αφορά στην έκδοση του βιβλίου και στο περιεχόμενό του.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΚ
ΠΑΛΑΙΩΝ & ΝΕΩΤΕΡΩΝ
Συνεραμισθέντων
ΥΠΟ ΤΟΥ ΠΑΝΕΡΙΩΤΑΤΟΥ ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ
ΠΡΩΗΝ ΑΣΤΡΑΧΑΝΙΟΥ
ΚΥΡΙΟΥ ΝΙΚΗΦΟΡΟΥ,
Φιλοτίμω δε δαπάνη εκδοθέντων,
Ὅπως δωρεάν διανέμονται τοις εν τοις
Ελληνομουσείοις φοιτώσιν,
ΥΠΟ ΤΩΝ ΤΙΜΙΩΤΑΤΩΝ ΚΑΙ ΦΙΛΟΓΕΝΩΝ
ΑΥΤΑΔΕΛΦΩΝ
ΖΩΣΙΜΑ
ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ,
Περιέχων
ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ
και
ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΝ
ΕΝ ΜΟΣΧΑ
Εν τω της Κοινότητος Τυπογραφείω παρά
Ρηδηγέρω & Κλαυδίω
Έτει 1798

Πριν από την ανάλυση του έργου προτάσσονται δύο προοίμια. Το πρώτο είναι γραμμένο από τους εκδότες και αφορά στους δασκάλους των Μαθηματικών την εποχή της τουρκοκρατίας και το δεύτερο από τον συγγραφέα και απευθύνεται προς τους αναγνώστες.

Στο προοίμιο του έργου, οι αδερφοί Ζωσιμά, εκφράζουν την ευγνωμοσύνη και την ευχαριστία τους προς τους δασκάλους του Γένους, «ευχαριστίαν προσοφείλουσιν άπαντες οι των Ελλήνων απόγονοι», και εξαίρουν την σημαντική συμβολή τους στην πνευματική ανάταση των συμπατριωτών τους:

«Υμείς γαρ μετά τον παντελή σχεδόν του γένους κατακλυσμόν, ου μόνον της των προγόνων ημών περιτύστου διαλέκτου, και της εγκυκλίου καλουμένης μαθήσεως, αλλά και διαφόρων επιστημών τα ζώπυρα θαυμασιώς, και, ίν' ούτως είπω, υπερφυώς διεσώσατε.»

«Υμείς γαρ τας εκ' του πτώματος συμφοράς, όσον οίοντε, εστήσατε, το τη παιδευσία ακόλουθον άραντες όνειδος, και τον νουν μη εάσαντες τοις αγενέσι και ανελευθέροις»

Το ηθικό χρέος των αδερφών Ζωσιμά, αλλά και χρέος όλων των Ελλήνων απέναντι

στους δασκάλους αυτούς τους κάνει να διερωτώνται: «Τί ουν υμίν ανταποδώσομεν ...περί πάντων ὧν ἡμῖν ανταπεδώκατε ...; ὁ μὲν τιμῆς στέφανον, ὁ δὲ δόξης ἐπαίνους».

Οἱ ἐκδότες τοῦ ἔργου συνεπικουροῦν τὴν προσπάθεια τῶν δασκάλων τοῦ γένους με ὅποιο τρόπο μποροῦν: «ἡμεῖς δὲ πρὸς τοὺς ἄλλοις τὴν βίβλον ὑμῖν προσφέροντες ἀνατιθέμεθα, ἀμισθί τοις ἐν ὑμῖν τὰς μαθηματικὰς ἐκπαιδευομένοις ἐπιστήμας διανεμηθησομένην»

Αναφέρονται ἀκόμα στο περιεχόμενο τοῦ ἔργου «Τῶν μαθηματικῶν στοιχείων περιεκτικὴ ἐστὶν ἡ βίβλος» καὶ στὸν στόχο τῆς συγγραφῆς τοῦ: «τῶν ἀρχαρίων χειραγωγὸς πρὸς αὐτὴν τὴν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἀκρόρειαν».

Αναφέρονται στὴν προσφορά τῶν δασκάλων ποὺ δίδαξαν τὰ Μαθηματικὰ στὸν ἐλληνικὸ χώρο:

«ὁ αἰοίδημος ἐκεῖνος τῶν Μαθηματικῶν διδάσκαλος, ὁ **Μεθόδιος**, ὥσπερ ναὺς τις μεγάλεμπορος ἀπὸ τῆς δυτικῆς ἐπιστρέψας χώρας, τοὺς Εὐκλείδης καὶ Ἀρχιμήδης καὶ Ἀπολλωνίου καὶ Διοφάντους ἐπὶ τὴν Ἑλλάδα ἐπαναγαγόν, εἰς τὴν τῶν Ἰωαννίνων Σχολὴν εἰσήγαγεν...»

«τὸν Μεθόδιονὁ **Μπαλάνος** ὁ ἀείμνηστος διεδέξατο, πολλὰ πλεῖονα ἤπερ ἐκεῖνος τὴν ἐπίδοσιν ἐπιδείξας, ὥς τὰ εαυτοῦ τύποις ἐκδοθέντα ἐπιμαρτυροῦσι μαθηματικὰ φιλοπονήματα...»

«τούτου δὲ ὁ τούτου υἱὸς τε καὶ μαθητὴς ὁ ἐλλογιμώτατος **Κοσμάς**, ὁ ἀχρὶ τῆς σήμερον ἐν τῷ αὐτῷ Γυμνασίῳ,....., σχολαρχὼν πανευκλῶς, καὶ τοὺς ἐκεῖ φοιτῶντας τὰ Μαθηματικὰ ἐκπαιδεύων.»

Πιστεῦουν ὅτι «τῆς ἐν τῇ Ἑλλάδι σπανιότητος τῶν μαθηματικῶν παραδόσεων παραίτιον καὶ ἡ ἔλλειψις ἐστὶ καὶ τὸ δυσπόριστον τῶν μαθηματικῶν βιβλίων» καὶ ἐλπίζουν με τὴν προσφορά τοὺς, «ἀνεὺ ἀργυρίου καὶ τιμῆς οἱ ἐν ταῖς τῶν Ἑλλήνων Σχολαῖς θαμίζοντες προκειμένην εὐρίσκουσι τὴν ἐν αὐταῖς καθιερωθεῖσαν βίβλον», ὅτι «ὁ πολυπλασιασμὸς καὶ ἡ αὐξήσις τῶν ὄντι ἐπιστημονικῶν προκύψει μαθήσεων».

Ἀκολουθεῖ τὸ προῖμο τὸ ὁποῖο ὁ συγγραφέας τοῦ ἔργου ἀφιερώνει «τοῖς ἀναγιγνώσκουσιν»

«ΤΟΙΣ ΑΝΑΓΙΓΝΩΣΚΟΥΣΙ»

«Μάτην ἄραγε ὁ μὲν Πλάτων ταῖς τῆς Ἀκαδημίας θύραις ἐπεγράψατο τὸ, **Οὐδεὶς ἀγεωμέτρως εἰσὶτω**. ὁ δὲ Ξενοκράτης, παντὶ ἀγεωμετρήτῳ, τῷ χάριν παιδείας αὐτῷ προσιόντι, **Πορεύου, ἔλεγε, λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας;**»

Ἡ εἰσαγωγή τοῦ προοιμίου προδιαθέτει τὸν ἀναγνώστη γιὰ τὴν ἀνάλυση ποὺ θὰ ἀκολουθήσει σχετικὰ με τὴν ἀναγκαιότητα τῆς Γεωμετρίας γιὰ τὴν «κατάληψη» τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν καὶ τὴν κατανόηση «τῆς τῆς φύσεως βίβλου».

Τὰ στοιχεῖα τοῦ «βιβλίου τῆς φύσης», γράφει ὁ Νικηφόρος Θεοτόκης, «μὴ εἶναι Γράμματα, ἀλλὰ Τρίγωνα, καὶ Παραλληλόγραμμα, καὶ Κύκλους, καὶ Παραβολὰς, καὶ Ὑπερβολὰς, καὶ Ἐλλείψεις, καὶ Σπείρας, καὶ Πυραμίδας, καὶ Κύβους, καὶ Κυλίνδρους, καὶ Σφαίρας, καὶ τὰ λοιπὰ...».

Καὶ διερωτᾶται: Πῶς μπορεῖ κάποιος νὰ διαβάσει τὸ βιβλίο τῆς φύσης εἰάν δεν

γνωρίζει τα στοιχεία από τα οποία είναι γραμμένο,⁵⁰¹

Εκείνοι οι οποίοι ασχολούνται «περί την της φύσεως και τέχνης θεωρίαν» γνωρίζουν «πόσον αναγκαία η γεωμετρική έξις προς κατάληψιν των Αστρονομικών και Μηχανικών και Αρχιτεκτονικών και Οπτικών και Υδραυλικών και Ναυτικών, ου μην αλλά και των περί το πυρ και τον Αέρα και το Ύδωρ και την Γήν, και ίνα συνελόντι είπω, πάντων των περί τα ορώμενα θεωρημάτων τε και προβλημάτων».

Ο Θεοτόκης στο προοίμιό του περιγράφει το περιεχόμενο της Γεωμετρίας, εισάγοντας για πρώτη φορά σε έντυπο ελληνικό μαθηματικό έργο, έννοιες των ανώτερων Μαθηματικών.

«Γεωμετρίαν δε λέγοντες, ου μόνον τα του Ευκλείδου νοούμεν στοιχεία. ταύτα γαρ η κλείς μόνον εστί της των υψηλοτέρων μαθηματικών επιστημών θύρας. αλλά και Αριθμητικήν, και Τριγωνομετρίαν και Αρχιμήδεια θεωρήματα, και Κώνου τομάς, και Ανάλυσιν, την και Άλγεβραν καλουμένην».

Και σε ότι αφορά τα «περί της ευρέσεως, και αυξήσεως, και χρονολογικής προόδου, και των ευρετών της Γεωμετρίας, και των περί αυτής συγγραψάντων» ο Θεοτόκης παραπέμπει στους προλόγους της Γεωμετρίας του «Τακουέτου»⁵⁰² (1612-1550) η οποία εκδόθηκε στην Νεάπολη το 1744 και της Άλγεβρας του «Βικεντίου του Ρικάτου»⁵⁰³ (1707-1775) η οποία εκδόθηκε στην Βονωνία το 1765, δίνοντάς μας συγχρόνως πληροφορίες για τις πηγές τις οποίες χρησιμοποίησε για την συγγραφή του έργου του.

Η χρησιμότητα του παρόντος έργου είναι φανερή. Μπορεί κάποιος να διερωτηθεί σε τι είναι απαραίτητο μετά από τον Ευκλείδη και τον Εύδοξο και τον Γεμίνο και τον Μαρίνο και τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο και τον Πτολεμαίο και τον Πάππο και τον Διόφαντο;

Από τα συγγράμματα των μεγάλων Ελλήνων Μαθηματικών της αρχαιότητας άλλα χάθηκαν και άλλα είναι δυσεύρετα. Ακόμα και εάν η απόκτησή τους θα ήταν εύκολη, εν τούτοις, η μελέτη τους και η κατανόησή τους εξ' αιτίας του μακροσκελούς των αποδείξεων θα ήταν πολύ επίπονη και χρονοβόρα.

Για τον λόγο αυτό, από τα μαθηματικά έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και εκείνων τα οποία γράφτηκαν μετά από αυτά, συγκροτήθηκε μία συλλογή μαθηματικών κειμένων «έκτε των αρχαίων και των μετ' αυτά συγγραμμάτων συνερανισθείσαν».

Για την συγκρότηση του έργου, όσον αφορά την στοιχειώδη Γεωμετρία και τις κωνικές τομές, ακολουθώντας την τάξη του Ευκλείδη και του Απολλωνίου, έγινε συλλογή εκείνων των προτάσεων οι οποίες οι οποίες θεωρήθηκαν απαραίτητες «ταίς λοιπές επιστήμης».

⁵⁰¹ Απόηχος από το βιβλίο του Γαλιλαίου, «ο Δοκιμαστής». (Il Saggiatore). Βλ. G. Galilei Opera Omnia (1623), Vol. IV σελ. 17.

⁵⁰² Ο Andre Tacquet γεννήθηκε στην Αμβέρσα του Βελγίου το 1612 και από το 1629 εντάχθηκε στο μοναχικό τάγμα των Ιησουϊτών. Δίδαξε Μαθηματικά και έγραψε μία πλήρη σειρά μαθηματικών εγχειριδίων προς χρήση των μαθητών που σπούδαζαν στα κολλέγια των Ιησουϊτών. Το 1654 κυκλοφόρησε το έργο του *Elementa Geometriae planae ac solidae, et selecta ex Archimede theorematata*, το οποίο γνώρισε τεράστια επιτυχία και πλήθος εκδόσεων και μεταφράσεων.

⁵⁰³ Ο Vincenzo Riccati, γιος του γνωστού μαθηματικού Jacops Francesco Riccati (1676-1754) γεννήθηκε το 1707 στο Castelfranco και πέθανε το 1775 στο Treviso. Το 1739 γίνεται καθηγητής μαθηματικών στη Μπολωνία. Αργότερα ιδιώτευε στο Treviso. Ασχολήθηκε με τη μηχανική και το διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό.

Οι αποδείξεις των προτάσεων αυτών σε πολλές περιπτώσεις συντομεύτηκαν, σε κάποιες άλλες περιπτώσεις έγιναν με διαφορετικό τρόπο «ή ίδια μελέτη ευρεθείσας, ή εκτων ήδη εκδοθέντων νεωτέρων βιβλίων εκληφθείσας».

Οι υπόλοιπες μαθηματικές ενότητες παρελήφθησαν «εκ' της των περιφήμων Ιταλών ημών διδασκάλων φωνής» ή μεταφέρθηκαν «εκ των νεωτέρων βιβλίων».

Ο συγγραφέας πιστεύει και ελπίζει ότι το «συναρπασθέν στοιχειώδες των μαθηματικών σύστημα» το οποίο εκθέτει, θα είναι «τερπνόν τοις μαθητώσι και εύληπτον, έτι δε και τοσούτον φωτιστικόν, ...» και θα βοηθήσει στην προαγωγή και των άλλων επιστημών.

4.2.1 Τα βιβλία I, II, III, IV, V, VI, XI και XII των «Στοιχείων» του Ευκλείδη

Στον Α' τόμο του έργου παρουσιάζονται αρχικά τα βιβλία I έως VI καθώς και τα XI και XII των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, και στην συνέχεια, σε πέντε βιβλία, η Αριθμητική.

Το βιβλίο I των «Στοιχείων» του έργου «Στοιχεία Μαθηματικών», (Σ. Μ.) περιέχει δεκατέσσερις ορισμούς τρία αιτήματα δέκα κοινές έννοιες τέσσερα πορίσματα και 48 προτάσεις.

Οι ορισμοί:

Τα Σ.Μ περιέχουν δεκατέσσερις (14) ορισμούς ενώ η Ο.Μ. τριάντα τρεις (33).

Αυτό συμβαίνει αφού:

- Ο ορισμός Β' των Σ. Μ, αποτελείται από τους ορισμούς Β' και Γ' της Ο. Μ.
- Οι ορισμοί Δ', Ε', Στ', Η', ΙΓ', ΙΔ' και ΙΖ' της Ο. Μ., δεν περιέχονται στα Σ. Μ.
- Ο ορισμός ΣΤ' των Σ. Μ., περιέχει τους ορισμούς Ι', ΙΑ' και ΙΒ' της Ο.Μ.
- Το σχόλιο των Σ.Μ. που αναφέρεται στον κύκλο, περιέχει τον ορισμό ΙΣΤ' της Ο.Μ.
- Ο ορισμός ΙΑ' των Σ.Μ., περιέχει τους ορισμούς ΚΓ', ΚΔ', ΚΕ', ΚΣΤ', ΚΖ' και ΚΗ' της Ο.Μ.
- Ο ορισμός ΙΒ' των Σ.Μ., περιέχει τους ΚΘ', Λ', ΛΑ' και ΛΒ' της Ο. Μ.
- Τα Σ.Μ., περιέχουν τον ορισμό ΙΔ' ο οποίος δεν υπάρχει στην Ο.Μ.

Τα αιτήματα:

Το βιβλίο I των Σ.Μ. περιέχει τρία αιτήματα, τα ίδια με εκείνα του αντίστοιχου βιβλίου της Ο.Μ.

Οι κοινές έννοιες:

Το βιβλίο I των Σ.Μ. περιέχει δέκα (10) κοινές έννοιες, ενώ το αντίστοιχο βιβλίο της Ο.Μ., δεκατρείς (13).

Συγκεκριμένα:

- Η κοινές έννοιες Ε', Ι', ΙΑ' και ΙΓ' της Ο.Μ., δεν υπάρχουν στα Σ.Μ.
- Η κοινή έννοια Θ' των Σ.Μ. δεν υπάρχει στην Ο.Μ.

Οι προτάσεις:

Το βιβλίο Ι των Σ.Μ περιέχει σαράντα οκτώ 48 προτάσεις τις ίδιες με το αντίστοιχο βιβλίο της Ο.Μ.

Τα πορίσματα:

Το βιβλίο Ι των Σ.Μ. περιέχει τέσσερα (4) πορίσματα ενώ το αντίστοιχο βιβλίο της Ο.Μ., δεκαεννέα (19)

Τα τέσσερα πορίσματα στα «Στοιχεία Μαθηματικών» αφορούν στους ορισμούς Β', Ζ' Η' και ΙΓ' είναι:

- Το πόρισμα Α' αφορά στον ορισμό της Γραμμής: «Ἡ γραμμὴ εἰς γραμμάς μόνον διαιρεῖται».
- Το πόρισμα Β' αφορά στον ορισμό της καθέτου ευθείας, της οξείας και αμβλείας γωνίας: «οὐκ ἐκ τοῦ τῶν πλευρῶν μεγέθους τῆς γωνίας γίνεται μέγεθος. κἀν γὰρ ἐπ' ἀπειρον αὐταὶ ἐκβληθῶσιν, οὐδεμίαν ἡ γωνία λαμβάνει ἀλλοίωσιν»
- Το πόρισμα Γ' αφορά στον ορισμό των παραλλήλων ευθειών: «αἱ παράλληλοι ἐπὶ μηδέτερά τα μέρη συμπίπτουσι, κἀν ἐπ' ἀπειρον ἐκβάλλοντο»
- Το πόρισμα Δ' αφορά στον ορισμό του κύκλου: «Πᾶσαι μὲν αἱ ἡμιδιάμετροι ἴσαι ἀλλήλαις. ἐκάστη γὰρ αὐτῶν αὐτὴ ἡ περιενεχθεῖσα ἐστὶ. τῆς δὲ ἡμιδιαμέτρου ἡ διάμετρος διπλασία. Ὅτις δὴ καὶ διχα τὸν κύκλον τέμνειν»

ΣΧΟΛΙΑ

Από την σύγκριση του περιεχομένου του βιβλίου Ι των «Στοιχείων» στα δύο έργα διαπιστώνουμε ότι:

1). Οι ορισμοί των Σ.Μ είναι κατά δεκαεννέα λιγότεροι από εκείνους της Ο.Μ.

Αυτό συμβαίνει γιατί αφ' ενός μεν επτά (7) ορισμοί της «Οδού» δεν περιέχονται στα «Στοιχεία Μαθηματικών» και οι υπόλοιποι δώδεκα παρουσιάζονται μαζί με άλλους ορισμούς.

Οι ορισμοί των Σ.Μ. δεν σχολιάζονται εκτός από ελάχιστες περιπτώσεις. Τα σχόλια στις περιπτώσεις αυτές υστερούν σε μεγάλο βαθμό από τα αντίστοιχα της Ο.Μ.

Ο ορισμός της ευθείας γραμμής, στο έργο του Θεοτόκη, δίνεται με τρεις τρόπους. Κατά τον Αρχιμήδη, τον Πλάτωνα και τον Ευκλείδη. Συγκεκριμένα, ο ορισμός της ευθείας έχει ως εξής: «**Ευθεία δε γραμμή** ἐστὶ κατὰ μὲν Αρχιμήδην, ἡ τῶν ἐχουσῶν τα αὐτὰ πέρατα ελαχίστη. κατὰ δὲ Πλάτωνα, ἥς τα ἄκρα επιπροσθεῖ πάσι τοῖς μέσοις. κατὰ δὲ Ευκλείδην, ἥτις ἐξίσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κείται.»

Στο σχόλιο που αφορά στον κύκλο, δίνεται ο ορισμός της ακτίνας του κύκλου: «**Ἡμιδιάμετρος**, ὡσαύτως καὶ πάσα ευθεία, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν προσπίπτουσα».

Ο ορισμός ΙΔ' των Σ.Μ. αναφέρεται στους ομόκεντρους κύκλους: «**Κύκλοι παράλληλοι** εἰσὶν οἱ το αὐτὸ μὲν ἔχοντες κέντρον, οὐ μὴν καὶ τὰς διαμέτρους ἴσας». Οι δύο αυτοί ορισμοί (της ακτίνας κύκλου και των ομόκεντρων κύκλων) δεν υπάρχουν στην Ο.Μ αλλά ούτε και στην έκδοση Heiberg των «Στοιχείων».

Μετά τον ορισμό της γωνίας ακολουθεῖ σημείωση που αναφέρεται στον συμβολισμό της, ο οποίος είναι ίδιος με τον σημερινό συμβολισμό: «Εμφαινόμεν τὴν γωνίαν, ἡ δια τοῦ ἐν τῇ κορυφῇ αὐτῆς στοιχείου, λέγοντες, ἡ γωνία Α, ἡ δια τριῶν τοῦ τε ἐν τῇ κορυφῇ καὶ τῶν ἐν ταῖς πλευραῖς, οἷον ἡ γωνία ΒΑΓ, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, το ἐν τῇ κορυφῇ

στοιχεόν εν τω μέσω γράφοντες και προφέροντες.

2). Το βιβλίο Ι των Σ.Μ. όπως και το αντίστοιχο της Ο.Μ., **δεν περιέχει μαθηματικούς συμβολισμούς.**

Τα σημεία στα σχήματα και στα μαθηματικά κείμενα παριστάνονται με κεφαλαία γράμματα, ενώ στην Ο.Μ όπως και στα «Στοιχεία» με μικρά.

3). Από το γεγονός ότι οκτώ μόνο από τα βιβλία του Ευκλείδη περιλαμβάνονται στα Σ.Μ. αλλά και ο τρόπος παρουσίασης τους, καθιστούν φανερή την πρόθεση του συγγραφέα να παρουσιάσει μόνο εκείνα τα βιβλία των «Στοιχείων» του Ευκλείδη τα οποία είναι απαραίτητα και για τις άλλες επιστήμες.

Την πρόθεσή του αυτή δηλώνει και στο προίμιο του έργου του: «Εν τη στοιχειώδη δε Γεωμετρία και εν ταις του Κώνου τομές τη του Ευκλείδου και Απολλωνίου τάξει **(εξ' ων τα ταις λοιπές επιστήμαις αναγκαία συνελέξαμεν).....**»

4). Τα σχήματα τα οποία χρησιμοποιεί για τις ερμηνείες των ορισμών και τις αποδείξεις των προτάσεων είναι μεγάλης ακριβείας και παρουσιάζονται στο τέλος του πρώτου τόμου. Αυτό δημιουργεί δυσκολίες στην παρακολούθηση των μαθηματικών συλλογισμών αφού μια και το σχήμα αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της απόδειξης, ο αναγνώστης, για να κατανοήσει το κείμενο, είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τα βήματα της απόδειξης στο τέλος του ογκώδους τόμου.

5). Τα συμπεράσματα που προκύπτουν με την εφαρμογή κάποιων προτάσεων τα οποία επιγράφονται ως «ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ», ακολουθούν τις αποδείξεις των προτάσεων αυτών και δείχνουν **τον πρακτικό προσανατολισμό του έργου.**

Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι δέκα τρεις (13) είναι οι «συνέπειες» της πρότασης ΑΒ' για την οποία ο συγγραφέας σημειώνει: « Της ευπωροτάτης ταύτης προτάσεως, **ής εν πάσαις ταις μαθηματικαίς επιστήμαις η χρήσις μεγίστη**, ευρετήν γεγονέναι, φασί, (Εύδημ. ο αρχαίος Γεωμέτρ.) τον Πυθαγόραν.....», σχόλιο που κάνει προφανή τον πρακτικό χαρακτήρα του έργου.

6). Στις περισσότερες αποδείξεις των προτάσεων και στις κατασκευές, διαχωρίζονται τα βήματα των αποδείξεων σε έκθεση, κατασκευή και απόδειξη. Τα κείμενα χαρακτηρίζει η σαφήνεια και η ακρίβεια.

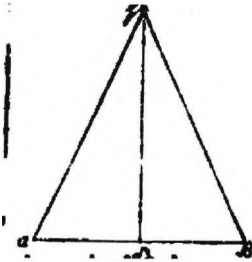
Οι αποδείξεις των προτάσεων της «Οδού μαθηματικής» βρίσκονται «απλοϊέστερα» σε αυτές των «Στοιχείων» από ότι οι αποδείξεις στο έργο του Θεοτόκη.

Ενδεικτικά θα αναφέρουμε το πρόβλημα **(κατασκευή)** Ι' καθώς και την **πρόταση ΑΖ'** των δύο έργων.

Πρόταση Ι' της «Οδού Μαθηματικής»: «Την δοθείσαν ευθείαν πεπερασμένην δίχα τεμείν»

Έστω δε δίχα τεμείν την αβ, πεπερασμένην ευθείαν, και συνεστάσθω επ' αυτής τρίγωνον ισόπλευρον, δια της α'. το αβγ. είτα διαιρεθήτω η προς το γ, γωνία δίχα, δια της

ανωτέρω, τη γδ, ευθεία, και τμηθήσεται πάντως δίχα και η αβ. ἐπεὶ γὰρ τα αγδ, βγδ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευράς αγ, γδ, ἴσας δυσὶ ταις βγ, γδ, και την υπό αγδ, γωνίαν, ἴσην τη υπό βγδ, ἔσται δήποθεν ἴση και βάσις η αδ, βάσει τη βδ, κατὰ την δ'. η δοθείσα ἀρα αβ, ευθεία δίχα τέμνεται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



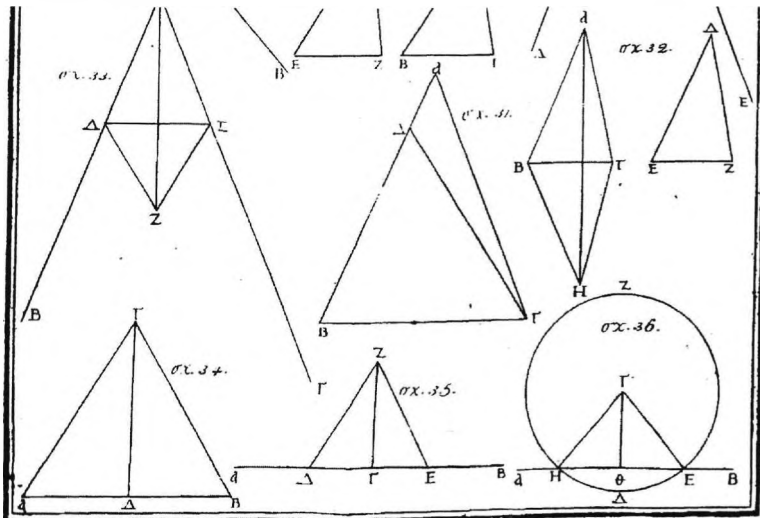
Πρόταση Γ' των «Στοιχείων Μαθηματικών»: «Τὴν δοθείσαν πεπερασμένην ευθείαν δίχα τεμείν»

Ἐστω η δοθείσα ευθεία η ΑΒ. σχ. 34
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Συνεστάτω ἐπὶ της ΑΒ τρίγωνον ἰσόπλευρον το ΑΓΒ.(γ) και τεμήσθω δίχα η ΑΓΒ γωνία τη ΓΔ ευθεία.(δ) λέγω ὅτι η ΑΒ δίχα τέμνεται υπό της ΓΔ κατὰ το Δ σημείον.
ΔΕΙΞΙΣ

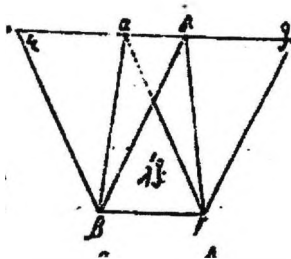
Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΓΔ, ΔΓΒ, η μεν ΑΓ ἴση τη ΓΒ, (ε) η δε ΓΔ κοινή, και γωνία η ΑΓΔ ἴση τη ΒΓΔ. (ζ) ἀρα και η ΑΔ ἴση τη ΒΒ. (η) τέμνεται ἀρα δίχα η ΑΒ κατὰ το Δ υπό της ΓΔ.

(γ) Κατὰ την α πρότ. (δ) Κατὰ την θ πρότ. (ε) Ἐκ της κατασκ.(ζ) Ὡσαύτως. (η) Κατὰ την δ πρότ. (θ) Κατὰ την γ προτ.



Πρόταση ΑΖ' της «Οδοῦ Μαθηματικῆς»: «Τα τρίγωνα τα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.»

Ἐστωσαν ἤδη τρίγωνα τα $\alpha\beta\gamma$, $\delta\beta\gamma$, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς $\beta\gamma$, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $\epsilon\zeta$, $\beta\gamma$. λέγω ταῦτα, ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. Ἀχθείσῃς γὰρ τῆς $\beta\epsilon$, παραλλήλως τῇ $\alpha\gamma$, καὶ τῆς $\gamma\zeta$, τῇ $\beta\delta$, ἐσονται τα $\epsilon\gamma$, $\beta\zeta$, παραλληλόγραμμα, καὶ ἴσα ἀλλήλοις κατὰ τὴν $\lambda\epsilon'$. Τα ἡμίση δὲ τούτων ἐστὶ τα $\alpha\beta\gamma$, $\delta\beta\gamma$, τρίγωνα, κατὰ τὴν $\lambda\delta'$. Ἄρα κατὰ τὸ ζ' ἀξίωμα τα $\alpha\beta\gamma$, $\delta\beta\gamma$, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἐδει δεῖξαι.



Πρόταση ΑΖ' τῶν «Στοιχείων Μαθηματικῶν»: «Τα τρίγωνα τα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.»

Ἐστωσαν τρίγωνα τα $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς $B\Gamma$, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς AD , $B\Gamma$. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta B\Gamma$ τριγώνῳ. σχ. 67

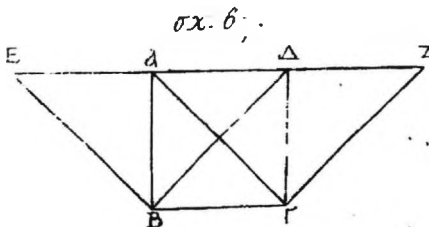
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Εκβεβλήσθω ἡ AD ἐφ' ἐκάτερα τα μέρη ἐπὶ τα E , Z σημεία. καὶ δια μὲν τοῦ B ἴχθω ἡ BE παράλληλος τῇ GA , δια δὲ τοῦ Γ , (ε) ἡ GZ τῇ BD

ΔΕΙΞΙΣ

Τα $ΓΕ$, BZ παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. (ζ) ἀλλὰ τὸ μὲν $AB\Gamma$ τρίγωνον τὸ ἡμισυ ἐστὶ τοῦ $ΓΕ$ παραλληλογράμμου. τὸ δὲ $\Delta B\Gamma$, τὸ τοῦ BZ ἡμισυ. (η) τὸ ἄρα $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta B\Gamma$ τριγώνῳ ἴσον (θ)

(ε) Κατὰ τὴν $\lambda\alpha$ πρότ. (ζ) Κατὰ τὴν $\lambda\epsilon$ πρότ. (η) Κατὰ τὴν $\lambda\delta$ πρότ. (θ) Κατὰ τὸ $\sigma\tau$ αξ.



Το βιβλίο II των «Στοιχείων» του έργου «Στοιχεία Μαθηματικών», (Σ. Μ.) περιέχει τρεις ορισμούς και 14 προτάσεις.

Οι ορισμοί:

Τα Σ.Μ περιέχουν τρεις ορισμούς ενώ η Ο.Μ. δύο (2).

Ο επί πλέον ορισμός των Σ.Μ είναι: «Ύψος παντός σχήματος η από της κορυφής επί την βάσιν αγομένη κάθετος»

Οι ορισμοί των Σ.Μ. δεν σχολιάζονται ενώ της Ο.Μ., σχολιάζονται εκτενώς.

Τα πορίσματα

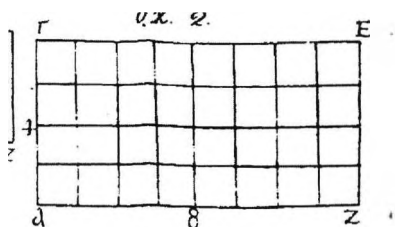
Το μοναδικό πόρισμα των Σ. Μ., το οποίο αναφέρεται ως «σημείωσις» είναι εκείνο της πρότασης Δ': «Τα περί την διάμετρον του τετραγώνου παραλληλόγραμμα, τετράγωνα εισίν, ως εκ των δειχθέντων δήλον»

Το πόρισμα αυτό είναι και το μοναδικό που περιέχει το αντίστοιχο βιβλίο της Ο.Μ.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει Σχόλιο το οποίο ακολουθεί τον ορισμό Α' το οποίο αφορά στην μέτρηση της επιφάνειας του ορθογωνίου και **δηλώνει ακόμα μία φορά τον πρακτικό χαρακτήρα του έργου.**

ΣΧΟΛΙΟΝ

«Γίνεται το ορθογώνιον ήτοι του ύψους ΑΓ επί την βάσιν ΑΖ, ή τούμπαλιν της βάσεως ΑΖ επί το ύψος φερομένης. ένθεντοι ως εκ του πολλαπλασιασμού του ύψους και της βάσεως το του ορθογωνίου χωρίον εννοούμεν γίνεσθαι. Εάν γαρ τότε ύψος (σχ 2) ΑΓ, και την βάσιν ΑΖ εις μέρη οποιασούν αλλήλοις ίσα διέλης, οίον το μεν εις 4, την δε εις 8. τοσαύτα έσονται τα τετράγωνα τα εν τω ορθογωνίω ΑΓΕΖ περιεχόμενα, είτουν εκ τοσούτων τετραγώνων σύγκειται η του ορθογωνίου ΑΓΕΖ επιφάνεια, όσαι μονάδες εν τω γινομένω εκ του 4 και του 8. όπερ εστί 16. σημαίνομεν δε το ορθογώνιον λέγοντες, το υπό των ΑΓ, ΑΖ, (σχ 1) ή το εκ των ΑΓ . ΑΖ, (στίζοντες δηλαδή εν τω μεταξύ των ΑΓ, ΑΖ, όπερ τον πολλαπλασιασμόν εμφαίνει.) ή το ΑΓΕΖ, ή το ΑΕ, ή το ΓΖ.



Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σημείωση μετά τον πρώτο ορισμό, στην οποία **ερμηνεύονται τα σύμβολα** της ισότητας (=), της πρόσθεσης (+), της αφαίρεσης (-), του πολλαπλασιασμού (×) κ. ά.

Μετά την ερμηνεία αυτή, ο Θεοτόκης, εισάγει στα κείμενα του έργου συμβολισμούς οι οποίοι διευκολύνουν την κατανόηση και την παρακολούθηση των συλλογισμών στις αποδείξεις των προτάσεων και συντομεύουν την διαδικασία των αποδείξεων. κατά τον συγγραφέα: «**συντομίας δε χάριν τούτοις χρώμεθα τοις σημείοις**»

Με την εισαγωγή των συμβολισμών, η απόδοση και η μορφή των κειμένων, «πλησιάζει» την σύγχρονη απόδοση.

Η σημείωση που αφορά στους συμβολισμούς είναι η εξής:

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

Δια των A, B, Γ και των εξής στοιχείων παν οτιούν εμφανίζεται πράγμα. Και δύο μεν παράλληλοι ευθείαι μεταξύ αυτών σημαίνουν ισότητα οίον $A=B$, σημαίνει, ότι το A ίσον εστί τω B . το δε $A+B$, το A συν τω B , είτουν το κεφάλαιον των A και B . το δε $A-B$, το A αφαιρεθέντος του B , τουτέστι την διαφοράν την μεταξύ του A και B . το δε $A \cdot B$, ή $A \times B$, το γινόμενον εκ του πολλαπλασιασμού του A δια του B . λέγεται δε το μεν $(+)$, μάλλον, ή πλέον. το δε $(-)$, ήττον ή μείον. το δε $A \cdot B$ ή $A \times B$, A εν B . το δε A^2 , ή $A\Gamma 62$, το τετράγωνον εμφανίζει το από του A , ή το από της $A\Gamma$ ευθείας. συντομίας δε χάριν τούτοις χρώμεθα τοις σημείοις.

Ενδεικτικά θα αναφέρουμε την απόδειξη της πρότασης E' έτσι όπως αποδίδεται στην «Οδό Μαθηματικής» και στα «Στοιχεία Μαθηματικών» μετά από την εισαγωγή των συμβόλων από τον Θεοτόκη.

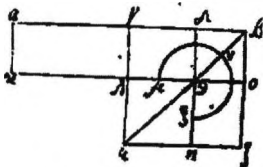
Πρόταση E'

Εάν ευθεία γραμμή τμηθή εις ίσα και άνισα, το υπό των ανίσων της όλης τμημάτων περιεχόμενον ορθογώνιον, μετά του από της μεταξύ των τομών τετραγώνων ίσον εστί τω από της ημισείας τετραγώνω.

Απόδειξη (στην Ο. Μ.)

Τμηθήτω δη η $\alpha\beta$, εις ίσα μεν κατά το γ , άνισα δε κατά το δ . Λέγω το υπό των $\alpha\delta$, $\delta\beta$ περιεχόμενον ορθογώνιον μετά του από της $\gamma\delta$, τετραγώνου ίσον είναι τω από της $\gamma\beta$ τετραγώνω. Αναγεγράφθω γαρ το $\gamma\zeta$, τετράγωνον από της $\gamma\beta$. της δε $\beta\epsilon$, επεξευχθείσης, ακθήτω η $\delta\eta$, παράλληλος τη $\gamma\epsilon$, η $\beta\zeta$, τέμνουσα την $\beta\epsilon$, κατά το θ , και δια του θ , παράλληλος τη $\alpha\beta$, ήχθω η $\kappa\omicron$. από δε του α , παράλληλος τη $\gamma\epsilon$, η $\alpha\kappa$. και επεί το $\gamma\theta$, ίσον εστί τω $\theta\zeta$, κατά την $\mu\gamma'$ του α' . κοινού λαμβανομένου του $\delta\omicron$, πάντω $\varsigma\eta$ κατά το β' αξίωμα τα $\gamma\omicron$, $\delta\zeta$, ίσα εστιν, αλλά τω $\gamma\omicron$, ίσον εστί το $\kappa\gamma$. κοινού δε προσκεμένου του $\gamma\theta$, το $\alpha\theta$, πάντων ίσον εστί τω $\mu\zeta$ γνώμονι. Εάν δε και τολη, κοινόν ληφθή, το $\alpha\theta$, άρα μεν του $\lambda\eta$, ίσον εστί τω $\mu\zeta$ γνώμονι και $\lambda\eta$. αλλ'ο μεν $\mu\zeta$ γνώμων μεν του $\lambda\eta$, ίσος εστί τω $\gamma\zeta$. το $\alpha\theta$, άρα μεν του $\lambda\eta$, ίσον εστί τω $\gamma\zeta$. εστί δε το μεν $\alpha\theta$, το υπό των ανίσων τμημάτων $\alpha\delta$, $\delta\beta$, περιεχόμενον ορθογώνιον. (περιέχεται γαρ υπό του $\alpha\delta$, ενός τμήματος, και της $\delta\theta$, ήτις εστιν ίση τω $\delta\beta$, ετέρω τμήματι κατά το πόρισμα της ανωτέρω,) το δε $\lambda\eta$, το από της $\gamma\delta$ τετράγωνον, γέγονε γαρ από της $\lambda\theta$, ήτις εστιν ίση τη $\gamma\delta$. Και το $\gamma\zeta$, το από της $\gamma\beta$, ημισείας τετράγωνον. όπερ έδει δείξαι.

Απόδειξη (στα Σ. Μ.)



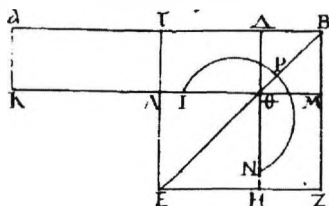
Ευθεία η ΑΒ τετμήσθω εις μεν ίσα κατά το Γ, εις δε άνισα κατά το Δ. λέγω ότι το υπό των ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ορθογώνιον μετά του από της ΓΔ τετραγώνου ίσον εστί τω από της ΓΒ τετραγώνω. (σχ. 8)

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Αναγεγράφθω από της ΓΒ τετράγωνον το ΓΕΖΒ, και επεξεύχθω η ΒΕ. Και δια μεν του Δ ήχθω η ΔΗ παράλληλος οποτέρα των ΓΕ, ΒΖ. δια δε του Θ, ΚΜ παράλληλος οποτέρα των ΑΒ, ΕΖ. δια δε του Α η ΑΚ παράλληλος οποτέρα των ΓΔ, ΒΜ.

ΔΕΙΞΙΣ

Το $\Gamma\Theta = \Theta Z$. (χ) κοινόν προσκείσθω το ΔΜ. το άρα $\Gamma M = \Delta Z$. (ψ) αλλά και το $ΑΛ = \Gamma M$. (ω) το άρα $ΑΛ = \Delta Z$. (α) κοινόν προσκείσθω το ΓΘ. Το άρα ΑΘ ίσον τω γνώνονι ΙΡΝ. (β) κοινόν προσκείσθω το ΛΗ. Άρα $ΑΘ + ΛΗ = \Gamma Z$. αλλά το ΑΘ το ορθογώνιον έστι το υπό των ΑΔ, ΔΒ. (ισή γαρ η ΔΘ τη ΔΒ) (γ) το δε ΛΗ το από της ΓΔ τετράγωνον έστι, (δ) το δε ΓΖ, το από της ΓΒ τετράγωνον. Το άρα υπό των ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ορθογώνιον μετά του από της ΓΔ τετραγώνου ίσον εστί τω από της ΓΒ τετραγώνω.



Το βιβλίο Π κλείνει με την ενότητα «Περί καταμετρήσεως των ευθυγράμμων σχημάτων». Πρόκειται για τέσσερα προβλήματα υπολογισμού εμβαδών, ορθογωνίου, παραλληλογράμου, τριγώνου, πολυγώνου.

Πρόβλημα Α΄: Του δοθέντος ορθογωνίου ΑΒΓΔ το εμβαδόν, είτουν το υπ' αυτού περιεχόμενον χωρίο, καταμετρήσαι.

Πρόβλημα Β΄: Του δοθέντος παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ το εμβαδόν καταμετρήσαι.

Πρόβλημα Γ΄: Του δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ το εμβαδόν καταμετρήσαι.

Πρόβλημα Δ΄: Παντός δοθέντος ευθυγράμμου, οίον του ΑΒΓΔΕ, το εμβαδόν

καταμετρήσαι.

Το βιβλίο III των «Στοιχείων» του έργου «Στοιχεία Μαθηματικών», (Σ. Μ.) περιέχει δέκα (10) ορισμούς και τριάντα επτά (37) προτάσεις.

Οι ορισμοί:

Το βιβλίο III των Σ.Μ περιέχει δέκα ορισμούς τους ίδιους ακριβώς με εκείνους του αντίστοιχου βιβλίου της Ο.Μ.

Για τους ορισμούς του βιβλίου III, ο Θεοτόκης, δεν κάνει σχόλια σε αντίθεση με τους ορισμούς της Ο.Μ. οι οποίοι σχολιάζονται εκτενέστατα.

Οι προτάσεις:

Το βιβλίο III των Σ.Μ. περιέχει 37 προτάσεις, τις ίδιες με το αντίστοιχο βιβλίο της Ο.Μ.

Οι αποδείξεις των προτάσεων του βιβλίου εξ' αιτίας της εισαγωγής των συμβόλων από τον Θεοτόκη παρουσιάζονται απλούστερα και συντομότερα από αυτές της Ο.Μ.

Τα πορίσματα:

Στην πρόταση ΙΓ' ο Θεοτόκης αναφέρει και αποδεικνύει το μοναδικό πόρισμα του βιβλίου: «Και ευθεία κύκλου ουκ εφάπτεται κατά πλείονα σημεία, ή έν»

Μετά την πρόταση ΛΣΤ', ακολουθούν δύο συμπεράσματα («συνέπειαι», όπως χαρακτηρίζονται από τον Θεοτόκη)

Συνέπειαι

Α. Εάν από του αυτού σημείου Δ (σχ 59) αχθώσιν ευθείαι οσαυδηποτούν τον κύκλον τέμνουσαι, έςονται πάντα τα υπό των όλων και των εκτός απολαμβανομένων μεταξύ του σημείου Δ και της περιφέρειας περιεχόμενα ορθογώνια ίσα αλλήλοις.

Β. Αι από του αυτού σημείου Δ αχθείσαι του κύκλου εφαπτόμεναι ΔΘ, ΔΒ ίσαι αλλήλαις εισίν.

Σε κάποιες περιπτώσεις πορίσματα της Ο. Μ. και των «Στοιχείων», χαρακτηρίζονται «συνέπειες» στο έργο του Θεοτόκη.

Τον όρο **πορίσματα**, ο Θεοτόκης, τον έχει χρησιμοποιήσει για να χαρακτηρίσει αξιώματα –όπως τα πορίσματα που αναφέρει στους ορισμούς του βιβλίου Ι-, αλλά και προτάσεις οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τα θεωρήματα.

Σε αρκετές περιπτώσεις αντί του όρου πορίσματα χρησιμοποιεί τον όρο «Συνέπειαι» χωρίς να γίνεται κατανοητό τότε και γιατί γίνεται αυτή η διάκριση. Αυτό δείχνει –ως ένα βαθμό- έλλειψη αυστηρότητας ως προς την χρήση των «δομικών στοιχείων» ενός μαθηματικού κειμένου.

Το βιβλίο IV των «Στοιχείων» του έργου «Στοιχεία Μαθηματικών», (Σ. Μ.) περιέχει οκτώ (8) ορισμούς και δέκα έξι προτάσεις (κατασκευές).

Οι ορισμοί

Το βιβλίο IV των Σ.Μ περιέχει οκτώ ορισμούς, τους ίδιους ακριβώς με εκείνους του αντίστοιχου βιβλίου της Ο.Μ.

Για τους ορισμούς αυτούς δεν γίνονται σχολιασμοί σε αντίθεση με τους αντίστοιχους ορισμούς της Ο. Μ., οι οποίοι σχολιάζονται εκτενώς.

Οι προτάσεις

Οι δεκαέξι κατασκευές του 4^{ου} βιβλίου των Σ.Μ., είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές του αντίστοιχου βιβλίου της Ο. Μ.

Τα συμπεράσματα («συνέπειαι»)

Η «συνέπεια» της πρότασης Ε' είναι: «Ότε μεν εντός του τριγώνου πίπτει το κ'ντρον του κύκλου, η ΒΑΓ γωνία ελάττων εστίν ορθής. ότε δε επί της ΒΓ, ορθή έσται. όταν δε εκτός του τριγώνου, μείζων»

Τρεις είναι «αι συνέπειαι» της πρότασης ΙΕ'

Α'. εκάστη εξαγώνου γωνία ίση εστί δυσί τριτημορίοις δύο ορθών. εκάστη γαρ ίση δυσί γωνίαις ισοπλευρών τριγώνων

Β'. η του εξαγώνου πλευρά ίση εστί τη ημιδιαμέτρω του κύκλου

Γ'. εάν δια των Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων εφαπτομένας του κύκλου αγάγωμεν, περιγραφήσεται περί τον κύκλον εξαγώνον ισόπλευρόν τε και ισογώνιον

Η συνέπεια Β' είναι το πόρισμα της πρότασης ΙΕ' της Ο. Μ.

Το βιβλίο IV της «Οδού» περιέχει τέσσερα πορίσματα.

Όπως και στα προηγούμενα βιβλία, η απλούστευση των αποδείξεων με τη εισαγωγή των συμβολισμών στο έργο του Θεοτόκη, είναι προφανής.

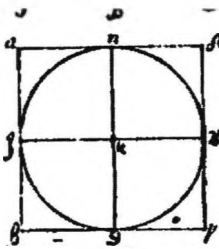
Αναφέρουμε ενδεικτικά την κατασκευή της πρότασης Θ' έτσι όπως περιγράφεται στα δύο έργα

Πρόταση Θ'

Περί το δοθέν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Στην «οδό Μαθηματική»

Έστω δη περιγράψαι κύκλον περί το αβγδ, τετράγωνον. Επεξεύχθωσαν αι αγ, βδ, του τετραγώνου διάμετροι, τεμνόμεναι αλλήλαις κατά το ε, και το ε, κέντρον έσται του κύκλου. Επεί γαρ η αδ, ίση εστί τη αβ, κοινή δε η αγ, και βάσις η γδ, βάσει τη γβ, ίση, πάντως γε, κατά την η' του α'. η υπό δαγ γωνία ίση εστί τη υπό βαγ, ώστε η προς τω α, γωνία του τετραγώνου δίχα τέμνεται. ομοίως δή δείξομεν, ότι και αι προς τοις β, γ, δ, σημείοις γωνίαί δίχα τέμνονται. Έστι δε η προς τω α, ίση τη προς τω β. και η μεν υπό εαβ, ημίσειά εστί της προς τω α. η δε υπό εβα, της προς τω β. άρα και πλευρά η εα, ίση εστί τη εβ, κατά την ε' του α'. δια τα αυτά δε ίση εστί και η εβ, τη εγ, και η εγ, τη εδ, και η εδ, τη εα, ώστε αι εα, εβ, εγ, εδ, ίσαι αλλήλαις εισίν, άρα ο κέντρον μεν τω ε, διαστήματι δε τω εα, περιγραφόμενος κύκλος διελεύσεται και δια των β, γ, δ, σημείων. όπερ έδει ποιήσαι.



Στα «Στοιχεία Μαθηματικών»

Έστω το δοθέν τετράγωνον το ΑΒΓΔ. Σχ 16.

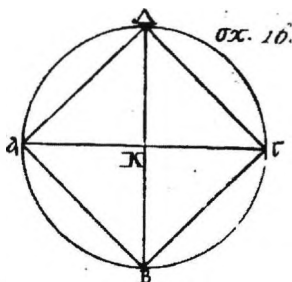
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Επεξεύχθωσαν αι ΑΓ, ΔΒ, και τεμνέτωσαν αλλήλας κατά το Κ. λέγω, ότι ο κέντρω μεν τω Κ, διαστήματι δε ενί των ΚΑ, ΚΔ, ΚΓ, ΚΒ, γραφόμενος κύκλος εστίν ο ζητούμενος.

ΔΕΙΞΙΣ

Εν τοις τριγώνοις ΔΑΒ, ΔΓΒ, η μεν ΔΑ=ΔΓ, η δε ΑΒ=ΒΓ, η δε ΔΒ κοινή. και γωνία άρα η ΑΔΒ=ΓΔΒ, και η ΑΒΔ=ΓΒΔ. (δ) εκατέρα άρα των ΑΔΓ, ΑΒΓ γωνιών δίχα τέτμηται υπό της ΔΒ. ομοίως δη δείξομεν, ότι και εκατέρα των ΔΑΒ, ΔΓΒ, δίχα τέτμηται υπό της ΑΓ. Και επεί εν τοις ΑΔΚ, ΓΔΚ τριγώνοις, η μεν ΑΔ=ΔΓ, η δε ΔΚ κοινή. και γωνία η ΑΔΚ=ΓΔΚ, ως δέδεικται, άρα και η ΑΚ=ΚΓ. (ε) δια τα αυτά δη και εκατέρα των ΔΚ, ΚΒ ίση εκατέρα των ΑΚ, ΚΓ. αι τέσσαρες άρα ΑΚ, ΚΓ, ΔΚ, ΚΒ ίσαι αλλήλαις εισίν. Ο άρα κέντρω μεν το Κ, διαστήματι δε ενί αυτών γραφόμενος κύκλος ήξει και δια των λοιπών σημείων, και περιγεγραμμένος εσται.

(δ) κατά την η' του α', (ε) κατά την δ' του α'



Το βιβλίο V των «Στοιχείων» του έργου «Στοιχεία Μαθηματικών», (Σ. Μ.) περιέχει δεκα οκτώ (18) ορισμούς, οκτώ (8) αξιώματα και είκοσι τέσσερις (24) προτάσεις.

Το Βιβλίο αυτό παρουσιάζεται αρκετά διαφοροποιημένο από το αντίστοιχο των «Στοιχείων» της έκδοσης Heiberg αλλά και από το βιβλίο της «Οδού Μαθηματικής».

και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον γιατί με αυτό γίνονται προφανείς οι στόχοι συγγραφής του έργου: «τα ταις λοιπαίς επιστήμαις αναγκαία συνελέξαμεν»

Οι ορισμοί

Το βιβλίο V των Σ.Μ περιέχει δεκα οχτώ (18) ορισμούς, αρκετά διαφοροποιημένους και σε αρκετές περιπτώσεις διαφορετικούς από αυτούς των «Στοιχείων» του Ευκλείδη καθώς και του αντίστοιχου βιβλίου της Ο. Μ.

Στα σχόλια των ορισμών, ορίζει και πολλές άλλες έννοιες, όπως ο γεωμετρικός λόγος, ο αριθμητικός λόγος, ο γηγόμενος και ο επόμενος όρος μιας αναλογίας, οι ίσοι και οι άνισοι λόγοι, η συνεχής αναλογία, η διακεκριμένη αναλογία, κ.ά.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι «Σημειώσεις» που αναφέρονται στους ορισμούς. Συγκεκριμένα:

Στην σημείωση Γ' : Ορίζει τον **τετράγωνο αριθμό** και την **τετραγωνική ρίζα** αριθμού και δίνει παράδειγμα. «οίον ο μεν 36, τετράγωνος του 6, ως εξ' αυτού πολλαπλασιαζομένου γινόμενος. ο δε 6 ρίζα τετραγωνική του 36»

Στην σημείωση Δ' : Ορίζει τον **κύβο αριθμό** και την **κυβική ρίζα** αριθμού και δίνει παράδειγμα «οίον, ο μεν 216, κύβος του 6: ο δε 6 κυβική ρίζα του 216»

Στην σημείωση Ε' : με αριθμητικά παραδείγματα εξηγεί γιατί «Ουδ' ο διπλασίων λόγος τον διπλάσιον εμφανίζει, ουδ' ο τριπλασίον τον τριπλάσιον»

Τα αξιώματα

Το βιβλίο V των Σ.Μ περιέχει οκτώ (8) αξιώματα ενώ τα αντίστοιχα βιβλία των «Στοιχείων» και της Ο.Μ., δεν περιέχουν αξιώματα.

Μεγάλο ενδιαφέρον στην σελίδα 129, παρουσιάζει η «**Ερμηνεία των σημείων, οίς τα εν τοις μεγέθεσι, τοις δια των στοιχείων δηλουμένοις, πάθη εμφανίζονται**», δηλαδή η ερμηνεία των νέων μαθηματικών συμβόλων τα οποία ο Θεοδόκης εισάγει στις αποδείξεις των προτάσεων προκειμένου να συντομεύσει τις διαδικασίες απόδειξης και να διευκολύνει στην κατανόησή τους.

Η ερμηνεία έχει ως εξής: «Το μεν $A \cdot B$ ή $A \times B$ το γινόμενον δηλοί το εκ του πολλαπλασιασμού του A επί το B . απαγγέλλεται δε ούτως. A εν τω B . το δε $A \cdot B + \Gamma + \Delta$ εμφανίζει, ότι το A κοινός πολλαπλασιαστής εστί πάντων των υπό την ευθείαν μεγεθών. απαγγέλλομεν δε A εν τω B και Γ και Δ . το δε A/B , το πηλίκον το προκύπτον από της διαιρέσεως του A δια του B . ό και εκθέτης λέγεται. απαγγείλον δ' ούτως. A διαιρεθέν δια του B . τα δε $A : B :: \Gamma : \Delta$ ή $A : B = \Gamma : \Delta$ εμφανίζει, ότι όν λόγον έχει το A προς το B , τον αυτόν έχει και το Γ προς το Δ . εκφωνείται δε ούτως. Ως A προς B , ούτω Γ προς Δ . Τα δε $A : B > \Gamma : \Delta$, ότι το A προς το B μείζονα λόγον έχει, ήπερ το Γ προς το Δ . Τα δε $A : B < \Gamma : \Delta$, ότι το A προς το B ελάσσονα λόγον έχει, ήπερ το Γ προς το Δ . και το μεν $A > B$, ότι το A μείζον του B . το δε $B < A$, ότι το B έλαττον του A .»

Οι προτάσεις

Το βιβλίο V των Σ.Μ περιέχει είκοσι τέσσερις (24) προτάσεις ενώ η Ο.Μ. όπως και τα «Στοιχεία» είκοσι πέντε (25)

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η επιλογή και η ταξινόμηση των προτάσεων. Συγκεκριμένα ο Θεοδόκης παρουσιάζει με διαφορετική σειρά τις προτάσεις των «Στοιχείων». γράφει: «Πρότασις Α'. και Ευκλείδους Ζ'»,

«Πρότασις Β'. και Ευκλείδους Θ'» κ.ο.κ

Με την εισαγωγή των νέων συμβόλων οι αποδείξεις των προτάσεων συντομεύονται και η παρακολούθηση των μαθηματικών συλλογισμών γίνεται ευκολότερη.

Τα πορίσματα

Το βιβλίο V των Σ.Μ περιέχει τρία (3) πορίσματα. Το πρώτο από αυτά αναφέρεται στον ορισμό του **Εκθέτη** ο οποίος δεν υπάρχει στα «Στοιχεία» ούτε στην Ο.Μ. Το αντίστοιχο βιβλίο της «Οδού» περιέχει τρία (3) πορίσματα διαφορετικά από αυτά των Σ. Μ.

Μετά το τέλος των προτάσεων του βιβλίου V, ακολουθούν «**Τα εξής Θεωρήματα, πλήν του εσχάτου, εκ των του Πάππου εισί του Αλεξανδρέως**»

Θεώρημα Α΄

Εάν πρώτον προς δεύτερον μείζονα λόγον έχη, ήπερ τρίτον προς τέταρτον, το εκ των άκρων γινόμενον μείζον του εκ των μέσων έσται και εάν το εκ των άκρων μείζον του εκ των μέσων, το πρώτον προς το δεύτερον μείζονα λόγον έξει, ήπερ το τρίτον προς το τέταρτον.

Θεώρημα Β΄

Εάν πρώτον προς δεύτερον μείζονα λόγον έχη, ήπερ τρίτον προς τέταρτον, και συντεθέν πρώτον και δεύτερον προς δεύτερον μείζονα λόγον έξει, ήπερ τρίτον και τέταρτον προς τέταρτον

Θεώρημα Γ΄

Εάν πρώτον προς δεύτερον μείζονα λόγον έχη, ήπερ τρίτον προς τέταρτον, και διαιρεθέντα μείζονα λόγον έξει

Θεώρημα Δ΄

Εάν πρώτον προς δεύτερον μείζονα λόγον έχη, ήπερ τρίτον προς τέταρτον, κατά αναστροφήν λόγου, ελάττονα λόγον έξει.

Θεώρημα Ε΄

Εάν πρώτον προς δεύτερον μείζονα λόγον έχη, ήπερ τρίτον προς τέταρτον, και δεύτερον προς πέμπτον μείζονα ήπερ τέταρτον προς έκτον, δι ίσου και πρώτον προς πέμπτον μείζονα λόγον έξει, ήπερ τρίτον προς έκτον.

Θεώρημα ΣΤ΄

Εάν πρώτον προς δεύτερον μείζονα λόγον έχη, ήπερ τρίτον προς τέταρτον, και δεύτερον προς πέμπτον μείζονα ήπερ έκτον προς τρίτον, και δι ίσου τεταραγμένως, πρώτον προς πέμπτον μείζονα λόγον έξει, ήπερ έκτον προς τέταρτον

Θεώρημα Ζ΄

Ων διπλασιόνων λόγον οι υποδιπλασίονες ίσοι, κακείνοι εισίν ίσοι. και αν υποδιπλασιόνων οι διπλασίονες ίσοι, κακείνοι εισίν ίσοι.

Το βιβλίο VI των «Στοιχείων» του έργου «Στοιχεία Μαθηματικών», (Σ. Μ.) περιέχει:

- Τους τέσσερις (4) πρώτους από τους πέντε ορισμούς που περιέχει η Ο.Μ.,(η Ο.Μ. περιέχει τους πέντε ορισμούς των «Στοιχείων»), χωρίς κανένα σχόλιο, σε αντίθεση με αυτούς της «Οδού» που σχολιάζονται εκτενώς.
- Τριάντα τρεις (33) προτάσεις, τις ίδιες με αυτές της Ο.Μ. και των «Στοιχείων» του Ευκλείδη.
- Οκτώ «συνέπειες», (συμπεράσματα), τέσσερις στην πρόταση Η΄, μία στην Ι, μία στην ΙΣΤ΄ και μία στην ΚΓ΄. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει αυτή της πρότασης ΙΣΤ΄: «Εντεύθεν δήλος ο της των τριών Μεθόδου, της και χρυσής Μεθόδου καλουμένης, λόγος. ότι γαρ ο τέταρτος της αναλογίας όρος ίσος τω πληκίω τω προκύπτοντι εκ του γινομένου εκ των μέσων δια του πρώτου

διαιρεθέντος, δέικνται ούτως.....». Στο τέλος της απόδειξης αναφέρει ότι «εκ της προτάσεως δε ταύτης και το εξής του Πτολεμαίου θεώρημα δέικνται.» και στην συνέχεια αποδεικνύει το θεώρημα του Πτολεμαίου. Παρατηρούμε δηλαδή ότι ο Θεωτόκης δεν ακολουθεί πιστά τα κείμενα των «Στοιχείων» και μόνον αυτά, αλλά τα «εμπλουτίζει» με παρατηρήσεις και άλλα θεωρήματα, όπως έγινε και στο προηγούμενο βιβλίο, το V, με τα θεωρήματα του Πάππου.

Σημαντική είναι η σημείωση που αναφέρεται στην πρόταση ΙΗ' (κατασκευή) και αφορά στην εφαρμογή της στην χωρογραφία.

Πρόταση ΙΗ'

Από της δοθείσης ευθείας, τω δοθέντι ευθυγράμμω όμοιόν τε και όμοίως κείμενον ευθύγραμμον αναγράψαι.

Σημειώσεις

«Εκ της προτάσεως ταύτης η τέχνη του τους γαιωγραφικούς και χωρογραφικούς καταγράφειν αναπηγάζει χάρτας, και τους αγρούς και οικίας και πόλεις ιχνογραφείν. μικρά μεν γαρ, όμοια δε και όμοίως τοις μεγάλαις κείμενα καταγράφουσι σχήματα οι της ιχνογραφικής έμπειροι τέχνης.

Το βιβλίο ΧΙ των «Στοιχείων» του έργου «Στοιχεία Μαθηματικών», (Σ.Μ.), περιέχει δέκα τέσσερις (14) ορισμούς, σαράντα (40) προτάσεις, τρία (3) λήμματα και ένα (1) πόρισμα.

Οι ορισμοί

Το βιβλίο ΧΙ των Σ.Μ. περιέχει δέκα τέσσερις (14) ορισμούς, ενώ το αντίστοιχο βιβλίο της Ο. Μ. περιέχει είκοσι οκτώ (28), τους ίδιους με το βιβλίο των «Στοιχείων».

Οι δέκα τρεις πρώτοι ορισμοί του βιβλίου είναι ίδιοι με αυτούς της Ο. Μ. και ο 14^{ος} είναι ο ορισμός του παραλληλεπίπεδου.

Από τους υπόλοιπους ορισμούς της Ο. Μ, αυτοί που αφορούν στην σφαίρα στον κώνο και στον κύλινδρο περιλαμβάνονται στο επόμενο βιβλίο, το 12^ο . Οι δε ορισμοί της πυραμίδας, κύβου, οκταέδρου, εικοσαέδρου και δωδεκαέδρου δίνονται στην «συνέπεια» της πρότασης ΚΛ'.

Οι προτάσεις

Το βιβλίο ΧΙ των Σ.Μ. περιέχει σαράντα προτάσεις, τις ίδιες με αυτές της Ο.Μ. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, με τα μαθηματικά σύμβολα τα οποία έχει εισάγει στα κείμενά του ο Θεωτόκης, οι αποδείξεις των προτάσεων του βιβλίου είναι συντομότερες από εκείνες της «Οδού».

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρατήρηση του συγγραφέα σχετικά με την πρόταση ΛΕ'. Επειδή η πρόταση αυτή, «τη δείξει μόνη συντείνει της εξής προτάσεως, ήτις και άνευ αυτής δειχθήσεται», ο συγγραφέας, θεωρεί άσκοπο να γράψει την μακροσκελή της απόδειξη, αλλά αποδεικνύει την επόμενη πρόταση με διαφορετικό τρόπο. Την διαδικασία αυτή, ο συγγραφέας γενικεύει στο επόμενο βιβλίο, το ΧΙΙ.

Πορίσματα-Λήμματα

Το βιβλίο XI των Σ.Μ., περιέχει ένα πόρισμα στην πρόταση ΔΓ', τρία λήμματα με τις αποδείξεις τους, δύο στην πρόταση ΚΒ' και ένα στην ΚΔ' και τρεις «συνέπειες», μία στην πρόταση ΙΓ' μία στην ΚΛ' και μία στην ΛΒ'.

Το αντίστοιχο βιβλίο της «Οδού», περιέχει δύο πορίσματα και ένα λήμμα, τα ίδια με αυτά των «Στοιχείων» του Ευκλείδη.

Το βιβλίο XII των «Στοιχείων» του έργου «Στοιχεία Μαθηματικών», (Σ. Μ.) παρουσιάζεται **σημαντικά διαφοροποιημένο** από το αντίστοιχο βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη αλλά και της «Οδού Μαθηματικής», αφού στο βιβλίο XII, ο Ανθρακίτης ακολουθεί πιστά τα κείμενα των «Στοιχείων».

Οι ορισμοί

Το βιβλίο XII των Σ.Μ. περιέχει έξι (6) ορισμούς ενώ το αντίστοιχο βιβλίο της Ο. Μ., όπως και τα «Στοιχεία», δεν περιέχουν ορισμούς.

- **Στον Α':** δίνονται οι ορισμοί της Πυραμίδας, της βάσης και της κορυφής της πυραμίδας.
- **Στον Β':** δίνονται οι ορισμοί της κωνικής επιφάνειας, του κώνου, της πλευράς, της κορυφής, της βάσης του κώνου, του ορθού και του πλάγιου κώνου.
- **Στον Γ':** δίνονται οι ορισμοί της κυλινδρικής επιφάνειας, του κυλίνδρου, της πλευράς, της βάσης, του άξονα του κυλίνδρου, του ορθού και του πλάγιου κυλίνδρου.
- **Στον Δ':** δίνονται οι ορισμοί του όμοιου κώνου και του όμοιου κυλίνδρου.
- **Στον Ε':** δίνονται οι ορισμοί της σφαίρας, της επιφάνειας, του κέντρου, του άξονα και της διαμέτρου της σφαίρας.
- **Στον ΣΤ':** δίνεται ο ορισμός των ταυτιζόμενων σχημάτων

Οι προτάσεις

Αν και οι προτάσεις οι οποίες περιέχονται στα Σ.Μ. είναι ίδιες με εκείνες της Ο.Μ. και των «Στοιχείων», εν τούτοις **σημαντικές διαφορές στον τρόπο απόδειξης** καθώς και παράληψη των αποδείξεων σε κάποιες από αυτές δίνουν **μία διαφορετική εικόνα του βιβλίου XII των Σ.Μ., από εκείνη του αντίστοιχου βιβλίου της Ο.Μ. και των «Στοιχείων».**

Συγκεκριμένα:

Ο Θεοτόκης, στο βιβλίο XII, δεν αποδεικνύει κάποιες προτάσεις των οποίων η εφαρμογή είναι περιορισμένη και τις αντικαθιστά με λήμματα, αποδεικνύοντας με διαφορετικό τρόπο άλλες προτάσεις στις οποίες αυτές εφαρμόζονταν.

Για παράδειγμα, για τις προτάσεις Γ' και Δ' γράφει: «Εισίν επιμήκιστοι και μόνον δουλεύουσι τη της πέμπτης προτάσεως δείξη. ήτις και άνευ αυτών δειχθήσεται»

Δηλαδή αφού η διαδικασία των αποδείξεων των προτάσεων Γ' και Δ' είναι τόσο μακροσκελής και η χρήση τους περιορίζεται μόνο στην απόδειξη της πρότασης Ε', παραλήπει τις αποδείξεις, και αποδεικνύει την Ε' με διαφορετικό τρόπο χρησιμοποιώντας το λήμμα Ι' του οποίου η απόδειξη γίνεται εύκολα.

Με την εφαρμογή του λήμματος, απλουστεύεται κατά πολύ και η απόδειξη της πρότασης Ε'.

Επίσης παραλείπει τις αποδείξεις των προτάσεων ΙΣΤ' και ΙΖ', (η απόδειξη της ΙΖ' γίνεται στην Ο.Μ. μέσα σε τρεις πυκνογραμμένες σελίδες), οι οποίες χρησιμοποιούνται στην απόδειξη της ΙΗ' και αντί γι αυτές αποδεικνύει το λήμμα Ε' το οποίο χρησιμοποιεί για την απόδειξη της ΙΗ'.

Για τις προτάσεις ΙΣΤ' και ΙΖ', ο Θεοτόκης, γράφει χαρακτηριστικά: «μόνο τη δείξει της εξής προτάσεως χρήσιμοι, ήτις δια του επομένου λήμματος δειχθήσεται».

Ακόμα, στις περισσότερες περιπτώσεις, ο Θεοτόκης, αντικαθιστά αποδείξεις προτάσεων δύσκολες και χρονοβόρες με άλλες σημαντικά απλούστερες.

Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι η απόδειξη της πρότασης Ι' γίνεται από τον Θεοτόκη μέσα σε δέκα γραμμές, ενώ στην Ο. Μ. και στα «Στοιχεία» σε δύο πυκνογραμμένες σελίδες.

Η συντόμηση των αποδείξεων και η αντικατάσταση προτάσεων οι οποίες αποδεικνύονται δύσκολα, με λήμματα, προκειμένου να τις αντικαταστήσουν εκεί όπου αυτές εφαρμόζονται καθιστούν προφανές **ότι ο συγγραφέας, εις βάρος του θεωρητικού στρέφει το έργο «επί το πρακτικότερον»**

Λήμματα – πορίσματα

Το βιβλίο XII των Σ.Μ. περιέχει:

- πέντε (5) λήμματα με τις αποδείξεις τους, δύο στην πρόταση Α', ένα στην Γ', ένα στην Θ' και ένα στην ΙΖ'
- πέντε (5) πορίσματα, ένα στην πρόταση ΣΤ', δύο στην Ζ', ένα στην Η' και ένα στην Θ'.
- δύο συμπεράσματα («συνέπειαι»), ένα στην πρόταση Β' και ένα στην ΙΑ'

Η «Οδός Μαθηματικής», ακολουθεί πιστά το κείμενο του βιβλίου XII των «Στοιχείων» με δεκαοχτώ (18) προτάσεις, δύο (2) λήμματα και τρία (3) πορίσματα.

Μετά την Γεωμετρία, στον πρώτο τόμο του έργου του, ο Θεοτόκης, παρουσιάζει τα πέντε βιβλία της Αριθμητικής.

4.2.2 Η Αριθμητική του έργου.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ Βιβλίου Πρώτου Ορισμοί

Το πρώτο βιβλίο αρχίζει με δύο ορισμούς: της Αριθμητικής και του Αριθμού.

Α'. Αριθμητική εστίν η των εν τοις αριθμοίς λόγων τε και παθών επιστήμη. Θεωρητική μιν, ως τους αυτών επιθεωρούσα λόγους και τα πάθη. πρακτική δε, ως το όπως δει τούτοις χρήσθαι εισηγουμένη.

Β'. Αριθμός εστίν η κατ' αφαιρέσιν έννοια ή την ενάδα, ή το πλήθος, ή τα μέρη δηλούσα των πραγμάτων. αριθμοί δε λέγονται και τινα σημεία, ή χαρακτήρες τούτο αυτό

εμφαίνοντες. οίον οι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. ών ο μεν πρώτος **μονάς** λέγεται, και δηλοί έν. ο δε δεύτερος, **δύας**, ή **δύω**. ο δε τρίτος, **τριάς** ή **τρία**, ο δε τέταρτος **τετράς** ή **τέτταρα** ο δε δέκατος, **ουδέν**, ή χαρακτηή του μηδενός δηλωτικός.

Τα μακροσκελή σχόλια και τα πορίσματα που αναφέρονται στον ορισμό του αριθμού, ακολουθεί λήμμα που αφορά στις τέσσερις πράξεις και στην συνέχεια δίνονται οι ορισμοί των πράξεων αυτών.

ΛΗΜΜΑ

Τέσσαρσιν άπαντες οι αριθμοί υπόκεινται πάθεσι, τη προσθέσει, τη αφαιρέσει, τω πολλαπλασιασμή, και τη διαιρέσει.

- Αριθμόν δοθέντα αριθμώ δοθέντι προσθεΐναι, εστί το άλλον τοις δοθείσι προσευρεΐν ίσον. καλείσθω δε ο ευρεθείς **Άθροισμα**, ή **Κεφάλαιον**.
- Αριθμόν δοθέντα από αριθμού δοθέντος αφελείν, εστί άλλον ευρεΐν ίσον τη υπεροχή, ή ο έτερος των δοθέντων τον έτερον υπερέχει. Καλείσθω δε η ευρεθείσα υπεροχή **Διαφορά**.
- Αριθμόν δοθέντα δι αριθμού δοθέντος πολλαπλασιάσαι, εστί άλλον ευρεΐν, τοσάκις τον έτερον των δοθέντων περιέχοντα, οσάκις την μονάδα ο έτερος. καλείσθω δε ο μεν των δοθέντων, **Πολλαπλασιαστής**, ο δε **Πολλαπλασιαστής**. ο δε εκ του πολλαπλασιασμού προκύπτων, **Γινόμενον**.
- Αριθμόν δοθέντα δι αριθμού δοθέντος διελείν, εστί άλλον ευρεΐν δηλούντα ποσάκις ο εις των δοθέντων τον έτερον περιέχει. καλείσθω δε ο μεν των δοθέντων, **Διαιρέτης**, ο δε, **Διαιρέτης**. ο δε εκ της διαιρέσεως προκύπτων, **Πηλίκον**, ή **Εκθέτης**.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι ορισμοί των ομογενών και ετερογενών αριθμών:

- Οι μεν επί την αυτήν μονάδα αναφερόμενοι αριθμοί, **Ομογενείς** ή **Όμοταγείς**. οι δε μη, **Ετερογενείς** ή **Ετεροταγείς** εισίν.

Σε επτά (7) προβλήματα, μετά τους ορισμούς, περιγράφονται λεπτομερώς, με συγκεκριμένα παραδείγματα, οι διαδικασίες εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων.

Από τα προβλήματα αυτά **ιδιαίτερο ενδιαφέρον** παρουσιάζει το πρόβλημα Ε': «**Πυθαγορικών κατασκευάσαι πίνακα**», στο οποίο δίνονται λεπτομερείς οδηγίες για την κατασκευή του γνωστού Πυθαγόρειου πίνακα (της προπαίδειας) ο οποίος «πάντα περιέχει τα γινόμενα εξ' εκάστου των μοναδικών χαρακτηήρων δι εκάστου πολλαπλασιασθέντος».

Κατά τον συγγραφέα, «δια μνήμης τούτον έχειν πάνυ επωφέλές», γιατί, «οσάκις αν τους δοθέντας αριθμούς πολλαπλασιάσαι βουλώμεθα, προ οφθαλμών δει αυτόν τιθέναι».

Το πρώτο βιβλίο της Αριθμητικής «κλείνει» με την ενότητα «Περί των ασφαλών και επισφαλών βασάνων». Πρόκειται για την περιγραφή της διαδικασίας της «δοκιμής» των τεσσάρων πράξεων.

Επειδή, κατά την διαδικασία εκτέλεσης κάποιας πράξης, «εξ' απροσεξίας ή παραδρομής παραλογίγισσθαι συμβαίνει, και τους ευρεθέντας αριθμούς εσφαλμένους είναι, δια τούτο **βάσανοί** τινες, είτουν μέθοδοι, νενόηται, δι ων κατιδείν ένεστι πότερον άπταιστοι εισίν οι

ευρεθέντες»

Δηλαδή, «οι βάσανου», έχουν επινοηθεί για τον έλεγχο της ορθότητας των τεσσάρων πράξεων της Αριθμητικής.

Με τέσσερα παραδείγματα, ένα για την κάθε πράξη, περιγράφονται λεπτομερώς οι «δοκιμές» των πράξεων.

ΒΙΒΛΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Περί κλασμάτων και των καλουμένων δεκαδικών

Το δεύτερο βιβλίο της Αριθμητικής, αρχίζει με τον ορισμό του κλάσματος:

«**Κλάσμα** εστί το εκ δύο αριθμών ευθεία οριζοντίω διακεχωρισμένον συγκροτούμενον, και μονάδος μέρος, ή μόνας μονάδας, ή μέρος ομού και μονάδας εμφανίζον».

Στην συνέχεια δίνονται οι ορισμοί του **αριθμητή** και **παρονομαστή** ενός κλάσματος καθώς και του **γνήσιου** και του **δεκαδικού** κλάσματος.

Ακολουθούν έντεκα (11) προβλήματα στα οποία περιγράφονται οι παρακάτω διαδικασίες:

Στο Α: της απλοποίησης κλάσματος

Στο Β: της μετατροπής ετερόνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα.

Στο Γ': της πρόσθεσης ομωνύμων κλασμάτων.

Στο Δ': της αφαίρεσης ομωνύμων κλασμάτων.

Στο Ε': του πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

Στο ΣΤ': της διαίρεσης κλασμάτων

Στο Ζ': της πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μεταξύ ακεραίου και κλάσματος.

Στο Η': της πρόσθεσης μεταξύ δεκαδικών αριθμών.

Στο Θ: της αφαίρεσης δεκαδικών αριθμών.

Στο Ι': του πολλαπλασιασμού δεκαδικών αριθμών.

Στο ΙΑ': της διαίρεσης δεκαδικών αριθμών.

Ενδεικτικά θα αναφέρουμε ένα από τα παραπάνω προβλήματα

Πρόβλημα Η'

(Α) 25.4670 (Β) 8.569

Τους δοθέντας αριθμούς Α και Β, τους εξ' ολοκλήρων και Δεκαδικών συγκεκριμένους, επισυνάψαι

(Α) 25.4670

(Β) 8.569

(Γ) 34.036

ΠΡΑΚΤΕΑ

Τετάχθωσαν οι δοθέντες Α και Β, ώστε τους χαρακτηρας υπό τους αυτοίς ισοδυνάμους κείσθαι. και των εν τω α'. προβλήματι του α' βιβλίου γενομένων, ο Γ έσται το

ζητούμενον κεφάλαιον

ΔΕΙΞΙΣ

Ὅτι ο Γ το ζητούμενον κεφάλαιον ἐστὶ, δῆλον ἐκ τῶν ἐν τῷ προδιαληφθέντι προβλήματι εἰρημένων. δέκα γὰρ μονάδες τῶν ελασσόνων μια τῶν μειζόνων ἴσαι, κατὰ τὴν μετὰ τοὺς ορισμούς τούδε τοῦ βιβλίου συνέπειαν

BIBAION Γ'

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς τῶν ριζῶν εξαγωγῆς

Στὴν ἀρχὴ τοῦ βιβλίου, ὁ Θεοτόκης, δίνει τοὺς ορισμούς τοῦ **τετράγωνου** ἀριθμοῦ, τῆς **τετραγωνικῆς ρίζας** ἀριθμοῦ, τοῦ **κύβου** ἀριθμοῦ, τῆς **κυβικῆς ρίζας** ἀριθμοῦ, τῆς **τετάρτης δυνάμεις** ἀριθμοῦ τῆς **τετάρτης δυνάμεως ρίζα** καὶ γενικά τῆς **δυνάμεις** ἀριθμοῦ.

Στὴν σημείωση ποὺ ἀκολουθεῖ ὀρίζονται ἀκόμα ἡ ἀριθμοί: **δυναμοδύναμις**, **δυναμόκυβος**, **κυβόκυβος** καὶ **άλογος**.

Στα ἐπόμενα πέντε (5) προβλήματα περιγράφεται λεπτομερῶς με συγκεκριμένα παραδείγματα ἡ διαδικασία γιὰ τὴν εὕρεση τῆς τετραγωνικῆς ρίζας ἀριθμοῦ.

Πρόβλημα Α΄: τοῦ δοθέντος τετραγώνου ἀριθμοῦ Τ τὴν τετραγωνικὴν εξαγαγεῖν ρίζαν.

Πρόβλημα Β΄: τοῦ δοθέντος κλασματίου ἀριθμοῦ τετραγώνου Α τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν εὐρεῖν. Δεῖ δη δὲ τὸν τε ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος τετραγώνους.

Πρόβλημα Γ΄: τοῦ δοθέντος τετραγώνου Τ, τοῦ ἐξ ὁλοκλήρων καὶ δεκαδικῶν συγκειμένου, τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν εὐρεῖν.

Πρόβλημα Δ΄: τοῦ δοθέντος τετραγώνου ἀριθμοῦ Τ, τοῦ ἐκ δεκαδικῶν μόνον συγκειμένου χαρακτήρων, τὴν τετραγωνικὴν εὐρεῖν ρίζαν.

Πρόβλημα Ε΄: τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ Τ, τοῦ μὴ τετραγώνου, τὴν ὡς ἐγγίστα τετραγωνικὴν ρίζαν εὐρεῖν. εἶπουν ἀριθμὸν εὐρεῖν, ὅς δι' ἐαυτοῦ πολλαπλασιασθεὶς ποιήσει τινὰ ὅτι ἐγγίστα τῷ δοθέντι Τ ἴσον.

Περὶ τῆς εξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ρίζης

Το θεώρημα ποὺ ἀκολουθεῖ, τὸ ὁποῖο εἶναι καὶ τὸ μοναδικό τοῦ βιβλίου, ἀναφέρεται στὸν κύβο τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν καὶ ἐφαρμόζεται στὴν εὕρεση τῆς κυβικῆς ρίζας ἀριθμοῦ.

Θεώρημα

Παντὸς ἀριθμοῦ τοῦ ἐκ δύο μερῶν συγκειμένου ὁ κύβος περιέχει τὸν τοῦ πρώτου μέρους κύβον, τὸ τριπλάσιον τοῦ γινομένου ἐκ τε τοῦ δευτέρου μέρους καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου, τὸ τριπλάσιον τοῦ γινομένου ἐκ τε τοῦ πρώτου μέρους καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου, καὶ τὸν κύβον τοῦ δευτέρου μέρους.

Στα επόμενα προβλήματα περιγράφεται μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα η εύρεση της κυβικής ρίζας αριθμού.

Πρόβλημα ΣΤ΄: Του δοθέντος κύβου Κ, του εξ' ολοκλήρων συγκεκριμένου, την κυβικήν ευρεῖν ρίζαν

Πρόβλημα Ζ΄: του δοθέντος κλασματίου αριθμού κύβου Κ την κυβικήν ευρεῖν ρίζαν. δει δη δε τον τε αριθμητήν και τον παρονομαστήν του κλάσματος αριθμούς είναι κύβους.

Πρόβλημα Η΄: Του δοθέντος κύβου Κ, του εξ ολοκλήρων και δεκαδικών συγκεκριμένου, την κυβικήν εξαγαγεῖν ρίζαν.

Πρόβλημα Θ΄: Του δοθέντος κύβου Κ, του εκ δεκαδικών μόνον συγκεκριμένου, την κυβικήν ευρεῖν ρίζαν.

Πρόβλημα Ι΄: Του δοθέντος αριθμού Κ, του εξ ολοκλήρων συγκεκριμένου, και μη όντος κύβου, την ως έγγιστα κυβικήν ευρεῖν ρίζαν.

Ενδεικτικά αναφέρουμε την λύση του **προβλήματος Ε΄** όπως δίνεται στο βιβλίο της Αριθμητικής από τον Νικηφόρο Θεοτόκη.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Λ Α.

1. Εὐρεθήτω ἡ	(Τ)	1 29. 00,00,00	(Ρ)	11.357
τετραγώνου		1 Α		
ἡ ρίζα αὐτοῦ	2)	2		
πῶς εὐρίσκειτ'		121 Β		
αὐτῶν, ἔπειτα ὁ Τ	22)	8.0		
τετραγώνος ἦν.		1 2769 Γ		
ἡ αἰδοῦσα ἔν ἡ ἐγ-	226)	1.310		
γινόν ὁ ἐν τῷ Ρ		1 288 225 . . Δ		
ἀριθμὸς 11. 2270)		0.17750		
		1 2885 1449 . . Ε		
2. Προσκέειθω-		0. 118551		

1. Ο λόγος
2. Η συνεχής και διακεκριμένη αναλογία
3. τα αριθμητικώς ανάλογα μεγέθη
4. τα κατά συνεχή αριθμητικό λόγο ανάλογα μεγέθη
5. τα κατά διακεκριμένο αριθμητικό λόγο ανάλογα μεγέθη

6. οι σειρά ή πρόοδος
7. η αύξουσα και η μειουμένη σειρά.

Τα πέντε θεωρήματα τα οποία αναφέρονται στην συνέχεια, αφορούν στις προόδους και επαληθεύονται με αριθμητικά παραδείγματα.

Ενδεικτικά αναφέρουμε το τρίτο θεώρημα

Θεώρημα Γ΄

Εάν τρία μεγέθη συνεχώς κατά αριθμητικών λόγον ανάλογον ή, το του πρώτου και του τρίτου άθροισμα διπλάσιον έσται του δευτέρου όρου.

Δείξις

Έστω πρώτον η αναλογία αύξουσα, οίον 4, 7, 10. και επί ο τρίτος όρος 10 εκ του δευτέρου 7 και της διαφοράς 3 σύγκειται, είτουν εκ του πρώτου 4 και του διπλασίου της διαφοράς, τουτέστιν 6. ο γαρ δεύτερος, ο πρώτος έστιν συν τη διαφορά. (κατά το α΄ θεώρημα) το άρα του πρώτου και του τρίτου άθροισμα, είτουν το $4+10=4+4+6$, δις τον τε πρώτον και την διαφοράν περιέχει, ήτοι εκ του διπλασίου τούτου πρώτου και της διαφοράς σύγκειται. αλλ΄ ο δεύτερος ίσος τω πρώτω συν τη διαφορά ως είρηται. το του πρώτου άρα και του τρίτου άθροισμα διπλάσιον του δευτέρου.

Ακολουθούν τέσσερα προβλήματα τα οποία αφορούν στην εύρεση του αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου και του τέταρτου αριθμητικού ή γεωμετρικού αναλόγου.

Πρόβλημα Α΄: Δύο αριθμών δοθέντων, οίον, των 9 και 13, μέσον αριθμητικώς ανάλογον ευρείν.

Πρόβλημα Β΄: Τριών αριθμών δοθέντων, οίον, του 8, 5, 9, τέταρτον αριθμητικώς ανάλογον ευρείν.

Πρόβλημα Γ΄: Δύο αριθμών δοθέντων, οίον των 1 και 9 μέσον γεωμετρικώς ανάλογον ευρείν.

Πρόβλημα Δ΄: Τριών αριθμών δοθέντων, οίον των 2, 7, 12, τέταρτον γεωμετρικώς ανάλογον προσευρείν.

Ενδεικτικά αναφέρουμε την λύση του προβλήματος Β΄

Πρόβλημα Β΄

Τριών αριθμών δοθέντων, οίον, του 8, 5, 9, τέταρτον αριθμητικώς ανάλογον ευρείν.

Πρακτέα

Τον δεύτερον και τρίτον, είτουν τον 5 και 9, συνάψας, και από του αθροίσματος αυτών του 14 τον πρώτον τον 8 αφελών, τον ζητούμενον τέταρτον ευρήσεις. ός έστι το λοιπόν το εκ της τοιάς δε προκύπτον αφαιρέσεως, είτουν ο 6

Το βιβλίο Δ΄ της Αριθμητικής ολοκληρώνεται με τους Λογάριθμους.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο ορισμός του λογαρίθμου: «**Λογάριθμος** έστιν ο αριθμός ο του διπλασίου, ή τριπλασίου, ή οπωσούν πολλαπλασίου λόγου εμφαντικός»

Μετά τα σχόλια και τις συνέπειες που αναφέρονται στον ορισμό του λογαρίθμου, ακολουθούν δύο θεωρήματα με τις αποδείξεις τους που αφορούν στις ιδιότητες των λογαρίθμων. δηλαδή στον λογάριθμο του γινομένου και στον λογάριθμο του πηλίκου δύο αριθμών.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει «**Η του ευρίσκειν λογαρίθμους μέθοδος**», οι σημειώσεις που ακολουθούν την μέθοδο αυτή καθώς και τα προβλήματα στα οποία εφαρμόζεται:

Πρόβλημα Ε΄: του δοθέντος νόθου κλάσματος $9/5$ τον Λογάριθμον ευρείν.

Πρόβλημα ΣΤ΄: τριών αριθμών δοθέντων των 4, 68, 3, τέταρτον γεωμετρικώς ανάλογον δια των Λογαρίθμων ευρείν.

Στο πέμπτο και τελευταίο βιβλίο περιγράφονται διάφοροι μέθοδοι της Αριθμητικής (μέθοδος των τριών, των πέντε, της εταιρίας, της ψευδούς υποθέσεως) και δίνονται παραδείγματα για την κατανόησή τους.

BIBAION Ε΄

Περί διαφόρων μεθόδων, ου μόνον ταις επιστήμαις, αλλά και τοις την εμπορίαν μετιούσι πάνυ χρησίμων

Περί της των Τριών Μεθόδου

Μέθοδος των τριών εστίν ο Κανών, δι ου τριών δοθέντων όρων, την οποιανδήποτε εμφανιόντων ποσότητα, ο τέταρτος ο γεωμετρικώς ανάλογος ευρίσκεται.

Ο ορισμός της μεθόδου των τριών, η οποία, σύμφωνα με τον συγγραφέα, «η βάσις εστί των λοιπών μεθόδων», ερμηνεύεται και σχολιάζεται με συγκεκριμένο παράδειγμα:

«Εκέρδισέ τις χρυσά νομίσματα 350, μέτρα σίτου 600 πωλήσας, ζητεί δε ειδέναι πόσα των αυτών κερδίσει νομισμάτων, 7000 πωλήσας.»

Στην συνέχεια λύνονται πέντε (5) προβλήματα που αφορούν στις παραπάνω μεθόδους:

Μέθοδος των τριών

Πρόβλημα Α΄: πωλήσας τις μέτρα κριθής 50, εκτήσατο νομίσματα 350, ζητεί δε πόσα νομίσματα κτήσεται, μέτρα κριθής πωλήσας 460.

Πρόβλημα Β΄: Ιμάτιόν τις έχων εξ 8 συγκεκριμένον πηχών, ων εκάστου το πλάτος $2/4$ πήχεως, υποστεγάσαι εν αυτώ βούλεται οθόνην, πλάτος έχουσαν ίσον πήχει, ζητεί ουν πόσοι πήχεις οθόνης εισίν αναγκαίοι.

Μέθοδος της εταιρείας

Πρόβλημα: Εταιρείαν εμπορικην τινών ποιησάντων, ο μεν κατέβαλε νομίσματα 1600, ο δε 1450, ο δε 1500, εκέρδησαν δε 2460. Ζητείται δε πόσον δη έκαστον των τριών του κέρδους λαβείν μέρος.

Μέθοδος των πέντε

Πρόβλημα : Οικοδόμοι 4 εν ημέραις 7 τείχος ωκοδόμησαν ποδών 252. ζητείται ουν πόσους πόδας τείχους οικοδομήσουσιν οικοδόμοι 10 εν ημέραις 13

Περί της μεθόδου της ψευδούς υποθέσεως

Πρόβλημα: Κετέλευτέ τις τοις τρισίν υιοίς και κληρονόμους αυτού χρυσών χιλιάδας επτά, εντειλάμενος τον μεν πρώτον των υιών αυτού λαβείν τριπλάσιον του δευτέρου, τον δε δεύτερον διπλάσιον του τρίτου. ζητείται ουν πόσον έκαστον δει λαβείν

Ενδεικτικά θα αναφέρουμε την λύση του τελευταίου προβλήματος

Πρακτέα

Κείσθω τον μεν πρώτον των αδελφών δειν λαβείν 6. τούτου ουν κεμένου, δήλον, ότι ο μεν δεύτερος 2, ο δε τρίτος 1 λήψεται. τους τρεις τούτους υποθετικούς αριθμούς σύναψον, και κληθείσης της μεν μερίδος του πρώτου, χ , της δε του δευτέρου, ψ , της δε του τρίτου, z , γεγονέντω, ως $9 : 6 :: 7000 : \chi$, και ως $9 : 2 :: 7000 : \psi$, και ως $9 : 1 :: 7000 : z$. λέγω δη ότι οι χ , ψ , z εισίν οι ζητούμενοι. και έστιν ο μεν $\chi = 4666 + 2/3$, ο δε $\psi = 1555 + 5/9$, ο δε $z = 777 + 7/9$.

Δείξις

Δήλον εκ της υποθέσεως, ότι όν λόγον έχει το άθροισμα των εξ' υποθέσεως ληφθέντων αριθμών, είτουν ο ψ , προς ήν μερίδα υποθετικώς λαμβάνει ο πρώτος, είτουν προς τον 6, τον αυτόν έχει λόγον όλος ο των χρυσών αριθμός, είτουν ο 7000, προς την μερίδα, ήν αληθώς λαβείν δει τον πρώτον, τουτέστι προς το χ . δια τον αυτόν λόγον αληθής και η δευτέρα και η τρίτη αναλογία. εξ' ού δήλον το προκείμενον.

Σημείωσις Α

Εάν πλείονα ώσι τα ζητούμενα, ισαρίθμους τοις ζητουμένοις τω ειρημένω τρόπω συστήσας τας αναλογίας, ευρήσεις τα ζητούμενα.

Σημείωσις Β

Εάν τους ευρεθέντας αριθμούς, οίον τον $4666 + 2/3$, αι τον $1555 + 5/9$, και τον $777 + 7/9$ συνάψας, εύρης το τούτων άθροισμα ίσον τω διαιρεθέντι αριθμώ, είτουν τα 7000, αληθείς έσονται οι ευρεθέντες. ωσαύτως αληθείς έσονται, εάν ως $4666 + 2/3 : 1555 + 5/9 :: 6 : 2 : 1$, και $4666 + 2/3 : 777 + 7/9 :: 6 : 1$. και $1555 + 5/9 : 777 + 7/9 :: 2 : 1$

4.3 ΤΟΜΟΣ 2^{ος}**ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ**

περιέχων

ΤΑ ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ,

την

ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΝ

και

ΤΑΣ ΤΟΥ ΚΩΝΟΥ ΤΟΜΑΣ

4.3.1 Τα «Αρχιμήδεια θεωρήματα».

Ο δεύτερος τόμος του έργου «Στοιχεία Μαθηματικών» του Νικηφόρου Θεοτόκη αποτελείται από 277 σελίδες και αρχίζει με τα θεωρήματα του Αρχιμήδη, ή για να γίνουμε σαφέστεροι, έχει γίνει μία επιλογή δώδεκα (12) προτάσεων από το έργο του Αρχιμήδη.

Έντεκα (11) προτάσεις από το βιβλίο «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» και μία (1) από το βιβλίο «Κύκλου μέτρησις», παρουσιάζονται μαζί με τα αντίστοιχα σχόλια, λήμματα και πορίσματα.

Για τις προτάσεις αυτές, παραπέμπουμε στην μετάφραση που έγινε από τον Ε. Σταμάτη, της β' έκδοσης (1910) «ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΠΑΝΤΑ» του Δανού ελληνιστή και ιστορικού των επιστημών J. L. Heiberg.

Συγκεκριμένα, τα θεωρήματα του Αρχιμήδη τα οποία παρουσιάζονται στο έργο του Θεοτόκη, διατυπώνονται ακριβώς το ίδιο με εκείνα στα «Απαντα» και είναι:

- Το Α', το θεώρημα α' του βιβλίου «Κύκλου Μέτρησις»⁵⁰⁴, του έργου «ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΠΑΝΤΑ» (Α.Α.)
- Το Β', το θεώρημα γ' του βιβλίου «Κύκλου Μέτρησις»⁵⁰⁵ του έργου Α.Α.
- Το Γ', το θεώρημα ιγ' του 1^{ου} βιβλίου «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου»⁵⁰⁶ του έργου Α.Α.
- Το Δ', το θεώρημα η' του 1^{ου} βιβλίου «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου»⁵⁰⁷ του έργου Α.Α.
- Το Ε', το θεώρημα ιδ' του 1^{ου} βιβλίου «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου»⁵⁰⁸ του έργου Α.Α.
- το ΣΤ', το θεώρημα ιε' του 1^{ου} βιβλίου «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου»⁵⁰⁹ του έργου Α.Α.
- το Ζ', το θεώρημα θ' του 1^{ου} βιβλίου «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου»⁵¹⁰ του έργου Α.Α.
- το Η', το θεώρημα κα' του 1^{ου} βιβλίου «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου»⁵¹¹ του έργου Α.Α.
- το Θ, το θεώρημα κδ' του 1^{ου} βιβλίου «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου»⁵¹² του έργου Α.Α.
- το Ι, το θεώρημα λγ' του 1^{ου} βιβλίου «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου»⁵¹³ του έργου Α.Α.
- το ΙΑ', το θεώρημα λδ' του 1^{ου} βιβλίου «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου»⁵¹⁴ του έργου Α.Α.
- το ΙΒ', το θεώρημα μδ' του 1^{ου} βιβλίου «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου»⁵¹⁵ του έργου Α.Α.

⁵⁰⁴ Ε. Σ. Σταμάτης, ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΠΑΝΤΑ, έκδοσις Τ.Ε.Ε., Αθήνα 1970, σελ. 218

⁵⁰⁵ ο.α. σελ. 222

⁵⁰⁶ ο.α. σελ. 48

⁵⁰⁷ ο.α. σελ. 24

⁵⁰⁸ ο.α. σελ. 57

⁵⁰⁹ ο.α. σελ. 62

⁵¹⁰ ο.α. σελ. 64

⁵¹¹ ο.α. σελ. 80

⁵¹² ο.α. σελ. 88

⁵¹³ ο.α. σελ. 114

⁵¹⁴ ο.α. σελ. 118

⁵¹⁵ ο.α. σελ. 154

- το ΙΓ', το θεώρημα β' του 2^{ου} βιβλίου «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου»⁵¹⁶ του έργου Α.Α.

4.3.2 «Επίπεδος τριγωνομετρία».

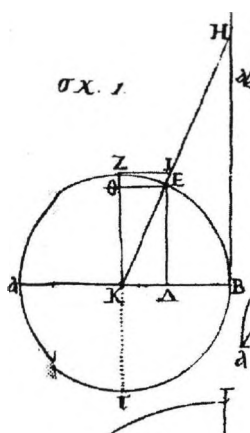
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΡΩΤΟΥ

Μετά τα θεωρήματα του Αρχιμήδη, ακολουθεί η επίπεδη Τριγωνομετρία, η οποία αποτελείται από δύο βιβλία.

Το πρώτο, αρχίζει με τον ορισμό: «**Τριγωνομετρία επίπεδος** εστίν επιστημονική μέθοδος του το μέτρον των πλευρών και των γωνιών των ευθυγράμμων ευρίσκειν τριγώνων».

Στην συνέχεια ορίζονται τα:

ορθόν ημίτονον, συνημίτονον, πλάγιον ημίτονον ή παρημίτονον, ολόκληρον ημίτονον ή ολοημίτονον, εφαπτομένη, συνεφαπτομένη, συνδιατέμνουσα, χορδή.



ΕΔ: ορθό ημίτονο
ΕΒ: συνημίτονο
ΒΔ: πλάγιο ημίτονο ή παρημίτονο
ΚΒ: ολόκληρο ημίτονο ή ολοημίτονο
ΒΗ: εφαπτομένη
ΚΗ: τέμνουσα
ΖΙ: συνεφαπτομένη
ΚΙ: συνδιατέμνουσα
ΑΓ: χορδή

Στην σημείωση μετά τους ορισμούς, ο συγγραφέας, μας δίνει κάποια ιστορικά στοιχεία για την εύρεση των τριγωνομετρικών αριθμών.

Μεταξύ των άλλων γράφει: «Πρώτοι δε των ημιτόνων ευρεταί ο Ύπαρχος, και ο Μενέλαος. τα δ' υπ' αυτών ευρεθέντα συνέτεμέ τε και απήρτισε Πτολεμαίος ο Κλαύδιος, επί το τελειότερον δε προήγαγεν Ρεγιομοντάνος, και μετ' αυτών άλλοι, πίνακας κατασκευάσαντες, τα Ημίτονα, τας Εφαπτομένας και τας Τεμνούσας περιέχοντας, δι αριθμών εμφανιόμενας, ου μην αλλά και τους τούτων λογαρίθμους.»

Στο 1^ο βιβλίο της τριγωνομετρίας, περιέχονται τέσσερα (4) θεωρήματα και δέκα (10) προβλήματα.

⁵¹⁶ ο. α. σελ 166

Τα θεωρήματα αναφέρονται σε σχέσεις τριγωνομετρικών αριθμών τόξων και γωνιών με μήκη χορδών και πλευρών τριγώνου, (π. χ. ο νόμος των ημιτόνων), και τα προβλήματα, στον υπολογισμό τριγωνομετρικών αριθμών τόξων και γωνιών.

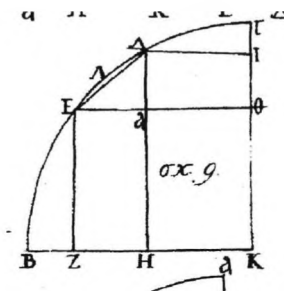
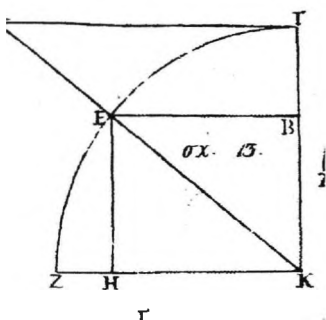
Ενδεικτικά θα αναφέρουμε δύο από τα προβλήματα:

Πρόβλημα ΣΤ'

Δοθέντος του Ημιτόνου ΔΗ του 60° μοιρών τόξου ΔΒ συν τω Ημιτόνω ΕΖ του 36° μοιρών τόξου ΕΒ, το Ημίτονον ευρεῖν του 12° μοιρών τόξου. (σχ. 9)

Πρόβλημα Γ'

Δοθέντος του τε Ημιτόνου ΕΒ και του συνημιτόνου ΕΗ του οποιουσύν τόξου ΓΕ, τήντε εφαπτομένην αυτού ΓΔ και την τέμνουσαν ΚΔ ευρεῖν. (πιν. Β' σχ. 13)



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Περί επίλυσεως των περί τα τρίγωνα
προβλημάτων.

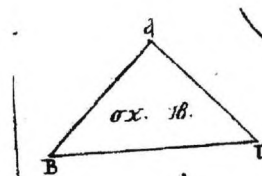
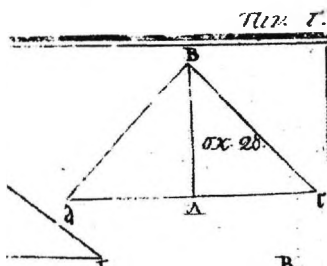
Το δεύτερο βιβλίο της τριγωνομετρίας περιέχει δέκα (10) προβλήματα επίλυσης τριγώνων. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα:

Πρόβλημα Α'

Δοθειςάν δύο γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΑΓ, της ορθής δηλαδή ΒΑΓ, και της οξείας ΑΒΓ, τον λόγον ευρεῖν, ὃν προς ἀλλήλας ἔχουσιν αἱ πλευραί. (σχ. 18)

Πρόβλημα Γ'

Δοθειςάν πασάν των του ΑΗΓ τριγώνου πλευρών, πάσας ευρεῖν τας του τριγώνου γωνίας. (σχ. 28)



Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το κεφάλαιο στο τέλος της τριγωνομετρίας

Χρήσις των προεκτεθέντων Θεωρημάτων τε και Προβλημάτων

Στο κεφάλαιο αυτό, με πέντε προβλήματα, υποδεικνύεται ο τρόπος εφαρμογής των τριγωνομετρικών αριθμών και της επίλυσης τριγώνων, στην μέτρηση των αποστάσεων.

Οι τρόποι μέτρησης οι οποίοι προτείνονται, διευκολύνουν σημαντικά τον υπολογισμό των μηκών μεταξύ σημείων, ιδιαίτερα όταν τα σημεία αυτά είναι απρόσιτα.

Τα προβλήματα αυτά είναι:

A': Δύω τόπων, των A και B, των απ' τινος τρίτου Γ προσιτών ευρείν το απόστημα AB. σχ. 30

B': Του προσιτού πύργου BΓ το ύψος ευρείν. σχ. 31

Γ': Το απόστημα AB ευρείν δύω τόπων των A και B, ών ο έτερος μόνον A προσιτός. σχ. 32

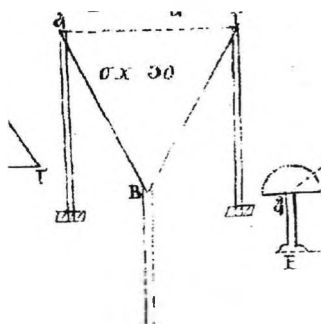
Δ': Ευρείν το AB απόστημα των A κα B απροσίτων τόπων. σχ. 33

Ε': Του απροσίτου πύργου το ύψος ευρείν. σχ. 34

Ενδεικτικά θα αναφέρουμε την λύση του προβλήματος A'.

Πρακτέον

Εν εκάστω των A, B, Γ τόπων βακτηρίαν πήξας, και λεπτά επιζεύξας σχοινία τα ΓΒ, ΓΑ, και όσον οιόντε αυτά εντείνας, ίνα μη επικαμπή, αλλ' ευθέα ώσι, δια μεν του καλουμένου Γωνιωμέτρου την γωνίαν Γ, δια δε του τυχόντος μέτρου τα σχοινία καταμέτρησον. και επεί του ABΓ τριγώνου γνωσταί εισίν αι δύο πλευραί ΓΒ, ΓΑ, και η υπ' αυτών περιεχομένη γωνία ΑΓΒ, γνωστή έσται και η λουπή του τριγώνου πλευρά ΑΒ, ήτις εστί το ζητούμενον απόστημα.



4.3.3 Κωνικών τομών συμπτώματα τα κυριώτερα.

ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΑ ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ

Ο δεύτερος τόμος «κλείνει» με τα «Κωνικά» του Απολλωνίου.

ΟΡΙΣΜΟΙ

Οι είκοσι πέντε (25) ορισμοί που δίνονται στην αρχή του κεφαλαίου αφορούν στην κωνική επιφάνεια γενικά, καθώς και στην παραβολή, έλλειψη και υπερβολή ειδικότερα.

Το υπόλοιπο μέρος του κεφαλαίου, ο Θεοτόκης, χωρίζει σε τρία τμήματα:

Τμήμα πρώτον: Περί των της Παραβολής συμπτωμάτων.

Τμήμα δεύτερον: Περί των της Υπερβολής συμπτωμάτων.

Τμήμα τρίτον: Περί των της Ελλείψεως συμπτωμάτων

Για τις δέκα (10) προτάσεις του πρώτου τμήματος οι οποίες αφορούν στην παραβολή, τις είκοσι (20) του δεύτερου τμήματος που αφορούν στην υπερβολή και τις δέκα (10) του τρίτου που αφορούν στην έλλειψη, ο Θεοτόκης, παραπέμπει στο έργο «Κωνικά» του Απολλωνίου.

Στην συνέχεια θα αναφερθούμε σε κάποια σημεία του κειμένου των «κωνικών τομών» τα οποία παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον:

1). Στην σημείωση, (σελ. 198), η οποία αναφέρει ιδιότητα της Υπερβολής άγνωστη στους αρχαίους Έλληνες: «Άγνωστον τοις Αρχαίοις τούτο της Υπερβολής το ιδίωμα».

Η άγνωστη ιδιότητα, είναι ότι, το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ μιας ορθογώνιας υπερβολής και των ασύμπτωτων αυτής, είναι άπειρο. Σε παραπομπή του ο Θεοτόκης αποδίδει την εύρεση της ιδιότητας αυτής, στον Ιησουΐτη Γρηγόριο⁵¹⁷. «διαλαμβάνει δε περί αυτού εν τω εαυτού πονήματι τω καλουμένω, *opus Geometricum quadraturae circulee, et sectionum conii*, και εκδοθέντι εν Αντούρα έτος 1647»⁵¹⁸

2). Στην σημείωση της σελίδας 208, ο Θεοτόκης γράφει: «Όντως θαυμαστόν τούτο της Υπερβολής το ιδίωμα» δηλαδή, ότι ο όγκος εκ περιστροφής της ορθογώνιας υπερβολής είναι πεπερασμένος.

«και αναγκάζει μεν η δείξις πείθεσθαι, εναντίον δ' ουν όμως δοκεί τω λόγω, το ίσον είναι το απειρόμηκες στερεόν τω πεπερασμένω κυλινδρω. ου μόνον δε την υπερβολήν, αλλά και άλλας, δια του καλουμένου Ολοκληρίας λογισμού, εύρον οι Γεωμέτραι καμπύλας, εν αίς το μεταξύ αυτών τε και των Ασυμπτώτων περιεχόμενον επ' άπειρον εκτεινόμενον χωρίον, ίσον εστί χωρίω πεπερατωμένω, και το εκ του τοιούτου απείρου

⁵¹⁷ Πρόκειται για τον σημαντικό αστρονόμο και μαθηματικό Gregorius a St. Vincento (1584-1667).

⁵¹⁸ Στο βιβλίο αυτό που εκδόθηκε στην Αμβέρσα το 1647, ο Gregoire Saint Vincent ασχολούμενος με το πρόβλημα της μέσης αναλόγου, μελετά τις κωνικές τομές του Απολλωνίου.

στερεόν ίσον στερεώ πεπερασμένω.»⁵¹⁹

Και στο σημείο αυτό, ο Θεοτόκης, αναφέρεται στην δύναμη της απόδειξης, με την οποία πείθονται και οι άπιστοι σε κάποιες περιπτώσεις που η λογική εναντιώνεται στην πραγματικότητα, όπως στην παραπάνω περίπτωση κατά την οποία, «το επ' άπειρον εκτεινόμενον χωρίον, ίσον εστί χωρίω πεπερατωμένω».

Συγκεκριμένα, ο Θεοτόκης γράφει: «ακαντεύθεν δε εξελέγχονται οι άπιστοι, οι των θείων της πίστεως Μυστηρίων ολιγορούντες, δια το δοκείν εναντιούσθαι τω λόγω, δια τον υπέρ κατάληψιν αυτών λόγον. ιδού γαρ ένα, εναντία μεν δοκούντα τω λόγω, δια δε της απταιστου αποδεικνύμενα γεωμετρικής επιστήμης».

3). Στην παράγραφο «Περί της χρήσεως της Παραβολής» στην οποία αναφέρονται δέκα περιπτώσεις που εφαρμόζονται οι ιδιότητες της υπερβολής.

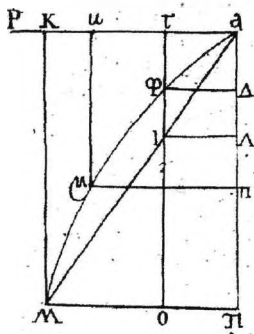
Α). Τα διαστήματα τα οποία διανύονται από τα σώματα κατά την ελεύθερη πτώση, είναι ανάλογα των τετραγώνων των ταχυτήτων τις οποίες αποκτούν και των τετραγώνων των χρόνων οι οποίοι απαιτούνται για να διανύσουν τα σώματα τα διαστήματα αυτά.

Δηλαδή, (σχ. 3), $ΑΔ:Απ::ΔΦ^2:πμ^2$. για παράδειγμα, εάν $ΑΔ=1$, $Απ=3$, $ΑΠ=5$, «το επί τα κάτω φερόμενον σώμα επί μεν το Δ ήρξαν, ταχύτητα έχει 1, και ο καταναλωθείς δε χρόνος εν τη φορά, 1 εστί. επί δε το π, 9. επί δε το Π καταντήσαν, 25.»

Β). Κάθε σώμα, είτε ρίπτεται πλάγια είτε οριζόντια, κατά την κίνησή του, διαγράφει καμπύλη γραμμή. όπως το σώμα το οποίο ρίπτεται με φορά ΑΡ, αυτό δεν κινείται ούτε κατά την ευθεία ΑΡ ούτε κατά την ΑΠ αλλά διαγράφει την καμπύλη ΑΜ, η οποία είναι παραβολή. Και όπως έχει αποδειχθεί, τα τετράγωνα των τεταγμένων των σημείων της καμπύλης την οποία γράφει το ριπτόμενο σώμα, έχουν λόγο ίσο με τον λόγο των αποτεμνομένων από αυτά. ($ΑΔ:Απ::ΔΦ^2:πμ^2$), σχ. 3

Με την εφαρμογή της ιδιότητα αυτής και άλλων ιδιοτήτων της παραβολής, «πάντες ιδρυνται οι κανόνες της καλούμενης Σφαιρικής, είτουν της τέχνης του επί τον σκοπόν ευθύνειν τας εκ των πυροβόλων όπλων εξωθουμένας σφαίρας».

σχ. 3.



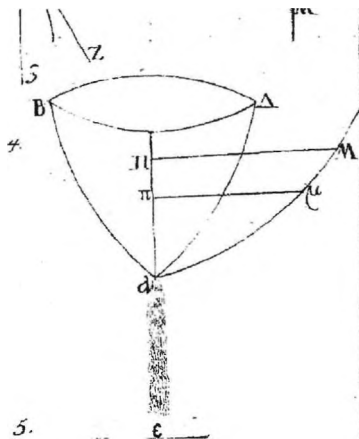
⁵¹⁹ Την εύρεση της ιδιότητας αυτής, ο Θεοτόκης, αποδίδει στον «εκ Φαέντζη Τορικέλλιο, τον του Γαλιλαίου ακροατήν, ο κατά το 1647 έτος τον βίον εκμετρήσας». Φυσικά αναφέρεται στον πολύ γνωστό φυσικό και μαθηματικό Evangelista Torricelli (1608-1647) που μεταξύ άλλων εργάστηκε και στον απειροστικό λογισμό. Βλ. Orera geometrica, Firenze 1644.

Γ). Οι ταχύτητες του «απότινος σκεύους εκβλύζοντος ρευστού υποδιπλασίου λόγον έχουσι, κατά τους υδροστατικούς κανόνας, ήπερ τα του ρευστού ύψη.»

Εάν για παράδειγμα, από την οπή Α (πιν. στ' σχ. 4) του σκεύους ΒΑΔ εκρεεί κάποιον ρευστό, η ταχύτητά του όταν αυτό έχει ύψος ΑΠ, προς την ταχύτητά του όταν έχει ύψος

Απ, δηλαδή ο λόγος ΠΜ:πμ είναι ίσος με $\frac{\sqrt{ΑΠ}}{\sqrt{Απ}}$ (οι τεταγμένες ΠΜ, πμ της παραβολής

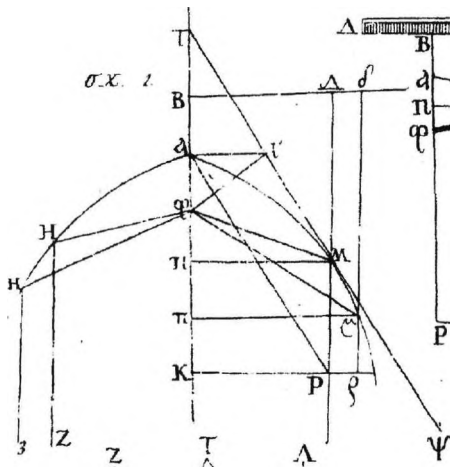
ΑΜ με με κορυφή το Α και διάμετρο το μέγιστο ύψος του ρευστού ΑΠ, δηλώνουν τις ταχύτητες του ρευστού όταν αυτό έχει ύψη ΑΠ και Απ αντίστοιχα)



Δ). Εάν μεταλλικά παραβολικά κάτοπτρα τεθούν απέναντι στον ήλιο, τότε, όσες ηλιακές ακτίνες προσπίπτουν σε αυτά, όπως προσπίπτουν οι ακτίνες ΡΜ, ρμ, ΖΗ, ζη στην παραβολή ΑΚ παραλλήλως προς τον άξονα της (σχ. 1), ανακλώμενες συγκεντρώνονται στο σημείο Φ, το οποίο ονομάστηκε εστία, «επει η επί το Φ των ακτίνων σύμπτωσις τοσούτον την της θερμότητος επιτείνει δύναμιν, ώστε τα εν αυτώ τιθέμενα σώματα φλέγεσθαι τε και καταπίμπρασθαι...»

Ε). Για τον ίδιο λόγο, εάν στην Εστία Φ, «λαμπάς τεθεί», οι εκπεμπόμενες από αυτήν και στο παραβολικό κάτοπτρο προσπίπτουσες φωτεινές ακτίνες, όπως είναι οι ΦΜ, Φμ, ΦΗ, Φη, ανακλώνται παραλλήλως προς τον άξονα ΑΚ, όπως είναι οι ΜΡ, μρ, ΗΖ, ηζ και έτσι, «το της λαμπάδος φως απαραμειώτον επιμηκίστοις παρατείναι διαστήμασιν».

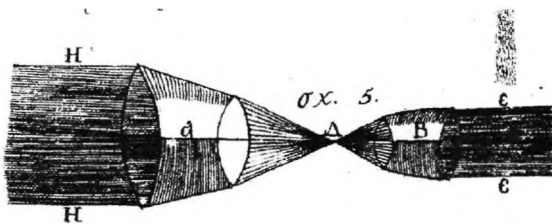
Ακόμα, επειδή οι ακτίνες του φωτός, μετά την ανάκλαση «ουκ απ' αλλήλων αφιστάμεναι, αλλά παράλληλοι τω άξονι και αλλήλαις φερόμεναι επεκτείνονται, την αυτήν πυκνότητα πανταχού διατηρείσαι, ουδεμίαν της εαυτών πάσχουσι δυνάμεως μειώσιν»



ΣΤ). Όχι όμως μόνο το φως, αλλά, «και η καυστική δύναμις δια των παραβολικών ελεγκτείνεται κατόπτρων».

Διότι εάν έχουμε δύο παραβολικούς σίφωνες Α και Β, (πιν. στ', σχ.5), εκ των οποίων ο Α είναι πολύ μεγαλύτερος του Β, με τέτοιο τρόπο τοποθετημένους, ώστε οι άξονές τους να βρίσκονται επ' ευθείας και οι εστίες τους να συμπίπτουν σε σημείο έξω από αυτά, έστω στο Δ, τότε: οι ηλιακές ακτίνες Η οι οποίες προσπίπτουν προς τον μεγαλύτερο παραλλήλως προς τον άξονα ΑΔ, ανακλώμενες, συγκεντρώνονται στο Δ. Από εκεί, σαν λαμπάδα στην εστία Δ του μικρού, όπως στην προηγούμενη περίπτωση, οι ακτίνες, προσπίπτοντας στο μικρό σίφωνα ανακλώνται παραλλήλως προς τον άξονά του ΔΒ, ανάμεσα στα Ε, Ε μέρη.

Εξ' αιτίας δε «το πάνυ πεπυκνωμένως εις τον Β σίφωνα εισέναι, και μη απ' αλλήλων αφισταμένας, αλλά παραλλήλους εξέναι την φλεκτικήν έχουσι δύναμιν».⁵²⁰



«δύναμιν» σε
κάτοπτρο, το

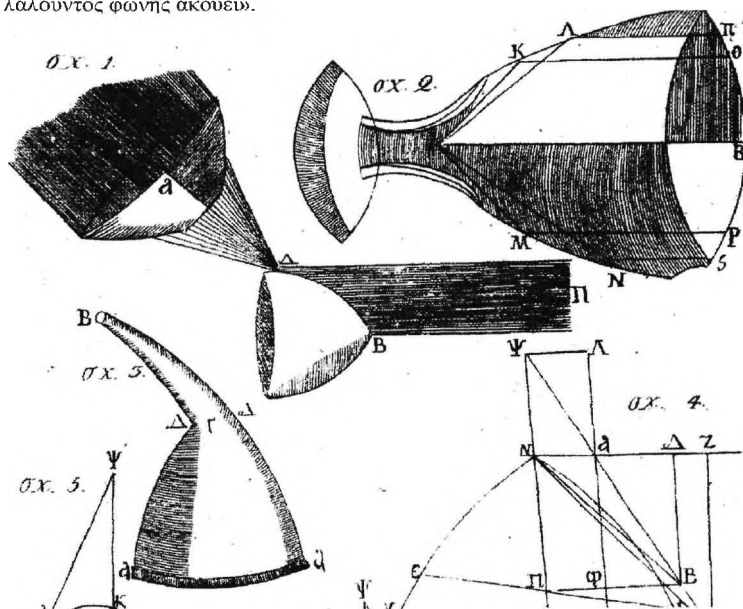
⁵²⁰ Ο Θεοτόκης στην σημείωση της σελ. 126 γράφει σχετικά με την ιδιότητα αυτή της παραβολής: «Πιθανόν ουν έφικεν το πρά τινων καθιστοριθέν αξιοπίστων. αμέλειτοι τον μεν Αρχιμήδην τας των Ρωμαίων ναύς εγγύς της Συρακούσης, τον δε Πρόκλον τον του Ουταλιανού στόλον πλησίον του Βυζαντίου κατακαύσαι. καν γαρ εν τη Εστία, ή αλλήλαις συμβάλουσιν αι ακτίνες, την μεγίστην έχωσι καταφλεκτικήν δύναμιν, και εν ταις μετά την ανάκλασιν μέντοιγε παραλλήλοις τηλικαύτη ενυπάρχει ισχύς, ώστε καταφλέγειν μεν τα έμψυχα, αναλύειν δε τα άψυχα, και των στερεών εκείνα, ων τα μέρη ου σφόδρα εγκρατώς συνέχονται»

ΔΒ, μεταξύ του παραβολικού σίφωνα Α (σχ. 1) και της εστίας του «ώστε ταυτίζεσθαι με τας εκατέρων εστίας, περιάγεσθαι δε περί την κοινήν εστία, ανάγεσθαι τε και κατάγεσθαι. Ούτω γαρ όπου αν βούλη την πυρώδη διευθυθείς δύναμιν»

Η': «Και σάλπιγγας δε παραβολικάς κατασκευάζουσι, Στεντορίους καλουμένους, δι' ων λαν παρεκτείνεται ο Ήχος. τιθεμένου γαρ του στόματος εν τη Εστία Γ (σχ. 2) της ΝΜΚΛ παραβολικής σάλπιγγος, αι φωνητικάί ακτίνες (είτουν τα υπό του στόματος κινούμενά τε και κυματιζόμενα του αέρος μόρια) ΓΚ, ΓΛ, ΓΜ, ΓΝ, αι προς τα ζτης σάλπιγγος πλευράς προσπίπτουσαι, παράλληλοι μετά την ανάκλασιν τω Άξονι ΓΒ φέρονται, οίον αι ΚΟ, ΛΠ, ΜΡ, ΝΣ, ένθεντοι και μη απ' αλλήλων αφιστάμεναι, μηδέ διασκεδαζόμεναι, αλλά εγγρύς αλλήλων και πεπυκνωμένοι προϊούσαι, μεγάλω παραπέμπουσι την της φωνής τάσιν αποστήματι.»

Θ': Συμβαίνει βέβαια και το αντίστροφο. Εάν κάποιος φωνάζει απέναντι προς την σάλπιγγα, οι φωνητικές αυτού ακτίνες οι παράλληλες προς τον άξονα της σάλπιγγας και προσπίπτουσες πάνω στις πλευρές της, όπως οι ΠΛ, ΟΚ, ΣΝ, ΡΜ, ανακλώμενες, συμπίπτουν στο Γ, «γεγονωτέραν την φωνήν καθιστώσιν».

Ι': Όπως στους μύωπες τους πρεσβύωπες και στους γέροντες είναι χρήσιμα τα «κατασκευαζόμενα Διοπτήρια», έτσι λοιπόν είναι και «τοις υποκόφους τα Ακουτιστήρια». Το ακουστικό αποτελείται από από τον κερατοειδή παραβολικό σίφωνα ΔΑΔΔ, (σχ. 3) ο οποίος εΐαι πλατύτερος κατά τα ΑΑ, παρά κατά τα ΔΔ μέρη και του οποίου η εστία είναι το Γ. προσαρμόζεται δε σε αυτόν το «κεκυρτωμένον σιφώνιον ΒΔΔ» το οποίο είναι πολύ στενότερο από αυτόν και έχει στο Β μία πολύ μικρή οπή. Το μεν άκρο Β του σιφωνίου τοποθετείται «εν τω της ακοής πόρω», ο δε σίφων απέναντι από τον ομιλούντα. Και επειδή οι φωνητικές ακτίνες του ομιλούντος οι παράλληλες προς τον άξονα προσπίπτουν στις πλευρές του σίφωνα και ανακλώμενες συγκεντρώνονται στην εστία Γ και από εκεί «πεπυκνωμένοι» διερχόμενες δια του σιφωνίου ΔΔΒ «εις τον της ακοής εισδύουσι πόρον, καθαρώτερον ο υποκόφους της του λαλούντος φωνής ακούειν».



4). Στις παραγράφους:

- Περί της εν τοις Οπτικοίς χρήσεως της Υπερβολής.
- Περί της εν τοις Οπτικοίς χρήσεως των της Ελλείψεως συμπτωμάτων.

Στις παραγράφους αυτές, με ανάλογο τρόπο όπως και στην παραβολή, περιγράφεται η εφαρμογή των ιδιοτήτων της έλλειψης και της υπερβολής στην Οπτική.⁵²¹

4.4 Τα «περί την Άλγεβραν».

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ Περιέχων τα περί την ΑΛΓΕΒΡΑΝ

Ο τρίτος τόμος του έργου «Στοιχεία Μαθηματικών» του Νικηφόρου Θεοτόκη, αποτελείται από 300 σελίδες και περιέχει δύο βιβλία. Το πρώτο, το οποίο αποτελείται από είκοσι πέντε κεφάλαια είναι το βιβλίο «της Άλγεβρας», και το δεύτερο, μέσα σε δέκα κεφάλαια παρουσιάζει ότι αφορά στα «της καλουμένης, των απείρων Μεθόδου».

ΒΙΒΛΙΟ ΠΡΩΤΟ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΕΦ. Α΄

Εν ώ οι ορισμοί

Το κεφάλαιο Α΄ περιέχει τους ορισμούς της Άλγεβρας με τα σχόλιά τους και την ερμηνεία των μαθηματικών συμβόλων τα οποία περιέχονται στο πρώτο βιβλίο του τρίτου τόμου του έργου «Στοιχεία Μαθηματικών».

Ενδεικτικά αναφέρουμε τους τρεις πρώτους ορισμούς όπως δίνονται από τον Θεοτόκη.

ΟΡΙΣΜΟΣ Α΄: Η καλουμένη **Άλγεβρα**, ή **Ανάλυσις**, μέθοδος εστί του, δοθέντων τινών ευρεῖν τα ζητούμενα.

Στο σχόλιο του ορισμού διακρίνει σε δύο τους δύο κλάδους της Ανάλυσης, εκείνον ο οποίος « περί ορισμένων διαλαμβάνει ποσοτήτων» που ονομάζεται **Άλγεβρα** ή **Αριθμητική Καρτεσιανή** και εκείνον που περιλαμβάνει ότι αφορά «περί απροσδιορίστων και απειροελαχίστων» ο οποίος ονομάζεται **Λογισμός ολοκληρωτικός**, ή **Λογισμός Διαφορικός** ή και **Άλγεβρα Νευτωνιανή**.⁵²²

⁵²¹ Στις μέρες μας στο εκπληκτικό τεχνολογικό μουσείο που ιδρύθηκε στο Παρίσι (Porte ole la vilette) υπάρχουν όλες αυτές οι εφαρμογές.

⁵²² Προφανής απόηχος από το έργο του Νεύτωνος Arithmetica Universalis.

ΟΡΙΣΜΟΣ Β΄: Αριθμός, ποσότης, μέγεθος άρρητον έστιν, ή άλογον, το δια μηδενός των της αριθμητικής χαρακτήρων εμφανιόμενον.

Στα σχόλια του ορισμού δίνει ως παραδείγματα άρρητων αριθμών, την τετραγωνική ρίζα του 8, την κυβική ρίζα του 14 και την τετραγωνοτετράγωνο ρίζα του 9.

Όρος Α΄

Εμφανιέτω παν μέγεθος, αριθμόν και ποσότητα τα εικοσιτέσσερα γράμματα.

Στην σημείωση του Α΄ όρου αναφέρει ό,τι συνιθίζεται, τις γνωστές ποσότητες να τις συμβολίζουμε με τα πρώτα γράμματα της αλφαβήτου α, β, γ, δ, ε, κ.τ.λ. ενώ τις άγνωστες και απροσδιόριστες με τα τελευταία, φ, χ, ψ, ζ, ω.

ΟΡΙΣΜΟΣ Γ΄: Καταφατικόν μεν ή θετικόν μέγεθος το του ουδενός μείζον. Αποφατικόν δε ή αποθετικόν το του ουδενός έλαττον.

Όρος Β΄

Προτιθέσθω εκάστω των γραμμάτων έν των δε των σημείων +, -, ±

Στα σχόλια του όρου, εξηγεί τι δηλώνει καθένα από τα παραπάνω σύμβολα όταν βρίσκεται μπροστά από έναν αριθμό: «το μεν + καταφατικό είναι δηλοί το υπό των γραμμάτων εμφανιόμενον. Το δε -, αποφατικόν. Το δε ±, άγνοιαν του τι εστί το εμφανιόμενον.»

Όρος Γ΄

Το μεν = ισότητα εμφανιέτω. Το δε × και το . πολλαπλασιασμόν. το δε :, διαίρεσιν. Το δε, $\sqrt{\quad}$ ρίζαν, ονομαζομένην από του επ΄ αυτής τιθεμένου αριθμού. οίον από μεν του 2, τετραγωνικήν. από δε του 3, κυβικήν. από δε του 4, τετραγωνοτετραγωνικήν. Από δε του 5, τετραγωνοκυβικήν, και από των εφεξής αριθμών ωσαύτως. Καλείσθω δε ο τοιούτος αριθμός ονομαστής της ρίζης.

Στα σχόλια του όρου ερμηνεύει τι δηλώνουν τα σύμβολα =, +, -, :, σε μία αλγεβρική παράσταση: οίον το $\alpha = \beta$, δηλοί ότι το α ίσον εστί τω β. ωσαύτως το $\alpha + \beta = \gamma - \epsilon$, το α συν τω β ίσον τω γ, αφαιρεθέντος του ε, το $\alpha \times \beta$ το γινόμενον εκ του α και β, κ.τ.λ.

Στο κεφάλαιο Α΄ ορίζονται ακόμα οι ομοειδείς και ετεροειδείς γραμματικές εκθέσεις (όμοια και ανόμοια μονώνυμα), οι ομοειδείς ρίζες (ρίζες της ίδιας τάξης) η δύναμης αριθμού με εκθέτη θετικό, και ερμηνεύονται οι ιδιότητες του γινομένου και του πηλίκου δυνάμεων με την ίδια βάση.

Ερμηνεύονται ακόμα τα σύμβολα a^{-v} και a^{v^m} της δύναμης με εκθέτη αρνητικό και ρητό αντίστοιχα, ερμηνείες, οι οποίες συνοδεύονται με πολλά αριθμητικά παραδείγματα όπως γίνεται και σε όλα τα σχόλια των ορισμών.

Τα δύο θεωρήματα τα οποία περιέχει το βιβλίο Α΄, αφορούν στο πρόσημο του γινομένου και του πηλίκου δύο αριθμών.

Θεώρημα Α'

Το μεν εκ καταφατικών γραμμάτων γινόμενον καταφατικόν ἐστίν, ωσαύτως και το εξ' αποφατικών. το δε καταφατικού και αποφατικού, αποφατικόν». οίον το μεν εκ των +α και +β γινόμενον ἐστί το +αβ, ωσαύτως και το εκ των -α, και -β ἐστί το +αβ. το δε εκ των +α και -β, ή -α και +β, αποφατικόν, τουτέστι το -αβ.

Σαν συνέπειες του θεωρήματος αναφέρονται οι παρακάτω:

- το γινόμενο άρτιου πλήθους θετικών ή αρνητικών παραγόντων είναι θετικός αριθμός
- το γινόμενο περιττού πλήθους παραγόντων εάν αυτοί είναι θετικοί, είναι θετικός αριθμός. εάν αυτοί είναι αρνητικοί, είναι αρνητικός αριθμός.
- Δυνάμεις με άρτιο εκθέτη είναι θετικοί αριθμοί.

Θεώρημα Β'

Το μεν εκ της των καταφατικών γραμμάτων διαιρέσεως προκύπτουν πλήκρον, καταφατικόν ἐστίν. ωσαύτως και το εξ' αποφατικών. το δε εξ' ετέρου μεν καταφατικού, του ετέρου δε αποφατικού, αποφατικόν. οίον το μεν του +α: +α πλήκρον ἐστί το +1, ωσαύτως το του -α: -α ἐστί +1. το δε του +α: -α, το -1, ομοίως το του -α: +α, το -1.

Τα κεφάλαια Β', Γ', Δ', Ε' αναφέρονται στην πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση αντίστοιχα, μονωνύμων και πολυνύμων: «Περί προσθέσεως, αφαιρέσεως πολλαπλασιασμού και διαιρέσεως ολοκληρών γραμματικών εκθέσεων»

Το κεφάλαιο ΣΤ' αναφέρεται στις πράξεις κλασματικών αλγεβρικών παραστάσεων: «Περί προσθέσεως, αφαιρέσεως πολλαπλασιασμού και διαιρέσεως των κεκλασμένων γραμματικών εκθέσεων».

Το κεφάλαιο Ζ' περιέχει τα «Περί προσθέσεως, αφαιρέσεως, πολλαπλασιασμού, και διαιρέσεως των ριζών»

Στο κεφάλαιο αυτό με πολλά προβλήματα περιγράφονται οι πράξεις μεταξύ των ριζών ίσων ή διαφορετικών τάξεων.

Το κεφάλαιο Η' αναφέρεται στην πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση «ρητών και αρρήτων αλγεβρικών παραστάσεων: «των ολοκληρών εκθέσεων δια των κεκλασμένων, και των ριζών»

Το κεφάλαιο Θ' περιέχει τα «Περί της των ριζών εξαγωγής».

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρουσίαση της διαδικασίας της εύρεσης της τετραγωνικής και της κυβικής ρίζας αριθμού.

Το κεφάλαιο Ι' περιέχει τα «Περί Εξισώσεως»

Μετά τον ορισμό της εξίσωσης, δίνονται και ερμηνεύονται οι ιδιότητες της

δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εξίσωσης και γενικά οι ιδιότητες της εξίσωσης n -ιοστού βαθμού.

Τα οκτώ προβλήματα του κεφαλαίου αφορούν στην εύρεση εξισώσεων των οποίων οι λύσεις ικανοποιούν δοσμένες συνθήκες.

Το κεφάλαιο ΙΑ΄ Περιγράφει την μέθοδο επίλυσης εξισώσεων πρώτου βαθμού με ένα άγνωστο.

Το κεφάλαιο ΙΒ΄ Περιγράφει την μέθοδο επίλυσης εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ένα άγνωστο.

Το κεφάλαιο ΙΓ΄ Περιγράφει την μέθοδο επίλυσης εξισώσεων τρίτου βαθμού με ένα άγνωστο.

Το κεφάλαιο ΙΔ΄ Περιγράφει την μέθοδο επίλυσης εξισώσεων τρίτου βαθμού με ένα άγνωστο.

Το κεφάλαιο ΙΕ΄ Περιγράφει την διαδικασία εύρεσης των

- Τετραγωνικών ριζών της μονάδας
- Κυβικών ριζών της μονάδας
- Την επίλυση της εξίσωσης $\chi^4 = 1$
- Την επίλυση της εξίσωσης $\chi^5 = 1$
- Την επίλυση της εξίσωσης $\chi^6 = 1$
- Την επίλυση της εξίσωσης $\chi^7 = 1$ και γενικά,
- Την επίλυση της εξίσωσης $\chi^v = 1$

Το κεφάλαιο ΙΣΤ΄ «Περί προβλημάτων», περιγράφει την διαδικασία επίλυσης προβλημάτων των οποίων η λύση καταλήγει στην λύση συστημάτων εξισώσεων:

- Τα οποία έχουν τον ίδιο αριθμό εξισώσεων και αγνώστων. (Τα προβλήματα αυτά, «ών των επιλύσεων αριθμός ορισμένος εστί» ονομάζονται **Ωρισμένα**)
- Των οποίων, ο αριθμός των εξισώσεων είναι μικρότερος από αυτόν των αγνώστων (τα προβλήματα αυτά «τα απειροαρίθμους επιδεχόμενα επιλύσεις» ονομάζονται **Αόριστα**)

Το κεφάλαιο ΙΖ΄ «Περί Αριθμητικών Σειρών».

Το κεφάλαιο ΙΗ΄ «Περί Γεωμετρικών Σειρών».

Το κεφάλαιο ΙΘ΄ Περιέχει τριάντα ένα (31) προβλήματα αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων, εξισώσεων, καθώς και προβλήματα των οποίων η λύση ανάγεται σε επίλυση συστήματος εξισώσεων. Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρόβλημα Δ΄

Δοθέντων του πρώτου και του εσχάτου και του κεφαλαίου (αθροίσματος) των όρων της γεωμετρικής Σειράς, ευρείν τον των όρων αριθμόν και τον εκθέτην του λόγου.

Πρόβλημα Ζ΄

Δύο αριθμών δοθέντων, μέσον αρμονικώς ανάλογον ευρεῖν.

Πρόβλημα ΙΓ΄

Δοθέντων του πρώτου και του εσχάτου και του κεφαλαίου (αθροίσματος) των όρων της αριθμητικής Σειράς, ευρεῖν την διαφοράν και τον αριθμόν των όρων.

Πρόβλημα ΚΘ΄

Ευρεῖν δύο αριθμούς, όπως το εξ΄ αυτών γινόμενον ἴσον ἢ κύβω, οὐ ἡ ρίζα ἴση τῷ γινομένῳ εκ του πρώτου των ζητουμένων αριθμῶν, και του τετραγώνου του δευτέρου.

Το κεφάλαιο Κ΄ περιέχει δέκα τρία (13) προβλήματα αλγεβρικής επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων. Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρόβλημα Α΄

Τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην ευθείαν ΑΒ ἄκρον και μέσον λόγον τεμείν.

Πρόβλημα Β

Δοθείσης της περιμέτρου και της επιφανείας του ΑΒΓ ορθογωνίου τριγώνου, ευρεῖν την υποτείνουσαν την ορθήν γωνίαν ΑΓ.

Πρόβλημα ΣΤ΄

Δοθείσης πλευράς οκταγώνου, ευρεῖν την ημιδιάμετρον του περί αυτό περιγραφησομένου κύκλου.

Κεφάλαιο ΚΑ΄ «Περὶ της καλουμένης υψηλοτέρας Γεωμετρίας, και πρώτον περὶ των εξίσώσεων των εμφανουσών τας του Κώνου τομάς»

Στην 1^η σημείωση του κεφαλαίου διαβάζουμε: «**Υψηλοτέραν εἰώθασι καλεῖν Γεωμετρίαν** την περὶ τε των Κώνου τομῶν και ἄλλων διαλαμβάνουσαν καμπύλων, περὶ ὧν οὐδέν περιέχει ἡ στοιχειώδης Γεωμετρία, και δι' ὧν διάφορα ἐπιλύεται προβλήματα, δια των γεωμετρικῶν στοιχείων μηδαμῶς ἐπιλυόμενα»

Το παρόν κεφάλαιο περιέχει τα προβλήματα εύρεσης:

- Της εξίσωσης του τριγώνου
- Της εξίσωσης του κύκλου
- Της εξίσωσης της παραβολής
- Της εξίσωσης της ἔλλειψης
- Της εξίσωσης της υπερβολής και
- Των εξισώσεων των ασυμπτῶτων της υπερβολής

Κεφάλαιο ΚΒ΄ «Περὶ της εν επιπέδῳ των κωνικῶν Τομῶν αναγραφής»

Το παρόν κεφάλαιο περιέχει τρία προβλήματα στα οποία περιγράφονται οι κατασκευές της παραβολής, της ἔλλειψης και της υπερβολής.

Πρόβλημα Α΄

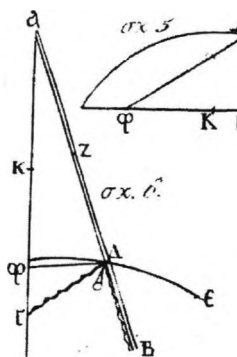
Τὴν τυχούσαν Παραβολὴν γράψαι.

Πρόβλημα Β΄

Τὴν τυχούσαν Ἐλλειψιν αναγράψαι.

Πρόβλημα Γ΄

Τὴν τυχούσαν υπερβολὴν αναγράψαι.

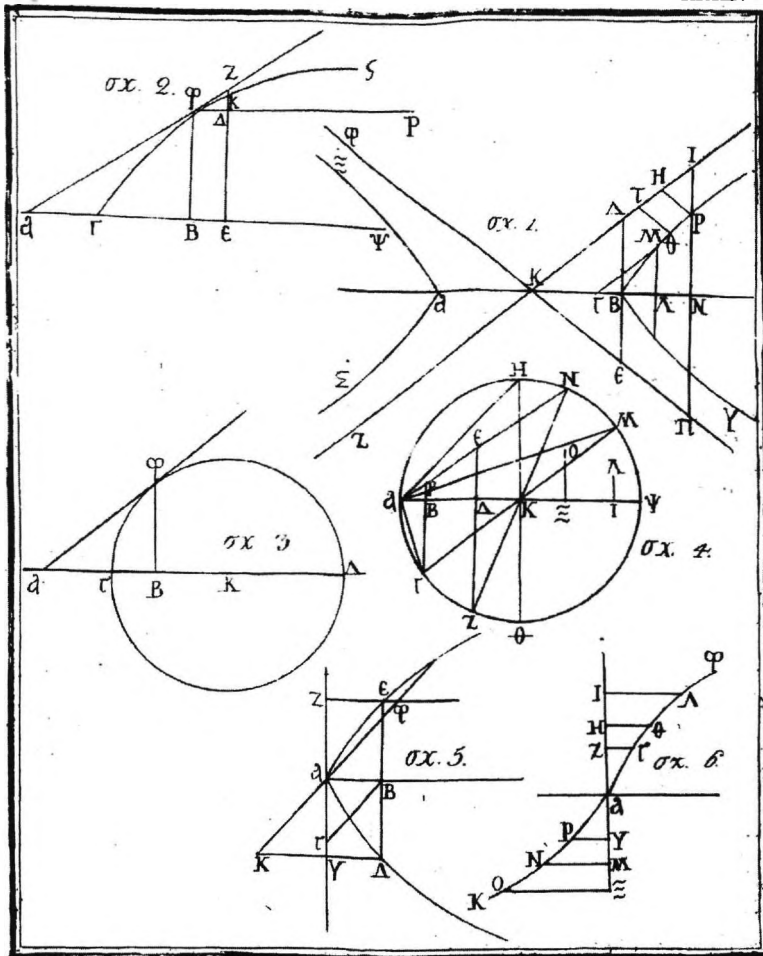


Κεφάλαιο ΚΓ' «Περί της μεθόδου του ευθείαν εφαπτομένην άγειν από δοθέντος σημείου της οποιασούν καμπύλης, ής δέδοται η εξίσωσις»

Στα πέντε προβλήματα του παρόντος κεφαλαίου περιγράφεται η διαδικασία της κατασκευής:

- Εφαπτομένης τυχάας καμπύλης σε δοθέν σημείο της.
- Εφαπτομένης κύκλου σε δοθέν σημείο αυτού. (στην κατασκευή αυτή αναφέρεται η έννοια της **υφαπτομένης**⁵²³ της καμπύλης)
- Εφαπτομένης παραβολής σε δοθέν σημείο της.
- Εφαπτομένης έλλειψης σε δοθέν σημεί της
- Εφαπτομένης υπερβολής σε δοθέν σημείο της.

⁵²³ Βλέπε σελ. 41.



Κεφάλαιο ΚΔ' «Περί γεωμετρικών τόπων, και των δι' αυτών επιλυομένων αορίστων προβλημάτων»

Στην 1^η σημείωση του κεφαλαίου διαβάζουμε: «Τόπος γεωμετρικός λέγεται ευθεία, ή κύκλος, ή κώνου τομή, ή οποιαούν καμπύλη, δι' ής το προταθέν επιλύεται πρόβλημα»

Το παρόν κεφάλαιο περιέχει πέντε προβλήματα εύρεσης γεωμετρικών τόπων. Ενδεικτικά αναφέρουμε:

Πρόβλημα Γ'

Δοθεισών των ΑΔ, ΗΘ ευθειών, (σχ. 8) ευρείν μεν ευθείαν, τεμείν δε την ΑΔ, ώστε το υπό των τμημάτων περιεχόμενον ορθογώνιον ίσον είναι τω υπό της ευρεθησομένης και

της δοθείσης $H\Theta$ περιεχομένου ορθογωνίου.

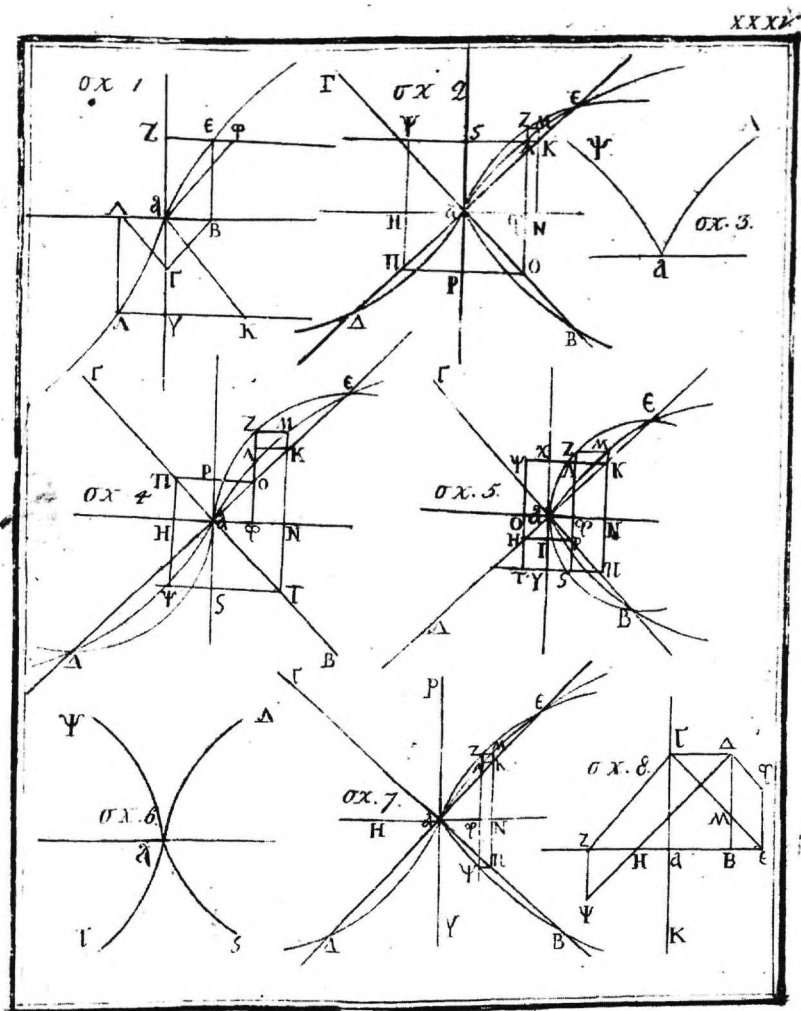
Πρόβλημα Ε'

Δοθείσης της διαφοράς των προς τη βάσει γωνιών των επί της αυτής AB (σχ. 10) βάσεως τριγώνων, ευρεῖν τον γεωμετρικόν τόπον, ἐν ᾧ αἱ κορυφαὶ αὐτῶν.

Κεφάλαιο ΚΕ' «Περὶ των εξισώσεων των εμφανουσῶν τας των ανωτέρων βαθμῶν καμπύλας, και της αναγραφῆς αὐτῶν, και των δι' αὐτῶν ἐπινομένων προβλημάτων»

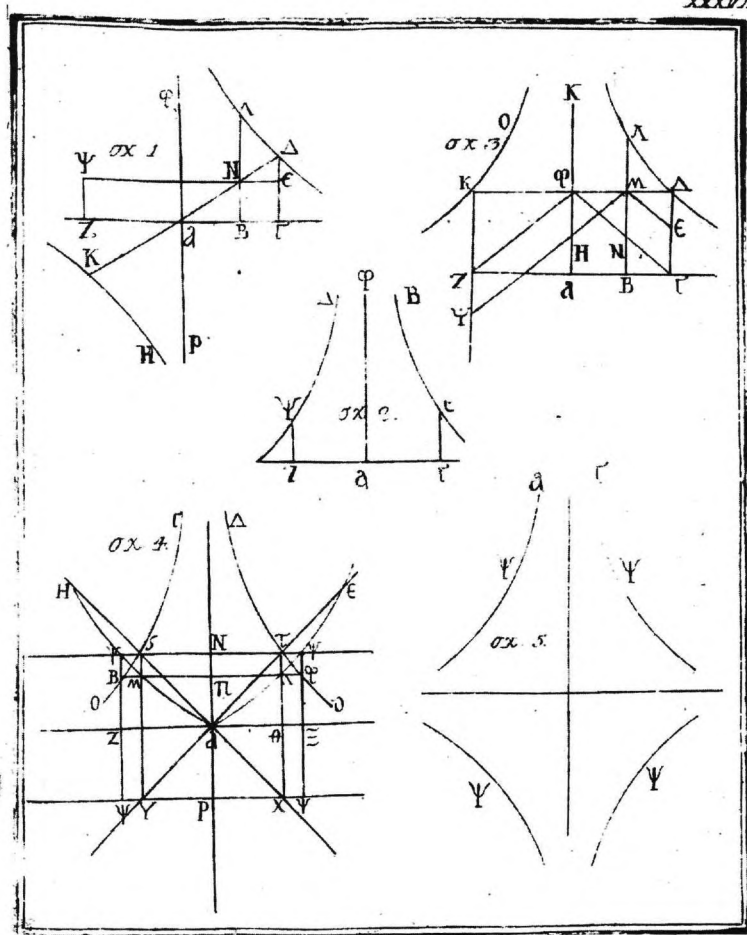
Στα δεκαεξί (16) προβλήματα του κεφαλαίου περιγράφονται οι διαδικασίες κατασκευῆς των παραβολῶν με εξισώσεις: **A)** $\psi^3 = \alpha\chi^2$, **B)** $\psi^4 = \alpha^3\chi$, **Γ)** $\psi^5 = \alpha^4\chi\Delta$, $\psi^2 = \alpha.z$, **E)** $\psi^3 = \alpha^2.z$, **ΣΤ)** $\psi^4 = \alpha\chi^3$, **Ζ)** $\psi^4 = \alpha^2.z$, **Η)** $\psi^4\chi = \alpha^3\beta$, **Θ)** $\psi^2\chi = \alpha^2\beta$, **Ι)** $\psi^3\chi = \alpha^3\beta$, **ΙΑ)** $\psi^4\chi = \alpha^5\beta$, **ΙΒ)** $\psi^5\chi = \alpha^4\beta^2$, **ΙΓ)** $\psi^2\chi^2 = \alpha^2\beta^2$, **ΙΔ)** $\psi^2\chi^3 = \alpha^6\beta^3$, **ΙΕ)** $\psi^5\chi = \alpha^5\beta^3$, **ΙΣΤ)** $\psi^3\chi^2 = \alpha^3\beta^2$

234 [90] [1688] [1688] [90] [90]

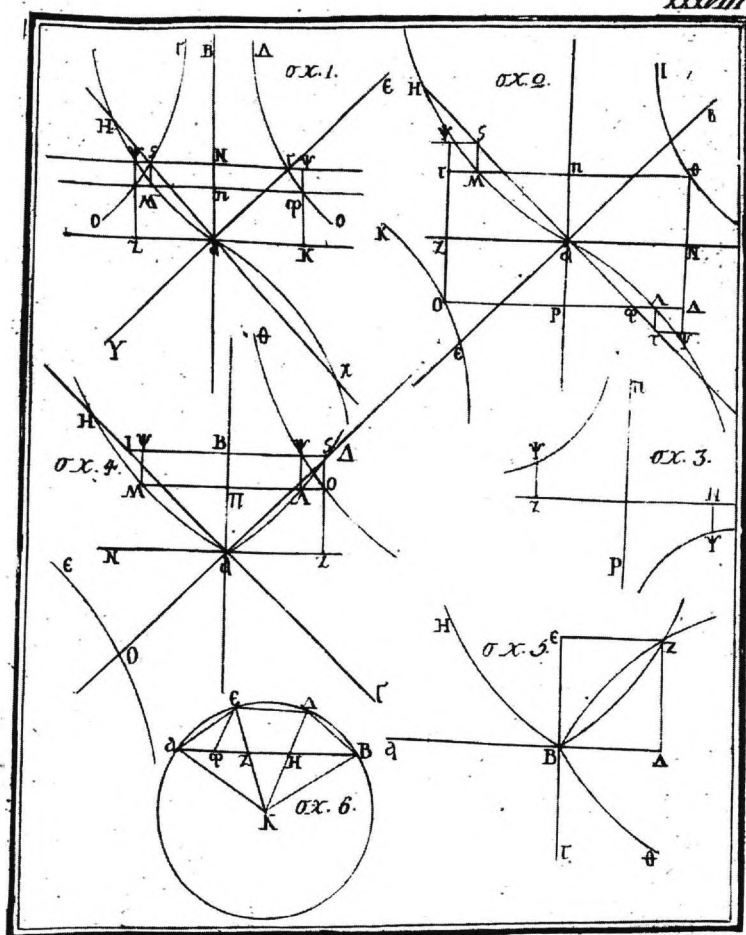


100. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120.

XXXII.



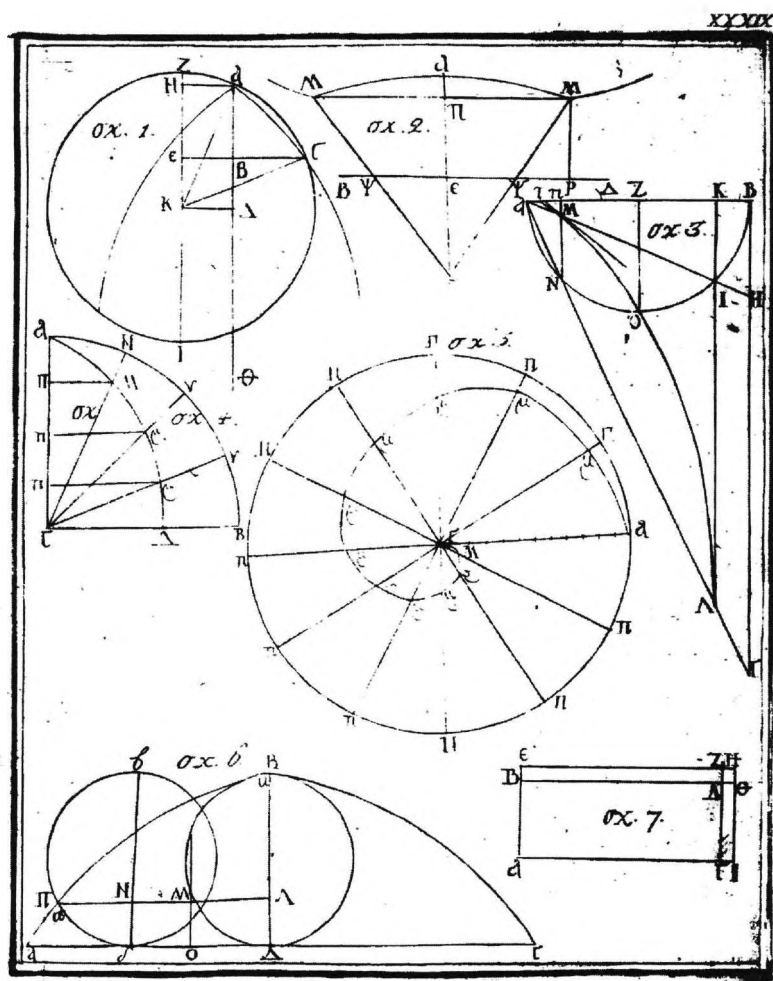
XXXVIII.



Κεφάλαιο ΚΣΤ' Στο παρόν κεφάλαιο ορίζονται οι καμπύλες

- Κογχοειδής
- Κισσοειδής
- Τετραγωνίζουσα
- Σπείρα ή Έλιξ αρχιμήδιος

Τα πέντε προβλήματα του κεφαλαίου περιγράφουν την διαδικασία εύρεσης των εξισώσεων της κογχοειδούς, κισσοειδούς, τετραγωνίζουσας, σπείρας και κυκλοειδούς καμπύλης.



ΒΙΒΛΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ
Της καλουμένης των απείρων
Μεθόδου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄ Περί του λεγομένου διαφορικού λογισμού, ήτοι του των απειροστών

Το κεφάλαιο Α΄ του δεύτερου βιβλίου αποτελείται από επτά (7) ορισμούς ένα πόρισμα, ένα αίτημα και πολλά σχόλια.

Ορισμοί

Α΄. Αμετάβλητον μέγεθος καλείσθω το μηδεμίαν αύξησιν ή μείωσιν πάσχον, αλλ' όπερ εστί διαμένον.

Β΄. Μεταβλητόν δε, το αυξομειώσεως επιδεχόμενον.

Γ΄. Παντός μεγέθους μέρος τί ελάχιστον, όπερ το όλω προστιθέμενον ή αφαιρούμενον, ουδεμίαν αυτώ αισθητήν αύξησιν επιφέρει ή μείωσιν, αυτώ τε τω όλω παραβαλλόμενον ως ουδέν έστιν, οι μεν **Διαφορικόν**, οι δε **Ροήν**, πολλοί δε **Απειροστημόριον**, ή **Απειροστόν** καλούσι.⁵²⁴

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα σχόλια του ορισμού Γ΄.

Το πρώτο, περιέχει εύστοχο παράδειγμα προκειμένου να κατανοήσει ο αναγνώστης την έννοια του απειροστού: «Εάν εν τω καταμετρείν τινά υψηλοτάτου τινός όρους το ύψος, άνεμος πνεύσας, από της ακρωραίας αφέλη ή προσθή λεπτής κύνεως λεπτότατον μέρος, το του ύψους μέτρον μετά την αφαιρέσιν ή προσθήκην το αυτό ευρεθήσεται. το αφαιρεθέν ουν ή προστεθέν μέρος, εκείνο έστι το απειροστόν, όπερ τω έλω παρατιθέμενον ουδέν έστυ».

Το δεύτερο, μας πληροφορεί, ότι, όπως φαίνεται, η έννοια του απειροστού δεν ήταν άγνωστη στους αρχαίους Έλληνες.

Διότι το απειροστό υπαινίσσεται ο Ευκλείδης όταν λέει «ληφθήσεται τι μέγεθος, ό έστιν έλασσον εκκι;μήνου ελάσσονος μεγέθους», ο δε Αρχιμήδης, «των ανίσων χωρίων την υπεροχήν, ά υπερέχει το μείζον του ελάττονος, δυνατόν είμεν αυτάν συντιθεμένας παντός υπερέχειν του προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου.»

Δ΄. Ρέοντα ή ολόκληρα μεγέθη λέγεται τα των απειροστών όλα.

Ε΄. Απειροστόν δευτέρας τάξεως εστί το του απειροστού της πρώτης τάξεως απειροστόν, έχει τε σχέσιν προς το της πρώτης τάξεως απειροστόν, όν αυτό το της πρώτης τάξεως, προς το αυτού όλον.

ΣΤ΄. Απειρον μέγεθος, ού πέρας ουδέν.⁵²⁵

⁵²⁴ Καθώς εκείνη την εποχή δεν έχει αυστηρά θεμελιωθεί ο απειροστικός λογισμός, ο Θεοτόκης χρησιμοποιεί τόσο τον όρο του διαφορικού (differentialis) του Leibniz, όσο και την ροή (flux) του Νεύτωνα. Παράλληλα δε αναφέρεται και στον όρο infinitesimals (απειροστό).

⁵²⁵ Απόηχος από τον α΄ ευκλείδιο ορισμό: σημείον ου μέρος ουδέν

Στα σχόλια του ορισμού ερμηνεύει τα μαθηματικά σύμβολα τα οποία χρησιμοποιεί για τον συμβολισμό των εννοιών του βιβλίου: «ο ὑπερθεν του δ τιθέμενος αριθμός ουδέ του δ, ουδέ του χ εκθέτης εστί, την του απειροστού δε τάξιν δηλοῖ. Το μεν γαρ $\delta^1 \chi$, απειροστόν πρώτης τάξεως εμφανίει. Το δε $\delta^2 \chi$, δευτέρας. Το δε $\delta^3 \chi$, τρίτης...»

Ζ'. Διαφορικός μεν, ή των Απειροστών Λογισμός λέγεται, η του τα απειροστά των δοθέντων ολοκληρών ευρίσκειν μέθοδος. Ολοκληρωτικός δε, η του ευρίσκειν των δοθέντων απειροστών τα ολόκληρα. τούτων δε η μεν ευθεία καλεῖται, η δε, αντίστροφος.

Στο σχόλιο του ορισμού τονίζεται η συμβολή των απειροστών στην εύρεση «των ιδιωμάτων» (την υφαπτομένη, την υποκάθετο, την εφαπτομένη, την κάθετο) μιας καμπύλης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β' «Περί της μεθόδου του τα απειροστά των δοθέντων ολοκληρών ευρίσκειν».

Το παρόν κεφάλαιο αποτελείται από τέσσερα προβλήματα στα οποία αποδεικνύονται οι κανόνες παραγωγίσης, οι οποίοι δίνουν την παράγωγο του αθροίσματος, του γινομένου και του πηλίκου συναρτήσεων καθώς και της δύναμης συνάρτησης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'

Του κεφαλαίου (αθροίσματος) $\alpha+\chi+\psi+\omega$ των ολοκληρών ευρεῖν τα απειροστά. Αποδεικνύεται ότι «του δοθέντος κεφαλαίου η $\delta\chi+\delta\psi+\delta\omega$ έκθεσις τα απειροστά εισί»

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'

Του κατά του $\chi\psi$ δοθέντος γινομένου τα απειροστά ευρεῖν. Αποδεικνύεται ότι τα απειροστά του γινομένου είναι: $\chi\delta\psi+\psi\delta\chi$

Στην σημείωση που ακολουθεί, γενικεύεται το παραπάνω πρόβλημα: «Εάν δε εκ πλειόνων ή δύο γραμμάτων το δοθέν γινόμενο συγκέται...», και αποδεικνύει ότι η παράγωγος του γινομένου $\chi.\psi.\zeta.\omega$ είναι $\chi\psi\zeta\delta\omega+\chi\psi\omega\delta\zeta+\chi\zeta\omega\delta\psi+\psi\zeta\omega\delta\chi$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'

Το απειροστόν ευρεῖν της κατά το ρ δοθείσης δυνάμεως

Στο παρόν πρόβλημα αποδεικνύεται ότι η παράγωγος του χ^2 είναι $2\chi\delta\chi$ και υπολογίζονται ακόμα οι παράγωγοι των ψ^3 , $(\alpha+\chi)^v$, $\alpha\chi^{\psi\mu}$, $(\alpha+\chi)^{\psi\mu}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'

Του δοθέντος κλάσματος χ/ψ το απειροστόν ευρεῖν

Αποδεικνύεται ότι η παράγωγος του πηλίκου χ/ψ είναι $(\psi\delta\chi-\chi\delta\psi)/\psi^2$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ' «Περί της μεθόδου του τα ολόκληρα των δοθέντων απειροστών ευρίσκειν». Το κεφάλαιο περιέχει έξι (6) προβλήματα⁵²⁶

Στο πρόβλημα Α' υπολογίζονται των $\delta\chi$, $\alpha\delta\chi$, $\delta\chi+\delta\zeta+\delta\omega$ «το ολόκληρον»

Στο πρόβλημα Β' υπολογίζονται το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)=\chi^v$, καθώς και των συναρτήσεων $h(x)=\alpha\chi^3\delta\chi$ $g(x)=\alpha/\beta\cdot\chi^4\delta\chi$ $k(x)=\beta\chi^3\delta\chi$

⁵²⁶ Ουσιαστικά δίδει τους πρώτους κανόνες διαφόρισης αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου. θυμίζουμε και πάλι πως ο Θεοτόκης παρουσιάζει για πρώτη φορά στα ελληνικά αυτόν τον σύγχρονο κλάδο των Μαθηματικών.

Στο πρόβλημα Γ' υπολογίζονται ολοκληρώματα συναρτήσεων της μορφής $\sqrt{f(x) \cdot f'(x)}$. Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων αυτών, περιγράφει τρεις μεθόδους ολοκλήρωσης.

Στο πρόβλημα Δ' υπολογίζονται ολοκληρώματα συναρτήσεων της μορφής $f(x)/f'(x)$. Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων αυτών, περιγράφει τρεις μεθόδους ολοκλήρωσης.

Στο πρόβλημα Ε' υπολογίζονται ολοκληρώματα συναρτήσεων της μορφής $\alpha \chi^n \delta \chi \lambda \chi^\mu$

Στο Πρόβλημα ΣΤ' υπολογίζονται ολοκληρώματα συναρτήσεων, της μορφής $\alpha \chi^n \delta \chi (\epsilon + \zeta \chi^\nu)^\mu$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ' Το παρόν κεφάλαιο αναφέρεται στην λύση διαφορικών εξισώσεων. Αρχικά, δίνονται συγκεκριμένα παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων και περιγράφεται η διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων αυτών.

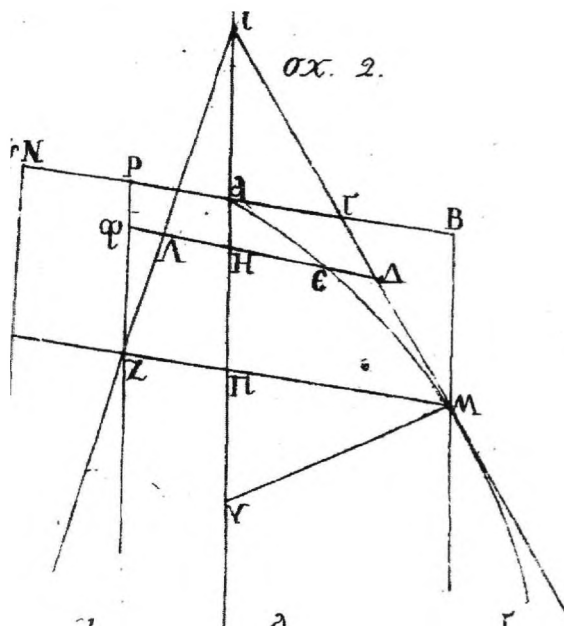
Ενδεικτικά αναφέρουμε:

- Στην εξίσωση $\psi \delta \chi = \chi \delta \chi - \chi \delta \psi$ «το εκ του ετέρου εις το έτερον μέρος μετατιθέναι» του όρου $\chi \delta \psi$, γίνεται $\psi \delta \chi + \chi \delta \psi = \chi \delta \chi$ η οποία μετά την ολοκλήρωση γίνεται $\psi \cdot \chi = 1/2 \cdot \chi^2$
- Ομοίως η εξίσωση $\psi \delta \chi - \chi \delta \psi = \psi^3 \delta \psi + \psi^2 \delta \psi$, γίνεται $(\psi \delta \chi - \chi \delta \psi) / \psi^2 = \psi \delta \psi + \delta \psi$ και μετά την ολοκλήρωση $\chi / \psi = 1/2 \psi^2 + \psi$

Στην συνέχεια του κεφαλαίου, προτείνονται γενικές μέθοδοι για λύση των διαφορικών εξισώσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε' Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφεται η διαδικασία της εύρεσης της εξίσωσης της υφαπτομένης, εφαπτομένης, υποκαθέτου και καθέτου καθώς και άλλα στοιχεία μιας καμπύλης γραμμής

ΜΤ: εφαπτόμενη
ΠΤ: υφαπτόμενη
ΠΥ: υποκάθετος
ΜΥ: κάθετος



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ΄ «Περί της μεθόδου του μεταβάλλειν την εξίσωσιν, την δηλούσαν καμπύλην δια της εστίας γεγραμμένην εις ετέραν, την αυτήν σημαίνουσαν καμπύλην δια του άξονος γραφείσαν και της ανάπαλιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ζ΄ Το παρόν κεφάλαιο αποτελείται από τρία προβλήματα.

Στο πρώτο, δίνεται η παραβολή με εξίσωση $ax = \psi^2$ και ζητείται η εξίσωση της υφαπτομένης της.

Στο πρόβλημα αυτό, αποδεικνύεται ότι η υφαπτομένη κάθε καμπύλης είναι $\psi\delta\chi/\delta\psi$.

Στο ίδιο πρόβλημα αποδεικνύει επίσης ότι η υφαπτομένη της κισσοειδούς καμπύλης, με εξίσωση $\psi^2 = \chi^3/(a-\chi)$, είναι η $2\chi(a-\chi)/(3a-2\chi)$

Στο δεύτερο, ζητείται η εξίσωση της υποκάθετης, εφαπτομένης, κάθετης, της ίδιας παραβολής $ax = \psi^2$ καθώς και η εξίσωση του παραβολικού τόξου, του παραβολικού χωρίου και του στερεού που ορίζει η παραβολή.

Στο τρίτο, δίνεται η υφαπτομένη καμπύλης: υφαπτομένη = 2χ και ζητείται η εξίσωση της καμπύλης αυτής. Η διαδικασία, έχει ως εξής:

Αφού η υφαπτομένη καμπύλης είναι ίση με $\psi\delta\chi/\delta\psi$, τότε, $\psi/2\delta\psi = \chi/\delta\chi$ η οποία μετά την ολοκλήρωση, γίνεται, $2 \cdot \log \psi = \log \chi + \log a$ και τελικά $\psi^2 = a\chi$

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύεται ότι σε οποιαδήποτε καμπύλη:

- η εφαπτομένη, είναι ίση με $\psi/\delta\psi \cdot \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\psi^2)}$ η υφαπτομένη, είναι ίση με $\psi\delta\chi/\delta\psi$
- η υποκάθετη, είναι ίση με $\psi\delta\psi/\delta\chi$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Η΄ «Περί των μεγίστων και ελαχίστων»

Το κεφάλαιο αρχίζει με τον ορισμό της Μεθόδου των «μεγίστων και ελαχίστων»: «Εάν καμπύλης αι τεταγμένα προιούσαι αύξωσιν άχρι τεταγμένης τινός, μεθ' ήν μειούνται, ή το ανάπαλιν, η μέθοδος του ευρίσκειν την μεγίστην και ελαχίστην των τεταγμένων, **Μέθοδος των μεγίστων και ελαχίστων** καλείται»⁵²⁷

Ενδεικτικά θα αναφέρουμε τα δύο από τα πέντε προβλήματα τα οποία περιέχει το παρόν βιβλίο.

Πρόβλημα Α΄

Την μεγίστην ευρείν των τεταγμένων, των εν τη καμπύλη, τη υπό της $2ax - \chi^2 = \psi^2$ εξίσωσης εμφανιζόμενη (πιν. ιζ')

Πρόβλημα Ε΄

Πάντων των παραλληλεπιπέδων, των ίσων δοθέντι κύβω, και ών μία των πλευρών δεδομένη εστίν, ευρείν το έχον ελάσσονα επιφάνειαν.

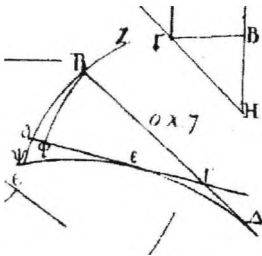
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Θ΄ «Περί των της δευτέρας και τρίτης τάξεως απειροστών»

Στο παρόν κεφάλαιο, δίνεται ο ορισμός της «φίλουσας ημιδιαμέτρου» και προσδιορίζονται οι εξισώσεις του αντίστοιχου τόξου της γωνίας η οποία περιέχεται από την εφαπτομένη καμπύλης απειροστής της πρώτης τάξεως και της χορδής αυτής, δηλαδή

⁵²⁷ Η εύρεση μεγίστων και ελαχίστων υπήρξε ένα από τα βασικά προβλήματα που δημιούργησαν τον απειροστικό λογισμό (πβ. τις προσπάθειες του Γαλιλαίου)

του τόξου ΒΨ στο παρακάτω σχήμα. Προσδιορίζεται ακόμα, η εξίσωση της «φιλούσας ημιδιαμέτρου» οποιασδήποτε καμπύλης.

Ο ορισμός της φιλούσας ημιδιαμέτρου δίνεται ως εξής: «εάν νήμα τη ΨΕΔ καμπύλη ισόμηκες εφηρμοσμένον αυτή όν, (πιν. ΙΗ σχ. 7) κατά μικρόν απ' αυτής αποχωρίζοιτο, το μεν υπό του νήματος γραφόμενον σχήμα ΨΑΒ, εκτετυλιγμένη καλείται καμπύλη, η δε ΨΕΔ εντετυλιγμένη, το δε νήμα ΑΕΔ, **ημιδιάμετρος φιλούσα**»



ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι΄ Το παρόν κεφάλαιο αποτελείται από δύο προβλήματα σε κάθε ένα από τα οποία δίνεται η εξίσωση καμπύλης και ζητείται η φιλούσα ημιδιάμετρος.

Για παράδειγμα, στο πρώτο πρόβλημα, δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $2\alpha\chi = \psi^2$ και ευρίσκεται ότι η φιλούσα ημιδιάμετρος αυτής είναι $1/\alpha^2 \cdot \sqrt{(\psi^2 + \alpha^2)^3}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΑ΄ «Περί της ευρέσεως της καμπής, είτουν του σημείου, εν ώ η καμπύλη μεταβάλλει το κοίλον εις κυρτόν, ή το κυρτόν εις κοίλον»

Το παρόν κεφάλαιο περιέχει τρία προβλήματα, εύρεσης σημείου καμπής της γραφικής παράστασης συνάρτησις

Ενδεικτικά αναφέρουμε το Γ΄: «δοθείσης της εξισώσεως $\beta z = \alpha^2 - 2\alpha\psi + \psi^2$, ευρείν την καμπήν εν τη καμπύλη τη υπ' αυτής εμφανιζομένη»

4.5 Σχόλια που αφορούν στο έργο «Στοιχεία Μαθηματικών»

Το περιεχόμενο: Η παρουσίαση των βιβλίων των «Στοιχείων» του Ευκλείδη στο έργο του Θεοτόκη, σε σχέση με τα αντίστοιχα της «Οδού Μαθηματικής» τα οποία βρίσκονται «πολύ πλησιέστερα» στην έκδοση Heiberg των «Στοιχείων», ο Θεοτόκης, εις βάρος του θεωρητικού μέρους, στρέφει το έργο «επί το πρακτικότερον».

Αυτό δηλώνει ο ίδιος στον πρόλογο του έργου του: «Εν τη στοιχειώδη δε Γεωμετρία και εν ταις του Κώνου τομαίς τη του Ευκλείδου και Απολλωνίου τάξει ακολουθήσαντες, **τινάς μιν των εν αυτοίς αποδείξων συντομωτέρας, ενιαχού δε και άλλας αντ' εκείνων.....επεξεργασάμεθα**»

Έχει ήδη αναφερθεί, ότι, η πρόθεση του συγγραφέα, όπως και ο ίδιος γράφει στον πρόλογο, (τομ. 1^{ος} σελ. ιε'), «.....συλλογήν τινα μαθηματικών συγκροτήσασθαι στοιχείωντα ταις λοιπαίς επιστήμαις αναγκαία συνελέξαμεν», είναι κυρίως να δώσει τα αναγκαία εφόδια στους «...περί την της φύσεως και τέχνης θεωρίαν ενασχολούμενοι...».

Το έργο «Στοιχεία Μαθηματικών» περιλαμβάνει ακόμα την «Υψηλότερα Γεωμετρία», δηλαδή την Αναλυτική Γεωμετρία η οποία δεν περιέχεται στην «Οδό Μαθηματικής» του Ανθρακίτη.

Με το σύγγραμά του, ο Θεοτόκης, εισάγει για πρώτη φορά στην ελληνική μαθηματική παιδεία των χρόνων της δουλείας, τον μηχανισμό του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, «την καλουμένη των απείρων μεθόδου».

Με την γνώση και κατανόηση των εννοιών αυτών, ο αναγνώστης μπορεί να ανταποκριθεί στην μελέτη επιστημονικών έργων για τα οποία είναι απαραίτητη η χρήση της παραγώγου και του ολοκληρώματος.

Για παράδειγμα, η μελέτη των «Στοιχείων Φυσικής»⁵²⁸ του Θεοτόκη η οποία χαρακτηρίστηκε από τον Κούμα «ως εφαρμοσμένη Μαθηματική», (Ιστορία των ανθρωπίνων πράξεων), προϋποθέτει γνώσεις απειροστικού λογισμού (παραγώγων και ολοκληρωμάτων).

Δηλαδή, ο συγγραφέας των «Στοιχείων Μαθηματικών» έδωσε ένα έργο σχετικά προσαρμοσμένο στις απαιτήσεις των καιρών. δηλαδή στην εξέλιξη της φυσικής, μαθηματικής σκέψης όπως αυτή ελάμβανε χώρα με την πάροδο του χρόνου στις ελληνικές περιοχές την εποχή της δουλείας.

Οι συμβολισμοί: Σε αντίθεση με το έργο του Ανθρακίτη το οποίο δεν περιέχει μαθηματικά σύμβολα, στο έργο του Θεοτόκη, (εκτός από το βιβλίο Ι των «Στοιχείων»), ερμηνεύονται και εισάγονται οι μαθηματικοί συμβολισμοί. Τα σύμβολα της ισότητας, της ανισότητας, των τεσσάρων πράξεων (+, -, ×, :), της νιοστής δύναμης και της νιοστής ρίζας αριθμού καθώς και της παραγώγου και του ολοκληρώματος, χρησιμοποιούνται στο τρίτομο έργο του Θεοτόκη. Η εισαγωγή των συμβόλων συμβάλλει στην απλούστευση των μαθηματικών κειμένων με αποτέλεσμα να διευκολύνεται η κατανόηση των αποδείξεων.

Σε σχέση με τα σημερινά σύμβολα, διαφορές παρουσιάζουν αυτά της παραγώγου

⁵²⁸ Βλέπε Γεώργιος Ν. Βλαχάκης, «Η φυσική του Νικηφόρου Θεοτόκη, σταθμός στην επιστημονική σκέψη τον 18^ο αιώνα», διδακτορική διατριβή, Αθήνα 1990

και του ολοκληρώματος⁵²⁹.

Η παράγωγος πρώτης τάξης συμβολίζεται με $\delta^1\chi$, της δεύτερης $\delta^2\chi$, της τρίτης $\delta^3\chi$ κ.ο.κ. Ο συγγραφέας σε σημείωση (τόμος 3^{ος}, σελ 204) γράφει: «ο υπερθεν του δ τιθέμενος αριθμός ουδέ του δ , ουδέ του χ εκθέτης εστί, την του απειροστού δε τάξιν δηλοί. Το μεν γαρ $\delta^1\chi$, απειροστόν πρώτης τάξεως εμφανίζει. το δε $\delta^2\chi$, δευτέρας...»

Το ολοκλήρωμα του χ συμβολίζεται με $\delta^{-1}\chi$, το ολοκλήρωμα του $\delta^{-1}\chi$, συμβολίζεται με $\delta^{-2}\chi$, κ.ο.κ

Στο σχόλιο της σελίδας 205 του 3^{ου} τόμου, ερμηνεύεται το σύμβολο του ολοκληρώματος: «το μεν ολόκληρον του $\delta^0\chi$ εστί το $\delta^{-1}\chi$, τούτου δε το $\delta^{-2}\chi$...»

4.6 Συγκριτική παρουσίαση των έργων «Οδός Μαθηματικής» και «Στοιχεία Μαθηματικών».

Η μελέτη της «Οδού Μαθηματικής» και των «Στοιχείων Μαθηματικών» καθώς και οι διαφορές τις οποίες εντοπίσαμε στο περιεχόμενο των δύο έργων, ως ένα βαθμό, μας κατατοπίζουν για τον στόχο συγγραφής του καθ' ενός από αυτά.

Οι διαφορές αυτές, οπωσδήποτε, δεν οφείλονται μόνο στις προσωπικές προτιμήσεις των συγγραφέων για τις μαθηματικές ενότητες που θα παρουσίαζαν, αλλά, κυρίως στην χρονική απόσταση που χωρίζει τις δύο εκδόσεις.

Η «Οδός Μαθηματικής», ήταν το πρώτο αξιόλογο έντυπο ελληνικό μαθηματικό έργο το οποίο κυκλοφόρησε στον κατεχόμενο ελληνικό χώρο. Το περιεχόμενό του ήταν από τις παραδόσεις του Μεθόδιου Ανθρακίτη κατά την διδασκαλία του σε Σχολές των Ιωαννίνων και της Καστοριάς. Όπως είναι γνωστό, ο Ανθρακίτης, ήταν ο πρόδρομος της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε Σχολές του ελληνισμού την περίοδο της οθωμανικής κυριαρχίας. Δίδασκε και έγραφε μαθηματικά συγγράμματα την εποχή κατά την οποία η ελληνική μαθηματική παιδεία, ήταν η στοιχειώδης.

Ήταν επόμενο λοιπόν, το έργο, -το οποίο προορίζονταν για να χρησιμεύσει ως σχολικό εγχειρίδιο-, ως ένα βαθμό, να είναι προσαρμοσμένο στο επίπεδο της μαθηματικής παιδείας της εποχής.

Το έργο του Θεοτόκη, ακόμα και στην χειρόγραφη μορφή του, είναι μεταγενέστερο. Πενήντα χρόνια περίπου απέχουν οι εκδόσεις των δύο έργων. Από το 1749 έως το 1798. Μέσα στο διάστημα αυτό η κατάσταση της ελληνικής μαθηματικής παιδείας, έχει βελτιωθεί σημαντικά. Το 1778 έχει εκδοθεί στην Λειψία το αξιόλογο έργο του Ευγένιου Βούλγαρη «Πραγματείες στοιχείων Μαθηματικών».

Η διδασκαλία των Μαθηματικών δεν αποτελεί πλέον καινοτομία. Στην «Σχολή του Γκιόνιμ» των Ιωαννίνων, ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος έχει καθιερώσει την διδασκαλία του μαθήματος. Στην «Μαρουτσαία Σχολή» των Ιωαννίνων πρώτα και στην συνέχεια στην «Στοά» της Καστοριάς και στην Αθωνιάδα, ο Ευγένιος Βούλγαρης διδάσκει Μαθηματικά από συγγράμματα τα οποία ο ίδιος είχε συντάξει για τις παραδόσεις του.

Αλλά και σε άλλες Σχολές, όπως η Πατριαρχική Ακαδημία, η Σχολή της Χίου, επιχειρείται η εισαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Οι νέες πνευματικές ανάγκες που είχαν προκύψει στον ελληνικό πνευματικό χώρο με την εισαγωγή και άλλων επιστημών μέσα στο διάστημα αυτό, (για παράδειγμα η

⁵²⁹ Το σύμβολο του ολοκληρώματος με την σημερινή του μορφή, δεν χρησιμοποιείται από τον Θεοτόκη παρ' όλο που ήταν γνωστό την εποχή της έκδοσης του έργου του.

μελέτη της φυσικής του Θεοτόκη⁵³⁰ προϋπέθετε γνώσεις ανώτερων μαθηματικών), δημιούργησαν την ανάγκη της εισαγωγής και νέων σύγχρονων για την εποχή κλάδων των Μαθηματικών.

Άρα είναι επόμενο ο Θεοτόκης να έγραψε ένα έργο προσαρμοσμένο στις νεοδημιουργηθείσες ανάγκες των επιστημών.

Συμπερασματικά: από την μελέτη και την σύγκριση της «Οδού Μαθηματικής» και των «Στοιχείων Μαθηματικών», προκύπτει, ότι οι διαφορές στους στόχους συγγραφής των δύο έργων, υπαγορεύτηκαν από τον εκσυγχρονισμό της ελληνικής κοινωνίας την εποχή της δουλείας, ο οποίος με τη σειρά του, εκφράστηκε και μέσα από το επίπεδο των μαθηματικών έργων της εποχής, πρόκειται για μια αμφίδρομη σχέση. Δηλαδή: ο ρυθμός εισαγωγής και διδασκαλίας των μαθηματικών στα σχολεία του ελληνισμού αποτελεί την στάθμη του κοινωνικού εκσυγχρονισμού, ο οποίος στη συνέχεια καθορίζει την στάθμη του επιπέδου των Μαθηματικών τα οποία διδάσκονται στα σχολεία της υπόδουλης χώρας.

4.7 Οι επιδράσεις των έργων «Οδός Μαθηματικής» και «Στοιχεία Μαθηματικών» στην μαθηματική σκέψη της προεπαναστατικής περιόδου.

Ένα μέτρο του ρυθμού της εξελικτικής πορείας της επιστημονικής σκέψης την περίοδο της δουλείας, είναι ο βαθμός διάδοσης και αφομοίωσης των επιστημονικών γνώσεων τις οποίες οι λόγιοι με τα έργα τους εισήγαγαν στον πνευματικό ελληνικό χώρο.

Οι νεοεισαχθείσες επιστημονικές γνώσεις διαδόθηκαν κυρίως μέσω της εκπαίδευσης με τα έργα των λογίων (χειρόγραφα ή έντυπα), τα οποία στην πλειοψηφία τους γράφτηκαν για εκπαιδευτικούς σκοπούς.

Πηγές οι οποίες μας βοηθούν να ερευνήσουμε την έκταση της διάδοσης των επιστημονικών γνώσεων μέσα από τα έργα των δασκάλων του Γένους και στην συνέχεια να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για το εάν και κατά πόσο τα έργα αυτά συνέβαλαν στην διαμόρφωση του επιστημονικού κλίματος της εποχής, αποτελούν γραπτές μαρτυρίες και απόψεις πνευματικών ανθρώπων, τις οποίες εκφράζουν σε επιστολές, σε επιστημονικά περιοδικά ή και σε προλόγους βιβλίων της εποχής.

Οι αναφορές και τα σχόλια των λογίων που αφορούν σε συγκεκριμένα έργα και ο βαθμός της ζήτησης των έργων αυτών προκειμένου να χρησιμοποιηθούν ως διδακτικά εγχειρίδια σε σχολεία του ελληνισμού, αποτελούν τεκμήρια με την βοήθεια των οποίων μπορούμε να διαπιστώσουμε εάν και πόσο αφομοιώθηκαν καθώς και σε ποιο βαθμό συνέβαλαν στην διαμόρφωση της μαθηματικής σκέψης.

Αποσπάσματα από γραπτές μαρτυρίες λογίων οι οποίες αφορούν στα επιστημονικά προσόντα και στα έργα του Μεθόδου Ανθρακίτη, του Μπαλάνου Βασιλόπουλου ο οποίος επιμελήθηκε την έκδοση της «Οδού» και εμπλούτισε το περιεχόμενο της και του Νικηφόρου Θεοτόκη, μας διαφωτίζουν επαρκώς για την συμβολή τους στην διαμόρφωση της νεοελληνικής επιστημονικής σκέψης.

Την αξία της «Οδού Μαθηματικής» αναγνωρίζουν οι λόγιοι της εποχής εκείνης,

⁵³⁰ Το έργο «Στοιχεία Φυσικής» του Νικηφόρου Θεοτόκη εκδόθηκε στην Λειψία το 1766

όπως δείχνουν οι αναφορές τους στο έργο αλλά και στις προσωπικότητες του Μεθόδιου Ανθρακίτη και του Μπαλάνου Βασιλόπουλου.

Την σημαντική προσφορά του Μεθόδιου Ανθρακίτη στην διάδοση της μαθηματικής παιδείας με την εισαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε Σχολεία του ελληνισμού, αναγνωρίζουν οι αδελφοί Ζωσιμάδες, οι οποίοι χρηματοδότησαν την έκδοση του έργου «Στοιχεία Μαθηματικών» του Νικηφόρου Θεοτόκη.

Συγκεκριμένα, στον πρόλογο του έργου των «Στοιχείων», γράφουν: «εξότου γαρ ο αοίδημος εκείνος των Μαθηματικών διδάσκαλος, ο Μεθόδιος, ώσπερ ναυς τις μεγαλέμπορος από της δυτικής επιστρέψας χώρας, τους Ευκλείδης και Αρχιμήδης και Απολλωνίου και Διοφάντους επί την Ελλάδα επαναγαγών, εις την των Ιωαννίνων Σχολήν εισήγαγεν, άχρις αυτών των καθ' ημάς ημερών, ουδέ διδάσκαλοι μαθητεύοντες, ουδέ μαθηταί τα Μαθηματικά διδασκόμενοι εκείθεν εξέλειπον»⁵³¹

Την μεγάλη προσφορά του Μεθόδιου Ανθρακίτη αλλά και του Μπαλάνου Βασιλόπουλου αναγνωρίζει και ο λόγιος - δάσκαλος των Μαθηματικών στην «Γκιούμειο Σχολή» των Ιωαννίνων, Μπαλάνος Κοσμάς.

Στον πρόλογο της «Αριθμητικής» η οποία εκδόθηκε στην Βιέννη το 1798 (σελ.ΧΙΙ) γράφει: «Μεθόδιος ο Ανθρακίτης, , ο οποίος μετεκόμισεν από τα δυτικά μέρη εις την Ελλάδα τας μαθηματικάς επιστήμας και μετέφρασεν, οπου προ χρόνων είχαν λείψει από αυτήν, φέρωντας ωςάν μία μυριοφόρος ολκάς διάφορα είδει εμπορίας. αυτός ο εν μακαρία τη λήξει γενόμενος Μπαλάνος ιερεύς Βασιλόπουλος, ο εμός πατήρ και διδάσκαλος, μετέφρασεν εις το ελληνικώτερον, ανέθρεψεν, ηύξησεν, ανεπλήρωσεν, εις τύπον εξέδωκε, και παρέδωκε φιλοπόνως εις τους εραστάς της μαθήσεως εν αυτώ τω σχολείω σχεδόν τεσσαράκοντα χρόνους χρηματίσας μετά τον Μεθόδιον διδάσκαλος, με μεγάλην ωφέλειαν των διδασκομένων»

Πληροφορίες ότι η «Οδός Μαθηματικής» αποτελούσε διδακτικό εγχειρίδιο που διακινήθηκε ευρέως σε σχολεία του ελληνισμού μας δίνει με γραπτή μαρτυρία του ο Γεώργιος Κωνσταντίνου.

Συγκεκριμένα, ο Μακεδόνας λόγιος Γεώργιος Κωνσταντίνου, « ο συντάξας το πληρέστερον μεν συνταχθέν, κολοβόν δε εκδοθέν τετράγλωσσον Λεξικόν, τοσούτον κοινόν εις τους τότε τα Ελληνικά σπουδάζοντας...»⁵³² εις τα προλεγόμενα του πολυεκδοθέντος λεξικού του, απαριθμώντας τα σχολεία της Ελλάδας, το 1757γράφει: «Εις δε τα φιλοσοφικά σπουδάζουσι και διδάσκουσι κοινώς τα του Κορυδαλέως εις τον Αριστοτέλη και Αλεξάνδρου (Μαυρογορδάτου) του εξ Απορρήτων, μελετώντες κατά μέρος οι μαθηταί τον Αφροδισέα, τον Σιμπλικιον, τον Φιλόπονον και τον Θεμίστιον. Εις δε τα μαθηματικά διδάσκουσι την μαθηματικήν οδόν, του διδασκάλου Ιωαννίνων Κ. Μπαλάνου, μελετώντες κατ' ιδίαν τα συγγράμματα των αρχαιοτέρων μαθηματικών Ελλήνων, ως φαίνονται τα εαυτά συγγράμματα εν τω προοιμίω της ρηθείσης οδού μαθηματικής, τυπωθείσης κατά το αμψθ'...»⁵³³

⁵³¹ «Στοιχείων Μαθηματικών εκ παλαιών και νεωτέρων συνερανισθέντων, υπό του Πανιερωτάτου Αρχιεπισκόπου πρών Αστραχανίου κυρίου Νικηφόρου», Μόσχα 1798, τόμος πρώτος, σελ η'

⁵³² Ματθαίου Κ. Παράνικα, «Σχεδιάσμα», εν Κωνσταντινουπόλει 1867, σελ. 71

⁵³³ Τρύφωνος Ε. Ευαγγελίδου, «Η παιδεία επί τουρκοκρατίας», Εν Αθήναις 1936, τόμος 1^{ος}, σελ.ΧCII

Ο Ιώσηπος Μοισιοδάκας αναφερόμενος αφ' ενός μεν στην αξιόλογη προσωπικότητα και στην επιστημονική κατάρτιση του Μπαλάνου και αφ' ετέρου στην αξία της «Οδού» γράφει: «ο αοίδημος Μπαλάνος ο Βασιλόπουλος, ανήρ εν πολλοίς άλλους δοκιμώτατος και εν μαθηματικοίς εἴτα ἀριστεύων, ζήλω ανενδότην κινούμενος ὑπὲρ τῶν μαθητεούντων αὐτῷ και ὑπὲρ παντός του γένους απλῶς, ανεζώσθη να καταστρώσῃ μίαν *οδὸν μαθηματικῆς πλήρη*.... Παντοῦ ο περιβλεπτος ἀνὴρ φέρεται μετὰ πάσης της δυνατῆς σαφηνείας και πληρότητος και ο εισαρχόμενος αὐτόν πανταχόθεν συνάγει το ανεπίδεικτον του ἡθους αὐτοῦ, τεκμήριον ασφαλέστατον των ἀκόμπως φιλοσοφούντων, και την επαινετὴν πρόθεσιν, την οποίαν περιέθαλπεν ο ἀνὴρ αἰὶ και ἰδιαίτατα υπερ της ωφελείας του κοινού»⁵³⁴

Ο δάσκαλος των επιστημών και εκσυγχρονιστής της παιδείας του ελληνισμού Κωνσταντίνος Κούμας, στο έργο του «Ιστορία των ἀνθρωπίνων πράξεων», αναγνωρίζει την σημαντική συμβολή του Ανθρακίτη στην εισαγωγή και την διάδοση των Γεωμετρικών γνώσεων στις Σχολές των Ιωαννίνων: «.....οὗτος ο θαυμάσιος ἀνὴρ μετεκόμισε εἰς τα Ἰωάννινα τας Γεωμετρικὰς γνώσεις, αι οποιαι ἐλείπαν προ χρόνων.....»⁵³⁵. Με τον χαρακτηρισμό «οὗτος ο θαυμάσιος ἀνὴρ» διαφαίνεται η υψηλή εκτίμησή του Κούμα στο πρόσωπο του Ηπειρώτη λόγιου – δασκαλου.

Πληροφορίες για την διάδοση του περιεχομένου της «Οδού Μαθηματικῆς» μας δίνει ο ιστορικός Ζαβίρας ο οποίος γράφει για τον Θεοφάνη, τον ιδρυτή της Σχολῆς της Φουρνάς: «Θεοφάνης ιερομόναχος ο ἐξ' Ἀγράφων περί το ἀψλγ' ἔτος ἀπῆλθεν εἰς Ἰωάννινα και ἤκουσε τα λοιπὰ των μαθημάτων παρὰ τῷ Διδασκάλῳ Μεθοδίῳ και τῷ Μπαλάνῳ. ἐπιστρέψας δε ἐν τῇ ἰδίᾳ πατρίδι, ἐμόνασεν ἐν τῇ μικρᾷ μονῇ της ζωοδόχου πηγῆς τῇ πλησίον της κώμης Φουρνᾶς, ἐφ' ᾧ ἐδίδαξε τον Ἰωάννην, και Σέργιον τον Μακρὴν και Κύριλλον τον διδάσκαλον τα γραμματικά την λογικὴν και ἀριθμητικὴν και μαθηματικὴν»⁵³⁶

Ο Σέργιος Μακραίος, ο μαθητὴς του Θεοφάνη, μας δίνει την ἴδια πληροφορία με μαρτυρία του στην προσφώνηση προς τους ἀδερφοὺς Χατζηκώστα την οποία προτάσσει στην «Επιτομή Φυσικῆς Ἀκροάσεως»: «αρυσάμενος δαψιλὴ χεύματα δια Μεθοδίου,, Μπαλάνου, των αοιδίμων Διδασκάλων, ο ἐν οσιότητι μέγας, και πολὺς ἐν σοφίᾳ Θεοφάνης, ο ἐμὸς πρῶτος Καθηγητὴς ἀνήγαγεν εἰς Ἄγραφα, και διψῶσι μετέδωκεν»⁵³⁷

Η «Οδὸς Μαθηματικῆς» αποτελοῦσε διδακτικὸ εγχειρίδιο και σε σχολεία του παροικιακοῦ ελληνισμοῦ. Ἀπὸ τὸ ἔργο του Ἀνθρακίτη, διδάσκονταν οι μαθητὲς στο Φλαγγιανὸ Κολλέγιο της Βενετίας,⁵³⁸ την Επιπεδομετρία, την Στερεομετρία και τα «Σφαιρικά» του Θεοδοσίου. Ἐξ' ἄλλου στον κατάλογο των συνδρομητῶν της «Οδού» αναφέρεται και τὸ ὄνομα του διευθυντῆ του «Φλαγγιανού», Γεωργίου Πατούσα.

⁵³⁴ Ηπειρωτικά Χρονικά, «οι Μπαλάνοι διδάσκαλοι του Γένους», τόμος 5^{ος}, σελ. 232

⁵³⁵ Κούμας, «Ιστορία των Ἀνθρωπίνων πράξεων», τόμος ΙΒ', σελ. 558.

⁵³⁶ Κ. Θ. Δημαράς, «Ιστορικά Φροντισμάτα», Α', εκδ.Πορεία, Ἀθήνα 1992, σελ.17

⁵³⁷ ο.α. σελ. 18.

⁵³⁸ Α. Ε. Καραθανάσης, «Η Φλαγγίνειος Σχολή της Βενετίας», σελ. 201.

Στην προσωπικότητα και στο έργο του Νικηφόρου Θεοτόκη αναφέρονται επιφανείς λόγιοι της εποχής. Η εκτίμησή τους στο πρόσωπό του αλλά και στην επιστημονική αξία του έργου του γίνεται φανερή μέσα από πολλές γραπτές μαρτυρίες τις οποίες συναντάμε σε επιστολές ή και σε έργα τους.

Στην «Απολογία» του ο Ιώσηπος Μοισιόδακας, αναφέρεται συχνά στην προσωπικότητα και το έργο του Νικηφόρου Θεοτόκη:

«Εἰς μόνος κυρίως ἦταν πεφυκῶς πρὸς τὴν ἀναπλήρωσιν μίας τοσαύτης χρείας τοῦ ταλαιπῶρου Γένους, ὁ περιβλεπτός Θεοτόκης. Πλήρης, σαφής, ἀπέριτος καὶ πνέων αἰετίζῳ ἀκραίῳν ὑπὲρ τῆς ωφελείας τοῦ κοινού, μόνος ἐμέλλε νὰ προκίση τὰ ἡμέτερα σχολεῖα μετὰ πάντων τῶν ἀναγκαίων αὐτοῖς εἴτε τῶν μαθηματικῶν εἴτε τῶν λοιπῶν φυσικῶν»⁵³⁹

«Πόσοι Ευγένιοι, πόσοι Θεοτόκαι ἄλλοι δὲν ἐμέλλον ἤδη νὰ περιπολῶνται μεταξὺ ἡμῶν, ἀν ὁ αἰοδήμος πατριάρχης ἐκεῖνος δὲν ἐδραπέτευε τὸν Βούλγαριν Ευγένιον ἀπὸ τοῦ σχολείου τοῦ ἐν τῷ Ιασιῷ, δὲν ἐφευγάτιζον Νικηφόρον τὸν Θεοτόκην ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σχολείου τοῦ ἐν τῷ Ιασιῷ»⁵⁴⁰

Γνώσεις ἀνώτερων Μαθηματικῶν προϋποθέτει ἡ μελέτη τοῦ έργου «Στοιχεῖα Φυσικῆς» τοῦ Νικηφόρου Θεοτόκη. Τὸ αξιόλογο αὐτὸ σύγγραμμα τὸ ὁποῖο ἔχει χαρακτηριστεῖ ἀπὸ τὸν Κούμα «εφηρμοσμένη Μαθηματικὴ»⁵⁴¹, δείχνει τὴν υψηλοῦ ἐπιπέδου μαθηματικὴ κατάρτιση τοῦ Νικηφόρου Θεοτόκη τὴν ὁποία ἀπέκτησε με τὶς ἀξιόλογες σπουδὲς του σὲ πανεπιστήμια τῆς Δύσης.

Για τὴν ευρεία χρῆση τῶν «Στοιχείων Μαθηματικῶν» τοῦ Θεοτόκη ὡς διδακτικὸ ἐγχειρίδιο, μᾶς πληροφορεῖ ὁ διευθυντὴς τῆς «Πατριαρχικῆς Ακαδημίας», Δωρόθεος ὁ Πρώιος, σὲ ἐπιστολὴ τοῦ πρὸς τοὺς ἀδελφούς Ζωσιμάδες στὶς 29 Νοεμβρίου τοῦ 1804, τοὺς πληροφορεῖ ὅτι στὴν τάξη τῶν Μαθηματικῶν δίδασκε τὰ Μαθηματικὰ τοῦ Νικηφόρου Θεοτόκη, ἐκδόσεις Ζωσιμάδων, καὶ μία Λογικὴ τοῦ ἀββᾶ Γενουνηνσιού.⁵⁴²

Γνωρίζουμε ἀκόμα ὅτι τὸ 1804, οἱ ἀδελφοὶ Ζωσιμάδες ἐστειλαν εἰς τὸν Δωρόθεο Πρώιο 49 σῶματα τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Θεοτόκη χάριν τῶν μαθητῶν τῆς Μεγάλῃς τοῦ Γένους Σχολῆς⁵⁴³. ἀπὸ τὰ σῶματα αὐτά, τὰ 8, ἐστάλησαν στὴν Σχολὴ τῶν Κυδωνιῶν.

Κάποια ἀντίτυπα τῶν «Στοιχείων» εἶχαν σταλεῖ, τὸ 1802 στὴν Ελασσόνα καὶ τὸ 1803 στὴν Τσαρίτσανη καὶ στ' Ἀμπελάκια.⁵⁴⁴

⁵³⁹ Ιώσηπος Μοισιόδακας, «Απολογία», σελ. 43.

⁵⁴⁰ ο. α. σελ. 222

⁵⁴¹ Κ. Μ. Κούμας, «Ιστορία τῶν ἀνθρωπίνων πράξεων», τόμος ΙΒ', σελ. 564

⁵⁴² Εράνισμα. Κώδις περιέχων τὰς ἀντιγραφὰς τῶν ἐπιστολῶν, ψηφισμάτων, ἐπιταγμάτων, αἰτημάτων, ὧν ἐπιστέλλει καὶ δέχεται τὸ ἐν Βυζαντίῳ μέγα καὶ κοινόν τοῦ Γένους Μουσείον ἐπὶ Σχολαρχίας Δωροθέου Πρώιου, ΠΕΦΣΚ, τόμος ΙΓ' (1878-79) σελ. 21 (Γ. Γριτσόπουλος, «Πατριαρχικὴ Μεγάλῃ τοῦ Γένους Σχολή», τόμος Β', ἐν Αθήναις 1996 σελ. 85)

⁵⁴³ ο. α. σελ. 85

Τα «Στοιχεία Μαθηματικών» του Θεοτόκη αποτελούσαν την βασική και αξεπέραστη βιβλιογραφία για πάρα πολλά χρόνια. Με την ίδρυση της Ιονίου Ακαδημίας και την διδασκαλία και το έργο του Ι. Καραντινού, η μαθηματική παιδεία στην Ελλάδα εισέρχεται στη σύγχρονη εποχή.

Από την παραπάνω παράθεση των απόψεων λογίων οι οποίοι ήταν σύγχρονοι ή και μεταγενέστεροι των Μεθόδιου Ανθρακίτη, Μπαλάνου Βασιλόπουλου και Νικηφόρου Θεοτόκη, απόψεις που αφορούν στο επιστημονικό κύρος των τριών Ελλήνων δασκάλων και στην αξιολόγηση του έργου τους, καθώς και από την ευρεία διακίνηση των έργων αυτών στα σχολεία του υπόδουλου αλλά και του παροικιακού ελληνισμού, συμπεραίνουμε, ότι, **δια μέσου της διδασκαλίας, τα έργα αυτά, συνέβαλλαν καθοριστικά στην διαμόρφωση της ελληνικής μαθηματικής σκέψης και κάλυψαν τις εκπαιδευτικές ανάγκες του έθνους στον τομέα της μαθηματικής επιστήμης μέχρι την Ελληνική Επανάσταση.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην σημαντική βελτίωση του βιοτικού επιπέδου του ελληνικού λαού, το οποίο προσδιορίζεται από τις συνθήκες διαβίωσης, διατροφής, εργασίας και του εισοδήματός του, συνέβαλλε σημαντικά η Μαθηματική επιστήμη. Καθοριστική υπήρξε επίσης η συμβολή των Μαθηματικών και γενικότερα των Φυσικών επιστημών στην πνευματική ανάταση και πολιτιστική ανέλιξη της αναγεννώμενης ελληνικής εθνότητας, με την διαμόρφωση μιας ελεύθερης σκέψης, η οποία, γεμάτη θάρρος, οδήγησε το έθνος μέχρι τον Αγώνα.

Οι δάσκαλοι των Μαθηματικών και γενικότερα των Επιστημών είχαν βαθειά συναίσθηση για την κοινωνική αποστολή της επιστήμης. Γνωρίζοντας τα αίτια που προκάλεσαν αλλά και εκείνα που διαιωνίζουν την πνευματικά και οικονομικά καθυστερημένη ελληνική κοινωνία αφ' ενός, και αφ' ετέρου τις θετικές επιπτώσεις της μαθηματικής επιστήμης στην σκέψη και στην ζωή, επιχείρησαν, -όσο και όπως αυτό ήταν δυνατόν- με την διδασκαλία των Μαθηματικών στα σχολεία του κατεχόμενου ελληνικού χώρου, να επέμβουν καθοριστικά στην διαμόρφωση μιας θετικής σκέψης απαλλαγμένης από τις προλήψεις και τις δεισιδαιμονίες που ταλάνιζαν την περίοδο εκείνη τον υπόδουλο λαό.

Οι φορείς των ιδεών του νεοελληνικού διαφωτισμού δεν επεδίωξαν μόνο την διάδοση της Μαθηματικής επιστήμης, αλλά και την εφαρμογή της στην ζωή. Η ηθική τους ευθύνη, που ερχόταν από την γνώση ότι η επιστήμη οδηγεί το ανθρώπινο πνεύμα από την αμάθεια και την πρόληψη στην διαμόρφωση μιας ελεύθερης σκέψης, με όλα τα θετικά της επακόλουθα, τους δημιούργησε το χρέος να πάρουν ενεργό μέρος στα κοινωνικά ζητήματα.

Στην αποστολή τους βρέθηκαν αντιμέτωποι με τον θρησκευτικό φανατισμό και την άρνηση της αξίας της επιστημονικής μεθόδου από τους συντηρητικούς κύκλους του

⁵⁴⁴ Ιωάννου Οικονόμου Λαρισαίου (1783-1842)- «Επιστολαί διαφόρων», επιστολές 62, 69 και 86. (Γιάννης Καράς, *Οι φυσικές θετικές επιστήμες στον ελληνικό 18^ο αιώνα*, εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα, 1977, σελ 29)

Πατριαρχείου, οι οποίοι, στις περισσότερες περιπτώσεις προσπάθησαν να εμφανίσουν την επιστήμη σαν πηγή διαφθοράς και καταστροφής που δεν έχει αξία για την γνώση της ζωής και του κόσμου.

Με την εφαρμογή των Μαθηματικών και των άλλων θετικών επιστημών βελτιώθηκαν σημαντικά οι άθλιες συνθήκες διαβίωσης του σκληρά δοκιμαζόμενου λαού. Οι επιστήμες επέδρασαν γόνιμα στην καθυστερημένη και με βραδείς ρυθμούς εξελισσόμενη αγροτική οικονομία, στην αγροτική ανάπτυξη, την ανάπτυξη της βιοτεχνίας και την αύξηση της παραγωγικής δραστηριότητας, με συνέπεια, την καθοριστική για την αναγέννηση και την απελευθέρωση του έθνους, ανάπτυξη του εμπορίου.

Οι πνευματικοί άνθρωποι της εποχής ηγήθηκαν του αγωνιζόμενου έθνους και πολέμησαν με αυτοθυσία τις γνωστές αιτίες του χαμηλού μορφωτικού επιπέδου των συμπατριωτών τους οι οποίες ανάγονται στο γενικότερο οικονομικοκοινωνικό πλαίσιο.

Η τροχιά που διέγραψαν οι επιστήμες στον ελληνικό πνευματικό χώρο, είναι ενδεικτική για την εκσυγχρονιστική στάθμη της παιδείας και κατ' επέκταση της ελληνικής κοινωνίας των χρόνων της δουλείας. Ο ρυθμός της αποδοχής την οποία είχε από το κοινωνικό και εκπαιδευτικό κατεστημένο της εποχής, η διδασκαλία των Μαθηματικών καθώς και ο ρυθμός της εισαγωγής των επιστημονικών μαθημάτων (Μαθηματικά, Φυσική, Χημεία, Βιολογία) στα ελληνικά σχολεία του κατεχόμενου ελληνικού χώρου, ταυτίζεται με τον ρυθμό εκσυγχρονισμού της ελληνικής κοινωνίας κατά την περίοδο της οθωμανικής κυριαρχίας.

5.1 Τα συμπεράσματα τα οποία προκύπτουν από την μελέτη και σύγκριση των έργων «Λογαριαστική», «Οδός Μαθηματικής» και «Στοιχεία Μαθηματικών».

Ένας από τους στόχους της παρούσας έρευνας ήταν η εξαγωγή συμπερασμάτων για το επιστημονικό επίπεδο των μαθηματικών έργων τα οποία κυκλοφόρησαν διαδοχικά ή και ταυτόχρονα στον ελληνικό πνευματικό ορίζοντα την εποχή της τουρκοκρατίας. ή, για να γίνουμε σαφέστεροι, θέλαμε να παρακολουθήσουμε τον τρόπο εξέλιξης του επιπέδου των μαθηματικών έργων με την πάροδο των αιώνων της δουλείας καθώς και να διερευνήσουμε τους λόγους (κοινωνικοοικονομικούς) οι οποίοι συνέβαλλαν στην εξέλιξη αυτή.

Θέλαμε επίσης να διαπιστώσουμε εάν και κατά πόσο το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης των Ελλήνων την εποχή της δουλείας εκφράζονταν μέσα από τα έργα αυτά και σε ποιο βαθμό το περιεχόμενό τους αφομοιώθηκε και επηρέασε την σκέψη και κατ' επέκταση την ζωή τους.

Από την μελέτη μας, διαπιστώσαμε, ότι η σχέση της εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης του υπόδουλου ελληνισμού και του επιπέδου των μαθηματικών έργων τα οποία κυκλοφόρησαν την εποχή της δουλείας, είναι αμφίδρομη. Η μαθηματική σκέψη από την εμβρυακή μορφή της εξελίσσονταν μέσα από την σπουδή των έργων αυτών και στην συνέχεια, η εξελιγμένη μαθηματική σκέψη, μπορούσε να ανταποκριθεί στην μελέτη των έργων με ολοένα υψηλότερου επιπέδου περιεχόμενο τα οποία γράφονταν από τους λόγιους-δασκάλους του Γένους.

Η επιλογή των προς σύγκριση έργων δεν έγινε τυχαία. Επιλέχτηκαν τρία έργα τα οποία «αγκάλιασαν» χρονικά όλο σχεδόν το διάστημα της δουλείας.

5.1.1 Η «Λογαριαστική»

Το πρώτο από αυτά, η «Λογαριαστική» του Εμμανουήλ Γλυζώνιου, είναι ένα λαϊκό βιβλίο πρακτικής Αριθμητικής που τυπώθηκε και κυκλοφόρησε για πρώτη φορά το 1568, την πιο μελανή περίοδο της πνευματικής ζωής του τόπου. Με το περιεχόμενο του βιβλίου του, ο συγγραφέας, απευθύνεται στον απλό, τον αγράμματο λαό. περιγράφει βήμα προς βήμα τις στοιχειώδεις διαδικασίες εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων και διαφόρων μεθόδων της αριθμητικής, καθώς και τις λύσεις μεγάλου εύρους προβλημάτων.

Τα ποικίλης φύσης προβλήματα τα οποία αφορούν σε δανεισμούς ποσών, ανταλλαγές και πωλήσεις προϊόντων, μετρήσεις, μετατροπές νομισμάτων, συναιτερισμούς, κληρονομίες κ. ά., κάνουν προφανή τον στόχο του συγγραφέα. Να διευκολύνει τον ραγιά στις συναλλαγές της καθημερινής του ζωής. Ο ίδιος ο συγγραφέας χαρακτηρίζει το έργο πολύτιμο βοήθημα σε όσους ασχολούνται με το εμπόριο. το εμπόριο όμως του οποίου οι απαιτήσεις περιορίζονται σε απλές καθημερινές συναλλαγές.

Το περιεχόμενο του έργου, με το οποίο καλύπτονται οι απαραίτητες γνώσεις για την άσκηση του εμπορίου της εποχής, μας δίνει ταυτόχρονα και μία εικόνα για τις ανάγκες του εμπορίου καθώς και το επίπεδο στο οποίο αυτό διεξάγονταν στον υπόδουλο ελληνικό χώρο: καθημερινές δΟΣΟΛΗΨΕΙΣ.

Δηλαδή, αγορές και πωλήσεις προϊόντων, δανεισμοί ποσών, υπολογισμοί κέρδους από συμφωνίες «συντροφιών» (συνεταιρισμών), κ.ά.

Το βιβλίο αυτό, το οποίο εκφράζει τις ανάγκες της ελληνικής κοινωνίας στα μέσα του 16^{ου} αιώνα -μιας κλειστής καθυστερημένης αγροτικής κοινωνίας με περιορισμένη παραγωγή-, σε καμμία περίπτωση δεν μπορούσε να καλύψει τις ανάγκες του εμπορίου έτσι όπως αυτό αναπτύχθηκε και άνθισε αργότερα μετά τα μέσα του 17^{ου} αιώνα. Τα εμπορικά εγχειρίδια και η εμπορική εγκυκλοπαίδεια «Κερδώς Ερμήης» τα οποία κάλυπταν τις εμπορευματικές συναλλαγές του 18^{ου} αιώνα δεν είχαν καμμία σχέση με την «απλοϊκή» Αριθμητική του Γλυζώνιου.

Ο Γλυζώνιος, γνωρίζοντας καλά την αμάθεια των συμπατριωτών του, με το έργο του, απευθύνεται σε λαό που γνωρίζει μόνο ανάγνωση και γραφή. Ο στόχος του, όπως προκύπτει από την μελέτη του έργου του, είναι, να μπορεί οποιοσδήποτε να κατανοήσει τα κείμενα και να εφαρμόζει τις διαδικασίες που προτείνονται σ' αυτά, αρκεί να μπορεί να διαβάζει και να γράφει.

Η εντυπωσιακή αποδοχή του βιβλίου και ο μεγάλος αριθμός των επανεκδόσεών του, (δεκαενέα επανεκδόσεις μέσα στα 250 χρόνια της κυκλοφορίας του) δείχνει ότι ο συγγραφέας πέτυχε τον στόχο του. Έδωσε ένα πολύτιμο -για την εποχή- βοήθημα «στα χέρια» του εξαθλιωμένου λαού. Μια πρακτική αριθμητική «άνευ διδασκάλου» κατάλληλη για μια στοιχειώδη μαθηματική αγωγή.

Η ευρεία κυκλοφορία και οι συνεχείς επανεκδόσεις της «Λογαριαστικής» ακόμα και όταν υψηλού επιπέδου μαθηματικά έργα έκαιναν την εμφάνισή τους στο εκπαιδευτικό στερέωμα του ελληνισμού, δείχνει ακόμα, ότι παρά την ανοδικά εξελικτική πορεία της παιδείας και την αισθητή βελτίωση του πνευματικού επιπέδου του λαού κυρίως μετά τα μέσα του 18^{ου} αιώνα, τα μαθηματικά έργα υψηλού επιπέδου απευθύνονταν στους «λίγους». Το μεγαλύτερο μέρος του ελληνικού πληθυσμού εξακολουθούσε να έχει την βασική μαθηματική παιδεία και οι ανάγκες του να καλύπτονται από πρακτικές Αριθμητικές όπως αυτή του Χιώτη λόγιου.

Παρ' όλο που το βιβλίο του Γλυζώνιου είναι ένα εκλαϊκευμένο βιβλίο πρακτικής Αριθμητικής, εν τούτοις, η «Λογαριαστική», χρησιμοποιήθηκε και ως σχολικό εγχειρίδιο και μάλιστα στο «Φλαγγιανό Κολλέγιο» της Βενετίας στο οποίο το επίπεδο των παρεχόμενων σπουδών ήταν υψηλό. Μία πιθανή αιτία ήταν και η έλλειψη έντυπων ελληνικών μαθηματικών έργων υψηλού περιεχομένου την εποχή αυτή, αφού αργότερα, σύμφωνα με γραπτές μαρτυρίες, η «Οδός Μαθηματικής» του Μεθόδιου Ανθρακίτη αποτελούσε το βασικό διδακτικό βιβλίο των Μαθηματικών στο «Φλαγγίνιο».

5.1.2 Η «Οδός Μαθηματικής»

Το δεύτερο έργο, η «Οδός Μαθηματικής» του Μεθόδιου Ανθρακίτη, εκδόθηκε λίγο μετά τον θάνατό του στην Βενετία, το 1749, από τον μαθητή του Μπαλάνο Βασιλόπουλο. Η επιλογή του συγκεκριμένου έργου, δεν έγινε μόνο με κριτήριο την εποχή της έκδοσής του. Ήγινε κυρίως γιατί το περιεχόμενό του διδάχτηκε για πρώτη φορά την εποχή που η μαθηματική παιδεία του ελληνισμού βρίσκονταν ακόμα σε εμβρυώδη μορφή, σαράντα χρόνια πριν από την έκδοσή του, το 1708, όταν ο Ανθρακίτης ανέλαβε την διεύθυνση στο «Φροντιστήριο» της Καστοριάς.

Αν και ο Ηπειρώτης λόγιος άφορίστηκε και το έργο του παραδόθηκε στην πυρά, εν τούτοις η συμβολή του στην διάδοση της μαθηματικής επιστήμης την εποχή της τουρκοκρατίας, είναι ανεκτίμητη. τον δρόμο που άνοιξε με την εισαγωγή και την διδασκαλία των Μαθηματικών στα σχολεία του τουρκοκρατούμενου ελληνισμού, ακολούθησαν και άλλοι δάσκαλοι.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα, ο καλύτερος από τους μαθητές του, ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος, ο οποίος εκτός από την έκδοση της «Οδού» συνέβαλε στην καλλιέργεια της Μαθηματικής επιστήμης διδάσκοντας τριάντα επτά χρόνια στην «Μπαλαναία Σχολή», μέχρι τον θάνατό του, εκείνα τα οποία είχε συγκεντώσει από τις παραδόσεις του δασκάλου του. Την διδασκαλία των Μαθηματικών στην «Μπαλαναία» συνέχισε και ο γιός του Βασιλόπουλου, Κοσμάς, ο οποίος δίδαξε σαράντα επτά χρόνια επίσης μέχρι τον θάνατό του. Με τον ίδιο τρόπο οι μαθητές των δασκάλων αυτών, δάσκαλοι και οι ίδιοι άλλων σχολείων στην συνέχεια, διέδιδαν και συντελούσαν στην εξάπλωση της μαθηματικής επιστήμης.

Το αξιόλογο ογκώδες τρίτομο έργο ακολούθησε την έκδοση της «Λογαριαστικής», η οποία από το 1568, ήταν σχεδόν το αποκλειστικό έντυπο έργο με μαθηματικό περιεχόμενο που κυκλοφορούσε στις τουρκοκρατούμενες ελληνικές χώρες και αποτελούσε την κυριότερη πηγή μαθηματικών γνώσεων του λαού.

Η έκδοση της «Οδού», αποτέλεσε ένα πολύ σημαντικό γεγονός στα εκπαιδευτικά δρώμενα της εποχής. Το «ξάφνιασμα» που προκάλεσε η εμφάνιση αυτού του επιβλητικού μαθηματικού έργου ήταν αναμενόμενο. Η στοιχειώδης μαθηματική σκέψη έτσι όπως είχε διαμορφωθεί από τις πρακτικές αριθμητικές, ήταν απaráσκευη για να επεξεργαστεί και να κατανοήσει το υψηλό -πάντα σε σχέση με την εποχή του- επίπεδο περιεχόμενο του έργου. Έργα μεγάλων Ελλήνων Μαθηματικών της αρχαιότητας (του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη, του Απολλώνιου, του Διόφαντου, του Θεοδοσίου) παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά στον ελληνικό πνευματικό χώρο με το περιεχόμενο της «Οδού».

Το άλμα που έπρεπε να κάνει η μαθηματική σκέψη για να καλύψει την «απόσταση» ανάμεσα στην «Λογαριαστική» και στην «Οδό Μαθηματικής» ήταν μεγάλο. Φαίνεται όμως ότι ανταποκρίθηκε θετικά. Σε αυτό βοήθησε και η έμφυτη φιλομάθεια του

λαού. Η πιο σίγουρη διαβεβαίωση γι' αυτό προέρχεται από τον ίδιο τον Μπαλάνο. Συγκεκριμένα, ο Μπαλάνος, στον πρόλογο του έργου, μας πληροφορεί ότι ο Ανθρακίτης «την του εν Καστορία φροντιστηρίου δεχθείς επιστασίαν» σε πολλούς από τους μαθητές του «τον εις την μαθηματικήν εξεύκασον έρωτα», βεβαιώνοντας μας για την θετική αποδοχή του έργου από την ελληνική σκέψη και την αφομοίωση του περιεχομένου της «Οδού» από τους μαθητές του.

5.1.3 Τα «Στοιχεία Μαθηματικών».

Το τρίτο και τελευταίο τρίτομο έργο της μελέτης μας, τα «Στοιχεία Μαθηματικών» του Νικηφόρου Θεοτόκη, τυπώθηκε για πρώτη φορά στην Μόσχα το 1798 με δαπάνη των φιλογενών αδερφών Ζωσιμά και περιέχει τα βιβλία I έως VI, XI και XII των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, τα «Αρχιμήδεια» θεωρήματα, τα «Κωνικά» του Απολλωνίου, και τα «Περί την Άλγεβρα».

Με την λεπτομερή μελέτη και εξέταση που κάναμε στα δύο έργα⁵⁴⁵ για να εντοπίσουμε τις διαφορές στο περιεχόμενό τους και να διερευνήσουμε στην συνέχεια τους στόχους συγγραφής του καθ' ενός, καταλήξαμε στα εξής συμπεράσματα:

1). Οι συγγραφείς τους με τις εκδόσεις της «Οδού Μαθηματικής» και των «Στοιχείων Μαθηματικών» επιχείρησαν να καλύψουν ανάγκες της παιδείας, δηλαδή, τα έργα αυτά γράφτηκαν κυρίως για εκπαιδευτικούς σκοπούς:

- για να χρησιμοποιηθούν σαν διδακτικά εγχειρίδια για τους μαθητές των Ελληνικών σχολείων και βοηθήματα για τους δασκάλους που δίδασκαν Μαθηματικά, και,
- να αποτελέσουν πρότυπα για την μελλοντική συγγραφή άλλων μαθηματικών έργων.

Μέσα από την έρευνά μας προκύπτει ότι οι λόγιοι – δάσκαλοι των επιστημών επεδίωξαν να επιτύχουν την διάδοση και καλλιέργεια της Μαθηματικής επιστήμης, μέσω της εκπαίδευσης. Οι μαθητές που διδάχτηκαν Μαθηματικά, γίνονταν στην συνέχεια δάσκαλοι των Μαθηματικών άλλων Σχολών και με τον τρόπο αυτό εξακτινώθηκε η διδασκαλία του μαθήματος στα σχολεία του ελληνισμού.

2). Οι διαφορές στο περιεχόμενο των έργων, κατά την γνώμη μας οφείλονται **κυρίως** στις διαφορετικές «απαιτήσεις» της ελληνικής πνευματικής κοινωνίας έτσι όπως διαμορφώθηκαν εξ' αιτίας της χρονικής απόστασης των δύο εκδόσεων.

Το περιεχόμενο της «Οδού» στην χειρόγραφη μορφή του διδάχτηκε την εποχή που η μαθηματική παιδεία στην Ελλάδα ήταν η στοιχειώδης. Ήταν επόμενο λοιπόν, το έργο, - το οποίο προοριζονταν για να χρησιμεύσει ως σχολικό εγχειρίδιο-, να είναι κυρίως προσαρμοσμένο στο επίπεδο της μαθηματικής παιδείας της εποχής.

Με το αξιόλογο ογκώδες τρίτομο έργο της «Οδού», παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά συστηματικά στον ελληνικό πνευματικό χώρο, γνώσεις και πνευματικά επιτεύγματα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, εφαρμογές των τύπων της Γεωμετρίας και της Τριγωνομετρίας (επιπέδου και σφαιρικής) στην Αστρονομία, καθώς

⁵⁴⁵ Ως προς το περιεχόμενό τους συγκρίνουμε μεταξύ τους μόνο τα δύο αυτά έργα γιατί η «Λογαριαστική» με καθένα από τα έργα αυτά δεν είναι συγκρίσιμα.

και η χρήση των γεωμετρικών οργάνων στην Μηκομετρία, Υψομετρία, Γεωδεσία, Χωρογραφία, Στερεομετρία και Κούλομετρία.

Απουσιάζουν όμως από το έργο οι νεώτεροι κλαδοί των Μαθηματικών (η Αναλυτική Γεωμετρία του Καρτέσιου, ο Απειροστικός Λογισμός), τα οποία εισάγονται αργότερα στον ελλαδικό χώρο από τον Ν. Θεοτόκη

Το πιθανότερο είναι, ότι ο Ανθρακίτης, άριστος παιδαγωγός και δάσκαλος όπως φάνηκε μέσα από τα κείμενά του, γνωρίζοντας το χαμηλό επίπεδο της μαθηματικής παιδείας στα σχολεία του υπόδουλου ελληνικού χώρου, έκρινε ότι δεν είχε ακόμα δημιουργηθεί το κατάλληλο μαθηματικό εκπαιδευτικό υπόστρωμα για την εισαγωγή της διδασκαλίας των σύγχρονων κλάδων των Μαθηματικών.

Το αξιόλογο έργο του Νικηφόρου Θεοτόκη ακόμα και στην χειρόγραφη μορφή του είναι μεταγενέστερο. Πενήντα χρόνια περίπου απέχουν οι εκδόσεις των δύο έργων. Από το 1749 έως το 1798. Μέσα στο διάστημα αυτό η κατάσταση της μαθηματικής παιδείας στην Ελλάδα έχει βελτιωθεί αισθητά.

Οι νέες πνευματικές ανάγκες οι οποίες είχαν προκύψει στον υπόδουλο ελληνικό χώρο με την εισαγωγή και άλλων επιστημών μέσα στο διάστημα αυτό, (για παράδειγμα η μελέτη της φυσικής του Θεοτόκη που εκδόθηκε 32 χρόνια πριν από την έκδοση των Μαθηματικών του, προϋπέθετε γνώσεις ανώτερων μαθηματικών), δημιούργησαν την ανάγκη της εισαγωγής και νέων σύγχρονων για την εποχή κλάδων των Μαθηματικών.

Αρα είναι επόμενο ο Θεοτόκης να έγραψε ένα έργο προσαρμοσμένο στις νεοδημιουργηθείσες ανάγκες των επιστημών.

Το έργο «Στοιχεία Μαθηματικών» περιλαμβάνει την «Υψηλότερα Γεωμετρία», δηλαδή την Αναλυτική Γεωμετρία η οποία δεν περιέχεται στην «Οδό Μαθηματικής» του Ανθρακίτη.

Επίσης, με το σύγγραμά του, ο Θεοτόκης, εισάγει για πρώτη φορά στην ελληνική μαθηματική παιδεία του τουρκοκρατούμενου ελληνισμού, τον μηχανισμό του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, «την καλουμένη των απείρων μεθόδου».

Με την γνώση και κατανόηση των εννοιών αυτών, ο αναγνώστης μπορεί να ανταποκριθεί στην μελέτη επιστημονικών έργων για τα οποία είναι απαραίτητη η χρήση της παραγωγού και του ολοκληρώματος.

Τελικά, ο συγγραφέας των «Στοιχείων Μαθηματικών» έδωσε ένα έργο σχετικά προσαρμοσμένο στις απαιτήσεις των καιρών. δηλαδή στην εξέλιξη της φυσικής, μαθηματικής σκέψης όπως αυτή ελάμβανε χώρα με την πάροδο του χρόνου στον ελληνικό πνευματικό χώρο την εποχή της δουλείας.

Με τις διαφορές που εντοπίσαμε με την σύγκριση του περιεχομένου των δύο έργων, έγινε προφανές ότι οι στόχοι συγγραφής τους, καθορίστηκαν από τον εκσυγχρονισμό της ελληνικής κοινωνίας την εποχή της δουλείας, ο οποίος με τη σειρά του εκφράστηκε και μέσα από το επίπεδο των μαθηματικών έργων της εποχής. Όπως ήδη έχει αναφερθεί πρόκειται για μια αμφίδρομη σχέση: ο ρυθμός εισαγωγής και διδασκαλίας των Μαθηματικών στα σχολεία του ελληνισμού αποτελεί την στάθμη του κοινωνικού εκσυγχρονισμού, ο οποίος στη συνέχεια καθορίζει την στάθμη του επιπέδου των Μαθηματικών τα οποία διδάσκονται στα σχολεία της υπόδουλης χώρας.

5.2 Τα συμπεράσματα για τον χρόνο της εισαγωγής των Μαθηματικών στις Σχολές του ελληνισμού των τουρκοκρατούμενων ελληνικών χωρών.

Επειδή η παιδεία του ελληνισμού στην τουρκοκρατία δεν είχε ενιαίο φορέα ούτε και εποπτεύουσα αρχή, αλλά τα εκπαιδευτικά προγράμματα της κάθε σχολής διαμορφώνονταν με βάση αφ' ενός μεν τον ηθικοπλαστικό χαρακτήρα της παιδείας τον οποίο επέβαλε η Εκκλησία και αφ' ετέρου τον ιδρυτή της Σχολής αλλά και τον εκάστοτε σχολάρχη, δεν είναι δυνατόν να σχηματισθεί μια εντελώς πλήρης και λεπτομερής εικόνα για τα εκπαιδευτικά ζητήματα.

Τα συμπεράσματα τα οποία μας δίνει η έρευνα που έχουμε κάνει για τα διδασκόμενα μαθήματα των σχολείων των τουρκοκρατούμενων ελληνικών χωρών είναι περιορισμένα και δεν μας διαφωτίζουν επαρκώς ώστε να καταλήξουμε σε αυστηρές γενικεύσεις, αφού ακόμα και εάν κάποιες γραπτές μαρτυρίες που έχουν διασωθεί μας πληροφορούν για την διδασκόμενη ύλη και τους στόχους της διδασκαλίας σε κάποιο σχολείο, η έλλειψη μαρτυριών για κάποια άλλα μας αφαιρεί την δυνατότητα της συγκριτικής μελέτης σε ό,τι αφορά στην παρεχόμενη από τα άλλα σχολεία παιδεία.

Επειδή οι πληροφορίες που μας δίνουν οι διασωθείσες μαρτυρίες δεν επαρκούν για να καταλήξουμε σε γενικά συμπεράσματα, οι κάθε μορφής ενδείξεις γίνονται αντικείμενο της μελέτης μας, προκειμένου να διαμορφώσουμε μια όσο το δυνατόν αντιπροσωπευτικότερη εικόνα για την κατανομή των μαθημάτων, την διάρθρωση της ύλης, την διάρκεια των σπουδών και τις μεθόδους διδασκαλίας των διαφόρων Σχολών.

Τα μοναδικά ίσως γενικά συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε είναι σε ό,τι αφορά την διδασκαλία των ελληνικών μαθημάτων. Δηλαδή το βέβαιο είναι, ότι στα σχολεία τα οποία ιδρύθηκαν στις κατεχόμενες ελληνικές περιοχές από τις αρχές του του 16^{ου} έως τα τέλη του 18^{ου} αιώνα, το επίκεντρο της διδασκαλίας αποτελούσαν τα Ελληνικά και Θεολογικά μαθήματα. Η κύρια δραστηριότητα της σχολικής τάξης ήταν η συνεχής και επίμονη διδασκαλία της Γραμματικής και του Συντακτικού και η ερμηνεία ποικίλων κειμένων επιλεγμένα τόσο από την θύραθεν όσο και από την χριστιανική γραμματεία.

Πολύ περισσότερο, σε ό,τι αφορά την εισαγωγή και την διδασκαλία των *Μαθηματικών* στα σχολεία των τουρκοκρατούμενων ελληνικών χωρών καθώς και τις διδασκόμενες ενότητες, δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε γενικεύσεις.

Τα Μαθηματικά, όχι μόνο δεν ήταν ένα από τα καθιερωμένα μαθήματα στα διδακτικά προγράμματα των σχολείων, αλλά η εισαγωγή της διδασκαλίας τους στις Σχολές του ελληνισμού συνάντησε ποικίλες αντιδράσεις από μέρους των συντηρητικών κύκλων, οι οποίες εκδηλώνονταν με δυσaréσκεια, συκοφαντίες, φραστικές επιθέσεις προς τους δασκάλους των Μαθηματικών και κορυφώθηκαν σε κάποιες περιπτώσεις και με αφορισμούς των δασκάλων αυτών από την Εκκλησία.

Ο προσωποπαγής χαρακτήρας των ανώτερων σχολείων ο οποίος δημιουργούσε την ιδιαιτερότητα στο εκπαιδευτικό καθεστώς της κάθε σχολής, μας επέβαλε να ερευνήσουμε, - εκεί όπου μπορούσαμε να εντοπίσουμε γραπτές μαρτυρίες-, χωριστά για την κάθε σχολή, την «μεταχείριση» που είχαν τα Μαθηματικά, δηλαδή τον χρόνο της

εισαγωγής τους στα διδακτικά προγράμμάτα της, την περίοδο της καθιέρωσής τους σαν διδασκόμενο μάθημα, την «θέση» τους στα διδακτικά προγράμματα σε σχέση με τα υπόλοιπα μαθήματα.

Γραπτές ιστορικές μαρτυρίες (πατριαρχικά γράμματα, επιστολές λογίων, ιδρυτικά έγγραφα σχολών, διαθήκες ιδρυτών σχολείων, ηγεμονικά χρυσόβουλα) που αφορούν την Μεγάλη του Γένους Σχολή, την Αθωνιάδα, την Πατριάδα, την Μαρουτσαία Σχολή, την Σχολή του Γκιόνμα (Μπαλαναία Σχολή), την Σχολή της Δημητσάνας, την Ευαγγελική Σχολή της Σμύρνης μας επέτρεψαν να παρακολουθήσουμε την τροχιά που διέγραψε η διδασκαλία των Μαθηματικών σε κάποια από τα σημαντικότερα εκπαιδευτικά ιδρύματα του υπόδουλου ελληνισμού των οποίων η συμβολή στην πνευματική ανάταση του Γένους υπήρξε καθοριστική.

Η επιλογή των παραπάνω Σχολών είναι ενδεικτική. Τα εκπαιδευτικά δρώμενα των Σχολών αυτών μας διαφωτίζουν λίγο-πολύ και για τα «κρατούντα» σε άλλες Σχολές της τουρκοκρατίας και αποτελούν γενικότερα γνωρίσματα της εκπαιδευτικής κατάστασης του Γένους.

Η μελέτη μας περιορίστηκε σε Σχολές οι οποίες ιδρύθηκαν μέχρι τα τέλη του 18^{ου} αιώνα αφού τα λαμπρά εκπαιδευτικά καθιδρύματα του ελληνισμού, οι «νεωτεριστικές Σχολές» που ιδρύθηκαν ή και και κάποιες από τις παλιές που ανασυστήθηκαν μέσα στον 19^ο αιώνα, (Σχολή των Κυδωνιών, Φιλολογικό Γυμνάσιο της Σμύρνης, η Σχολή της Χίου κ.ά), λειτούργησαν με πρότυπα τις Ευρωπαϊκές Σχολές, και, στα ευρύτατα προγράμματα σπουδών τους, τα Μαθηματικά και γενικότερα οι επιστήμες, κατείχαν περίοπτη θέση και σε κάποιες περιπτώσεις αποτελούσαν τον κορμό των διδακτικών προγραμμάτων.

Από την έρευνά μας διαπιστώσαμε ότι η εισαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε κάποια Σχολή, δεν εξασφάλιζε και την καθιέρωση του μαθήματος στο διδακτικό πρόγραμμα της Σχολής αυτής.

Σε αρκετές περιπτώσεις, η πορεία της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην ίδια Σχολή, παρουσίαζε μεγάλες διακυμάνσεις. Αυτή η διαφορετική «μεταχείριση» την οποία είχαν τα Μαθηματικά οφείλονταν σε ένα σημαντικό ποσοστό στις εκσυγχρονιστικές τάσεις του εκάστοτε σχολάρχη. Όταν την διεύθυνση μιας Σχολής αναλάμβανε λόγιος – φορέας των νέων ιδεών, τα Μαθηματικά, αποτελούσαν ένα από τα διδασκόμενα μαθήματα. εάν στην συνέχεια τον διαδέχονταν συντηρητικός σχολάρχης, τα Μαθηματικά «εξοβελίζονταν» από το πρόγραμμα σπουδών της Σχολής.

Δεν ήταν σπάνιο το φαινόμενο, σε «παραδοσιακές» σχολές, δάσκαλοι- εκπρόσωποι του διαφωτισμού να αναγκάζονται από τους συντηρητικούς κύκλους να εγκαταλείψουν την διδασκαλία και στην συνέχεια, να εξοβελίζονται τα Μαθηματικά και οι άλλες «επιστήμες», από τα εκσυγχρονιστικά προγράμματα σπουδών τα οποία αυτοί είχαν κατ' αρχήν καταρτίσει.

Η συνοπτική παρουσίαση των συμπερασμάτων της μελέτης μας για την εισαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών στις προαναφερθείσες Σχολές είναι:

1). Πατριαρχική Ακαδημία

Τα Μαθηματικά εισάγονται για πρώτη φορά επίσημα από την Εκκλησία στο πρόγραμμα σπουδών της «Μεγάλης του Γένους Σχολής» με πατριαρχικό έγγραφο το οποίο εκδόθηκε από τον Πατριάρχη Σεραφείμ τον Β΄ του Ιανουάριου του 1759, δηλαδή λίγα χρόνια μετά τα μέσα του 18^{ου} αιώνα.

Ειδικά στην περίπτωση της Πατριαρχικής Ακαδημίας, η οποία ήταν το κατ' εξοχήν «συντηρητικό πνευματικό ίδρυμα» του ελληνισμού των χρόνων της δουλείας, τα Μαθηματικά, πριν καθιερωθούν σαν ένα από τα διδασκόμενα μαθήματα, πέρασαν μέσα από πολλές δοκιμασίες.

Στην περίοδο 1759 έως 1804 η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Σχολή δεν γίνεται συστηματικά αλλά κατά διαστήματα. Από την μελέτη της εκπαιδευτικής πορείας της «Πατριαρχικής Ακαδημίας» συμπεραίνουμε ότι την «θέση» των Μαθηματικών στα προγράμματα σπουδών της Σχολής, καθόριζαν κατά σειράν:

- Οι φιλοπρόοδες ή όχι απόψεις του εκάστοτε Πατριάρχη ο οποίος αποφάσιζε για το περιεχόμενο σπουδών και ρύθμιζε τον βαθμό εκσυγχρονισμού των διδακτικών προγραμμάτων της Σχολής.
- Ο εκάστοτε διευθυντής της Σχολής ο οποίος παρά το συντηρητικό πνεύμα των Πατριαρχικών κύκλων και τον θεολογικό χαρακτήρα σπουδών της Πατριαρχικής Ακαδημίας χάραζε τις κατευθύνσεις στα προγράμματα σπουδών και είχε την δυνατότητα να συμβάλλει στην καλλιέργεια των «επιστημών» και στην διάχυση των νέων ιδεών.
- Τα έσοδα για την συντήρηση και λειτουργία της Σχολής τα οποία δεν ήταν σταθερά αλλά παρέχονταν από διαφορετικές κάθε φορά πηγές (εισφορές από ηγεμόνες ή πλούσιους φιλογενείς εμπόρους καθώς και έσοδα από εκκλησίες ή μοναστήρια). Η έλλειψη πόρων οδήγησε σε κάποιες περιπτώσεις την Πατριαρχική Σχολή σε παρακμή.

Από το 1804 μέχρι την Ελληνική Επανάσταση, δηλαδή μετά την μεταφορά της Πατριαρχικής Ακαδημίας στο Κουρούτσεσμε, τα προγράμματα των σπουδών της, εκσυγχρονίστηκαν σημαντικά με την εισαγωγή και την καθιέρωση της διδασκαλίας των «επιστημών». Δηλαδή, η καθιέρωση των Μαθηματικών σαν ένα από τα διδασκόμενα μαθήματα στην Σχολή, έγινε στις αρχές του 19^{ου} αιώνα.

2). Η Αθωνιάδα

Το χρονικό διάστημα, Δεκέμβριος 1749- Ιούλιος 1753, δηλαδή από το έτος της ίδρυσης της Αθωνιάδας μέχρι και την λήξη της σχολαρχίας του πρώτου διευθυντή της Σχολής, Νεόφυτου Κανσοκαλυβίτη, στην Αθωνιάδα, δεν διδάχτηκαν Μαθηματικά.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών εισάγεται από τον Ευγένιο Βούλγαρη το 1753 με επίσημο έγγραφο το οποίο εκδόθηκε τον Ιούλιο του ίδιου έτους, από τον Πατριάρχη

Κύριλλο τον Ε'. Τα Μαθηματικά διδάχτηκαν ανελλιπώς στην Αθωνιάδα, όχι μόνο κατά την διάρκεια της σχολαρχίας του Βούλγαρη, (1753-1759), αλλά και κατά την διετή σχολαρχία του διαδόχου του στην διεύθυνση της Σχολής, Νικολάου Ζερζούλη (1759-1961).

Από τα χειρόγραφα έργα του, «Εισαγωγή εις τα αριθμητικά τοις κατά την Αθωνιάδα ακαδημίαν των επιστημών ακροωμένοις συντόμως σχεδιασθείσα»,⁵⁴⁶ «Στοιχεία γεωμετρίας», «Στοιχεία αναλύσεως», «Στοιχεία μαθηματικών» τα οποία καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών ενοτήτων, δίδασκε τους μαθητές της Αθωνιάδας στο μάθημα των Μαθηματικών, ο Ευγένιος Βούλγαρης.

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, όπως μαρτυρεί ο Ιώσηπος Μοισιόδοκας⁵⁴⁷, περιλαμβάνονταν στις διδασκόμενες ενότητες της Γεωμετρίας.

3). Η Σχολή της Δημητσάνας

Μέσα στο πρώτο σύντομο χρονικό διάστημα που λειτούργησε η Σχολή, δηλαδή από το έτος της ίδρυσής της, το 1769, μέχρι την διακοπή της λειτουργίας της το 1770, δεν διδάχτηκαν τα Μαθηματικά.

Από το 1781, έτος της ανασύστασης της Σχολής και για 32 χρόνια, μέχρι το 1812, δηλαδή κατά την διάρκεια της σχολαρχίας του Αγάπιου, η οποία θεωρείται η γονιμότερη περίοδος της Σχολής, διδάχτηκαν και Μαθηματικά (θεωρητική και πρακτική Αριθμητική, Ευκλείδεια Γεωμετρία) όπως φαίνεται από τους τους υπ' αριθμόν 50 και 72 χειρόγραφους κώδικες της βιβλιοθήκης της Σχολής της Δημητσάνας.⁵⁴⁸

4). Η Σχολή της Πάτμου

Από την ίδρυση της Σχολής, δηλαδή από το 1713, μέχρι την ανάληψη της διεύθυνσής της από τον Παΐσιο Καραπατά το 1809, τα Μαθηματικά δεν διδάχτηκαν στην Πατμιάδα.

Τα Μαθηματικά στην Πατμιάδα διδάχτηκαν κατά την διάρκεια της σχολαρχίας του Καραπατά από το 1809 έως το 1818.

⁵⁴⁶ Γιάννης Καρράς, «Οι επιστήμες στην τουρκοκρατία» τόμος Α', 1992, σελ 60

⁵⁴⁷ I.E.E, Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία, (περίοδος 1669-1821), σελ. 327.

⁵⁴⁸ Τάσου Αθ. Γριτσόπουλου, Κατάλογος των χειρογράφων κωδίκων της βιβλιοθήκης της Σχολής Δημητσάνης, ανατύπωσης εκ' των ΚΒ' και ΚΔ' τόμων της ελετηρίδος της εταιρείας Βυζαντινών Σπουδών, εν Αθήναις 1954. σελ. 40, 50

Ο υπ' αριθμόν κώδικας 50

Χαρτ. Διαστ. 0,21×0,15. Αιών ΙΘ'. Φ. 106

Πρακτική αριθμητική μετά τινων κεφαλαίων θεωρητικής αριθμητικής.

Ο υπ' αριθμόν κώδικας 72

Χαρτ. Διαστ. 0,21×0,166. Αιών ΙΗ'. Φ. 184.

1. (φ. 4α). Γεωμετρία μετά σχημάτων.

Φ. 29α: Τέλος του α' βιβλίου αψοθσεπτεβρίου ιη ημέρα Τετάρτη ηρξάμεθα της Γεωμετρίας.

2. (φ150α). Πρακτική αριθμητική.

Επομένως στην περίοδο λειτουργίας της Πατριάδας, από την ίδρυση της, το 1713, μέχρι την διακοπή της λειτουργίας της από την επανάσταση, δηλαδή μέσα σε έναν αιώνα λειτουργίας της, τα Μαθηματικά διδάχτηκαν περίπου για μια δεκαετία, (1809-1818).

5). Η Ευαγγελική Σχολή της Σμύρνης

Η παρεχόμενη παιδεία από την Ευαγγελική Σχολή ήταν θεολογικού χαρακτήρα. Τα Μαθηματικά και οι επιστήμες δεν περιλαμβάνονταν στα διδασκόμενα μαθήματα.

Από το έτος της ίδρυσής της το 1733 έως το 1819 που συγχωνεύτηκε με το «Φιλολογικό Γυμνάσιο» της Σμύρνης τα Μαθηματικά διδάχτηκαν στην Ευαγγελική Σχολή για έξι μήνες από 21 Φεβρουαρίου μέχρι 21 Αυγούστου του 1811.

Μετά την συγχώνευση των δύο Σχολών το 1819 και μέχρι την ελληνική επανάσταση στην νέα Σχολή, με το όνομα «Ευαγγελική», διδάχτηκαν τα Μαθηματικά από τον εξέχοντα λόγιο και ικανό μαθηματικό Βενιαμίν τον Λέσβιο.

Οι σχολές των Ιωαννίνων

6). Επιφάνειος Σχολή – Μαρουτσαία Σχολή – Καπλαναία Σχολή.

Σύμφωνα με οικονομικά στοιχεία της Σχολής τα οποία αφορούν σε μισθοδοσίες δασκάλων εικάζεται ότι ο Μπαλάνος δίδαξε στην «Επιφάνειο» από 1^η Αυγούστου 1719 μέχρι τον Σεπτέμβριο του 1725.

Μετά την αποχώρηση του Μπαλάνου, στην Επιφάνειο, δίδαξε ο Μεθόδιος Ανθρακίτης μέχρι το 1736.

Επομένως στο διάστημα από 1719 έως 1736 στην «Σχολή του Επιφανείου» διδάχτηκαν τα Μαθηματικά.

Η σχολή του Επιφανείου μετά την ανασύστασή της ονομάστηκε «Μαρουτσαία».

Τα Μαθηματικά διδάχτηκαν στην Μαρουτσαία κατά την περίοδο της σχολαρχίας του Ευγένιου Βούλγαρη, 1742 έως 1746 και 1750 έως 1753.

Μετά από 40 χρόνια διακοπής της λειτουργίας της, ο νέος διευθυντής της Σχολής Αθανάσιος Ψαλίδας, δίδαξε Μαθηματικά την περίοδο 1795- 1797.

Η «Μαρουτσαία Σχολή», μετά την ανασύστασή της, το 1805, μετονομάστηκε σε «Καπλαναία».

Από το 1805 μέχρι το 1820, επί σχολαρχίας του Αθανάσιου Ψαλίδα, τα Μαθηματικά, κατείχαν περίοπτη θέση στο διδακτικό πρόγραμμα της «Καπλαναίας Σχολής».

7). Η Σχολή του Γκιόνμα ή «Γκιούμειος Σχολή» (Μπαλαναία Σχολή)

Από το έτος της ίδρυσης της μέχρι το 1715, δεν έχουμε μαρτυρίες για διδασκαλία των Μαθηματικών στην «Γκιούμειο Σχολή».

Το 1715 έγινε η εισαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην Σχολή από τον Μεθόδιο Ανθρακίτη ο οποίος δίδαξε μέχρι το 1723.

Στην συνέχεια, ο νέος διευθυντής της Σχολής Μπαλάνος Βασιλόπουλος, δίδαξε Μαθηματικά για 37 χρόνια, από το 1723 έως το 1760.

Ο γιός του Βασιλόπουλου, Κοσμάς, ο οποίος τον διαδέχτηκε στην διεύθυνση της Σχολής, δίδαξε Μαθηματικά για 47 χρόνια από το 1760 έως το 1807.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Σχολή μετά το 1807 αρχικά υποβαθμίστηκε και τελικά καταργήθηκε λίγα μόλις χρόνια πριν από τον αγώνα.

Συμπερασματικά καταλήγουμε:

Η ιδιαιτερότητα του εκπαιδευτικού καθεστώτος της κάθε Σχολής, η οποία, όπως έχει ήδη αναφερθεί, οφείλονταν στον προσωποπαγή χαρακτήρα των ανώτερων σχολείων του τουρκοκρατούμενου ελληνισμού, δεν μας επιτρέπει και εδώ να καταλήξουμε «αυστηρά» σε γενικεύσεις.

Από την μελέτη που έγινε και αφορά στην εισαγωγή αρχικά και στην καθιέρωση στην συνέχεια της διδασκαλίας των Μαθηματικών στις ανώτερες Σχολές, καταλήγουμε στο ότι: σε γενικές γραμμές, η εισαγωγή της Μαθηματικής επιστήμης στα σχολεία του ελλαδικού χώρου, άρχισε να γενικεύεται μετά τα μέσα του 18^{ου} αιώνα και η διδασκαλία των Μαθηματικών άρχισε να καθιερώνεται στις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Βέβαια, αυτό δεν σημαίνει ότι τα παραπάνω χρονικά όρια καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις των Σχολών. Στα χρονικά αυτά όρια δεν εντάσσονται δύο κατηγορίες: οι «αυστηρού θεολογικού χαρακτήρα» Σχολές καθώς και εκείνες στις οποίες οι ιδρυτές τους, τους είχαν προσδώσει εκσυγχρονιστικό χαρακτήρα. και οι δύο περιπτώσεις, είναι ακραίες.

Στην πρώτη περίπτωση, βρίσκονται οι Σχολές στις οποίες η παρεχόμενη παιδεία ήταν «αυστηρά» θεολογικού χαρακτήρα. σε όποιες από αυτές έγινε η εισαγωγή των Μαθηματικών στα διδακτικά τους προγράμματα, η διδασκαλία του μαθήματος περιορίστηκε σε ελάχιστο χρονικό διάστημα σε σχέση με την περίοδο λειτουργίας τους.

Δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις είναι η «Ευαγγελική Σχολή» της Σμύρνης και η «Σχολή της Πάτμου».

Μέσα στα πρώτα 86 χρόνια λειτουργίας της (1733-1819), στην «Ευαγγελική Σχολή», τα Μαθηματικά δίδαχτηκαν για έξι μήνες (21 Φεβρουαρίου μέχρι 21 Αυγούστου του 1811).

Στην Σχολή της Πάτμου, μέσα στον ένα αιώνα της λειτουργίας της (1713-1821), τα Μαθηματικά δίδαχτηκαν περίπου για μια δεκαετία (1809-1818).

Στο άλλο άκρο βρίσκονται οι σχολές των οποίων τα ιδρυτικά έγγραφα τους εξασφάλιζαν «εκσυγχρονιστικό χαρακτήρα». Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν

οι Σχολές των Ιωαννίνων

Ενδεικτικά αναφέρουμε, ότι, στην «Γκιούμειο Σχολή», από το 1715 που έγινε η εισαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών από τον Μεθόδιο Ανθρακίτη, τα Μαθηματικά, διδάχτηκαν ανελλιπώς για 92 χρόνια, μέχρι το 1807. στην «Γκιούμειο», η εισαγωγή των Μαθηματικών ταυτίστηκε και με την καθιέρωσή τους στα διδακτικά προγράμματα της Σχολής.

Οπωσδήποτε, η διάδοση της μαθηματικής επιστήμης άρχισε να υλοποιείται οργανωμένα μετά τα μέσα του 18^{ου} αιώνα, όταν οι κοινωνικές και πνευματικές συνθήκες του ελληνισμού άρχιζαν να ωριμάζουν και να διαμορφώνονται με τέτοιο τρόπο, ώστε η καταπιεσμένη από την θρησκοληψία και εγκλωβισμένη από τις δεισιδαιμονίες ελληνική σκέψη να κατανοήσει την αξία της επιστημονικής γνώσης και να αποζητήσει «καταφύγιο» στην επιστήμη για την λύτρωση και την αποδέσμευση της από την κάθε μορφής καταπίεση και τυραννία

5.3 Η συμβολή της μαθηματικής επιστήμης στην βελτίωση των συνθηκών ζωής.

Ο ρόλος των Μαθηματικών την περίοδο της δουλείας, δεν περιορίστηκε σε αυτόν της θεωρητικής επιστήμης, αλλά κυρίως, μιας επιστήμης, η οποία «εξυπηρέτησε σ' όλη την περίοδο της τουρκοκρατίας και ιδίως κατά τα προεπαναστατικά χρόνια, τις ανάγκες της τεχνικής, της οικονομίας, γενικότερα της κοινωνίας συμβάλλοντας παράλληλα στην ανάπτυξη του επιστημονικού πνεύματος στον ελληνικό χώρο».

5.3.1 Μαθηματικά- καθημερινή ζωή

Οι εκλαϊκευμένες πρακτικές Αριθμητικές (τα Μαθηματικά του λαού) διευκόλυναν σημαντικά πολλές δραστηριότητες της καθημερινής ζωής του ελληνικού πληθυσμού.

1). Τις πάσης φύσης καθημερινές οικονομικές συναλλαγές: αγοραπωλησίες ειδών διατροφής και άλλων προϊόντων καθημερινής χρήσης, ανταλλαγές προϊόντων διαφορετικής αξίας, μετατροπές μονάδων απαραίτητες στις κάθε μορφής οικονομικές δοσοληψίες που αφορούσαν στο εμπόριο, το εμπόριο όμως του οποίου οι απαιτήσεις περιορίζονταν σε απλές συναλλαγές της καθημερινής ζωής.

2). Τους δανεισμούς χρηματικών ποσών και τον υπολογισμό του κέρδους ή της ζημίας κάθε ενός ατόμου, ανάλογα με το ποσόν με το οποίο συμμετείχε στην σύσταση μιας «συντροφίας»⁵⁴⁹

5.3.2 Μαθηματικά – τεχνικές εφαρμογές.

Η Γεωμετρία την οποία περιέχουν τα δύο τρίτομα μνημειώδη έργα «Οδός

⁵⁴⁹ «συντροφία»: συνεταιρισμός, δύο τριών ή τεσσάρων ατόμων τα οποία συμμετέχουν σε μία οικονομική συμφωνία με διαφορετικά κατά κανόνα χρηματικά ποσά. Το πρόβλημα που προκύπτει, είναι πως θα καταμεριστεί το κέρδος ή και η ζημία ανάλογα με το χρηματικό ποσό με το οποίο συμμετέχει ο καθένας.

Μαθηματικής» και «Στοιχεία Μαθηματικών», έχει ευρύτατη εφαρμογή σε πρακτικής φύσης θέματα. Οι γεωμετρικές κατασκευές παρουσιάζονται για πρώτη φορά θεωρητικά θεμελιωμένες και συνοδεύονται με άψογα σε ακρίβεια σχήματα.

Οι συγγραφείς των δύο έργων φρόντισαν να «εφοδιάσουν» με τις απαραίτητες γνώσεις τους αναγνώστες, καθιστώντας τους ικανούς να δίνουν λύσεις σε ποικίλης μορφής προβλήματα.

1). Σε μετρήσεις επιφανειών γης, απαραίτητες για αγοραπωλησίες ή και ανταλλαγές κτημάτων.

Στην ενότητα «*Περί καταμετρήσεως των ευθυγράμμων σχημάτων*»⁵⁵⁰ των «Στοιχείων Μαθηματικών» και την αντίστοιχη «*Περί επιπεδομετρίας*»⁵⁵¹ της «Οδού Μαθηματικής» περιγράφονται λεπτομερώς με συγκεκριμένα προβλήματα, οι θεωρητικά θεμελιωμένες διαδικασίες υπολογισμού των επιφανειών (εμβαδών) ορθογωνίου, παραλληλογράμου, τριγώνου, τραπεζίου και γενικά πολυγώνου.

2). Σε υπολογισμούς αποστάσεων μεταξύ δύο τόπων στην περίπτωση που οι τόποι αυτοί:

- Είναι προσιτοί από την θέση του μετρούντος.
- Είναι απρόσιτοι από την θέση του μετρούντος, και τέλος
- ο ένας να είναι προσιτός και ο άλλος απρόσιτος.

Στην ενότητα «*Περί Μηκομετρίας*»⁵⁵² της Ο.Μ. και στο 2^ο βιβλίο της Τριγωνομετρίας, στην ενότητα «*Χρήσις των Θεωρημάτων τε και Προβλημάτων*»⁵⁵³ των Σ.Μ., περιγράφονται και θεμελιώνονται θεωρητικά με την εφαρμογή μεθόδων της τριγωνομετρίας, υπολογισμοί αποστάσεων των παραπάνω περιπτώσεων.

3). Σε υπολογισμούς υψών αντικειμένων, προσιτών ή απροσίτων από την θέση του μετρούντος τα οποία βρίσκονται σε οριζόντιο ή σε κεκλιμένο επίπεδο καθώς και την εύρεση της γωνίας κλίσεως αυτών.

Στην ενότητα «*Περί Υψομετρίας*» της Ο.Μ.⁵⁵⁴ καλύπτονται θεωρητικά θεμελιωμένες όλες οι παραπάνω περιπτώσεις μέτρησης υψών. Περιγράφονται ακόμα οι διαδικασίες μέτρησης της «οριζοντικής γραμμής» των βουνών καθώς και του βάθους πηγαδιών.

4). Στην τέχνη της καταγραφής γαιογραφικών και χωρογραφικών χαρτών (τοπογραφία). στην ιχνογραφία των αγρών, των οικιών, των πόλεων κ.ά., με μικρά αλλά όμοια και ομοίως κείμενα προς τα μεγάλα σχήματα από έμπειρους στην ιχνογραφική τέχνη. δηλαδή την καταγραφή σε χάρτη της θέσης των διαφόρων σχημάτων επιπέδων και στερεών ενός τόπου, με τέτοιο τρόπο ώστε αναλόγως να διατηρούν την μεταξύ τους σχέση.

⁵⁵⁰ Νικηφόρος Θεοτόκης, «Στοιχείων Μαθηματικών εκ παλαιών και νεωτέρων συνερανισθέντων...», τόμος 1^{ος}, σελ. 67

⁵⁵¹ ο.α. τόμος 2^{ος}, σελ. 360

⁵⁵² ο.α. τόμος 2^{ος}, σελ. 338

⁵⁵³ ο.α. τόμος 2^{ος}, σελ. 74

⁵⁵⁴ ο.α. τόμος 2^{ος}, σελ. 345

Στις ενότητες «Περί Ιχθυογραφίας» και «Περί χωρογραφίας ή Τοπογραφίας»⁵⁵⁵ της Ο.Μ., περιγράφεται αναλυτικά, με την εφαρμογή των προτάσεων της ομοιότητας των σχημάτων, η αποτύπωση πάνω σε χαρτί, διαφόρων χωρίων, όπως για παράδειγμα αγρών, κήπων, πόλεων κ.ά., με τέτοιο τρόπο, ώστε αυτά να παριστάνονται με μικρά όμοια και ομοίως κείμενα σχήματα και συγχρόνως να διατηρούν αναλόγως την μεταξύ τους σχέση.

5). Στον υπολογισμό της χωρητικότητας διαφόρων δοχείων.

Στην ενότητα «Περί Κοιλομετρίας» της Ο.Μ., υπολογίζεται η χωρητικότητα δοχείων κυλινδρικών, κωνοειδών, ωοειδών κ.ά.

Οι παραπάνω περιγραφές των διαφόρων μετρήσεων, δεν θα μπορούσαν να εφαρμοστούν στην πράξη, χωρίς τα κατάλληλα όργανα.

Στις πολύ σημαντικές ενότητες «Περί κατασκευής γεωμετρικών οργάνων»⁵⁵⁶ και «Περί χρήσεως γεωμετρικών οργάνων»⁵⁵⁷ της Ο.Μ., περιγράφεται ο τρόπος κατασκευής αλλά και της χρήσης των οργάνων μέτρησης τα οποία είναι απαραίτητα για τους παραπάνω υπολογισμούς.

Στις δέκα (10) πρώτες από τις είκοσι (20) προτάσεις του 3^{ου} βιβλίου του 2^{ου} τόμου της Γεωμετρίας της Ο.Μ., περιγράφεται η κατασκευή με συνήθη υλικά (ξύλο, ορείχαλκο ή από άλλη στερεά και ευκατέργαστο ουσία) αναλογικού διαβήτη, κλίμακας, τεταρτημόριου, ημικυκλίου (μοιρογνωμονίου), γνώμονα, σταυρού, τετραγώνου γεωμετρικού, κανόνα, ράβδου για μέτρηση χωρητικότητας των «αγγείων», και στις υπόλοιπες δέκα, αντίστοιχα, η χρήση των παραπάνω γεωμετρικών οργάνων στις διάφορες μετρήσεις.

Δηλαδή, τα κείμενα της «Οδού» όχι μόνο περιγράφουν στον αναγνώστη την διαδικασία για ποικίλες μετρήσεις, αλλά, του δείχνουν και τον τρόπο με τον οποίο θα κατασκευάσει τα απαιτούμενα για τις μετρήσεις όργανα.

5.3.3 Μαθηματικά- Σφαιρική τέχνη

Οι ιδιότητες των κωνικών τομών του δεύτερου τόμου των «Στοιχείων Μαθηματικών» έχουν ευρεία εφαρμογή σε πολλούς τομείς.

Στην ενότητα «Περί χρήσεως της Παραβολής»⁵⁵⁸ αναφέρονται:

1). Οι ιδιότητες της παραβολής με την βοήθεια των οποίων ιδρύονται οι κανόνες της ονομαζόμενης «Σφαιρικής τέχνης»⁵⁵⁹, δηλαδή της τέχνης του «κατευθύνειν» τις εξωθούμενες σφαίρες των πυροβόλων σε συγκεκριμένους στόχους.

2). Οι ιδιότητα της παραβολής να συγκεντρώνει, σε μεταλλικά παραβολικά κάτοπτρα τα οποία έχουν τοποθετηθεί απέναντι στον ήλιο, τις ηλιακές ακτίνες στην εστία, στην οποία

⁵⁵⁵ ο α τόμος 2^{ος}, σελ. 369, 371

⁵⁵⁶ ο.α τόμος 2^{ος}, σελ. 314

⁵⁵⁷ ο.α τόμος 2^{ος}, σελ. 329

⁵⁵⁸ ο.α τόμος 2^{ος}, σελ.122

⁵⁵⁹ ο.α. σελ. 123.

αναπτύσσεται τόσο μεγάλη θερμότητα ώστε να αναφλέγονται και να κατακαίονται τα σώματα τα οποία είναι τοποθετημένα σε αυτήν.

3). Στην θέση που πρέπει να έχουν μεταξύ τους δύο μεταλλικά παραβολικά κάτοπτρα τοποθετημένα απέναντι στον ήλιο, ώστε να είναι δυνατόν η καυστική (φλεκτική) δύναμη η οποία παράγεται από τις ηλιακές ακτίνες να επεκτείνεται και να κατακαίει συγκεκριμένους στόχους.

4). Στον τρόπο με τον οποίο πρέπει να τοποθετηθούν σε κατάλληλη μεταξύ τους θέση και απέναντι στον ήλιο παραβολικός σίφωνας και μικρό παραβολικό κυρτό κάτοπτρο, ώστε η «πυρώδης» δύναμη η οποία παράγεται από τις ηλιακές ακτίνες να κατευθύνεται σε διάφορες διευθύνσεις.

5). Στις ιδιότητες της παραβολής με την εφαρμογή των οποίων κατασκευάζονται παραβολικές σάλπιγγες, μέσω των οποίων, ο ήχος, διαδίδεται αναλλοίωτος σε μεγάλες αποστάσεις.

5.4.4 Μαθηματικά- Ακουστική-Οπτική

Στην ενότητα «*Περί χρήσεως της Παραβολής*» αναφέρονται ακόμα οι ιδιότητες της παραβολής με την βοήθεια των οποίων κατασκευάζονται ακουστικά για τους βαρήκοους. Στις ενότητες «*Περί της εν τοις Οπτικοίς χρήσεως της Υπερβολής*»⁵⁶⁰ και «*Περί της εν τοις Οπτικοίς χρήσεως των της Ελλείψεως συμπτωμάτων*»⁵⁶¹ των «*Στοιχείων Μαθηματικών*», περιγράφεται η εφαρμογή των ιδιοτήτων της έλλειψης και της υπερβολής στην Οπτική.

⁵⁶⁰ ο.α τόμος 2^{ος}, σελ. 209

⁵⁶¹ ο.α τόμος 2^{ος}, σελ 242

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΕΝΤΥΠΑ ΚΑΙ ΕΡΓΑ ΠΡΟΕΠΑΝΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ

Ανθρακίτης Μεθόδιος. *Οδός Μαθηματικής, ήτοι σειρά βαθμηδόν προϊούσα, περιεκτική των κατ' είδος κυριωτέρων της μαθήσεως πραγματειών, οίων. Των Στοιχείων του Ευκλείδου. Σφαιρικών κατὰ Θεοδόσιον. Γεωμετρίας θεωρητικής και πρακτικής. Τριγωνομετρίας. Του περί κρικωτής σφαίρας κατὰ Πρόκλον. Του περί χρήσεως σφαιρών. Αστρολαβίου. Γεωγραφίας και Οπτικής, τόμοι τρεις, Βενετία 1749*

Γλυζώνιος Μανουήλ. *Βιβλίον πρόχειρον τοις πάσι περιέχον την τε πρακτικήν Αριθμητικήν, ή μάλλον εντείν την λογαριαστικήν....Βενετία 1568.*

Ευκλείδη Στοιχεία. σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή επεξηγήσεις και σχολιασμό, τόμοι τρεις, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. Αθήνα 2001.

Θεοτόκης Νικηφόρος. *Στοιχεία Μαθηματικών εκ παλαιών και νεωτέρων συνερανισθέντα, εν τω της κοινότητος τυπογραφείο, εν Μόσχα τόμοι τρεις, 1798-1799.*

Θεοτόκης Νικηφόρος. *Στοιχεία Φυσικής εκ των νεωτέρων συνερανισθέντα τόμοι 2, Λειψία 1766-1767*

Κούμας Κωνσταντίνος. *Ιστορία των ανθρωπίνων πράξεων από των αρχαιοτάτων χρόνων έως των ημερών μας εκ παλαιών αστυθισθείσαι και τα νεώτερα εξ' αρίστων Γερμανών ιστοριογράφων ελευθέρως μεταφρασθείσαι, τόμος 12^{ος}, Βιέννη 1832.*

Κούμας Κωνσταντίνος. *Σειρά στοιχειώδους των Μαθηματικών και φυσικών πραγματειών εκ' διαφόρων συγγραφέων συλλεχθεισών εν Βιέννη της Αυστρίας 1807.*

Μοισιόδακας Ιώσηπος. *Απολογία, επιμέλεια Άλκης Αγγέλου, εκδόσεις Ερμής, Αθήνα 1976.*

Μπαλάνος Βασιλόπουλος. *Αριθμητική, Βενετία 1802.*

Ρήγα Φεραίου. *Φυσικής απάνθισμα δια τους αγχίνους και φιλομαθείς Έλληνας, εκ της Γερμανικής και Γαλλικής διαλέκτου ερανισθέν, εν Βιέννη, 1790.*

ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ ΚΑΙ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αγγέλου Άλκης. *Το κρυφό σχολειό*, εκδόσεις Εστία, Αθήνα 1997

Αγγέλου Άλκης. *Των Φώτων*, εκδόσεις Ερμής, Αθήνα 2000.

Αγγέλου Άλκης. *Των Φώτων Β', όψεις του νεοελληνικού Διαφωτισμού*, εκδόσεις μορφωτικό ίδρυμα εθνικής τράπεζας, Αθήνα 1999.

Άμαντος Κωνσταντίνος, *Χιακά Χρονικά τεύχος Α',* Αθήνα 1911.

Ασδραχάς Σπύρος. *Μηχανισμοί της αγροτικής οικονομίας στην τουρκοκρατία (ΙΕ'-ΙΣΤ' αιώνας)*, εκδόσεις Θεμέλιο, Αθήνα 1978.

Ασδραχάς Σπύρος. *Οικονομία και νοοτροπίες*, εκδόσεις Ερμής, Αθήνα 1988.

Ασδραχάς Σπύρος. *Ελληνική κοινωνία και οικονομία ιθ' και ιθ' αϊ*, εκδόσεις Ερμής, Αθήνα 1988.

Βακαλόπουλος Απόστολος. *Η θέση των Ελλήνων και οι δοκιμασίες τους υπό τους Τούρκους*, Ιστορία του ελληνικού Έθνους, Ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία, (περίοδος 1453-1668), Εκδοτική Αθηνών.

Βακαλόπουλος Απόστολος. *νέα ελληνική ιστορία, 1204-1985*, εκδόσεις Βάνιας, Θεσσαλονίκη 2004

Bell E. *οι Μαθηματικοί*, τόμος 1^{ος}, μετφρ. Μανώλης Μαγειρόπουλος, πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Απρίλιος 1992.

Bernard Lewis. *Η ανάδυση της σύγχρονης Τουρκίας, τόμος Ι*, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα 2001.

Bernard Lewis. *Η ανάδυση της σύγχρονης Τουρκίας, τόμος ΙΙ*, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα 2001.

Βλαχάκης Γιώργος. *Ο Νικηφόρος Θεοτόκης και η παιδεία στο θεσσαλικό χώρο.* Ένωση Ελλήνων Φυσικών. Πρακτικά συνεδρίου 22-23-24 Μαρτίου 1985.

Βλαχάκης Γεώργιος. *Η «Φυσική» του Νικηφόρου Θεοτόκη σταθμός στην επιστημονική σκέψη τον 18^ο αιώνα*, διδακτορική διατριβή, Αθήνα 1990.

Bond J.D. *"The Development of Trigonometric methods down to the close of the XV century"*, Isis 1921

Γεδεών Μανουήλ. *Η πνευματική κίνησης του Τένους κατά τον ΙΗ' και ΙΘ' αιώνα*, εκδόσεις Ερμής, Αθήνα 1999.

Γεδεών Μανουήλ. *Χρονικά της Πατριαρχικής Ακαδημίας*, εν Κωνσταντινουπόλει έτος αωπγ'.

Γεδεών Μανουήλ. *Τράμματα εκ της Ανδριανουπόλεως*, Κωνσταντινούπολις 1913.

Γιαννικόπουλος Αναστάσιος. *Η εκπαίδευση στην περίοδο της τουρκοκρατίας*, εκδόσεις Γρηγόρη, Αθήνα 2001.

Γριτσόπουλος Τάσος. *Πατριαρχική μεγάλη του Τένους Σχολή*, τόμοι Α', Β', εν Αθήναις 1966-191.

Γριτσόπουλος Τάσος. *Σχολή Δημητσάνης*, εν Αθήναις 1962.

Δημάκος Γεώργιος. *Οικονομικά της εκπαίδευσης*, Αθήνα 2004.

Δημαράς Κ. *Νεοελληνικός Διαφωτισμός*, εκδόσεις Ερμής, Αθήνα 1993.

Δημαράς Κ. *Ιστορικά φροντισματα Α' ο Διαφωτισμός και το κορύφωμά του*, εκδόσεις Πορεία, Αθήνα 1992.

Eknileddin Insanoglu. "*Taurimat oucesiue ve Taurimat Douemi Osmanlı Bilim ve Taurimat Douemi Osmanlı Bilim ve Egitim Anlayis*", Ankara 1992,

Εξαρχάκος Θεόδωρος. *Ιστορία των Μαθηματικών*, τόμος Α', *Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων*, Αθήνα 1997.

Εξαρχάκος Θεόδωρος. *Ιστορία των Μαθηματικών*, τόμος Β', *Τα Μαθηματικά των Ινδών και των Χινέζων*, Αθήνα 1999.

Εξαρχάκος Θεόδωρος. *Εισαγωγή στα Μαθηματικά*, τόμος Α' και Β', Αθήνα 1993.

Εξαρχάκος Θεόδωρος. *Ευκλείδης: Η ζωή και η δράση του*, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ, Αθήνα 2001.

Emin Jolalici. "*XIX yuryilve sonrasl osmanli Deuletinde Egitim ve Ogretim Kurumları*" σε Osmanli, том. 5, εκδόσεις Yeni Turkiye, Ankara 1999.

Ευαγγελίδης Τρύφωνας. *Η παιδεία επί τουρκοκρατίας*, τόμος 1^{ος}, Αθήνα 1936.

Ευαγγελίδης Τρύφωνας. *Η παιδεία επί τουρκοκρατίας*, τόμος 2^{ος}, Αθήνα 1936.

Feroz Ahmad. "*The making of modern Turkey*", by Routledge, London 1993

Grattan-Guinness I. *The age of trigonometry: Europe, 1540-1660. in the Rainbow of Mathematics. A History of Mathematical Sciences.* W.W Northon & Comrany. New York. London 1997

Ζαβίρας Γ. *Νέα Ελλάδα*, Αθήνα 1872.

Ζαχαρόπουλος Νίκος. *Η παιδεία στην τουρκοκρατία*, εκδόσεις Πουρνάρα, Θεσσαλονίκη 1994.

Ζιώγας Παναγιώτης. *Προβλήματα παιδείας του Ελληνισμού κατά τον πρώτο αιώνα της τουρκοκρατίας*, διδακτορική διατριβή, Θεσσαλονίκη 1982.

Heath. *Ιστορία των ελληνικών Μαθηματικών*, τόμοι I, II, μετάφραση Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ, Αθήνα 2001.

Henderson G. *Η αναβίωση του ελληνικού στοχασμού 1620-1830, η ελληνική φιλοσοφία στα χρόνια της τουρκοκρατίας*, μετάφραση Φ. Κ. Βώρου, Αθήνα 1994.

Ηλιού Ηλίας, *Η αξία της επιστημονικής μεθόδου και οι σύγχρονοι αρνητές της*, περιοδικό «Ανταίος», τόμος Α΄, Αύγουστος 1945.

Inalcik Halil. *Η Οθωμανική Αυτοκρατορία Η κλασσική εποχή, 1300-1600*, μετάφραση Μιχάλης Κοκολάκης, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, 1995.

Καραθανάσης Αθανάσιος. *Η Φλαγγίνιος Σχολή της Βενετίας*, εκδόσεις Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη 1986.

Καρράς Γιάννης. *Οι θετικές επιστήμες στον ελληνικό χώρο (15^{ος} -19^{ος} αιώνας)*, εκδόσεις Δαίδαλος.

Καρράς Γιάννης. *Η σημασία των Μαθηματικών στην ανάπτυξη της επιστημονικής κοινωνικής σκέψης κατά την περίοδο της νεοελληνικής αναγέννησης*, Ευκλείδης Γ΄, Ε.Μ.Ε. τόμος 11^{ος}, Αθήνα 1994.

Καρράς Γιάννης. *Οι επιστήμες στην τουρκοκρατία*, τόμος Α΄, τα Μαθηματικά, εκδόσεις Εστία, Αθήνα 1992.

Καρράς Γιάννης. *Οι φυσικές θετικές επιστήμες στον ελληνικό 18^ο αιώνα*, εκδόσεις Gutenderg, Αθήνα 1977

Κονδύλης Παναγιώτης. *Ο Νεοελληνικός Διαφωτισμός, οι φιλοσοφικές ιδέες*, εκδόσεις Θεμέλιο, Αθήνα 1988.

Κουρμαντζή Ελένη. *Ζωσιμάδες πνεύματος χορηγοί*, Ηπειρωτικά γράμματα.

Loria G. *Ιστορία των Μαθηματικών*, τόμοι I, II, III εκδόσεις E.M.E. 1971.

Μαλανδράκης Μ. *Πατριάς Σχολή*, εν Αθήναις 1911.

Λάμπρος Σπυρίδωνας. *Νέος Ελληνομνήμων*, τόμος 13^{ος}, Αθήνα 1916.

Mancosu P. *Aristotelian logic and Euclidean Mathematics*. Studies in the History and Philosophy of Science, Vol 23, 1992

Λεοντσίνης Γεώργιος. *Ζητήματα Νεότερης Ελληνικής Ιστορίας*, Αθήνα 2003.

Μέρτζιος Κ. *Τὸ ἐν Βενετία ηπειρωτικὸν ἀρχεῖον*, *Ηπειρωτικά Χρονικά*, Ιωάννινα 1936.

Μήλλας Ηρακλής. *Εικόνες Ελλήνων και Τούρκων*, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, Σεπτέμβριος 2001.

Μπαμπούνης Χ. *Η εκπαίδευση κατά την καποδιστριακή περίοδο. Βιοκητική οργάνωση και εκπαιδευτική λειτουργία*, εκδ. «Σ.ΩΒ», Αθήνα 1999.

Μπεκιάρογλου-Εξαδάκτυλου Αικατερίνη. *Οθωμανικά ναυπηγεία στον παραδοσιακό ελληνικό χώρο*, πολιτιστικό τεχνολογικό ίδρυμα ΕΤΒΑ.

Μυστακίδης Β. *Περί συμβολής εις την ιστορίαν των εν Ιωαννίνους σχολείων*, Παρνασσός, τόμος 1^{ος}

Osman Ergin. *Türkiye Maarif Tarihi*, τόμοι 1-2, Istanbul 1977

Παπαδόπουλος Στέφανος. *Επαναστατικές ζυμώσεις και αντιρροπίες των Ελλήνων κατά τα τέλη του 16^{ου} και τις αρχές του 17^{ου} αιώνα*, ΙΕΕ, ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία, (περίοδος 1453- 1668), Εκδοτική Αθηνών.

Παρανίκας Ματθαίος. *Σχεδιάσμα περί της εν τω ελληνικῷ ἔθνει καταστάσεως των γραμμάτων ἀπὸ ἀκλωσεως Κωνσταντινουπόλεως (1453) μέχρι των αρχῶν της εὐεστῶσης (18ῃ) εκατονταετηρίδος*, Κωνσταντινουπόλης 1867.

Παρανίκας Ματθαίος. *Ιστορία της Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης*, Αθήνα 1885

Πατρινέλης Χρίστος. *Η κατάσταση της παιδείας στις υπόδουλες ελληνικές χώρες*, ΙΕΕ, ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία, (περίοδος 1453- 1668), Εκδοτική Αθηνών.

Phili Ch. *About the Theory of Proportions exposed in the V Book of Euclid's Elements. Proceedings of the International Congress of the History and Philosophy of Sciences*. Unesco. Islamabad

Πούλος Ανδρέας. *Ελληνική μαθηματική βιβλιογραφία (1500-1900)*, συνοπτική ιστορία του

ελληνικού μαθηματικού βιβλίου, εκδόσεις Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Αθήνα 1988.

Robert Mautra. “*Les debus dela Question d’ Orient (1774-1839). Histoire de l’ Empire Otomman*” ekd. Fayard, 1989.

Rotman B. *Signifying Nothing: the Semiotics of zero*, London Mac Millan 1987.

Ρόκου Βασιλική. *Γιάννινα 17^{ος} αι -19^{ος} αι. Η βιοτεχνία της πόλης και η συγκυριακή της ανάπτυξη.* Ηπειρωτικά γράμματα, Γιάννινα 1944.

Σαρρής Νεοκλής. *Προεπαναστατική Ελλάδα και οσμανικό κράτος*, εκδόσεις Ηρόδοτος, Αθήνα 1993.

Σαρρής Νεοκλής. *Οσμανική πραγματικότητα*, τόμοι I, II εκδόσεις Αρσενίδης, Αθήνα 1990.

Σβορώνος Νίκος. *Επισκόπηση της νεοελληνικής ιστορίας*, εκδόσεις Θεμέλιο, Αθήνα 1994.

Σκαρβέλη-Νικολοπούλου Αγγελική. *Μαθηματάρια των ελληνικών σχολείων κατά την τουρκοκρατία, διδακτορική διατριβή*, εκδόσεις Σύλλογος προς διάδοσιν ωφελίμων Βιβλίων, Αθήνα 1993.

Σκλαβενίτης Τριαντάφυλλος. *Τα εμπορικά εγχειρίδια της Βενετοκρατίας και Τουρκοκρατίας και η εμπορική εγκυκλοπαίδεια του Νικολάου Πασιαδόπουλου*, εκδόσεις εταιρία μελέτης νέου ελληνισμού, Αθήνα 1990.

Σταμάτης Ευάγγελος. *Ιστορία των ελληνικών Μαθηματικών, Αριθμητικά- αι αρχαί της ελληνικής Γεωμετρίας*, Αθήνα 1980.

Σταμάτης Ευάγγελος. *Κριτική βυζαντινού βιβλίου Αριθμητικής*, Αθήνα 1965.

Στεφανίδης Μιχαήλ. *Αι φυσικαί επιστήμαι εν Ελλάδι προ της επανάστασεως*, Αθήναι 1926.

Στεφανίδης Μιχαήλ. *Εισαγωγή εις την ιστορία των φυσικών επιστημών*, Αθήνα 1938.

Swetz F. “*Capitalism and Arithmetic: The new Math. of the 15th century*” La Salle II, Open Court 1987.

Σωτηράκης Νικόλαος. *Μανουήλ Γλυζώνιος και Γωρόθεος Πρώιος*, ανάτυπον εκ της Χιακής επιθεωρήσεως, τεύχος 33^{ον}, 1973.

Taisbak C.M. *Coloured Quadraugles, A guide to the Tenth Book of Euclid’s Elements.* Museum Tusculanum Press. Copenhagen

Τερδήμου Μ. *Σύνταγμα ευσύνοπτον εις τας τέσσαρας μαθηματικάς επιστήμας, Αριθμητικήν,*

Μουσικήν, Γεωμετρίαν και Αστρονομίαν του Μ. Ψελλού, Ε.Μ.Ε. Ευκλείδης Γ', τόμος 11^{ος}, Αθήνα 1994.

Τσουκαλάς Κωνσταντίνος. *Εξάρτηση και αναπαραγωγή. ο κοινωνικός ρόλος των εκπαιδευτικών μηχανισμών στην Ελλάδα (1830-1922)*, εκδόσεις Θεμέλιο, Αθήνα 1977.

Witmer T.R. *The Great Art, or the Rules of Algebra*, Cambridge MIT Press 1968.

Φύλη Χριστίνα. *Τα Στοιχεία του Ευκλείδη, οι πραγματείες του Αρχιμήδη, τα Κωνικά του Απολλωνίου και οι πρώτες μεταφράσεις στη Βενετία. Οι απόηχοι. Διεθνές Συνέδριο Βυζάντιο, Βενετία και νεώτερος πολιτισμός. Ε.Ι.Ε., Αθήνα 2004*

Φύλη Χριστίνα. *Eugenios Voulgaris and his letter of introduction by Segner to Euler. Acta historiae rerum naturalium necnon technicorum New Series vol 5.* Prague 2001.

Φύλη Χριστίνα. *Μια προσπάθεια θεμελίωσης του διαφορικού λογισμού από τον Ιωάννη Καραντινό. Πρακτικά Συνεδρίου. Το αίτημα της επιστημονικής Έρευνας*, εκδ. Τροχαλία, Αθήνα 1997.

Φύλη Χριστίνα. *Η γεωμετρική θεώρηση της ύλης στον Τίμαιο. Ακαδημία Αθηνών. Φιλοσοφία*, Αθήνα 2002.

Χασιώτης Ιωάννης. *Η στάση των Ελλήνων απέναντι στους ξένους κυριάρχους, ΙΕΕ, ο ελληνισμός υπό ξένη κυριαρχία, (περίοδος 1453- 1668)*, Εκδοτική Αθηνών.

Χατζόπουλος Κωνσταντίνος. *Ελληνικά σχολεία στην περίοδο της οθωμανικής κυριαρχίας (1453-1821)*, εκδόσεις Βάνιας, Θεσσαλονίκη 1991.

Χρήστου Παναγιώτης. *Μεθόδιος Ανθρακίτης, βίος-δράσις- ανέκδοτα έργα, έκδοσις «Ηπειρωτικής Εστίας».* Ιωάννινα, 1953.

Ψημμένος Νίκος. *Η ελληνική φιλοσοφία από το 1453 ως το 1821, τόμος Β'.* εκδόσεις Γνώση, Αθήνα 1989.

